

ANÁLISIS DINÁMICO DE VIGAS COMPUESTAS LAMINADAS DE SECCIÓN I. CONSIDERACIÓN DE LA DEFORMABILIDAD DEL ALMA

Carlos Alberto Vera(*), Víctor Cortinez(*) (**) y Liberto Ercoli(*)(**)

(*) Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos.
Universidad Tecnológica Nacional (FRBB)
11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina
E-mail: cvera@frbb.utn.edu.ar

(**) CONICET, Argentina

Palabras Clave: vigas, pared delgada, vibraciones, deformabilidad del alma.

Resumen: En el presente trabajo se desarrolla un modelo teórico y computacional de vigas de pared delgadas laminadas de sección I construidas con materiales compuestos, teniendo en cuenta la influencia que pueden provocar para el caso dinámico la consideración del efecto de corte e inercia rotatoria y la deformabilidad del alma fuera de su propio plano. Para este último efecto, se sigue el modelo desarrollado por Hughes y Ma para sus estudios de pandeo torsional de vigas tipo I monosimétricas de material isótropo bajo la acción de cargas puntuales. El modelo matemático puede ser aplicado tanto a vigas de material isótropo como compuesto. Se desarrolla un nuevo elemento finito codificado a través de una rutina implementada bajo el entorno MATHEMATICA versión 4.0 y se efectúa un análisis paramétrico de los diversos efectos contemplados.

1 INTRODUCCIÓN

De la variedad de componentes estructurales que forman el campo de la ingeniería estructural, las vigas abiertas de pared delgada (VAPD) constituyen desde los inicios del presente siglo, un amplio e interesante campo de desarrollo debido a la variedad de uso de las mismas. Estos elementos estructurales presentan altas tensiones longitudinales cuando están sometidas a torsión debidas al alabeo torsional no uniforme. La teoría desarrollada por Timoshenko(1958) al igual que la de Vlasov(1961) fueron de las primeras que describieron el comportamiento de estos elementos estructurales construidos con materiales isótropos. Siguiendo el planteo realizado por Vlasov, Cortínez y Rossi(1998) desarrollaron una teoría más general para el tratamiento de las mismas, al contemplar en forma completa la flexibilidad por corte. A este efecto, le sigue el de considerar también la deformabilidad de la sección transversal fuera de su plano. Esto fue estudiado entre otros por Muller(1983) y Stephen(1986). Una extensión del trabajo de Stephen fue desarrollado por Cortínez, Piován y Filipich(1998). Por su parte Hughes y Ma(1996) proponen una forma de deformación de la sección transversal, para la cual consideran que la deformación del alma de la viga sigue la forma de polinomios de diferentes grados.

Pero desde hace ya unas tres décadas ha crecido el interés por el estudio del comportamiento de VAPD de materiales compuestos laminados ya que aportan amplias soluciones a la ingeniería en todas sus ramas, debido a las excelentes prestaciones estructurales que otorgan: alta relación rigidez – peso, alta resistencia mecánica y al desgaste, baja conductividad térmica, reducido mantenimiento de las piezas bajo peso, etc. Bauld y Tzeng (1984) realizaron una extensión del modelo de Vlasov para vigas laminadas, pero sin considerar los efectos de deformabilidad por corte. Si bien se dispone en la literatura un gran número de trabajos sobre VAPD laminadas que consideran este efecto (R. Chandra, A. Stemple and I. Chopra,1990; M. Floros, 1996; A. Ghorbanpoor and B. Omidvar, 1996; C. Kim and S. R. White, 1996; L. Librescu and O. Song, 1991), a conocimiento del autor no hay trabajos que simultáneamente consideren los efectos de la deformabilidad por corte y la deformabilidad de la sección fuera de su plano.

Bajo estas hipótesis, se presentará una teoría para VAPD con sección transversal en forma de I, y se validará a través del Método de los Elementos Finitos. Se centrará el estudio en la obtención de frecuencias naturales de vibración, y se realizarán estudios paramétricos que permitirán deducir el comportamiento dinámico para diferentes condiciones de vinculación y una variedad de disposiciones geométricas de los laminados.

2 TEORÍA

2.1 Hipótesis generales consideradas.

Se considera una viga de pared delgada de sección transversal tipo I monosimétrica, como se muestra en la figura 1 (a, b), con un sistema de referencia global $0(x, y, z)$ situado en el centro de corte de la misma definido según la teoría de Vlasov.

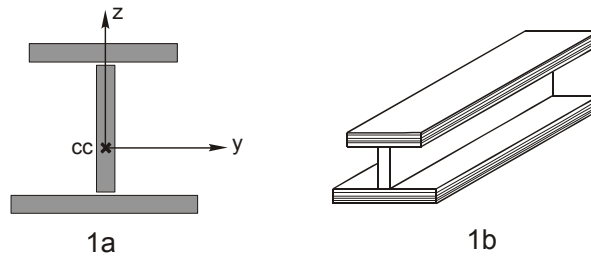


Figura 1 a y b. Modelo de viga I

La viga se encuentra constituida por el ensamble de tres placas laminadas (figura 2 a, b, c). Se supone que los laminados son totalmente elásticos, pudiéndose realizar el estudio de cada una de los laminados a través de la teoría de placas delgadas para materiales compuestos.

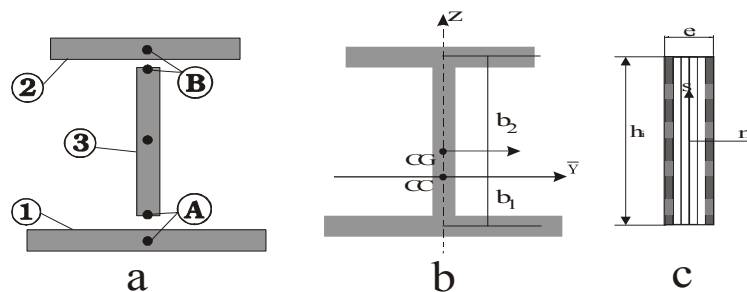


Figura 2 a, b, c. Ensamble de viga I

En lo que sigue se considera que el modelo cumple las siguientes hipótesis constitutivas: a) Cada laminado verifica un estado plano de tensiones; b) se consideran no nulos los siguientes esfuerzos de placa, referidos al sistema de referencia local (figura 3)

- N_x = Fuerza axial
- N_y = Fuerza perimetral
- N_{xy} = Fuerza cortante en el plano
- Q_y = Fuerza por unidad de longitud de corte interlaminar
- Q_x = Fuerza por unidad de corte transversa
- M_x = Momento flector
- M_y = Momento flector
- M_{xy} = Momento torsor

c) La longitud de una línea normal a la superficie media de la placa, permanecerá inalterada luego de la deformación ($\epsilon_{zz} \cong 0$). d) La totalidad de los esfuerzos N_i aplicados sobre la sección transversal será la suma de los esfuerzos en las alas y en el alma de la misma. Por ejemplo para el esfuerzo axial total se tendrá

$$N_x = N_x^1 + N_x^2 + N_x^3, \tag{1}$$

procediéndose de igual forma con los restantes esfuerzos.

2.2 Planteo general del problema.

La formulación del modelo de viga es la siguiente: a) la sección transversal no es infinitamente rígida en su plano, dado que se considera la distorsión del alma de la viga. Dicha distorsión es modelada con un polinomio de 3° grado; b) el comportamiento de cada segmento de la sección transversal será analizado de manera independiente uno del otro, ensamblándolos luego con los restantes a través de las correspondientes ecuaciones de compatibilidad geométrica; c) el origen de referencia de la sección transversal de la viga será el centro de corte de la misma, pero suponiéndola construida de material isótropo; d) se considerará un movimiento torsional de Saint - Venant en las alas; e) se considerarán dos movimientos flexionales en cada ala, en dos direcciones; f) El comportamiento flexional en ambas direcciones de c/u de los segmentos se analiza como una viga tipo Timoshenko.

2.3 Campo cinemático y deducción de las deformaciones específicas para cada segmento.

El campo cinemático considerará nueve grados de libertad para la sección transversal. De acuerdo al planteo general del problema descrito y teniendo en cuenta las ecuaciones que gobiernan la cinemática de las placas laminadas, para las placas que constituyen las alas se establece un campo cinemático referido a un sistema auxiliar $0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ubicado en el centroide de la sección transversal de cada placa. Se puede observar claramente que la dirección longitudinal "x" coincide con la dirección " \bar{x} ", por lo que desde ahora esa simplificación será sostenida en el desarrollo de las ecuaciones (figura 3)

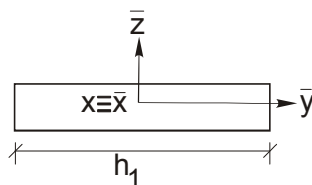


Figura 3. Sistema de coordenadas en los segmentos 1 y 2

El desplazamiento de cualquier punto de la sección normal al plano medio de las alas, puede expresarse a través del siguiente campo cinemático:

$$\begin{cases} u_i(x, y, z) = u_{oi}(x, \bar{y}) - \phi_{xi}(x, \bar{y}) \cdot \bar{z} \\ v_i(x, y, z) = v_{oi}(x, \bar{y}) - \phi_{yi}(x, \bar{y}) \cdot \bar{z} \\ w_i(x, y, z) = w_{oi}(x, \bar{y}) \end{cases} \quad (2) \quad i = 1, 2$$

donde $u_i(x, y, z)$ es el desplazamiento longitudinal total en la dirección "x", $v_i(x, y, z)$ es el desplazamiento transversal total en la dirección del eje "y" y $w_i(x, y, z)$ es el desplazamiento transversal total en la dirección del eje "z". En esta definición se tiene que $u_{oi}(x, \bar{y})$ y $v_{oi}(x, \bar{y})$ son los desplazamientos pertenecientes a la superficie media de la lámina y $\phi_{xi}(x, \bar{y})$ y $\phi_{yi}(x, \bar{y})$ son las rotaciones de la línea normal a la superficie media, respecto de los ejes y y x y

son positivas en la dirección contraria al giro de las agujas del reloj. Se considera que tanto u_o , v_o , ϕ_x y ϕ_y son independientes de la coordenada del espesor z . Por otro lado para pequeños valores de las rotaciones, se puede suponer que el desplazamiento w_o también es función solo de (x,y) .

Los desplazamientos y las rotaciones de la línea media de las alas son

$$u_{oi}(x,\bar{y}) = U_i(x) - \theta_i(x) \cdot \bar{y} ; \quad v_{oi}(x,\bar{y}) = V_i(x) ; \quad w_{oi}(x,\bar{y}) = W(x) + \phi_i(x) \cdot \bar{y}$$

$$\phi_{xi}(x,\bar{y}) = \frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \quad \phi_{yi}(x,\bar{y}) = \phi_i(x)$$

$i = 1, 2,$

donde h_3 es la longitud del alma de la viga, *segmento 3*.

Aquí se define a $U_1(x)$ y $U_2(x)$ como los desplazamientos longitudinales respecto del eje "x"; $V_1(x)$ y $V_2(x)$ son los desplazamientos transversales en la dirección del eje " \bar{y} "; $W(x)$ es el desplazamiento transversal, flexional, respecto del eje " \bar{z} " (este desplazamiento flexional es el mismo para toda la sección de la viga); $\theta_1(x)$ y $\theta_2(x)$ son los giros flexionales respecto del eje " \bar{z} " y ponderan el alabeo de las alas; $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son los giros torsionales respecto del eje longitudinal "x".

El campo cinemático del alma de la viga estará condicionado por los desplazamientos de cada ala, de acuerdo a ciertas condiciones de compatibilidad geométrica que debe cumplir la viga, teniendo en cuenta el mismo sistema de referencia que en las alas pero rotado 90° (figura 4).

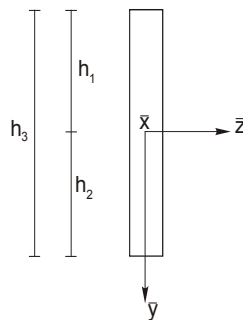


Figura 4. Sistema de coordenadas para el segmento 3

Como se considera la distorsión del alma fuera de su plano, el campo de desplazamientos para la línea media, $u_{o3}(x,\bar{y})$, $v_{o3}(x,\bar{y})$ y $w_{o3}(x,\bar{y})$, y el de rotaciones $\phi_{y3}(x,\bar{y})$ y $\phi_{x3}(x,\bar{y})$, se obtendrá de acuerdo a las condiciones de vinculación necesarias, interpolando los nueve grados de libertad de las alas. Un esquema de la deformación de la sección transversal se muestra en la figura 5.

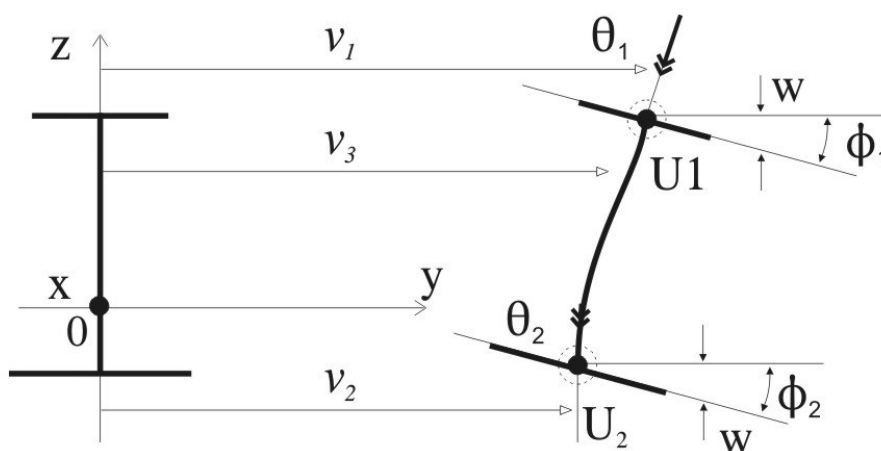


Figura 5. Deformación y corrimientos de la sección transversal

El desplazamiento longitudinal $u_{o3}(x, \bar{y})$ es supuesto como

$$u_{o3}(x, \bar{y}) = U_1(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + U_2(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \quad (4)$$

con $h_1 =$ longitud del segmento 1
y $h_2 =$ longitud del segmento 2

El desplazamiento transversal del alma $v_{o3}(x, \bar{y})$, corresponderá con el desplazamiento flexional de la viga, aquí la condición de compatibilidad será por tanto

$$v_{o3}(x, \bar{y}) = -W(x) \quad (5)$$

La rotación $\phi_{x3}(x, y)$ se interpolará como

$$\phi_{x3}(x, \bar{y}) = \theta_1(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + \theta_2(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \quad (6)$$

y la deformación flexional del alma $w_{o3}(x, \bar{y})$ será el desplazamiento transversal del alma. Para modelizar la distorsión del alma se propone un polinomio cúbico de la forma

$$w_{o3}(x, \bar{y}) = \sum_{i=0}^3 a_i \cdot \bar{y}^i \quad (7)$$

en tanto que para el giro $\phi_{y3}(x, \bar{y})$ se propone el polinomio

$$\phi_{y3}(x, \bar{y}) = a_1 + \left(\frac{\chi}{2} \right) \cdot a_3 \bar{y} + 2 \cdot a_2 \cdot \bar{y} + 3 \cdot a_3 \cdot \bar{y}^2 \quad (8)$$

donde el factor
$$\chi = \frac{12EI_z}{GK_y l^2} \tag{9}$$

con $I_z = \frac{e^3}{12}$, $K_y = \kappa \cdot \text{Area sección}$ y $\kappa =$ coeficiente de corte de vigas tipo Timoshenko, $e =$ espesor de la placa y $G =$ módulo de elasticidad transversal, pone en evidencia la relación entre el momento flector M_y y el esfuerzo de corte Q_y en el caso de materiales isótropos. Nótese que para vigas esbeltas o sin deformación del alma, se considera la rigidez al corte infinita, $G \rightarrow \infty$, y por lo tanto $\chi = 0$. En el caso de vigas laminadas, una buena aproximación que se toma es la de suponer que χ es aproximadamente B_{22}/H_{44} .

Las constantes a_i de las ecuaciones (7) y (8) quedan determinadas a través de las condiciones de compatibilidad geométricas

$$\begin{cases} w_{o3}(0, -h_1) = V_1(x) \\ w_{o3}(0, h_2) = V_2(x) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \varphi_{y3}(0, -h_1) = \varphi_1(x) \\ \varphi_{y3}(0, h_2) = \varphi_2(x) \end{cases} \tag{10}$$

Estas constantes son función de la geometría de la sección y de los grados de libertad. Una vez determinadas las constantes a_i por simplicidad se las ordena como una combinación lineal de las incógnitas $V_1(x)$, $V_2(x)$, $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ y de funciones de interpolación $f_{w_{o3}V_i}(\bar{y})$, $f_{w_{o3}\varphi_i}(\bar{y})$, $f_{\varphi_{y3}V_i}(\bar{y})$ y $f_{\varphi_{y3}\varphi_i}(\bar{y})$, quedando expresadas como

$$\begin{aligned} w_{o3}(x, \bar{y}) &= f_{w_{o3}V_1}(\bar{y}) \cdot V_1(x) + f_{w_{o3}V_2}(\bar{y}) \cdot V_2(x) + f_{w_{o3}\varphi_1}(\bar{y}) \cdot \varphi_1(x) + f_{w_{o3}\varphi_2}(\bar{y}) \cdot \varphi_2(x) \\ \varphi_{y3}(x, \bar{y}) &= f_{\varphi_{y3}V_1}(\bar{y}) \cdot V_1(x) + f_{\varphi_{y3}V_2}(\bar{y}) \cdot V_2(x) + f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y}) \cdot \varphi_1(x) + f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y}) \cdot \varphi_2(x) \end{aligned} \tag{11}$$

2.4 Deformaciones específicas para cada segmento.

De acuerdo a los campos de desplazamientos propuestos por (3) se obtiene el vector de deformaciones específicas $\{\mathcal{E}\}_i$, expresado como $\{\mathcal{E}\}^T = [\mathcal{E}_x^0, \mathcal{E}_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]$. Para las alas quedan definidas por

$$\varepsilon_{xi}^0 = U_i'(x) - \theta_i'(x) \cdot \bar{y} \quad \varepsilon_{yi}^0 = 0 \quad \gamma_{xyi}^0 = V_i'(x) - \theta_i'(x) \quad \kappa_{xi} = - \left[\frac{U_2'(x) - U_1'(x)}{h_3} \right] \tag{12}$$

$$\kappa_{yxi} = 0 \quad \kappa_{xyi} = -2 \cdot \varphi_i'(x) \quad \gamma_{yzi} = 0 \quad \gamma_{xzi} = - \left[\frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \right] + W'(x) + \varphi_i'(x) \cdot \bar{y}$$

$i=1,2$

y para el alma $\{\mathcal{E}\}_i$ es

$$\varepsilon_{x3}^0 = U_1'(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + U_2'(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right); \quad \varepsilon_{y3}^0 = 0; \quad \gamma_{xy3}^0 = -W'(x) + \left[\frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \right]$$

$$\kappa_{x3} = -\theta_1'(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) - \theta_2'(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right)$$

$$\kappa_{y3} = -\frac{\partial f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \cdot V_1(x) - \frac{\partial f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \cdot V_2(x) - \frac{\partial f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \cdot \varphi_1(x) - \frac{\partial f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \cdot \varphi_2(x) \quad (13)$$

$$\kappa_{xz3} = \frac{\theta_1(x) - \theta_2(x)}{h_3} - \left[f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y}) \cdot V_1'(x) + f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y}) \cdot V_2'(x) + f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y}) \cdot \varphi_1'(x) + f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y}) \cdot \varphi_2'(x) \right]$$

$$\gamma_{yz3} = \left[\frac{\partial f_{w_{o3}\varphi_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y}) \right] \cdot V_1(x) + \left[\frac{\partial f_{w_{o3}\varphi_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y}) \right] \cdot V_2(x) + \left[\frac{\partial f_{w_{o3}\varphi_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\varphi_{y3}\varphi_1}(\bar{y}) \right] \cdot \varphi_1(x) + \left[\frac{\partial f_{w_{o3}\varphi_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\varphi_{y3}\varphi_2}(\bar{y}) \right] \cdot \varphi_2(x)$$

$$\gamma_{xz3} = -\theta_1(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) - \theta_2(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) + f_{w_{o3}\varphi_1}(\bar{y}) \cdot V_1'(x) + f_{w_{o3}\varphi_2}(\bar{y}) \cdot V_2'(x) + f_{w_{o3}\varphi_1}(\bar{y}) \cdot \varphi_1'(x) + f_{w_{o3}\varphi_2}(\bar{y}) \cdot \varphi_2'(x)$$

2.5 Formulación variacional

La expresión de los trabajos virtuales de deformación para una placa de espesor constante t , integrando sobre su espesor se reduce a

$$\int_A [N]^T \delta[\varepsilon] dA \quad (14)$$

En este caso se supone al mismo como la suma de los trabajos virtuales de las tres placas

$$\sum_{i=1}^3 \int_A [N]_i^T \delta\{\varepsilon\}_i dA \quad (15)$$

$i = 1, 2, 3$

donde $\{N\}_i$ es el vector de esfuerzos dado por

$$\{N\}_i = [N_{xi}, N_{yi}, N_{xyi}, M_{xi}, M_{yi}, M_{xyi}, Q_{yi}, Q_{xi}]^T \quad (16)$$

Reemplazando en la ecuación (15) los esfuerzos $\{N\}_i$ y los vectores $\{\varepsilon\}_i$ y trabajando algebraicamente se determina el trabajo virtual de deformación de las alas como

$$\int_{A_i} \left[N_{xi} \delta(U_i'(x) - \theta_i'(x) \bar{y}) + N_{xyi} \delta(V_i'(x) - \theta_i'(x)) + M_{xi} \delta \left(- \left[\frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \right] \right) + M_{xyi} \delta(-2 \cdot \varphi_i'(x)) + \right. \quad (17) \quad i = 1, 2, 3$$

$$\left. + Q_{xi} \delta \left(- \left[\frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \right] + W'(x) + \varphi_i'(x) \bar{y} \right) \right] dA$$

De idéntica manera, pero ahora reemplazando (13) en (15) se obtiene la expresión de los trabajos virtuales para el alma de la viga

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_3} \left[N_{x3} \delta \left(U_1'(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + U_2'(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \right) + N_{y3} \delta \left(-W(x) + \left[\frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \right] \right) + \right. \\
 & M_{x3} \delta \left(-\theta_1'(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) - \theta_2'(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \right) + M_{y3} \delta \left(-\frac{\partial f_{\phi_{y3} V_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} V_1(x) - \frac{\partial f_{\phi_{y3} V_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} V_2(x) - \frac{\partial f_{\phi_{y3} \phi_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \phi_1(x) - \frac{\partial f_{\phi_{y3} \phi_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} \phi_2(x) \right) + \\
 & M_{xy3} \delta \left(\frac{\theta_1(x) - \theta_2(x)}{h_3} - \left[f_{\phi_{y3} V_1}(\bar{y}) V_1'(x) + f_{\phi_{y3} V_2}(\bar{y}) V_2'(x) + f_{\phi_{y3} \phi_1}(\bar{y}) \phi_1'(x) + f_{\phi_{y3} \phi_2}(\bar{y}) \phi_2'(x) \right] \right) + \\
 & Q_{y3} \delta \left(\left[\frac{\partial f_{w_{o3} V_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\phi_{y3} V_1}(\bar{y}) \right] V_1(x) + \left[\frac{\partial f_{w_{o3} V_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\phi_{y3} V_2}(\bar{y}) \right] V_2(x) + \left[\frac{\partial f_{w_{o3} \phi_1}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\phi_{y3} \phi_1}(\bar{y}) \right] \phi_1(x) + \left[\frac{\partial f_{w_{o3} \phi_2}(\bar{y})}{\partial \bar{y}} - f_{\phi_{y3} \phi_2}(\bar{y}) \right] \phi_2(x) \right) + \\
 & \left. Q_{x3} \delta \left(-\theta_1(x) \left(\frac{h_2 - y}{h_3} \right) - \theta_2(x) \left(\frac{h_1 + y}{h_3} \right) + f_{w_{o3} V_1}(\bar{y}) V_1'(x) + f_{w_{o3} V_2}(\bar{y}) V_2'(x) + f_{w_{o3} \phi_1}(\bar{y}) \phi_1'(x) + f_{w_{o3} \phi_2}(\bar{y}) \phi_2'(x) \right) \right] dA
 \end{aligned} \tag{18}$$

La expresión total del trabajo virtual de las fuerzas de inercia está dada por la suma de los trabajos virtuales de cada una de las placas

$$\sum_{i=1}^3 \int_A \left[t_i \rho_i \left[\ddot{u}_{oi}(x, \bar{y}) \delta u_{oi}(x, \bar{y}) + \ddot{v}_{oi}(x, \bar{y}) \delta v_{oi}(x, \bar{y}) + \ddot{w}_{oi}(x, \bar{y}) \delta w_{oi}(x, \bar{y}) \right] + \frac{t_i^3 \rho_i}{12} \left[\ddot{\phi}_{xi}(x, \bar{y}) \delta \phi_{xi}(x, \bar{y}) + \ddot{\phi}_{yi}(x, \bar{y}) \delta \phi_{yi}(x, \bar{y}) \right] \right] dA \tag{19}$$

Reemplazando en (19) las expresiones dadas por las ecuaciones (3) y derivando respecto del tiempo, el trabajo virtual de las fuerzas de inercia para las alas queda

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_i} \left[t_i \rho_i \left[\left(\ddot{U}_i(x) - \ddot{\theta}_i(x) \cdot \bar{y} \right) \delta \left(U_i(x) - \theta_i(x) \cdot \bar{y} \right) + \ddot{V}_i(x) \delta \left(V_i(x) \right) + \left(\ddot{W}(x) + \ddot{\phi}_i(x) \cdot \bar{y} \right) \delta \left(W(x) + \phi_i(x) \cdot \bar{y} \right) \right] + \right. \\
 & \left. \frac{t_i^3 \rho_i}{12} \left[\left(\frac{\ddot{U}_2(x) - \ddot{U}_1(x)}{h_3} \right) \delta \left(\frac{U_2(x) - U_1(x)}{h_3} \right) + \ddot{\phi}_i(x) \delta \phi_i(x) \right] \right] dA
 \end{aligned} \tag{20}$$

mientras que reemplazando (4, 5, 6 y 11) en (19) se obtiene la expresión de los trabajos virtuales de las fuerzas de inercia para el alma

$$\begin{aligned}
& \int_{A_3} \left[t_3 \rho_3 \left[\left(\ddot{U}_1(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + \ddot{U}_2(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \right) \delta \left(U_1(x) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + U_2(x) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \right) - W(x) \delta(-W(x)) + \right. \right. \\
& \left. \left. (f_{w_{o3}V_1}(\bar{y}) \cdot \ddot{V}_1(x) + f_{w_{o3}V_2}(\bar{y}) \cdot \ddot{V}_2(x) + f_{w_{o3}\phi_1}(\bar{y}) \cdot \ddot{\phi}_1(x) + f_{w_{o3}\phi_2}(\bar{y}) \cdot \ddot{\phi}_2(x)) \right. \right. \\
& \left. \left. \delta (f_{w_{o3}V_1}(\bar{y}) \cdot V_1(x) + f_{w_{o3}V_2}(\bar{y}) \cdot V_2(x) + f_{w_{o3}\phi_1}(\bar{y}) \cdot \phi_1(x) + f_{w_{o3}\phi_2}(\bar{y}) \cdot \phi_2(x)) \right] \right] + \\
& \frac{t_3^3 \rho_3}{12} \left[\left(\ddot{\theta}_1(x) \cdot \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + \ddot{\theta}_2(x) \cdot \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \right) \delta \left(\theta_1(x) \cdot \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + \theta_2(x) \cdot \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \right) + \right. \\
& \left. (f_{\phi_{y3}V_1}(\bar{y}) \cdot \ddot{V}_1(x) + f_{\phi_{y3}V_2}(\bar{y}) \cdot \ddot{V}_2(x) + f_{\phi_{y3}\phi_1}(\bar{y}) \cdot \ddot{\phi}_1(x) + f_{\phi_{y3}\phi_2}(\bar{y}) \cdot \ddot{\phi}_2(x)) \right. \\
& \left. \delta (f_{\phi_{y3}V_1}(\bar{y}) \cdot V_1(x) + f_{\phi_{y3}V_2}(\bar{y}) \cdot V_2(x) + f_{\phi_{y3}\phi_1}(\bar{y}) \cdot \phi_1(x) + f_{\phi_{y3}\phi_2}(\bar{y}) \cdot \phi_2(x)) \right] dA
\end{aligned} \tag{21}$$

3 FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO

Se desarrolla un elemento finito de dos nodos con nueve grados de libertad por nodo e interpolado linealmente. El vector de desplazamientos generales $\{u_g\}$ viene dado por

$$\{u_g\} = \{U_1, V_1, \theta_1, \phi_1, W, U_2, V_2, \theta_2, \phi_2\}^T \tag{22}$$

y se lo supone como

$$\{u_g\} = [A] \{u_e\} \tag{23}$$

donde $\{u_e\}$ es el vector de incógnitas de los desplazamientos nodales y $[A]$ es la matriz de funciones nodales. El vector $\{u_e\}$ viene dado por la expresión

$$\{u_e\} = \{U_1^{(1)}, V_1^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \phi_1^{(1)}, W^{(1)}, U_2^{(1)}, V_2^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \phi_2^{(1)}, U_1^{(2)}, V_1^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \phi_1^{(2)}, W^{(2)}, U_2^{(2)}, V_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \phi_2^{(2)}\}^T \tag{24}$$

y la matriz $[A]_{(9 \times 18)}$

$$[A] = \begin{bmatrix}
N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2
\end{bmatrix} \tag{25}$$

donde N_1 y N_2 son las funciones de forma del elemento

$$N_1(\xi) = 1 - \xi ; \quad N_2(\xi) = \xi ; \quad \xi = \frac{x}{l_e} \quad l_e = \text{la longitud del elemento} \quad (26)$$

Las componentes del $\{\varepsilon\}_i$ en función de los desplazamientos nodales para las alas será

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xi}^0 &= \left(\frac{U_i^{(2)} - U_i^{(1)}}{l_e} \right) - \left(\frac{\theta_i^{(2)} - \theta_i^{(1)}}{l_e} \right) \cdot \bar{y} \\ \varepsilon_y^0 &= 0 \\ \gamma_{xyi}^0 &= \left(\frac{V_i^{(2)} - V_i^{(1)}}{l_e} \right) - \left(\frac{\theta_i^{(2)} + \theta_i^{(1)}}{2} \right) \\ \kappa_{xi} &= - \left[\frac{U_2^{(2)} - U_2^{(1)} + U_1^{(2)} - U_1^{(1)}}{l_e h_3} \right] \\ \kappa_{yi} &= 0 \\ \kappa_{xyi} &= -2 \cdot \left(\frac{\varphi_i^{(2)} - \varphi_i^{(1)}}{l_e} \right) \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\gamma_{xzi} = - \left[\frac{U_2^{(2)} + U_2^{(1)} - U_1^{(2)} - U_1^{(1)}}{2h_3} \right] + \left(\frac{W^{(2)} - W^{(1)}}{l_e} \right) + \left(\frac{\varphi_i^{(2)} - \varphi_i^{(1)}}{l_e} \right) \cdot \bar{y} \quad i=1,2$$

Nótese que en el caso de γ_{xyi} , κ_{xi} y γ_{xzi} , a los efectos de agilizar la implementación computacional se emplearon los valores medios de ϕ_{xi} y de ϕ_{yi} , evitando así bloqueos por corte. Las componentes de $\{\varepsilon\}_i$ para el alma de la son

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x3}^0 &= \left(\frac{U_1^{(2)} - U_1^{(1)}}{l_e} \right) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) + \left(\frac{U_2^{(2)} - U_2^{(1)}}{l_e} \right) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \\ \varepsilon_{y3}^0 &= 0 \\ \gamma_{xy3}^0 &= - \left(\frac{W^{(2)} - W^{(1)}}{l_e} \right) + \left[- \frac{(U_1^{(1)} + U_1^{(2)}) + (U_2^{(1)} + U_2^{(2)})}{h_3} \right] \\ \kappa_{x3} &= - \left(\frac{\theta_1^{(2)} - \theta_1^{(1)}}{l_e} \right) \left(\frac{h_2 - \bar{y}}{h_3} \right) - \left(\frac{\theta_2^{(2)} - \theta_2^{(1)}}{l_e} \right) \left(\frac{h_1 + \bar{y}}{h_3} \right) \\ \kappa_{y3} &= - \frac{df_{\phi_{y3}\varphi_1}(\bar{y})}{d\bar{y}} \cdot [(1 - \xi)V_1^{(1)} + \xi V_1^{(2)}] - \frac{df_{\phi_{y3}\varphi_2}(\bar{y})}{d\bar{y}} \cdot [(1 - \xi)V_2^{(1)} + \xi V_2^{(2)}] - \\ &\quad \frac{df_{\phi_{y3}\phi_1}(\bar{y})}{d\bar{y}} \cdot [(1 - \xi)\phi_1^{(1)} + \xi\phi_1^{(2)}] - \frac{df_{\phi_{y3}\phi_2}(\bar{y})}{d\bar{y}} \cdot [(1 - \xi)\phi_2^{(1)} + \xi\phi_2^{(2)}] \end{aligned}$$

$$\kappa_{xy3} = \frac{(\theta_1^{(1)} + \theta_1^{(2)}) - (\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)})}{2h_3} - \left[f_{\phi_{y3\phi_1}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{V_1^{(2)} - V_1^{(1)}}{l_e} \right) + f_{\phi_{y3\phi_2}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{V_2^{(2)} - V_2^{(1)}}{l_e} \right) + \right. \\ \left. f_{\phi_{y3\phi_1}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{\phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)}}{l_e} \right) + f_{\phi_{y3\phi_2}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{\phi_2^{(2)} - \phi_2^{(1)}}{l_e} \right) \right] \quad (28)$$

$$\gamma_{yz3} = \left[\frac{df_{w_{o3V_1}}(\bar{y})}{d\bar{y}} - f_{\phi_{y3V_1}}(\bar{y}) \right] \cdot [(1-\xi)V_1^{(1)} + \xi V_1^{(2)}] + \left[\frac{df_{w_{o3V_2}}(\bar{y})}{d\bar{y}} - f_{\phi_{y3V_2}}(\bar{y}) \right] \cdot [(1-\xi)V_2^{(1)} + \xi V_2^{(2)}] + \\ \left[\frac{df_{w_{o3\phi_1}}(\bar{y})}{d\bar{y}} - f_{\phi_{y3\phi_1}}(\bar{y}) \right] \cdot [(1-\xi)\phi_1^{(1)} + \xi\phi_1^{(2)}] + \left[\frac{df_{w_{o3\phi_2}}(\bar{y})}{d\bar{y}} - f_{\phi_{y3\phi_2}}(\bar{y}) \right] \cdot [(1-\xi)\phi_2^{(1)} + \xi\phi_2^{(2)}]$$

$$\gamma_{xz3} = - \left(\frac{\theta_1^{(1)} + \theta_1^{(2)}}{2} \right) \cdot \left(\frac{h_2 - y}{h_3} \right) - \left(\frac{\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}}{2} \right) \cdot \left(\frac{h_1 + y}{h_3} \right) + f_{w_{o3V_1}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{V_1^{(2)} - V_1^{(1)}}{l_e} \right) + f_{w_{o3V_2}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{V_2^{(2)} - V_2^{(1)}}{l_e} \right) + \\ f_{w_{o3\phi_1}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{\phi_1^{(2)} - \phi_1^{(1)}}{l_e} \right) + f_{w_{o3\phi_2}}(\bar{y}) \cdot \left(\frac{\phi_2^{(2)} - \phi_2^{(1)}}{l_e} \right)$$

Para la deducción de la matriz de rigidez del elemento $[K]$, se debe trabajar con las ecuaciones (27) y (28), las que pueden escribirse como

$$\{\varepsilon\}_i = [B]_i \{u_e\} \quad (29)$$

i=1, 2 y 3

donde $[B]_i$, (18x18) es la matriz de deformación unitaria – desplazamiento del elemento. Tanto el vector $\{N\}_i$ como el vector $\{\varepsilon\}_i$ pueden ser reemplazados por sus expresiones aproximadas en función de los desplazamientos nodales a través de la ecuación

$$\{N\}_i = [C]_i \{\varepsilon\}_i \quad (30)$$

donde $[C]_i$ es la matriz constitutiva para cada uno de los laminados. Un reemplazo conveniente de las ecuaciones (29) en la expresión dada por la ecuación (14) permite obtener luego de aplicar sencillos manejos algebraicos, la expresión de la matriz rigidez del elemento $[K]$ como suma de cada una de las matrices de rigidez de cada placa

$$l_e \int_0^1 \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [B]_1^T \cdot [C]_1 \cdot [B]_1 \, d\bar{y} \, dx + \int_0^1 \int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [B]_2^T \cdot [C]_2 \cdot [B]_2 \, d\bar{y} \, dx + \int_0^1 \int_{-\frac{h_3}{2}}^{\frac{h_3}{2}} [B]_3^T \cdot [C]_3 \cdot [B]_3 \, d\bar{y} \, dx \quad (31)$$

La derivación de la matriz de masa $[M]$ del elemento se obtiene partiendo de la expresión de los trabajos virtuales de las fuerzas de inercia. Genéricamente, dichas ecuaciones son de la forma

$$\int_V \rho \{\ddot{U}\}^T \delta\{U\} \, dV \quad (32)$$

en la que ρ es la densidad del material, $\{U\}$ el vector desplazamiento y $\{\ddot{U}\}$ la segunda derivada temporal del mismo. De acuerdo a la aproximación dada por la ecuación (26), los desplazamientos y las rotaciones quedan expresados en función de las incógnitas nodales. Por ejemplo, para el desplazamiento $u_{oi}(x, \bar{y})$ se tendrá

$$u_{oi}(x, \bar{y}) = [A_{u_{oi}}] \{u_e\} \quad (33)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Las matrices $[A_{u,v,w,\phi}]_i$ tienen dimensión (1x18). En tanto la segunda derivada temporal será

$$\ddot{u}_{oi}(x, \bar{y}) = [A_{u_{oi}}] \{\ddot{u}_e\} \quad (34)$$

$$i=1, 2, 3.$$

procediéndose de igual manera con el resto de los corrimientos y rotaciones.

Reemplazando cada una de estas expresiones en los trabajos virtuales de las fuerzas de inercia (32), y recordando desde el cálculo matricial y de variaciones que

$$\rho \{\ddot{U}\}^T \delta\{U\} = \rho \delta\{U\}^T \{\ddot{U}\} \quad (35)$$

se obtiene la expresión de la matriz de masa $[M]$ del elemento como la suma de las matrices de masa de cada una de las placas:

$$\sum_{i=1}^3 l_e \int_0^1 \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \left[t_i \rho_i \left([A_{u_{oi}}]^T [A_{u_{oi}}] + [A_{v_{oi}}]^T [A_{v_{oi}}] + [A_{w_{oi}}]^T [A_{w_{oi}}] \right) + \frac{t_i^3 \rho_i}{12} \left([A_{\phi_{xi}}]^T [A_{\phi_{xi}}] + [A_{\phi_{yi}}]^T [A_{\phi_{yi}}] \right) \right] d\bar{y} dx \quad (36)$$

Una vez determinadas las matrices $[K]$ y $[M]$, se procede al cálculo de frecuencias naturales de vibración a través del clásico problemas de autovalores

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (37)$$

El elemento finito ha sido programado en su totalidad en el software utilitario de matemática simbólica *MATHEMÁTICA 4.0* ampliado a la versión 5.0.

4 RESULTADOS NUMERICOS

4.1 Frecuencias torsionales de vigas de material isótropo

Se comparan las cinco primeras frecuencias naturales para una viga cuyas características se muestran en la figura 6. Se tienen en cuenta distintas condiciones de borde (EE= empotrado – empotrado; EL: empotrado – libre; SA – SA: simplemente apoyado en ambos bordes) y diferentes relaciones de esbeltez. Las tablas 2, 3 y 4 muestran los resultados obtenidos y la comparación con los casos: I Cortínez – Rossi (1998); II Modelo de Vlasov; III Modelo tridimensional tipo SHELL de ABAQUS 6.4 para materiales isótropos; IV Presente enfoque.

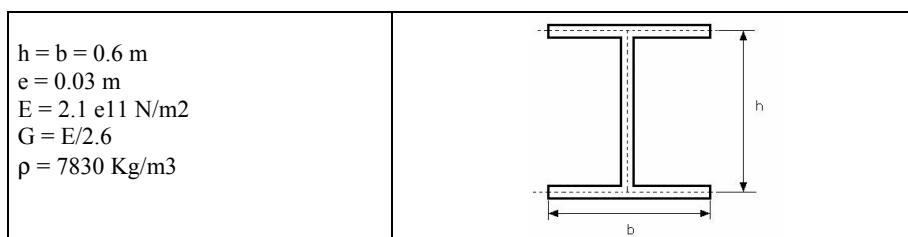


Figura 6. Forma de la sección

| C. Borde | h/l | Caso | f1 | f2 | f3 | f4 | f5 |
|----------|------|------|--------|--------|---------|---------|---------|
| EE | 0,05 | I | 19,70 | 50,80 | 95,20 | 151,30 | 217,80 |
| | | II | 20,00 | 52,60 | 100,80 | 164,90 | 244,90 |
| | | III | 19,61 | 50,32 | 91,84 | 133,41 | 157,4 |
| | | IV | 19,82 | 51,39 | 95,46 | 141,90 | 168,05 |
| | 0,1 | I | 70,10 | 178,40 | 322,60 | 492,00 | 680,20 |
| | | II | 74,40 | 202,30 | 394,30 | 650,10 | 969,90 |
| | | III | 69,22 | 144,48 | 362,80 | 539,68 | 727,00 |
| | | IV | 69,83 | 152,49 | 370,83 | 560,86 | 775,70 |
| | 0,15 | I | 145,40 | 352,20 | 610,00 | 898,30 | 1208,60 |
| | | II | 164,90 | 451,90 | 883,50 | 1458,80 | 2178,20 |
| | | III | 128,32 | 394,81 | 661,27 | 913,40 | 1228,70 |
| | | IV | 133,59 | 403,56 | 694,32 | 974,70 | 1323,60 |
| | 0,2 | I | 237,40 | 547,10 | 917,80 | 1321,90 | 1751,00 |
| | | II | 291,60 | 801,20 | 1568,30 | 2591,00 | 3869,90 |
| | | III | 154,80 | 599,07 | 926,930 | 1234,00 | 1738,00 |
| | | IV | 181,60 | 624,00 | 987,0 | 1335,40 | 1887,40 |

Tabla 2. Frecuencias Torsionales viga EE

| C. Borde | h/l | Caso | f1 | f2 | f3 | f4 | f5 |
|----------|------|------|-------|--------|--------|---------|---------|
| EL | 0,05 | I | 5,63 | 22,30 | 53,00 | 97,30 | 154,00 |
| | | II | 5,64 | 22,50 | 54,30 | 102,10 | 165,90 |
| | | III | 5,58 | 22,05 | 52,31 | 94,08 | 136,26 |
| | | IV | 5,61 | 22,25 | 53,11 | 96,67 | 143,15 |
| | 0,1 | I | 15,20 | 73,20 | 184,70 | 333,60 | 509,50 |
| | | II | 15,30 | 76,50 | 204,30 | 395,70 | 651,20 |
| | | III | 15,07 | 72,28 | 149,95 | 371,63 | 554,38 |
| | | IV | 15,10 | 72,90 | 158,03 | 379,63 | 576,15 |
| | 0,15 | I | 29,50 | 150,50 | 370,60 | 642,30 | 945,50 |
| | | II | 30,00 | 165,80 | 453,90 | 884,80 | 1459,90 |
| | | III | 29,28 | 135,10 | 410,58 | 688,74 | 943,72 |
| | | IV | 29,34 | 140,12 | 418,8 | 723,30 | 1007,17 |
| | 0,2 | I | 48,80 | 247,20 | 586,50 | 980,50 | 1405,60 |
| | | II | 50,10 | 290,60 | 803,40 | 1569,70 | 2592,10 |
| | | III | 48,38 | 282,41 | 634,01 | 965,51 | 1551,30 |
| | | IV | 48,46 | 286,40 | 659,25 | 1034,48 | 1675,10 |

Tabla 3. Frecuencias Torsionales viga EL

| C. Borde | h/l | Caso | f1 | f2 | f3 | f4 | f5 |
|----------|------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| SA-SA | 0,05 | I | 11,08 | 35,00 | 73,30 | 124,70 | 188,00 |
| | | II | 11,10 | 35,40 | 75,50 | 131,40 | 203,30 |
| | | III | 10,92 | 34,59 | 71,54 | 115,55 | 148,52 |
| | | IV | 11,08 | 35,14 | 73,40 | 121,12 | 160,00 |
| | 0,1 | I | 35,04 | 124,60 | 260,20 | 429,20 | 621,70 |
| | | II | 35,48 | 131,40 | 291,20 | 514,80 | 802,50 |
| | | III | 34,65 | 115,10 | 244,82 | 458,12 | 640,10 |
| | | IV | 35,06 | 119,91 | 267,48 | 482,65 | 697,08 |
| | 0,15 | I | 73,29 | 260,00 | 521,00 | 824,10 | 1150,90 |
| | | II | 75,51 | 291,20 | 650,50 | 1153,80 | 1801,00 |
| | | III | 71,20 | 264,37 | 536,41 | 791,80 | 1187,30 |
| | | IV | 72,86 | 277,73 | 584,37 | 842,42 | 1270,10 |
| 0,2 | I | 124,60 | 427,85 | 821,66 | 1254,87 | 1707,50 | |
| | II | 131,40 | 514,82 | 1153,73 | 2048,31 | 3198,80 | |
| | III | 113,24 | 441,48 | 858,65 | 1306,10 | 1772,22 | |
| | IV | 119,78 | 480,44 | 922,79 | 1415,17 | 1928,44 | |

Tabla 4. Frecuencias Torsionales viga SA –SA

Se observa una muy buena aproximación en comparación con Cortinez y Rossi (1998) y con el modelo SHELL de ABAQUS 6.4. Para vigas esbeltas, $h/l=0.05$, el presente enfoque presenta una diferencia máxima del orden del 7% respecto de los valores obtenidos con ABAQUS. En el caso de la teoría clásica de Vlasov, es más que importante la diferencia entre valores de frecuencias obtenidos tanto para vigas cortas como para vigas esbeltas en modos superiores. Esto induce a pensar que la forma de considerar los desplazamientos transversales y la distorsión del alma de la viga es acertada, así como también se evidencia la importancia del efecto de corte por torsión en estos modos de vibración.

4.2 Frecuencias torsionales de vigas de material compuesto

Se estudian y comparan frecuencias de laminados del tipo $\{0,0,0,0\}$ y $\{0,90,90,0\}$ (figura 7). Las tablas 5 y 6 muestran los resultados obtenidos para las condiciones de borde EL y EE para los casos: I Modelo simplificado sin deformabilidad por corte (Gorbanphoor y Omidvar, 1996); II Modelo SHELL de ABAQUS 6.4 para materiales compuestos; III Presente enfoque. En la tabla 7 se comparan resultados para la condición de borde SA – SA con Gorbanphoor y Omidvar, et. al.



Figura 7. Forma de la sección

- Caso EL

| Laminación | H/l | Caso | f1 | f2 | f3 | f4 |
|-------------|------|-------|--------|--------|--------|---------|
| {0/0/0/0} | 0.05 | I | 6.27 | 35.87 | 98.90 | 193.11 |
| | | II | 6.06 | 31.03 | 64.72 | 149.71 |
| | | III | 6.16 | 32.0 | 70.06 | 156.57 |
| | 0.10 | II | 21.25 | 128.6 | 235.44 | 355.1 |
| | | III | 21.57 | 123.3 | 248 | 385.58 |
| | 0.15 | I | 51.09 | 316.48 | 884.60 | 1732.83 |
| II | | 42.18 | 193.16 | 378.42 | 608.3 | |
| III | | 43.55 | 202.43 | 414 | 619.44 | |
| {0/90/90/0} | 0.05 | I | 4.97 | 26.77 | 72.87 | 141.86 |
| | | II | 4.84 | 24.65 | 60.62 | 97.7 |
| | | III | 4.9 | 25.17 | 62.82 | 104.82 |
| | 0.10 | I | 16.54 | 78.1 | 218.5 | 338.3 |
| | | II | 16.7 | 81.5 | 229.0 | 356.05 |
| | 0.15 | I | 37.87 | 232.33 | 648.39 | 1269.68 |
| II | | 34.35 | 184.3 | 364 | 545.2 | |
| III | | 34.84 | 196.13 | 382.7 | 587.7 | |

Tabla 5. Frecuencias torsionales de vigas I laminadas E L

- Caso EE

| Laminación | H / l | Caso | f1 | f2 | f3 | f4 |
|-------------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|
| {0/0/0/0} | 0.05 | I | 35.91 | 98.58 | 192.92 | 318.66 |
| | | II | 29.47 | 61 | 139.91 | 197 |
| | | III | 30.54 | 66.42 | 146.9 | 207.03 |
| | 0.10 | I | 69.48 | 205.8 | 321.84 | 427.38 |
| | | II | 74.58 | 216.76 | 344.5 | 406 |
| | 0.15 | I | 320.83 | 883.97 | 1732.65 | 2864.19 |
| II | | 167.2 | 325.6 | 497.55 | 821.61 | |
| III | | 176.26 | 348.27 | 546.8 | 770.65 | |
| {0/90/90/0} | 0.05 | I | 26.50 | 72.47 | 141.59 | 233.71 |
| | | II | 23.64 | 57.51 | 93.7 | 187.8 |
| | | III | 24.24 | 59.81 | 100.4 | 199.54 |
| | 0.10 | I | 72.6 | 198.82 | 308.9 | 428.3 |
| | | II | 76.13 | 211.05 | 325 | 454.4 |
| | 0.15 | I | 235.19 | 647.75 | 1269.42 | 2098.28 |
| II | | 108.5 | 316.7 | 493 | 655.2 | |
| III | | 119.6 | 339.06 | 526.6 | 724.74 | |

Tabla 6. Frecuencias torsionales de vigas I laminadas EE

- Caso SA - SA
 - I. Gorbanphoor y Omidvar
 - II. Presente enfoque.

| Laminación | h / l | Caso | f1 | f2 | f3 | f4 |
|-------------|-------|------|--------|--------|--------|---------|
| {0/90/90/0} | 0.05 | I | 12.19 | 46.61 | 103.95 | 184.21 |
| | | II | 12.00 | 43.30 | 86.28 | 122.20 |
| | 0.10 | I | 46.61 | 184.21 | 413.54 | 735.59 |
| | | II | 43.23 | 122.06 | 303.77 | 441.41 |
| | 0.15 | I | 103.95 | 413.54 | 929.52 | 1651.89 |
| | | II | 86.05 | 303.37 | 509.92 | 717.06 |

Tabla 7. Frecuencias torsionales de vigas I laminadas CB. SA - SA

Los resultados obtenidos con la presente teoría muestran muy buena aproximación con los obtenidos a través del modelo tridimensional tipo SHELL de ABAQUS 6.4 para materiales compuestos, manteniéndose por debajo del 7% en la mayoría de los casos e incluso disminuyendo la diferencia obtenida en el caso de frecuencias torsionales para vigas de material isótropo. Sigue siendo importante, al igual que para el caso de materiales isótropos, la diferencia con las teorías que simplifican el efecto de corte, tal el caso de la comparación con los resultados de Gorbanphoor y Omidvar (1996).

5 CONCLUSIONES

La presente teoría fue aplicada tanto a VAPD de materiales isótropos como laminados, en este último caso se estudiaron solo laminados simétricos balanceados de configuración {0, 0, 0, 0} y {0, 90, 90, 0}. Según los valores comparados con los disponibles en la literatura así como los obtenidos a través del modelo SHELL de ABAQUS 6.4 son altamente satisfactorios y muestran la importancia de considerar el efecto de distorsión del alma así como también los de flexibilidad por corte en la determinación de frecuencias naturales. Estos efectos son de mucha importancia para el caso de frecuencias bajas en vigas cortas, así como también para modos superiores en vigas esbeltas. El modelo para la distorsión del alma es muy sencillo de operar y puede suponerse para otros estudios un polinomio de mayor grado, para lo cual se tendrá que tener en cuenta otros grados de libertad.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca. El presente trabajo es parte de la tesis de magíster presentada por Carlos Vera al Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur bajo la dirección de los Dres. Cortinez y Ercoli.

REFERENCIAS

N. R. Bauld and L. S. Tzeng. A Vlasov theory for fiber – reinforced beams with thin – walled open section. *International Journal Solid and Structures*, 20 (3), 277 – 297, 1984.

- V. Cortínez, M. Piován y C. Filipich. Solución generalizada para la determinación de frecuencias torsionales en vigas de sección I con flexibilidad del alma y tensiones iniciales. *Anales 8° Congreso Chileno de Ingeniería Mecánica*. Universidad de Concepción-Chile, 1998.
- V. Cortínez y R. Rossi. Dinámica de vigas de sección abierta de pared delgada deformables por corte sujetas a un estado de tensión inicial de tensiones. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Vol. 14,3,293-316, 1998.
- R. Chandra, A. D. Stemple and I. Chopra. Thin – walled composite beams under bending, torsional and extensional loads. *J. Aircraft*. Vol. 27, N°7, 1990.
- M. Floros, tesis de magister. Finite element modeling of open-section composite beams with warping restraint effects. The Pennsylvania State University. *The Graduate School. Department of Aerospace Engineering*, 1996.
- A. Ghorbanpoor and B. Omidvar. Simplified analysis of thin – walled composite members. *Journal of Structural Engineering*. Vol 122. N° 11, 1996.
- O. Hughes and Ming Ma. Lateral distortional buckling of monosymmetric beams under point load. *Journal of Engineering Mechanics*. (1022-1028), 1996.
- C. Kim and S. R. White. Analysis of thick hollow composite beams under general loadings. *Composite Structures*, Vol. 34, pp. 42 – 50, 1996.
- L. Librescu and O. Song. On the aeroelastic tailoring of composite aircraft swept wings modelled as thin – walled beams structures. *Composites Engineering*, Vol. 2, N°5-7, pp. 497 – 512, 1991.
- P. Muller. Torsional-flexural waves in the thin - walled open beams. *Journal of Sound and Vibration*. 87(1). 115-141, 1983.
- N. G. Stephen and P. J Wang. Web flexibility and I-beam torsional oscillation. *Journal of Sound and Vibration*. 109(1). 51-64, 1986.
- V. Z. Vlasov. Theory of Thin – Walled Elastic Beams. Jerusalem , Israel Program for Scientific Translation, 1961.
- S. P. Timoshenko – J.- Gere. Theory of Elastic Stability . Mc Graw-Hill. N. York, 1958.