



UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tesis de Doctorado en Matemática

**RELACIÓN ENTRE EL CARCAJ
ORDINARIO DE UN ÁLGEBRA Y EL
GRADO DE MORFISMOS
IRREDUCIBLES**

Lic. Victoria L. Guazzelli

Directora: Dra. Claudia Chaio

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas aquellas personas que colaboraron directa e indirectamente para que este trabajo fuera posible.

En primer lugar agradezco a mi directora, la Dra. Claudia Chaio, por su gran dedicación durante todos estos años y por transmitirme en todo momento su pasión por la matemática. Gracias por su contención y por pensar siempre en qué es lo mejor para mí.

A mi mamá y a mi papá, por inculcarme los valores que tengo y enseñarme esencialmente a que las cosas se logran con esfuerzo y dedicación. Gracias por el gran amor y apoyo de siempre. Gracias por esos mimos hermosos en todo momento.

A Gonza, básicamente por hacerme tan feliz. Gracias por hacerme reír hasta en los momentos de enojo y por contenerme especialmente en este último tiempo. Esencialmente, gracias por estar siempre.

A mis amigas de la vida y a mis hermanos, por ser parte de mis días.

A mis compañeros de la facultad, por tantas charlas motivadoras y por acompañarnos a no bajar los brazos en todo este proceso.

Al Dr. Ibrahim Assem, al Dr. Marcelo Lanzilotta y a la Dra. Sonia Trepode, por haber aceptado ser jurado de esta tesis. Agradezco las correcciones y recomendaciones realizadas para que el trabajo quede mejor escrito, además de las sugerencias para seguir estudiando para trabajos futuros.

Finalmente, agradezco a CONICET por la ayuda financiera otorgada en estos últimos cinco años.

Resumen

Consideramos A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Uno de los objetivos de este trabajo es determinar los grados de los morfismos irreducibles teniendo en cuenta el carcaj con relaciones que representa a un álgebra. Estudiamos este problema para las álgebras de cuerdas de tipo de representación finito. Más aún, calculamos el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de dichas álgebras.

Asimismo, determinamos el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de las álgebras inclinadas de conglomerado en función del número de vértices del carcaj ordinario. En el caso de las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n y D_n , también presentamos un enfoque geométrico.

Por otra parte, estudiamos los morfismos de la categoría de módulos de un álgebra y su relación con el radical, comparándolos con los morfismos inducidos en la categoría de módulos del álgebra de endomorfismos de un módulo inclinante. Para ello utilizamos el Teorema de Inclinación, debido a S. Brenner y M. Butler. Aplicamos estos resultados y hallamos una cota del índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin.

Para todas las clases de álgebras arriba mencionadas, estudiamos la composición de los morfismos irreducibles y su relación con la potencia del radical a la cual pertenece. Finalmente, estudiamos el problema de la existencia de álgebras que poseen morfismos irreducibles de un módulo indescomponible no proyectivo a su trasladado de Auslander-Reiten.

Abstract

We consider finite dimensional algebras over an algebraically closed field.

One of the aims of this work is to determine the degree of the irreducible morphisms taking into account the bound quiver of an algebra. In particular, we study this problem in representation-finite string algebras. Moreover, we compute the nilpotency bound of the radical of the module category.

We also determine the nilpotency bound of the radical of the module category of any cluster tilted algebras of finite representation type in terms of the number of vertices of its ordinary quiver. Furthermore, for cluster tilted algebras of type A_n and D_n , we also present a geometric approach.

On the other hand, we study the relationship between morphisms and the powers of the radical where they belong. We establish a comparison with the induced morphisms in the module category of the endomorphism algebra of a tilting module. For this purpose, we strongly use Brenner and Butler's theorem. We apply this result to study the nilpotency bound of the radical of the module category of iterated tilted algebras of Dynkin type.

For all the above mentioned algebras, we study the composition of irreducible morphisms and the relationship with the power of their radical. Finally, we consider the problem of the existence of algebras having irreducible morphisms from an indecomposable non-projective module to its Auslander-Reiten translate.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares.	9
1.1. Categorías y funtores.	9
1.2. Carcaj asociado a un álgebra y álgebras de caminos.	12
1.3. Morfismos irreducibles y radical de la categoría de módulos.	15
1.4. Carcaj de traslación.	18
1.5. Carcaj de Auslander-Reiten y sucesiones que casi se parten.	21
1.6. Álgebras hereditarias.	27
1.7. Grados de morfismos irreducibles	29
2. Grados en un álgebra de cuerdas.	35
2.1. Preliminares sobre las álgebras de cuerdas.	35
2.2. Grados y álgebras de cuerdas	42
2.3. Cómo leer grados a través del carcaj ordinario.	58
2.4. Grados de morfismos irreducibles en un álgebra de cuerdas.	61
3. Sobre la composición de morfismos irreducibles.	67
3.1. Composición de n morfismos irreducibles en la potencia $n + 1$ del radical, que no pertenece al radical infinito.	67
3.2. Composición de n morfismos irreducibles que pertenece a \mathfrak{R}^{n+3} y no pertenece a \mathfrak{R}^{n+4}	80
4. Radical y teoría de inclinación	89
4.1. Preliminares sobre la teoría de inclinación	89
4.2. Sobre el radical y la teoría de inclinación	95
4.3. Índice de nilpotencia de un álgebra hereditaria.	105
4.4. Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin	114

5. Grados en álgebras inclinadas de conglomerado	119
5.1. Sobre la categoría derivada de un álgebra hereditaria	120
5.2. Álgebras inclinadas de conglomerado	126
5.3. Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n y de tipo D_n . . .	136
5.3.1. Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n	137
5.3.2. Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo D_n	144

Introducción.

En este trabajo consideraremos A una k -álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Es conocido que en este contexto, un álgebra A básica y conexa tiene asociado un carcaj Q_A , denominado carcaj ordinario de A . Más aún, el álgebra A es Morita equivalente al álgebra cociente kQ_A/I , donde kQ_A denota al álgebra de caminos de Q_A e I es un ideal admisible de kQ_A .

Vamos a denotar por $\text{mod } A$ la categoría de A -módulos a derecha finitamente generados.

Las nociones de morfismos irreducibles y sucesiones que casi se parten fueron introducidas por M. Auslander e I. Reiten en los setentas, y son de fundamental importancia en el desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras.

Existe una importante conexión entre un morfismo irreducible y el radical de la categoría $\text{mod } A$. Esta relación viene dada por el hecho de que un morfismo entre módulos indescomponibles es irreducible si y sólo si pertenece al radical y no al radical al cuadrado.

Recordemos que, dados X e Y en $\text{mod } A$, el radical del $\text{Hom}_A(X, Y)$, que lo denotaremos por $\mathfrak{R}(X, Y)$, es el conjunto de todos los morfismos $f : X \rightarrow Y$ tales que, para todo A -módulo indescomponible M y todo par de morfismos $h : M \rightarrow X$ y $h' : Y \rightarrow M$, la composición $h'fh$ no es un isomorfismo. Inductivamente se definen las potencias de $\mathfrak{R}(X, Y)$ para todo número entero positivo n . Finalmente, el radical infinito $\mathfrak{R}^\infty(X, Y)$ de $\text{Hom}_A(X, Y)$, es la intersección de todas las potencias naturales de $\mathfrak{R}(X, Y)$.

Un álgebra A es de tipo de representación finito si existe sólo un número finito de clases de isomorfismos de A -módulos indescomponibles.

M. Auslander caracterizó las álgebras de tipo de representación finito en función del radical de su categoría de módulos. Más precisamente, demostró que un álgebra A es de tipo de representación finito si y sólo el radical infinito de $\text{mod } A$ es cero, es decir, $\mathfrak{R}^\infty(X, Y) = 0$ para todo X e Y en $\text{mod } A$. Al menor número natural m para el cual $\mathfrak{R}^m(\text{mod } A) = 0$ se denomina índice de nilpotencia del radical de $\text{mod } A$ y lo denotaremos por r_A .

En 1970, M. Harada e Y. Sai hallaron una cota para la cual el radical de

la categoría de módulos de un álgebra de tipo de representación finito se anula. Dicha cota fue encontrada en función de la longitud ordinaria de los módulos indescomponibles. Más precisamente, ellos probaron que $\mathfrak{R}^{2^b-1}(\text{mod } A) = 0$, donde b denota el máximo de la longitud ordinaria de todos los A -módulos indescomponibles.

Más tarde, en 1998, D. Eisenbud y J. A. de la Peña mejoraron notablemente dicha cota. Ellos también utilizaron la noción de longitud ordinaria de los módulos e introdujeron una nueva variable, que fue dada en función de todos los módulos simples, ver [27].

En 2012, C. Chaio en [16], encontró el menor entero positivo donde el radical de la categoría de módulos se anula, es decir, el índice de nilpotencia. Para ello utilizó nociones de grados de morfismos irreducibles.

La teoría de grados de morfismos irreducibles fue introducida por S. Liu en [36] para estudiar la composición de morfismos irreducibles y su relación con la potencias del radical. S. Liu definió el grado de la siguiente manera; consideró $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible en $\text{mod } A$, con X o Y módulo indescomponible. El grado a izquierda de f , $d_l(f)$, es finito, si existen un entero positivo n , un módulo Z en $\text{mod } A$ y un morfismo $g \in \mathfrak{R}^n(Z, X) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(Z, X)$ tal que $fg \in \mathfrak{R}^{n+2}(Z, Y)$. Más aún, el grado a izquierda de f es igual a m , si m es el menor entero positivo que satisface dicha condición. En caso contrario, el grado a izquierda de f es infinito. Dualmente, S. Liu definió el grado a derecha de f , $d_r(f)$.

Recién en el año 2001, se retomó la investigación sobre el tema de los grados y su aplicación al estudio de la composición de morfismos irreducibles, donde se comenzaron a obtener avances. La noción de grado es una herramienta poderosa y está permitiendo resolver problemas de la teoría de representaciones de álgebras de artin. En particular, en un trabajo realizado por C. Chaio, P. Le Meur y S. Trepode [23], los autores dieron una caracterización para que el grado a izquierda (o a derecha) de un morfismo irreducible sea finito. Además, dieron equivalencias para determinar cuándo un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es de tipo de representación finito, en términos de grados de morfismos irreducibles.

Como mencionamos anteriormente, para las álgebras de tipo de representación finito se obtuvo el índice de nilpotencia del radical de su categoría de módulos en función de los grados de ciertos morfismos irreducibles.

En esta tesis modificamos este resultado, facilitando los cálculos para determinar el índice de nilpotencia. Probamos que no es necesario analizar los vértices que son pozos o fuentes. Más precisamente, demostramos el siguiente teorema.

Teorema A. *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito.*

Denotamos por \mathcal{V} al subconjunto de vértices de Q_A que no son ni pozos ni fuentes. Para cada $a \in \mathcal{V}$, definimos $r_a = d_r(\iota_a) + d_l(\theta_a)$, donde $\theta_a : \text{rad } P_a \rightarrow P_a$ e $\iota_a : I_a \rightarrow I_a/\text{soc } I_a$ son morfismos irreducibles y P_a e I_a denotan a los módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles correspondientes al vértice a . Entonces el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ está dado por:

$$r_A = \text{máx}\{r_a, \text{ con } a \in \mathcal{V}\} + 1.$$

Por otra parte, cabe destacar que en la mayoría de la teoría existente, los grados se calculan teniendo en cuenta el carcaj de Auslander-Reiten (un grafo orientado). En este trabajo, presentamos un nuevo enfoque para determinar los grados de los morfismos irreducibles y los índices de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de las álgebras de tipo de representación finito. Dicha lectura la establecemos a partir del carcaj con relaciones que representa a un álgebra. Nos enfocamos en las álgebras de cuerdas, las álgebras inclinadas de conglomerado y las álgebras inclinadas iteradas.

Las álgebras de cuerdas fueron estudiadas por M. Butler y C. Ringel en [14]. En dicho artículo, los autores dieron una descripción completa de todos los módulos indescomponibles de un álgebra de cuerdas, a través de ciertos paseos del carcaj con relaciones, llamados cuerdas de Q_A . Más precisamente, definieron los denominados módulos cuerda y módulos banda. Más aún, si consideramos un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito, todos los módulos indescomponibles son módulos cuerda.

En este trabajo, determinamos el grado finito de cualquier morfismo irreducible sólo teniendo en cuenta el carcaj con relaciones de un álgebra de cuerdas, ver el Teorema 2.2.10 y el Lema 2.4.1.

Por otro lado, abordamos el estudio de los grados de morfismos irreducibles y el radical de la categoría de módulos en la teoría de inclinación. Ésta consiste en comparar las categorías de módulos de un álgebra dada y del álgebra de endomorfismos de un módulo particular, denominado módulo inclinante.

Es sabido que dada un álgebra A , un módulo inclinante T induce dos subcategorías plenas de $\text{mod } A$, $\mathcal{T}(T)$ y $\mathcal{F}(T)$, denominadas clase de torsión y clase sin torsión, respectivamente. Además, si consideramos el álgebra de endomorfismos $B = \text{End}_A T$, el módulo inclinante T también induce dos subcategorías plenas de $\text{mod } B$, la clase de torsión $\mathcal{X}(T)$ y la clase sin torsión $\mathcal{Y}(T)$. Más aún, en el Teorema de Inclinación debido a S. Brenner y M. Butler, ellos establecen equivalencias de categorías entre las subcategorías $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$, así como también entre las subcategorías $\mathcal{F}(T)$ y $\mathcal{X}(T)$. Recordemos que el par $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ se dice escindido,

si todo A -módulo indescomponible pertenece a $\mathcal{T}(T)$ o a $\mathcal{F}(T)$. Análogamente, podemos definir cuándo el par $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ es escindido en mod B .

En esta tesis estudiamos la relación entre los morfismos en mod A y en mod B con respecto a la potencia del radical a la cual pertenecen. Se probaron los siguientes resultados.

Proposición B. *Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End}_A(T)$. Supongamos que los pares de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ y $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ son escindidos. Consideremos $f : M \rightarrow N$ un morfismo con $M, N \in \mathcal{T}(T)$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N) \text{ si y sólo si } F(f) \in \mathfrak{R}_B^n(F(M), F(N)),$$

donde $F = \text{Hom}_A(T, -)$.

En el caso en que sólo uno de los pares de torsión se escinde, probamos el siguiente resultado.

Proposición C. *Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End}_A(T)$. Supongamos que sólo el par de torsión $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ se escinde. Consideremos $f : M \rightarrow N$ un morfismo con $M, N \in \mathcal{T}(T)$. Si $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N) \setminus \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$ para algún $n \geq 1$ entonces $F(f) \in \mathfrak{R}_B^n(F(M), F(N))$, donde $F = \text{Hom}_A(T, -)$.*

Más aún, si $F(f) \notin \mathfrak{R}_B^{n+1}(F(M), F(N))$ entonces existe un camino no nulo de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles como sigue

$$F(M) \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{n-1} \rightarrow F(N)$$

donde cada \tilde{X}_i pertenece a $\mathcal{Y}(T)$, para $1 \leq i \leq n-1$.

Tanto la Proposición B como la Proposición C son válidas si consideramos el morfismo f entre módulos indescomponibles de $\mathcal{F}(T)$ y su equivalencia con la categoría $\mathcal{X}(T)$.

Aplicamos dichos resultados en el caso particular de los módulos APR-inclinantes. Logramos comparar el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$. Más precisamente, hemos probado el Teorema D.

Teorema D. *Sea A un álgebra, T un A -módulo APR-inclinante y $B = \text{End}_A(T)$. Si B es de tipo de representación finito, entonces $r_A \leq r_B$, donde r_A y r_B son los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente.*

Este resultado se ha aplicado a las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin. Determinamos una cota del índice de nilpotencia del radical de su categoría de módulos, dependiendo del álgebra hereditaria a la cual está asociada.

En esta tesis también hemos estudiado la teoría de grados de morfismos irreducibles en las álgebras inclinadas de conglomerado. La categoría de conglomerado fue introducida en el año 2006 por A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten and G. Todorov en [12] como el cociente $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)/F$, donde $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ denota la categoría derivada de un álgebra hereditaria H y F es el funtor $F = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}[1]$, con $\tau_{\mathcal{D}}$ el trasladado de Auslander-Reiten en $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ y $[1]$ el funtor suspensión (shift). Allí, los autores describen a los objetos inclinantes en la categoría de conglomerado. Más tarde, A. Buan, R. Marsh e I. Reiten definen en [13] las álgebras inclinadas de conglomerado como las álgebras de endomorfismos $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$, donde T es un objeto inclinante en dicha categoría.

En el año 2006 y de manera independiente, P. Caldero, F. Chapoton y R. Schiffler en [15] introdujeron la categoría de conglomerado de tipo A_n desde un punto de vista geométrico. Más precisamente, los autores definieron a la categoría de diagonales de un polígono de $n + 3$ vértices y demostraron que dicha categoría es equivalente a la categoría de conglomerado de tipo A_n . Más aún, los objetos inclinantes están dados por un conjunto completo de diagonales que no se intersecan, lo que denominaron una triangulación del polígono. Las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n son aquellas que provienen de una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices.

Más tarde, generalizando el concepto presentado en [15] y basándose en un modelo geométrico de polígonos con punciones introducido por S. Fomin, M. Shapiro y D. Thurston en [29], R. Schiffler en [38] introduce a la categoría de conglomerado de tipo D_n . En este caso, la categoría de diagonales la definió sobre un polígono de n vértices con una punción en su centro, y demostró que dicha categoría es equivalente a la categoría de conglomerado de tipo D_n . Como en el caso A_n , las triangulaciones están en correspondencia con los objetos inclinantes de la categoría de conglomerado. Más aún, las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo D_n son aquellas que provienen de una triangulación de un polígono de n vértices con una punción en su centro.

En este trabajo, calculamos el índice de nilpotencia de un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito en función del número de vértices que tiene su carcaj ordinario. Probamos el siguiente resultado.

Teorema E. *Sean Δ un carcaj Dynkin y A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo Δ . Denotamos por r_A el índice de nilpotencia de $\mathfrak{K}(\text{mod } A)$, entonces,*

(a) *Si $\overline{\Delta} = A_n$, entonces $r_A = n$ para $n \geq 1$.*

(b) *Si $\overline{\Delta} = D_n$, entonces $r_A = 2n - 3$ para $n \geq 4$.*

(c) Si $\overline{\Delta} = E_6$, entonces $r_A = 11$.

(d) Si $\overline{\Delta} = E_7$, entonces $r_A = 17$.

(e) Si $\overline{\Delta} = E_8$, entonces $r_A = 29$.

Por otra parte, es sabido que la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenece a \mathfrak{R}^n . Una pregunta natural es cuándo la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles está en \mathfrak{R}^{n+1} .

Hay varios trabajos hechos en esta dirección. K. Igusa y G. Todorov, dieron una solución parcial al problema en [33], demostrando que si se tienen n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles que forman parte de un camino seccional, entonces su composición no pertenece a \mathfrak{R}^{n+1} . Liu generalizó este resultado para ciertos caminos que denominó caminos preseccionales. En [21] C. Chaio, F. Coelho y S. Trepode, dieron condiciones necesarias y suficientes para que la composición de dos morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenezcan al radical al cubo. Más aún, los autores probaron que no existe una composición de dos morfismos que pertenezca al radical al cubo y no pertenezca al radical a la cuarta. Siguiendo con esta línea de trabajo, E. R. Alvares y F. Coelho han demostrado en [1] que si la composición de dos morfismos irreducibles pertenece a \mathfrak{R}^3 , entonces dicha composición pertenece a \mathfrak{R}^5 . En dicho artículo presentaron un ejemplo en el cual la composición de dos morfismos irreducibles pertenece a $\mathfrak{R}^5 \setminus \mathfrak{R}^6$.

Generalizando este concepto, C. Chaio, P. Le Meur y S. Trepode en [23] dieron caracterizaciones para que una composición no nula de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenezca a \mathfrak{R}^{n+1} . En el caso particular de componentes que tienen sucesiones que casi se parten con a lo sumo dos términos en el medio, C. Chaio probó en [19] que si la composición no nula de n morfismos irreducibles pertenece a \mathfrak{R}^{n+1} entonces pertenece a \mathfrak{R}^{n+3} .

En esta tesis continuamos con el estudio de la problemática que acabamos de mencionar. Probamos que tanto en las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin como en las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo de representación finito, la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenece a \mathfrak{R}^{n+1} si y sólo si dicha composición es nula.

Por otra parte, estudiamos el problema de encontrar el menor número natural t , con $t \geq 3$, para el cual la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenece a $\mathfrak{R}^{n+t} \setminus \mathfrak{R}^{n+t+1}$, y donde la composición de $n - 1$ morfismos no pertenezca a \mathfrak{R}^n .

Resolvimos el problema recién enunciado para $t \geq 4$.

En el caso de que $t = 3$, encontramos familias de álgebras donde existen n morfismos irreducibles tales que su composición pertenece a $\mathfrak{R}^{n+3} \setminus \mathfrak{R}^{n+4}$ pero donde $n - 1$ morfismos pertenecen a \mathfrak{R}^n . Sigue abierto el problema original para $t = 3$.

Finalmente, estudiamos una caracterización de cuándo en un álgebra existe un morfismo irreducible de M en τM , donde τM es el trasladado de Auslander-Reiten de M . Este problema está vinculado con el problema anterior para el caso $t = 3$.

Cabe destacar que estos últimos resultados, que consisten en estudiar las familias de álgebras tales que exista un morfismo irreducible de un módulo indecomponible a su trasladado de Auslander-Reiten, se comenzaron a estudiar en la Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, con una beca del Programa Escala para Estudiantes de Posgrado, otorgado por la Asociación de Universidades Grupo Montevideo, en colaboración con el Dr. Edson R. Alvares.

El trabajo está organizado de la siguiente manera.

El Capítulo 1 está destinado a introducir las nociones básicas y los resultados que utilizamos en esta tesis.

En el Capítulo 2 introducimos los conceptos relacionados con las álgebras de cuerdas. Luego determinamos el grado finito de cualquier morfismo irreducible a partir del carcaj con relaciones de un álgebra. En particular, calculamos el índice de nilpotencia de las álgebras de cuerdas de tipo de representación finito.

El Capítulo 3 lo destinamos al estudio de la composición de morfismos irreducibles y su relación con las potencias del radical. Particularmente, estudiamos la composición no nula de n morfismos irreducibles que pertenece a la potencia $n + 1$ del radical.

En el Capítulo 4 introducimos algunos conceptos de la teoría de inclinación que son esenciales para el desarrollo de los resultados obtenidos. Demostramos la Proposición B y la Proposición C basándonos esencialmente en las equivalencias presentadas en el Teorema de Inclinación. Además, aquí demostramos el Teorema A y el Teorema D. Por otra parte, determinamos el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra hereditaria de tipo de representación finito a partir de la cantidad de vértices que tiene su carcaj ordinario. Apoyándonos en dicho resultado, determinamos una cota para el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra inclinada iterada de tipo Dynkin.

Finalmente, dedicamos el Capítulo 5 a las álgebras inclinadas de conglomeración

do de tipo de representación finito. En la primer parte del capítulo demostramos el Teorema E usando la noción de álgebras inclinadas de conglomerado presentada en [13], mientras que en la segunda parte probamos los incisos (a) y (b) del Teorema E, utilizando la realización geométrica presentada en [15] y [38], respectivamente.

Esta tesis se llevó a cabo con el financiamiento de una Beca Interna Doctoral, otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y dirigida por la Dra. Claudia Chaió.

Capítulo 1

Preliminares.

A lo largo de este trabajo, consideraremos A un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Por $\text{mod } A$ entenderemos la categoría de los A -módulos a derecha finitamente generados y por $\text{ind}A$ la subcategoría plena de $\text{mod } A$ de A -módulos indecomponibles. Para denotar un objeto X de la categoría $\text{mod } A$, usualmente utilizaremos la notación $X \in \text{mod } A$.

Recordemos que una k -álgebra A es de dimensión finita si como k -espacio vectorial es de dimensión finita.

Comenzaremos recordando algunas nociones y resultados básicos, que serán esenciales para el desarrollo de esta tesis.

1.1. Categorías y funtores.

Para este trabajo es fundamental recordar los conceptos de categorías y funtores que daremos a continuación.

Definición 1.1.1 Una **categoría** es una terna $\mathcal{C} = (\text{Ob } \mathcal{C}, \text{Hom } \mathcal{C}, \circ)$, donde $\text{Ob } \mathcal{C}$ denota la **clase de objetos** de \mathcal{C} , $\text{Hom } \mathcal{C}$ denota la **clase de morfismos** de \mathcal{C} , y \circ es una operación parcial entre los morfismos de \mathcal{C} que satisface las siguientes condiciones:

- (a) Para cada par de objetos X e Y de \mathcal{C} asociamos el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, denominado conjunto de morfismos de X en Y , tal que para pares distintos de objetos $(X, Y) \neq (Z, U)$, se tiene que la intersección de los conjuntos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$ es vacía.

(b) Para cada terna de objetos X, Y, Z de \mathcal{C} , la operación

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

está definida y satisface las siguientes dos propiedades:

- (i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ y $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, U)$, con $U \in \mathcal{C}$.
- (ii) Para cada objeto X de \mathcal{C} , existe un elemento $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, llamado morfismo identidad, tal que si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ entonces $f \circ 1_X = f$ y $1_X \circ g = g$.

A un morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ lo representaremos por la expresión $f : X \rightarrow Y$.

Definición 1.1.2 Sea \mathcal{C} una categoría. Una categoría \mathcal{C}' es una **subcategoría** de \mathcal{C} si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (a) La clase $\text{Ob } \mathcal{C}'$ de objetos de \mathcal{C}' es una subclase de la clase $\text{Ob } \mathcal{C}$ de objetos de \mathcal{C} .
- (b) Si X, Y son objetos de \mathcal{C}' , entonces $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
- (c) La composición de morfismos en \mathcal{C}' es la misma que en \mathcal{C} .
- (d) Para cada objeto $X \in \mathcal{C}'$, el morfismo identidad $1'_X$ en $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$ coincide con el morfismo identidad 1_X en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Una subcategoría \mathcal{C}' de \mathcal{C} se dice **plena** si $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo par de objetos X, Y de \mathcal{C}' .

Son ejemplos de subcategorías plenas de $\text{mod } A$ las categorías $\text{Gen } M$ y $\text{add } M$, con $M \in \text{mod } A$, donde los objetos, en el primer caso, son los A -módulos generados por M , y en el segundo caso son sumas directas de sumandos directos de M .

A continuación recordaremos la definición de funtor entre categorías.

Definición 1.1.3 Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un **funtor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es **covariante** si a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ se le asigna un objeto $F(X) \in \mathcal{D}$, y a cada morfismo $h : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , un morfismo $F(h) : F(X) \rightarrow F(Y)$ en \mathcal{D} tales que se satisfacen las condiciones:

(a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo objeto X de \mathcal{C} .

(b) Para cada par de morfismos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{C} , se tiene la igualdad $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un **funtor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es **contravariante** si a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ se le asigna un objeto $F(X) \in \mathcal{D}$, y a cada morfismo $h : X \rightarrow Y$ en \mathcal{C} , un morfismo $F(h) : F(Y) \rightarrow F(X)$ en \mathcal{D} tales que se satisfacen las condiciones:

(a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo objeto X de \mathcal{C} .

(b) Para cada par de morfismos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ en \mathcal{C} , se tiene la igualdad $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Sean $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores covariantes. Un **morfismo functorial** $\varphi : F \rightarrow G$ es una familia $\varphi = \{\varphi_X\}_{X \in \text{Obj } \mathcal{C}}$ de morfismos $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ tales que, para cualquier morfismo $f : X \rightarrow Y$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

en \mathcal{D} es conmutativo. Decimos que φ es un **isomorfismo functorial** si, para todo $X \in \mathcal{C}$, $\varphi_X : F(X) \rightarrow G(X)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} .

Sean $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tres funtores covariantes, y $\varphi : F \rightarrow G$, $\phi : G \rightarrow H$ dos morfismos functoriales. La **composición de morfismos functoriales** $\phi\varphi : F \rightarrow H$ está dado por la familia $(\phi\varphi)_X = \phi_X\varphi_X$.

Definición 1.1.4 Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se denomina una **equivalencia de categorías** si existen un funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos functoriales $\varphi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$ y $\phi : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow FG$, donde $1_{\mathcal{C}}$ y $1_{\mathcal{D}}$ son los funtores identidad sobre las categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} , respectivamente. El funtor G se denomina el **funtor cuasi-inverso** de F , y decimos que \mathcal{C} y \mathcal{D} son categorías equivalentes.

Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor covariante. Para cada par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, F induce una aplicación $F : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, definida por $f \mapsto F(f)$. El funtor F se dice:

- **fiel**, si dicha aplicación es inyectiva.
- **pleno**, si dicha aplicación es suryectiva.

- **denso**, si para todo objeto $M \in \mathcal{D}$, existe un objeto $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong M$.

Se prueba que un funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si F es fiel, pleno y denso, [6, Apéndice, Teorema 2.5].

Se tienen las definiciones duales, considerando funtores contravariantes.

Dado M un A -módulo, los funtores $\text{Hom}_A(M, -)$, $- \otimes M$, $\text{Ext}_A^1(M, -)$ y $\text{Tor}_1^A(-, M)$, son ejemplos de funtores entre las categorías de módulos $\text{mod } A$ y $\text{mod } B$, donde $B = \text{End}_A(M)$ (ver Sección 4.1). En este trabajo utilizaremos fuertemente estos funtores, que los daremos por conocidos. El lector interesado puede referirse a [2, Capítulo IV, Capítulo V, Capítulo IX] para una lectura de los mismos.

1.2. Carcaj asociado a un álgebra y álgebras de caminos.

Definición 1.2.1 *Un carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ es una cuatro-upla que consiste en dos conjuntos: Q_0 el conjunto de vértices y Q_1 el conjunto de flechas, y dos aplicaciones $s, e : Q_1 \rightarrow Q_0$ que asocian a cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$, su vértice inicial $s(\alpha) = i$ y su vértice final $e(\alpha) = j$.*

El carcaj Q se dice **finito**, si los conjuntos Q_0 y Q_1 son finitos.

El **grafo subyacente** \overline{Q} del carcaj Q , es el grafo que se obtiene de Q sin tener en cuenta la orientación de las flechas.

Un carcaj Q es **conexo** si lo es su grafo subyacente \overline{Q} .

Un **camino** en un carcaj Q es una sucesión ordenada de flechas $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ tales que $e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para $1 \leq i < n$. Para cada vértice $i \in Q_0$, asociamos el camino ε_i de longitud cero, denominado **camino trivial**. Para un camino no trivial $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$, con $n \geq 1$, definimos $s(\gamma) = s(\alpha_1)$ y $e(\gamma) = e(\alpha_n)$.

Diremos que un camino no trivial $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ en un carcaj Q es un **ciclo orientado** si $s(\gamma) = e(\gamma)$.

Para cada flecha $\alpha : x \rightarrow y$, denotamos por $\alpha^{-1} : y \rightarrow x$ su inversa formal.

Un **paseo** de x a y en Q es una composición formal $\alpha_t^{\epsilon_t} \dots \alpha_2^{\epsilon_2} \alpha_1^{\epsilon_1}$ donde cada α_i es una flecha en Q y $\epsilon_i \in \{1, -1\}$ para todo i , con $e(\alpha_i^{\epsilon_i}) = s(\alpha_{i+1}^{\epsilon_{i+1}})$, $s(\alpha_1^{\epsilon_1}) = x$ y $e(\alpha_t^{\epsilon_t}) = y$.

Recordemos la definición de mutación de un carcaj en un vértice.

Definición 1.2.2 Sea Q un carcaj sin flechas múltiples, sin lazos y sin ciclos de longitud dos. Sea x un vértice de Q . La **mutación de Q en el vértice x** , $\mu_x(Q)$, transforma el carcaj Q en un nuevo carcaj $Q' = \mu_x(Q)$, que se construye de la siguiente manera:

- (1) Se agrega un nuevo vértice y .
- (2) En caso de existir un camino de la forma $i \rightarrow x \rightarrow j$, se analiza la existencia de una flecha de j a i :
 - I. Si existe una flecha $j \rightarrow i$, entonces ésta se elimina.
 - II. Si no existe una flecha $j \rightarrow i$, entonces se agrega una flecha $i \rightarrow j$.
- (3) Para todo vértice i , se reemplazan todas las flechas $i \rightarrow x$ por flechas $y \rightarrow i$, y se reemplazan todas las flechas $x \rightarrow i$ por flechas $i \rightarrow y$.
- (4) Se elimina el vértice x .

La definición anterior puede ser extendida a carcajes que posean flechas múltiples, pero para el contexto en el que trabajaremos no es necesario enunciarla.

Definición 1.2.3 Sea Q un carcaj finito y k un cuerpo. El **álgebra de caminos** kQ es el k -espacio vectorial cuya base es el conjunto de todos los caminos del carcaj Q (incluso los triviales).

Daremos en kQ una estructura de k -álgebra definiendo la siguiente multiplicación: dados dos caminos $\gamma_1 = \alpha_n \dots \alpha_1$ y $\gamma_2 = \beta_m \dots \beta_1$, donde α_i y β_i son flechas, se tiene que

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } e(\gamma_2) \neq s(\gamma_1), \\ \alpha_n \dots \alpha_1 \beta_m \dots \beta_1 & \text{si } e(\gamma_2) = s(\gamma_1). \end{cases}$$

En el caso de los caminos triviales definimos

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_1 = \varepsilon_i, \gamma_2 = \varepsilon_j \text{ con } i \neq j, \\ \gamma_2 & \text{si } \gamma_1 = \varepsilon_i, \gamma_2 = \beta_m \dots \beta_1, \text{ con } e(\gamma_2) = i, \\ \gamma_1 & \text{si } \gamma_1 = \alpha_n \dots \alpha_1, \gamma_2 = \varepsilon_i \text{ con } s(\gamma_1) = i. \end{cases}$$

Este producto se extiende por linealidad a todo kQ , obteniéndose una k -álgebra cuya unidad es $\sum_{i \in Q_0} \varepsilon_i$.

Puede probarse que si Q es conexo entonces kQ es una k -álgebra indecomponible, es decir, no es producto directo de dos k -álgebras, y que es de dimensión finita si y sólo si Q no tiene ciclos orientados.

Recordemos que dada A una k -álgebra de dimensión finita, existe un sistema completo de idempotentes ortogonales y primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$, tal que considerando A como A -módulo a derecha, entonces $A = e_1A \oplus \dots \oplus e_nA$.

El álgebra A se denomina **básica**, si $e_iA \not\cong e_jA$ para todo $i \neq j$. Diremos que A es **conexa** si 0 y 1 son los únicos idempotentes centrales de A , es decir, los únicos elementos idempotentes que conmutan con todo elemento de A .

Definimos el **carcaj ordinario** Q_A como sigue: los vértices Q_A son tantos como los idempotentes del sistema. A cada vértice i se le asocia el idempotente e_i , y el número de flechas que comienzan en el vértice i y terminan en el vértice j está dado por:

$$\dim_k[e_j (\text{rad } A / \text{rad}^2 A) e_i]$$

con la estructura natural de $A - A$ -bimódulo del cociente $\text{rad } A / \text{rad}^2 A$.

Es sabido que dada una k -álgebra A de dimensión finita, básica e indecomponible sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, existe un morfismo de k -álgebras $\varphi : kQ_A \rightarrow A$ que es sobreyectivo, y cuyo núcleo I es un **ideal admisible**, es decir, tal que $r^n \subseteq I \subset r^2$, donde r es el ideal de kQ_A generado por las flechas.

Gabriel probó el siguiente resultado, que muestra la importancia de la noción de álgebra de caminos.

Teorema 1.2.4 [6, Capítulo II, Teorema 3.7] *Toda k -álgebra A de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, básica y conexa es isomorfa al cociente del álgebra de caminos del carcaj ordinario asociado a A sobre un ideal admisible, es decir, $A \cong kQ_A/I$.*

Definición 1.2.5 *Sea A una k -álgebra de dimensión finita, básica y conexa. Un isomorfismo $A \simeq kQ_A/I$, donde I es un ideal admisible de kQ_A , se denomina una **presentación del álgebra A** .*

*Dado un carcaj Q e I un ideal admisible de kQ , al par (Q, I) se lo denomina **carcaj con relaciones**.*

A continuación presentaremos el concepto de representaciones de un carcaj con relaciones.

Sea (Q, I) un carcaj finito con relaciones. Una **representación** $M = (M_a, f_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ de (Q, I) se define de la siguiente manera:

- A cada vértice $a \in Q_0$ se le asocia un k -espacio vectorial M_a ;
- A cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ se le asocia una aplicación k -lineal $f_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.

Más aún, si $\sum_m \alpha_{m_{s_m}} \dots \alpha_{m_1} \in I$ entonces la suma de aplicaciones lineales $\sum_m f_{\alpha_{m_{s_m}}} \dots f_{\alpha_{m_1}}$ es nula.

Una representación M es de dimensión finita si cada espacio vectorial M_a es de dimensión finita.

Sean (Q, I) un carcaj con relaciones y $M = (M_a, f_\alpha)$, $N = (N_a, g_\alpha)$ dos representaciones de (Q, I) . Un **morfismo de representaciones** $\phi : M \rightarrow N$ es un conjunto de aplicaciones k -lineales $\phi = (\phi_a)_{a \in Q_0}$ tales que para toda flecha $\alpha : a \rightarrow b$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{f_\alpha} & M_b \\ \phi_a \downarrow & & \downarrow \phi_b \\ N_a & \xrightarrow{g_\alpha} & N_b. \end{array}$$

Denotamos por $\text{rep}_k(Q, I)$ a la categoría k -lineal de representaciones de dimensión finita del carcaj con relaciones (Q, I) .

El siguiente resultado es de gran importancia.

Teorema 1.2.6 *Sea A una k -álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y $A \simeq kQ_A/I$ una presentación de A . Entonces existe una equivalencia de categorías*

$$F : \text{mod } A \rightarrow \text{rep}_k(Q_A, I)$$

1.3. Morfismos irreducibles y radical de la categoría de módulos.

En esta sección veremos cómo relacionar los morfismos irreducibles de $\text{mod } A$ y el radical de dicha categoría. Para ello recordemos las siguientes definiciones.

Consideremos un álgebra A . Diremos que el morfismo $f : X \rightarrow Y$ en $\text{mod } A$ es una **sección** o un **monomorfismo que se parte** si existe un morfismo $g :$

$Y \rightarrow X$ tal que $gf = 1_X$. Dualmente, diremos que f es una **retracción** o un **epimorfismo que se parte** si existe un morfismo $h : Y \rightarrow X$ tal que $fh = 1_Y$.

Definamos el radical de la categoría de módulos, [4, Capítulo 1, Sección 3].

Definición 1.3.1 *Sea A un álgebra y X e Y en $\text{mod } A$. El radical de $\text{Hom}_A(X, Y)$, que denotaremos por $\mathfrak{R}(X, Y)$, es el conjunto de todas las aplicaciones $f \in \text{Hom}_A(X, Y)$ tales que hfg no es un isomorfismo, cualesquiera sean $g : M \rightarrow X$ y $h : Y \rightarrow M$ con $M \in \text{ind } A$.*

Inductivamente, pueden definirse las potencias del radical como sigue:

” $f \in \mathfrak{R}^n(X, Y)$ si y sólo si existen $M_i \in \text{mod } A$ tales que $f = \sum_{i=1}^r h_i g_i$ con $g_i \in \mathfrak{R}(X, M_i)$ y $h_i \in \mathfrak{R}^{n-1}(M_i, Y)$.”

Finalmente, se define el **radical infinito** como

$$\mathfrak{R}^\infty(X, Y) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}^n(X, Y)$$

En el caso en que X e Y son módulos indescomponibles de $\text{mod } A$, entonces:

$$\mathfrak{R}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ no es un isomorfismo}\}$$

Observación 1.3.2 *La sucesión formada por las potencias del radical es una cadena descendente que se estabiliza, es decir, se verifica lo siguiente: Dados $X, Y \in \text{mod } A$,*

$$\mathfrak{R}(X, Y) \supseteq \mathfrak{R}^2(X, Y) \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{R}^n(X, Y) \supseteq \dots$$

y existe un número natural m tal que $\mathfrak{R}^m(X, Y) = \mathfrak{R}^\infty(X, Y)$, [8, Capítulo V, Lema 7.2].

Recordemos que un álgebra A es de **tipo de representación finito** si el número de representantes de clases de isomorfismos de A -módulos indescomponibles es finito. En caso contrario decimos que el álgebra es de **tipo de representación infinito**.

El siguiente resultado caracteriza a las álgebras de tipo de representación finito en función al radical de la categoría de módulos.

Teorema 1.3.3 *Un álgebra A es de tipo de representación finito si y sólo si $\mathfrak{R}^\infty(\text{mod } A) = 0$, es decir, $\mathfrak{R}^\infty(X, Y) = 0$ para todo X e Y en $\text{mod } A$.*

Definición 1.3.4 Sea A un álgebra de tipo de representación finito. Al menor número entero no negativo m que satisface $\mathfrak{R}^m(\text{mod } A) = 0$ lo denominamos **índice de nilpotencia del radical de mod A** . A dicho número lo vamos a denotar por r_A .

Definamos ahora el concepto de morfismo irreducible.

Definición 1.3.5 Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en $\text{mod } A$ se dice **irreducible** si:

- (i) f no es sección ni retracción, y
- (ii) Si f se factoriza $f = gh$, donde $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, con $Z \in \text{mod } A$, entonces h es sección o g es retracción.

Observación 1.3.6 [6, Capítulo IV, Pág. 100] Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo irreducible en $\text{mod } A$, entonces f es un monomorfismo propio o f es un epimorfismo propio.

Existe una importante relación entre el radical y los morfismos irreducibles, que está dada por el siguiente resultado:

Proposición 1.3.7 Si X o Y son A -módulos indescomponibles y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible entonces $f \in \mathfrak{R}(X, Y) \setminus \mathfrak{R}^2(X, Y)$.

La recíproca es cierta si ambos módulos son indescomponibles, y es un resultado debido a R. Bautista (ver [9]).

Dado un morfismo irreducible $f : X \rightarrow Y$, con X e Y A -módulos indescomponibles, definimos los cocientes

$$\text{Irr}(X, Y) = \mathfrak{R}(X, Y) / \mathfrak{R}^2(X, Y)$$

y

$$k_X = \text{End}(X) / \text{rad}(\text{End}(X)).$$

Así, $\text{Irr}(X, Y)$ resulta un k_X - k_Y -bimódulo, es decir, $\text{Irr}(X, Y)$ tiene estructura de k_X -módulo a izquierda y k_Y -módulo a derecha.

Más aún, $\text{Irr}(X, Y)$ resulta un k -espacio vectorial.

Cabe destacar que los morfismos irreducibles brindan información de los morfismos de la categoría $\text{mod } A$, dado por el siguiente resultado.

Proposición 1.3.8 Sean X, Y módulos indescomponibles. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo que no es isomorfismo, entonces $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i + \beta$, donde cada $\alpha_i : X \rightarrow Y$ es una composición finita de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y β pertenece a $\mathfrak{R}^\infty(X, Y)$.

Si A es un álgebra de tipo de representación finito entonces $\mathfrak{R}^\infty(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \text{mod } A$. Luego, en virtud de la proposición anterior, todo morfismo entre módulos indescomponibles que no es un isomorfismo se escribe como una suma finita de composiciones de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles.

El siguiente resultado nos será de gran utilidad a los largo de esta tesis.

Proposición 1.3.9 [8, Proposición 7.4] Sean M y N módulos indescomponibles en $\text{mod } A$ y consideremos $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N)$, para $n \geq 2$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones.

- (a) (i) Existen un número natural s , A -módulos indescomponibles X_1, \dots, X_s , morfismos $f_i \in \mathfrak{R}_A(M, X_i)$ y morfismos $g_i : X_i \rightarrow N$, donde cada g_i es una suma finita de composiciones de $n - 1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, tales que $f = \sum_{i=1}^s g_i f_i$.
- (ii) Si $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N) \setminus \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$, entonces por lo menos uno de los morfismos f_i del inciso (i) es irreducible y $f = u + v$, donde u es no nulo y es una suma de composiciones de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles y $v \in \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$.
- (b) (i) Existen un número natural t , A -módulos indescomponibles Y_1, \dots, Y_t , morfismos $f_i : M \rightarrow Y_i$ y morfismos $g_i \in \mathfrak{R}_A(Y_i, N)$, donde cada f_i es una suma finita de composiciones de $n - 1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, tales que $f = \sum_{i=1}^t g_i f_i$.
- (ii) Si $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N) \setminus \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$, entonces por lo menos uno de los morfismos g_i del inciso (i) es irreducible.

1.4. Carcaj de traslación.

En esta sección introduciremos la noción de carcaj de traslación y presentaremos algunos resultados esenciales para este trabajo.

Definición 1.4.1 Consideremos Γ un carcaj localmente finito y sin lazos. Supongamos que Γ no tiene flechas múltiples. Para cada $x \in \Gamma_0$ denotamos por

x^- (x^+) al conjunto de vértices que son predecesores inmediatos (sucesores inmediatos, respectivamente) de x . Sea τ una biyección que tiene por dominio y codominio al conjunto de vértices Γ_0 .

El par (Γ, τ) se denomina un **carcaj de traslación** si para cada $x \in \Gamma_0$ tal que τx existe y cada vértice $y \in x^-$, la cantidad de flechas de y a x en Γ es igual a la cantidad de flechas de τx a y en Γ .

La biyección τ en la definición anterior es llamada la **traslación** de (Γ, τ) . Los vértices x en Γ tales que τx ($\tau^{-1}x$) no están definidos, se denominan **vértices proyectivos** (**vértices inyectivos**, respectivamente). Para cada flecha $\alpha : y \rightarrow x$, con x no proyectivo, denotaremos por $\sigma(\alpha)$ la flecha $\tau x \rightarrow y$.

El subcarcaj pleno de Γ formado por un vértice no proyectivo x , su trasladado no inyectivo τx y por el conjunto $(\tau x)^+ = x^-$ es llamado la **mallá** comenzando en τx y terminando en x .

Denotaremos por $k(\Gamma)$ la **categoría de mallás** de Γ , es decir la categoría que resulta del cociente de la categoría de caminos $k\Gamma$ con el ideal generado por los morfismos $\sum_{\alpha: \cdot \rightarrow x} \alpha \sigma(\alpha)$, donde $\alpha : \cdot \rightarrow x$ es una flecha que termina en x , siendo x un vértice no proyectivo.

Sea Γ una componente conexa de un carcaj de traslación. Un **caminó en Γ** es una secuencia $x_1 \xrightarrow{f_1} x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \xrightarrow{f_n} x_{n+1}$, donde x_i, f_i son vértices y flechas de Γ , respectivamente. Dicho camino es un **ciclo** si se satisface que $X_1 \cong X_{n+1}$.

Un camino $y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow y_n$ en Γ se dice **seccional** si $\tau^{-1}Y_i \not\cong Y_{i+2}$ para $i = 0, \dots, n - 2$.

Dos caminos en Γ son llamados **caminos paralelos** si tienen el mismo vértice inicial y el mismo vértice final.

Una componente conexa Γ se dice **componente con longitud** si todos los caminos paralelos en Γ tienen la misma longitud. En caso contrario, se dice que Γ es una **componente sin longitud**. Si Γ es una componente con longitud y $x, y \in \Gamma$, decimos que la **longitud** entre x e y , $\ell(x, y)$, es igual n si existe un camino en Γ de x a y de largo n .

Observemos que una componente con longitud no tiene ciclos orientados.

Una componente conexa Γ de un carcaj de traslación se dice **dirigida** si no existen ciclos en Γ .

En esta tesis probaremos que ciertas componentes de un carcaj de traslación son con longitud. Para este propósito es necesario presentar la noción de grupo fundamental de un carcaj de traslación. Para ello necesitamos definir un relación de homotopía, la cual es una relación de equivalencia.

Definimos la **relación de homotopía** en Γ como la menor relación de equivalencia \sim en el conjunto de todos los paseos de Γ tales que:

- (a) Si $\alpha : x \rightarrow y$ es una flecha, entonces $\alpha^{-1}\alpha \sim e_x$ y $\alpha\alpha^{-1} \sim e_y$.
- (b) Si x es no proyectivo, entonces $\alpha\sigma(\alpha) \sim \beta\sigma(\beta)$ para todo par de flechas α, β que terminen en x .
- (c) Si $u \sim v$, entonces $www' \sim vvv'$ cada vez que dicha composición tenga sentido.

Sea $x \in \Gamma_0$ arbitrario. Denotemos por $\pi_1(\Gamma, x)$ al conjunto de clases de equivalencia \bar{u} de caminos que comienzan y terminan en x . Dicho conjunto tiene estructura de grupo definida por la operación $\bar{u}.\bar{v} = \overline{u.v}$. Como Γ es conexo, se puede demostrar que $\pi_1(\Gamma, x)$ no depende de la elección de x . Por lo tanto, a $\pi_1(\Gamma, x)$ lo notaremos simplemente por $\pi_1(\Gamma)$ y lo llamaremos el **grupo fundamental** de Γ .

Un carcaj de traslación se dice **simplemente conexo** si es conexo y $\pi_1(\Gamma) = 1$.

Se puede probar que un carcaj de traslación es simplemente conexo si su gráfico de órbitas es de tipo árbol.

Dada Γ una componente conexa de un carcaj de traslación, el **gráfico de órbitas** de Γ , $O(\Gamma)$, se construye de la siguiente manera; ponemos un punto por cada τ -órbita distinta $O(M)$, con $M \in \Gamma$, y existe una arista entre dos puntos distintos $O(M)$ y $O(N)$ de $O(\Gamma)$ si existen $m, n \in \mathbb{Z}$ y un morfismo irreducible $\tau^m M \rightarrow \tau^n N$ o $\tau^n N \rightarrow \tau^m M$. El número de aristas es igual a $\dim_k \text{Irr}(\tau^m M, \tau^n N)$ o $\dim_k \text{Irr}(\tau^n N, \tau^m M)$, respectivamente. Una componente Γ es de **tipo árbol** si su gráfico de órbitas $O(\Gamma)$ lo es.

El siguiente resultado, debido a K. Bongartz y P. Gabriel en [11], nos da una caracterización para determinar si una componente de un carcaj de traslación es con longitud.

Teorema 1.4.2 *Sea Γ una componente conexa de un carcaj de traslación. Si Γ es simplemente conexo, entonces Γ es una componente con longitud.*

1.5. Carcaj de Auslander-Reiten y sucesiones que casi se parten.

En esta sección definiremos el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\text{mod } A}$, que es una herramienta muy útil para visualizar gran parte de la categoría de módulos del álgebra A .

El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\text{mod } A}$ de $\text{mod } A$ es un caso particular de carcaj de traslación con posibles flechas múltiples. La traslación τ , denominado el trasladado de Auslander-Reiten, es la composición de dos funtores bien conocidos, la traspuesta Tr y la dualidad estándar $D = \text{Hom}_k(-, k)$, es decir, $\tau = DTr$ y $\tau^{-1} = TrD$ ([6, Capítulo IV, Definición 2.3]).

Definición 1.5.1 *Sea A es un álgebra de dimensión finita, básica y conexa. El carcaj de Auslander-Reiten, $\Gamma_{\text{mod } A}$, de $\text{mod } A$ es un carcaj definido de la siguiente manera.*

- (a) *Los vértices de $\Gamma_{\text{mod } A}$ son las clases de isomorfismo $[X]$ de módulos indescomponibles X en $\text{mod } A$.*
- (b) *Sean $[M]$ y $[N]$ dos vértices en $\Gamma_{\text{mod } A}$ correspondientes a los módulos indescomponibles M y N en $\text{mod } A$, respectivamente. Las flechas $[M] \rightarrow [N]$ están en correspondencia biyectiva con una base de vectores del k -espacio vectorial $\text{Irr}(M, N)$.*

Si A es una k -álgebra de tipo de representación finita, entonces el carcaj $\Gamma_{\text{mod } A}$ no tiene flechas múltiples, es decir $\dim_k(\text{Irr}(M, N)) \leq 1$ para M, N A -módulos indescomponibles, ver [8, Capítulo VII, Corolario 2.3].

Para realizar el objetivo de este trabajo vamos a analizar caminos de $\Gamma_{\text{mod } A}$. A continuación daremos la definición.

Definición 1.5.2 *Una sucesión de morfismos no nulos*

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$$

con $X_i \in \text{ind } A$ para $i = 1, \dots, n+1$, se dice un camino en $\text{mod } A$ si los morfismos f_i no son isomorfismos para $i = 1, \dots, n$.

Sea Γ una componente del carcaj de Auslander-Reiten, $\Gamma_{\text{mod } A}$. Un camino en $\text{mod } A$ es llamado un camino en Γ , si los morfismos f_i son irreducibles para $i = 1, \dots, n$.

Sean M y N dos módulos indescomponibles de $\text{mod } A$. En general, denotaremos por $M \rightsquigarrow N$ a los caminos de M a N de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles.

Daremos la definición de sucesión que casi se parte, para ello recordemos algunas definiciones previas.

Definición 1.5.3 (a) Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de A -módulos. Se dice que f es **minimal a izquierda** si $hf = f$ implica que h es automorfismo, donde h es morfismo en $\text{mod } A$. Se dice que f **casi se parte a izquierda** si

(i) no es una sección, y

(ii) para todo morfismo $u : X \rightarrow U$ en $\text{mod } A$ que no es sección, existe $u' : Y \rightarrow U$ en $\text{mod } A$ tal que $u'f = u$.

Finalmente, f se dice **minimal que casi se parte a izquierda** si es minimal a izquierda y casi se parte a izquierda.

(b) Sea $g : X \rightarrow Y$ un morfismo de A -módulos. Se dice que g es **minimal a derecha** si $gh = g$ implica que h es automorfismo, donde h es morfismo en $\text{mod } A$. Se dice que g **casi se parte a derecha** si

(i) no es una retracción, y

(ii) para todo morfismo $v : V \rightarrow Y$ en $\text{mod } A$ que no es retracción, existe $v' : V \rightarrow X$ en $\text{mod } A$ tal que $gv' = v$.

Finalmente, g se dice **minimal que casi se parte a derecha** si es minimal a derecha y casi se parte a derecha.

Definición 1.5.4 Una sucesión exacta corta de A -módulos

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

que no se parte, se dice una **sucesión que casi se parte** si:

(a) f es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda.

(b) g es un morfismo minimal que casi se parte a derecha.

El siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en [6, Capítulo IV, Teorema 1.13], resume las propiedades y caracterizaciones de las sucesiones que casi se parten.

Teorema 1.5.5 Sea $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta corta. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) La sucesión casi se parte.
- (b) L es indescomponible y g es un morfismo que casi se parte a derecha.
- (c) N es indescomponible y f es un morfismo que casi se parte a izquierda.
- (d) f es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda.
- (e) g es un morfismo minimal que casi se parte a derecha.
- (f) L, N son indescomponibles y f, g son irreducibles.

Recordemos que el **radical** de un módulo M , $\text{rad } M$, es la intersección de todos los submódulos maximales de M . El **top** de M , $\text{top } M$ se define como el cociente de M sobre su radical, es decir, $\text{top } M = M/\text{rad } M$.

Sea M un A -módulo. El **zócalo** de M , $\text{soc } M$, es el submódulo de M generado por todos los submódulos simples de M .

Los únicos morfismos minimales que casi se parten a derecha que no son suryectivos son de la forma $\text{rad } P \hookrightarrow P$, con P un A -módulo proyectivo indescomponible.

Los únicos morfismos minimales que casi se parten a izquierda que no son inyectivos son de la forma $I \twoheadrightarrow I/\text{soc } I$, con I un A -módulo inyectivo indescomponible.

En virtud de ello, recordemos el siguiente resultado.

Lema 1.5.6 (a) Sea P un A -módulo indescomponible proyectivo. $f : X \longrightarrow P$ es un morfismo minimal que casi se parte a derecha si y sólo si f es un monomorfismo, con imagen $\text{rad } P$.

(b) Sea I un A -módulo indescomponible inyectivo, entonces $g : I \longrightarrow Y$ es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda si y sólo si g es un epimorfismo con núcleo $\text{soc } I$.

La siguiente proposición nos brinda un método constructivo para calcular el trasladado de Auslander-Reiten. Primero recordemos el funtor Nakayama:

Definición 1.5.7 El **funtor Nakayama** de $\text{mod } A$ se define como

$$\nu = D\text{Hom}_A(-, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A.$$

El funtor Nakayama induce una equivalencia de categorías entre las subcategorías plenas de $\text{mod } A$, $\text{proj } A$ e $\text{inj } A$, donde la primera tiene como objetos a los módulos proyectivos, y la segunda a los módulos inyectivos, ([6, Capítulo III, Proposición 2.10]).

Para presentar la próxima proposición es necesario recordar la definición de presentación proyectiva minimal de un módulo.

Definición 1.5.8 Consideremos $M \in \text{mod } A$. Un epimorfismo $h : P \rightarrow M$ se denomina la **cubierta proyectiva** de M , si P es un módulo proyectivo y si para cada submódulo X de P , la igualdad $\text{Ker } h + X = P$ implica que $X = P$.

Una sucesión exacta $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ es una **presentación proyectiva minimal** del módulo M , si los morfismos $P_0 \xrightarrow{p_0} M$ y $P_1 \xrightarrow{p_0} \text{Ker } p_0$ son cubiertas proyectivas.

Consideremos $L \in \text{mod } A$. Un monomorfismo $u : L \rightarrow I$ se denomina la **envolvente inyectiva** de L , si I es un módulo inyectivo y cada submódulo no nulo X de I tiene intersección no nula con $\text{Im } u$.

Una sucesión exacta $0 \rightarrow L \xrightarrow{u^0} I^0 \xrightarrow{u^1} I^1$ es una **presentación inyectiva minimal** del módulo L , si los morfismos $L \xrightarrow{u^0} I^0$ y $\text{Im } u^1 \hookrightarrow I^1$ son envolventes inyectivas.

Proposición 1.5.9 Sea $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M$ una presentación proyectiva minimal del A -módulo M . Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0$$

donde ν es el funtor Nakayama.

Se puede probar que si M y N son módulos indescomponibles en $\text{mod } A$, entonces:

- (a) El módulo τM es nulo si y sólo si M es proyectivo.
- (b) El módulo $\tau^{-1}N$ es nulo si y sólo si N es inyectivo.
- (c) Si M es un módulo no proyectivo, entonces τM es un módulo indescomponible no inyectivo y $\tau^{-1}\tau M \cong M$.
- (d) Si N es un módulo no inyectivo, entonces $\tau^{-1}N$ es un módulo indescomponible no proyectivo y $\tau\tau^{-1}N \cong N$.

Teorema 1.5.10 *Sea A un álgebra de artín.*

- (1) *Si M es un módulo indescomponible no proyectivo entonces existe una sucesión que casi se parte que termina en M :*

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow Z \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

- (2) *Si M es un módulo indescomponible no inyectivo entonces existe una sucesión que casi se parte que comienza en M :*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}M \longrightarrow 0.$$

Se puede demostrar que las sucesiones que casi se parten son únicas, salvo isomorfismos.

Definición 1.5.11 *Sea A un álgebra y consideremos M un A -módulo no proyectivo (no inyectivo) indescomponible. Denotamos por $\alpha(M)$ ($\alpha'(M)$, respectivamente) el número de sumandos indescomponibles del término del medio que tiene la sucesión que casi se parte que termina (que comienza, respectivamente) en M .*

Sea Γ una componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$. Decimos que $\alpha(\Gamma) \leq m$, para algún número natural m , si $\alpha(M)$ y $\alpha'(M)$ es menor o igual que m para todo $M \in \Gamma$, siempre y cuando las sucesiones estén definidas.

Observación 1.5.12 *La sucesión que casi se parte que empieza en un A -módulo simple proyectivo $S_i = P_i$ tiene la siguiente forma:*

$$0 \rightarrow S_i \rightarrow \bigoplus_{j \neq i} P_j^{m_j} \rightarrow \tau^{-1}S_i \rightarrow 0$$

donde S_i es el simple proyectivo relacionado con el vértice $i \in (Q_A)_0$, P_j representa al módulo proyectivo indescomponible relacionado con el vértice $j \in (Q_A)_0$ y $m_j = \dim_k \text{Irr}(S_i, P_j)$.

A continuación presentaremos la fórmula de Aulander-Reiten.

Teorema 1.5.13 [6, Capítulo IV, 2.13] *Sea A una k -álgebra y sean M, N dos A -módulos en $\text{mod } A$. Entonces existen isomorfismos*

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M)$$

que son funtoriales en ambas variables.

Nota: $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$ es el k -espacio vectorial de morfismos de M a N que está definido como el cociente de espacios vectoriales

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{P}(M, N)$$

donde $\mathcal{P}(M, N)$ denota al subconjunto de $\text{Hom}_A(M, N)$ de los morfismos que factorizan por un A -módulo proyectivo.

Asimismo $\overline{\text{Hom}}_A(M, N)$ es el k -espacio vectorial de morfismos de M a N que está definido como el cociente de espacios vectoriales

$$\overline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{I}(M, N)$$

donde $\mathcal{I}(M, N)$ denota al subconjunto de $\text{Hom}_A(M, N)$ de los morfismos que factorizan por un A -módulo inyectivo.

Recordemos que un A -módulo M tiene **dimensión proyectiva**, $\text{dp } M$, igual a m , si existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \rightarrow 0$$

con P_i A -módulos proyectivos, para $i = 1, \dots, m$, y no existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \rightarrow P_{m-1} \xrightarrow{h_{m-1}} P_{m-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \rightarrow 0$$

con P_i A -módulos proyectivos, para $i = 1, \dots, m - 1$.

Dualmente se define la **dimensión inyectiva**, $\text{di } M$, de un A -módulo M .

Se puede demostrar que si $\text{dp } M \leq 1$ y N es arbitrario, entonces existe un isomorfismo k -lineal $\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\text{Hom}_A(N, \tau M)$, [6, Capítulo IV, Corolario 2.14].

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.5.14 [6, Capítulo IV, Corolario 2.15] *Sean A un álgebra y M, N módulos en $\text{mod } A$.*

(a) *Si $\text{dp } M \leq 1$ y $\text{di } N \leq 1$ entonces existe un isomorfismo k -lineal*

$$\text{Hom}_A(N, \tau M) \cong \text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M).$$

(b) *Si $\text{dp } M \leq 1$, $\text{di } \tau N \leq 1$ y N es un módulo indescomponible no proyectivo entonces existe un isomorfismo k -lineal*

$$\text{Hom}_A(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}_A(N, M).$$

(c) *Si $\text{dp } \tau^{-1}M \leq 1$, $\text{di } N \leq 1$ y M es un módulo indescomponible no inyectivo entonces existe un isomorfismo k -lineal*

$$\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, \tau^{-1}M) \cong \text{Hom}_A(N, M).$$

1.6. Álgebras hereditarias.

En esta sección introduciremos las álgebras hereditarias, y daremos algunas caracterizaciones de las mismas.

Definición 1.6.1 *Un álgebra A se dice **hereditaria a derecha** si cualquier ideal a derecha de A es un A -módulo proyectivo.*

*Dualmente se define álgebra **hereditaria a izquierda**.*

Mencionemos algunas caracterizaciones de las álgebras hereditarias a derecha. El lector interesado puede referirse a [6, Capítulo VII, Sección 1].

Lema 1.6.2 *Sea A un álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *A es hereditaria a derecha.*
- (b) *La dimensión global de A es a lo sumo uno.*
- (c) *Cada submódulo de un A -módulo proyectivo a derecha es proyectivo.*
- (d) *Cada cociente de un A -módulo inyectivo a derecha es inyectivo.*
- (e) *Cada submódulo de un A -módulo proyectivo a derecha finitamente generado es proyectivo.*
- (f) *Cada cociente de un A -módulo inyectivo a derecha finitamente generado es inyectivo.*
- (g) *El radical de cualquier A -módulo proyectivo a derecha finitamente generado es proyectivo.*
- (h) *El cociente de un A -módulo inyectivo a derecha finitamente generado sobre su zócalo es inyectivo.*

Un álgebra de dimensión finita es hereditaria a derecha si y sólo si es hereditaria a izquierda. Por lo tanto, de ahora en adelante vamos a mencionar a las álgebras hereditarias sin hacer ninguna especificación.

Lema 1.6.3 [6, Capítulo VII, Lema 1.6] *Sea A una k -álgebra hereditaria básica, e y e' idempotentes primitivos de A . Entonces existe un isomorfismo de k -espacios vectoriales*

$$\text{Irr}(e'A, eA) \cong e(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e'.$$

La siguiente es una caracterización muy importante de las álgebras hereditarias:

Lema 1.6.4 [6, Capítulo VII, Teorema 1.7]

- (a) Si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico, entonces el álgebra $A = kQ$ es hereditaria y $Q_A = Q$.
- (b) Si A es un álgebra hereditaria básica y conexa y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de A , entonces
- (i) el carcaj Q_A de A es finito, conexo y acíclico.
 - (ii) las k -álgebras A y kQ_A son isomorfas.

Como una consecuencia inmediata del Lema 1.6.3 se deduce el siguiente resultado.

Lema 1.6.5 Sea $A \simeq kQ_A$ un álgebra hereditaria. Existe un morfismo irreducible $f : P_b \rightarrow P_a$ entre módulos proyectivos indescomponibles en $\text{mod } A$ si y sólo si existe una flecha $a \rightarrow b$ en Q_A .

Análogamente se puede enunciar el resultado anterior para módulos inyectivos.

A continuación enunciaremos el teorema de Gabriel, que caracteriza a las álgebras hereditarias de tipo de representación finito.

Teorema 1.6.6 [6, Capítulo VII, Teorema 5.10] Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q . Entonces el álgebra A es de tipo de representación finito si y sólo si el grafo subyacente \overline{Q} de Q es uno de los diagramas Dynkin, los cuales son:

$$A_n : \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad n \geq 1$$

$$D_n : \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \quad n \geq 4$$

$$E_6 : \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

$$E_7 : \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

$$E_8 : \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \end{array}$$

Observación 1.6.7 A partir del Lema 1.6.4 y del Teorema 1.6.6, podemos afirmar que los diagramas Dynkin representan álgebras hereditarias de tipo de representación finito.

1.7. Grados de morfismos irreducibles

En esta sección introduciremos el concepto de grado de un morfismo irreducible, dado por S. Liu en [36]. Esta herramienta es de gran importancia para presentar un resultado de C. Chaio [16], que será fundamental para la demostración de los resultados principales de esta tesis.

Definición 1.7.1 Sea A un álgebra de artín y sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible en $\text{mod } A$ con X o Y indescomponibles. Decimos que el **grado a izquierda** de f es **infinito** si, para cualquier entero positivo n , cualquier $Z \in \text{mod } A$ y cualquier morfismo $g \in \mathfrak{R}^n(Z, X) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(Z, X)$, tenemos que $fg \notin \mathfrak{R}^{n+2}(Z, X)$. En caso contrario, decimos que el **grado a izquierda** de f es igual a m , si m es el menor entero positivo tal que existe un morfismo $g \in \mathfrak{R}^m(Z, X) \setminus \mathfrak{R}^{m+1}(Z, X)$ para algún $Z \in \text{mod } A$, tal que $fg \in \mathfrak{R}^{m+2}(Z, X)$. Notamos al grado a izquierda de f por $d_l(f)$.

Dualmente, podemos definir el **grado a derecha** de f , que es denotado por $d_r(f)$.

K. Igusa y G. Todorov demostraron el siguiente resultado, el cual es muy utilizado en la teoría de grados de morfismos irreducibles.

Proposición 1.7.2 [33, Apéndice] Sea A un álgebra de artín y para $i = 1, \dots, n$ sean $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles, donde X_j es un módulo indescomponible en $\text{mod } A$ para cada $j = 1, \dots, n + 1$. Si el camino $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$ es seccional, entonces se verifica que

$$f_n \dots f_1 \in \mathfrak{R}^n(X_1, X_{n+1}) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(X_1, X_{n+1}).$$

Como una de las primeras caracterizaciones en la teoría de grados, S. Liu probó el siguiente resultado.

Proposición 1.7.3 [36, Proposición 1.12] Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible en $\text{mod } A$ con X o Y A -módulos indescomponibles. Entonces,

- (1) $d_l(f) = 1$ si y sólo si f es un morfismo que casi se parte minimal a derecha sobreyectivo.

(2) $d_r(f) = 1$ si y sólo si f es un morfismo que casi se parte minimal a izquierda inyectivo.

Los siguientes resultados, dados en el contexto de álgebras de dimensión finita sobre cuerpos algebraicamente cerrados, son de gran utilidad para el cálculo del grado de un morfismo irreducible.

Teorema 1.7.4 [23, Teorema C] Sean A un álgebra de tipo de representación finito y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible con X indescomponible. Sea Γ la componente de Auslander-Reiten de A que contiene a X y sea $n \in \mathbb{N}$.

(a) Si $d_l(f) = n$, entonces existen $Z \in \Gamma$ y $h \in \mathfrak{R}^n(Z, X) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(Z, X)$ tales que $fh = 0$.

(b) Si $d_r(f) = n$, entonces existen $Z \in \Gamma$ y $h \in \mathfrak{R}^n(Y, Z) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(Y, Z)$ tales que $hf = 0$.

Proposición 1.7.5 [23, Proposición 3.4] Sean A un álgebra de tipo de representación finito y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo irreducible en $\text{mod } A$ con X un módulo indescomponible. Sea Γ la componente de Auslander-Reiten de $\Gamma_{\text{mod } A}$ que contiene a X y n un número entero, tal que $n \geq 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $d_l(f) = n$.

(b) f es epimorfismo y el morfismo inclusión $\ker(f) : \text{Ker}(f) \hookrightarrow X$ es tal que $\ker(f) \in \mathfrak{R}^n(\text{Ker}(f), X) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(\text{Ker}(f), X)$.

El siguiente resultado dado en [21] caracteriza a los grados finitos sobre componentes Γ de $\Gamma_{\text{mod } A}$ con $\alpha(\Gamma) \leq 2$.

Proposición 1.7.6 Sea A un álgebra y Γ una componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$ tal que $\alpha(\Gamma) \leq 2$. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo irreducible con $M, N \in \Gamma$. Entonces $d_l(f) = n$ si y sólo si existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker}(f) \simeq \tau N_1 & \cdots & N_1 & & & & \\
 & \searrow^{f_1} & \nearrow^{g_1} & & & & \\
 & \tau N_2 & & N_2 & & & \\
 & & \searrow^{f_2} & \nearrow^{g_2} & & & \\
 & & \tau N_3 & & N_{n-1} & & \\
 & & & & \nearrow^{g_{n-1}} & & \\
 & & & & \tau N_n & & N \\
 & & & & \searrow^{f_n} & \nearrow^f & \\
 & & & & M & &
 \end{array} \tag{1.1}$$

donde $\text{Ker}(f) \rightarrow \tau N_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tau N_n \rightarrow M$ es un camino seccional de longitud n y $f f_n \dots f_1 = 0$ y $\alpha(\text{Ker}(f)) = 1$. Más aún, $d_l(g_i) = i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Teorema 1.7.7 [20, Teorema 2.26] *Sea A un álgebra y Γ una componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$ que satisface que $\alpha(\Gamma) \leq 2$. Sea $f = (f_1, f_2)^t : X \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$ un morfismo irreducible con grado a izquierda finito y $X, Y_1, Y_2 \in \Gamma$. Entonces $d_l(f) = d_l(f_1) + d_l(f_2)$*

Dualmente se pueden enunciar los resultados para calcular el grado a derecha finito de un monomorfismo.

En [23] los autores dieron condiciones equivalentes, en términos de morfismos irreducibles y grados, para saber si un álgebra es de tipo de representación finito.

Enunciaremos algunos resultados:

Teorema 1.7.8 [23, Teorema A] *Sea A un álgebra. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) *A es de tipo de representación finito.*
- (b) *Para cada A -módulo inyectivo indescomponible I que no es simple, la proyección $I \rightarrow I/\text{soc}(I)$ tiene grado a izquierda finito.*
- (c) *Para cada A -módulo proyectivo indescomponible P que no es simple, el morfismo irreducible $\text{rad } P \rightarrow P$ tiene grado a derecha finito.*
- (d) *Para cada epimorfismo irreducible $f : X \rightarrow Y$ con X o Y indescomponibles, el grado a izquierda de f es finito.*
- (e) *Para cada monomorfismo irreducible $f : X \rightarrow Y$ con X o Y indescomponibles, el grado a derecha de f es finito.*

El objetivo es calcular el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra de tipo de representación finito. Para ello, por [16], es suficiente estudiar los morfismos cuyo dominio es un módulo inyectivo indescomponible y los morfismos que tienen como codominio un módulo proyectivo indescomponible.

A continuación presentaremos algunos resultados dados en [16] que nos serán de utilidad a lo largo de esta tesis.

Lema 1.7.9 *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito. Sea $f : P_a \rightarrow I_b$ un morfismo no nulo del A -módulo proyectivo correspondiente al vértice $a \in (Q_A)_0$ al A -módulo inyectivo indescomponible correspondiente al vértice $b \in (Q_A)_0$. Si f no factoriza a través del módulo simple S_a , entonces existe un morfismo que no es un isomorfismo $\varphi : I_b \rightarrow I_a$, tal que $\varphi f \neq 0$ y φf factoriza a través de S_a .*

A continuación enunciaremos el resultado dual.

Lema 1.7.10 *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito. Sea $f : P_a \rightarrow I_b$ un morfismo no nulo del A -módulo proyectivo correspondiente al vértice $a \in (Q_A)_0$ al A -módulo inyectivo indescomponible correspondiente al vértice $b \in (Q_A)_0$. Si f no factoriza a través del módulo simple S_b , entonces existe un morfismo que no es un isomorfismo $\varphi : P_b \rightarrow P_a$, tal que $f\varphi \neq 0$ y $f\varphi$ factoriza a través de S_b .*

Lema 1.7.11 [16, Lema 2.3] *Sea $A \cong kQ/I$ un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y asumamos que A es de tipo de representación finito. Sea $h : M \rightarrow N$ un morfismo no nulo entre A -módulos indescomponibles. Entonces existe una composición no nula $P_a \rightarrow M \xrightarrow{h} N \rightarrow I_a$, donde P_a e I_a son los módulos indescomponibles proyectivo e inyectivo, respectivamente, para algún vértice $a \in Q_0$.*

El próximo corolario nos asegura que alcanza con estudiar los morfismos de P_a en I_a para obtener el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$.

Corolario 1.7.12 [16, Corolario 1] *Si $\mathfrak{R}^m(P_a, I_a) = 0$ para todo $a \in Q_0$, entonces $\mathfrak{R}^m(M, N) = 0$ para todos los módulos M, N en $\text{mod } A$.*

Más aún, en [16] se prueba que basta con estudiar los caminos no nulos de la forma $P_a \rightsquigarrow I_a$ en $\Gamma_{\text{mod } A}$, que se factorizan por el simple S_a . Para ello recordemos la siguiente notación presentada en el mismo artículo.

Notación 1.7.13 *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito y consideremos a un vértice de Q_A . Sean P_a , I_a y S_a los A -módulos proyectivo, inyectivo y simple correspondientes al vértice a , respectivamente. Definimos al número n_a como sigue:*

- Si $P_a = S_a$, entonces $n_a = 0$.
- Si $P_a \neq S_a$, entonces $n_a = d_r(\iota_a)$, donde ι_a es el morfismo irreducible $\iota_a : \text{rad}(P_a) \rightarrow P_a$.

Dualmente definimos al número m_a como sigue:

- Si $I_a = S_a$, entonces $m_a = 0$.
- Si $I_a \neq S_a$, entonces $m_a = d_r(\theta_a)$, donde θ_a es el morfismo irreducible $\theta_a : I_a \rightarrow I_a/\text{soc}(I_a)$.

Finalmente definimos $r_a = m_a + n_a$.

Lema 1.7.14 [16, Lema 2.4] *Sea $A \cong kQ/I$ un álgebra de tipo de representación finito. Dado $a \in Q_0$, consideremos P_a , S_a e I_a los A -módulos proyectivo, simple e inyectivo correspondientes al vértice a , respectivamente. Sea r_a el número definido en la Notación 1.7.13. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

- (a) *Cada morfismo no nulo $f : P_a \rightarrow I_a$ que factoriza a través del A -módulo simple S_a es tal que $f \in \mathfrak{R}^{r_a}(P_a, I_a) \setminus \mathfrak{R}^{r_a+1}(P_a, I_a)$.*
- (b) *Cada morfismo no nulo $f : P_a \rightarrow I_a$ que no factoriza a través del A -módulo simple S_a es tal que $f \in \mathfrak{R}^k(P_a, I_a) \setminus \mathfrak{R}^{k+1}(P_a, I_a)$, con $0 \leq k < r_a$.*

Observación 1.7.15 Como consecuencia directa del Lema 1.7.14 y la Observación 1.3.2 se deduce que si un morfismo h pertenece a $\mathfrak{R}^k(P_a, I_a)$, entonces $k \leq r_a$.

Estamos en condiciones de enunciar el resultado más importante de esta sección, dado por C. Chaio en [16].

Teorema 1.7.16 [16, Teorema 2.5] *Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito. Entonces el índice de nilpotencia $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$, r_A , está dado por*

$$r_A = \text{máx}\{r_a\}_{a \in (Q_A)_0} + 1,$$

es decir, $\mathfrak{R}^{r_A}(\text{mod } A) = 0$, mientras que $\mathfrak{R}^{r_A-1}(\text{mod } A) \neq 0$.

Como una consecuencia directa, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.7.17 *Sean $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito y r_A el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$. La composición de r_A morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles en $\text{mod } A$ es nula.*

Transcribiremos la siguiente observación de [16], la cual utilizaremos con frecuencia en la próxima sección.

Observación 1.7.18 Sean A un álgebra de tipo de representación finito y r_A el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$. Entonces el número r_A se puede dar en función de la longitud del camino no nulo más largo de morfismos irreducibles de un A -módulo proyectivo P_a hasta el A -módulo inyectivo I_a pasando a través del simple S_a , todos correspondiente al mismo vértice, a . Más precisamente,

$$r_A = \text{máx}\{\ell(P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a)\}_{a \in (Q_A)_0} + 1.$$

A continuación enunciaremos algunos resultados que relacionan la composición de morfismos irreducibles con la potencia del radical a la cual pertenece.

Ya hemos enunciado que si la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenece a un camino seccional, entonces dicha composición no pertenece a la potencia $n + 1$ del radical.

El siguiente resultado es de gran utilidad para nuestra tesis. Su enunciado y demostración se encuentra en [23, Proposición 5.1].

Proposición 1.7.19 *Sea A un álgebra y consideremos Γ una componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$ con valuación trivial. Sean $n \geq 1$ y X_1, \dots, X_n módulos en Γ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) *Existen morfismos irreducibles $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ tales que la composición $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+1}(X_1, X_{n+1}) \setminus \{0\}$.*
- (b) *Existen morfismos irreducibles $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ y morfismos $\varepsilon_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ tales que $f_n \dots f_1 = 0$, $\varepsilon_n \dots \varepsilon_1 \neq 0$ y $\varepsilon_i = f_i$ o $\varepsilon_i \in \mathfrak{R}^2(X_i, X_{i+1})$ para cada i .*

El siguiente resultado es para álgebras dirigidas, es decir, su carcaj de Auslander-Reiten es un carcaj dirigido.

Proposición 1.7.20 [26][Corolario 2.11] *Sea A un álgebra dirigida. Consideremos $n \geq 1$ y $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles para $1 \leq i \leq n$, y cada $X_i \in \Gamma_{\text{mod } A}$ para $1 \leq i \leq n + 1$. Entonces $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+1}(X_1, X_{n+1})$ si y sólo si $h_n \dots h_1 = 0$.*

Capítulo 2

Grados en un álgebra de cuerdas.

Basándose en el artículo de B. Wald y J. Waschbüsch, [39], las álgebras de cuerdas fueron estudiadas por Butler y Ringel en [14] y han tenido un rol importante en la teoría de representaciones de álgebras dando la posibilidad de describir su categoría de módulos en forma combinatoria. No sólo caracterizaron sus módulos indescomponibles (módulos cuerdas o módulos bandas), sino que también describieron la estructura de todas las componentes de su carcaj de Auslander-Reiten.

En este capítulo vamos a calcular los grados (finitos) de cualquier morfismo irreducible, con dominio o codominio indescomponible, a partir del carcaj con relaciones que representa a un álgebra de cuerdas. En particular, vamos a determinar el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito, a partir del carcaj con relaciones del álgebra.

En la primera sección introduciremos definiciones y resultados preliminares de las álgebras de cuerdas, y luego presentaremos los resultados obtenidos en este contexto.

2.1. Preliminares sobre las álgebras de cuerdas.

Comenzaremos con la definición de álgebra de cuerdas dada en [14].

Definición 2.1.1 *Sea $A = kQ_A/I_A$ una k -álgebra de dimensión finita, donde kQ_A es el álgebra de caminos del carcaj de Q_A . El álgebra A es llamada **álgebra de cuerdas** si satisface las siguientes condiciones:*

- (1) *Cada vértice del carcaj Q_A es el punto inicial de a lo sumo dos flechas y es el punto final de a lo sumo dos flechas.*

(2) Dada una flecha β , existe a lo sumo una flecha γ con $s(\beta) = e(\gamma)$ y $\beta\gamma \notin I_A$; y existe a lo sumo una flecha γ con $e(\beta) = s(\gamma)$ y $\gamma\beta \notin I_A$.

(3) El ideal I_A está generado por caminos de Q_A .

Recordemos que un **paseo en** Q de longitud n , con $n > 0$, es una secuencia $w = c_n \dots c_1$, donde cada c_i es una flecha o la inversa formal de una flecha tal que $e(c_i) = s(c_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n-1$.

Diremos que un **paseo es reducido** si w es trivial o si $w = c_n \dots c_1$ entonces $c_{i+1} \neq c_i^{-1}$ para $i = 1, \dots, n-1$.

Sea $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de cuerdas. Una **cuerda** en Q_A consiste en un camino trivial ε_v , con $v \in (Q_A)_0$ o un paseo reducido $C = c_n \dots c_1$ de longitud $n \geq 1$ tal que ningún subpaseo propio $c_{i+t} \dots c_{i+1} c_i$ ni su inverso pertenecen a I_A .

Decimos que una cuerda $C = c_n \dots c_1$ es una **cuerda directa** si todo c_i es una flecha, para $1 \leq i \leq n$. De forma similar decimos que C es una **cuerda inversa** si todo c_i es la inversa de una flecha, para $1 \leq i \leq n$. Notemos que las cuerdas directas son caminos en Q_A . En este trabajo vamos a considerar a los caminos triviales ε_v , con $v \in (Q_A)_0$, tanto cuerdas directas como inversas.

Sea $C = c_n \dots c_1$ una cuerda en Q_A . Una **subcuerda** de C es una cuerda de la forma $c_{r+s} \dots c_r$, donde $1 \leq r$ y $r+s \leq n$.

Para cada cuerda C , se define un A -módulo indescomponible $M(C)$ llamado **módulo cuerda**, como sigue:

Si $C = \varepsilon_v$ es el camino trivial en $v \in (Q_A)_0$, entonces $M(C) = S_v$ es el A -módulo simple correspondiente al vértice v .

Consideremos ahora una cuerda $C = c_n \dots c_1$, con $n \geq 1$. Vamos a etiquetar a los vértices que aparecen en C de la siguiente manera:

- Denotamos por $u(i) = s(c_i)$ para $1 \leq i \leq n$ y $u(n+1) = e(c_n)$.
- Para cada vértice v en Q_A , definimos el conjunto I_v como

$$I_v = \{i \mid u(i) = v\} \subseteq \{1, \dots, n+1\}.$$

El módulo $M(C)$ lo definimos como la representación $(M_v, f_\alpha)_{v \in (Q_A)_0, \alpha \in (Q_A)_1}$, donde para cada vértice $v \in (Q_A)_0$,

$$M_v = \begin{cases} 0 & \text{si } I_v = \emptyset \\ k^m & \text{en caso contrario, donde } m = \text{card}(I_v) \end{cases}$$

Sea ahora $\alpha : u \rightarrow v$ una flecha en Q_A . Si $M_u = 0$ o $M_v = 0$, entonces f_α es la transformación lineal nula. En caso contrario, vamos a definir a $f_\alpha : M_u \rightarrow M_v$ en una base B_u de M_u . En efecto, consideremos $B_u = \{z_i \mid i \in I_u\}$ una base ordenada de M_u (en el sentido en que $z_i < z_j$ si $i < j$).

- Si $\alpha = c_i$, entonces $f_\alpha(z_i) = z_{i+1}$.
- Si $\alpha^{-1} = c_i$, entonces $f_\alpha(z_{i+1}) = z_i$.
- Si existe $z_j \in B_u$ que no satisface ninguna de las dos condiciones anteriores, entonces $f_\alpha(z_j) = 0$.

De esta forma obtenemos una representación de $M(C)$ que satisface las relaciones de I_A . Más aún, $M(C) \simeq M(C^{-1})$.

Mostraremos la representación de un módulo cuerda en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.2 (a). Consideremos el álgebra de cuerdas dada por la siguiente presentación

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \xrightarrow{\gamma} 3 \quad \text{con } I = \langle \beta\alpha \rangle$$

Consideremos la cuerda $C = \gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1} = c_4c_3c_2c_1$. Representemos a dicha cuerda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & 2 & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & 1 & \xrightarrow{\beta^{-1}} & 2 & \xrightarrow{\gamma} & 3 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ u(1) & & u(2) & & u(3) & & u(4) & & u(5) \end{array}$$

En el siguiente cuadro vamos a calcular para cada vértice $u \in Q_0$, los conjuntos I_u , M_u y B_u

u	1	2	3
I_u	{3}	{2, 4}	{1, 5}
M_u	k	k^2	k^2
B_u	{ z_3 }	{ z_2, z_4 }	{ z_1, z_5 }

Ya tenemos definidos los espacios vectoriales en cada vértice. A continuación definiremos las transformaciones lineales en cada flecha.

Comencemos definiendo $f_\alpha : M_1 \rightarrow M_2$. Para ello definiremos f_α sobre cada elemento de la base $B_1 = \{z_3\}$. Como $\alpha^{-1} = c_2$, entonces $f_\alpha(z_3) = z_2$. Dado que la base ordenada B_2 es $\{z_2, z_4\}$, resulta que

$$f_\alpha = (1 \ 0)^t.$$

Consideremos ahora la flecha $\beta \in (Q_A)_1$ y definamos $f_\beta : M_2 \rightarrow M_1$ sobre la base $B_2 = \{z_2, z_4\}$. Como $\beta^{-1} = c_3$, entonces $f_\beta(z_4) = z_3$. Más aún, como ni la flecha β ni su inversa aparecen nuevamente en la cuerda C , entonces $f_\beta(z_2) = 0$. Por lo tanto,

$$f_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $f_\beta f_\alpha = 0$, correspondiente a la relación $\beta\alpha = 0$

Por último definamos $f_\gamma : M_2 \rightarrow M_3$. Nuevamente, a dicha transformación lineal vamos a definirla sobre la base $B_2 = \{z_2, z_4\}$. Como $\gamma^{-1} = c_1$, entonces $f_\gamma(z_2) = z_1$; y como $\gamma = c_4$, entonces $f_\gamma(z_4) = z_5$. Por lo tanto,

$$f_\gamma = \text{id}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusión, una representación del módulo cuerda $M(C)$ es la siguiente:

$$k \begin{array}{c} \xrightarrow{(1 \ 0)^t} \\ \xleftarrow{(0 \ 1)} \end{array} k^2 \xrightarrow{\text{id}_{2 \times 2}} k^2.$$

Para un mejor entendimiento, en general vamos a denotar a los módulos cuerdas a partir de su serie de Loewy. En particular, el módulo cuerda $M(C)$ queda representado de la siguiente manera.

$$M(C) : \begin{array}{c} 2 \\ 1 \ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} .$$

Teorema 2.1.3 *Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito, entonces todos los A -módulos indescomponibles son módulos cuerdas.*

Observación 2.1.4 Recordemos que los módulos bandas se definen a partir de cuerdas C que satisfacen que para todo número natural n , C^n es una cuerda. Si consideramos un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito, no existen cuerdas que satisfagan dicha condición.

A lo largo de este capítulo utilizaremos la noción de cuerdas que comienzan o terminan en un pico o en una profundidad. Recordemos su definición, dada en [14].

Definición 2.1.5 Diremos que una cuerda C **comienza** en una **profundidad** (en un **pico**, respectivamente) si no existen flechas β en Q_A tales que $C\beta^{-1}$ ($C\beta$, respectivamente) es una cuerda.

De manera dual se tiene la siguiente definición.

Definición 2.1.6 Diremos que una cuerda C **termina** en una **profundidad** (en un **pico**, respectivamente) si no existen flechas β tales que βC ($\beta^{-1}C$, respectivamente) es una cuerda.

Es claro que si C es una cuerda que comienza en un pico (en una profundidad, respectivamente) entonces C^{-1} termina en un pico (en una profundidad, respectivamente).

Observación 2.1.7 [14] Sean C y D cuerdas y β una flecha de Q_A tales que $C\beta D$ es una cuerda. Entonces $M(C)$ es un submódulo de $M(C\beta D)$. Más aún, el cociente $M(C\beta D)/M(C)$ es isomorfo a $M(D)$.

Dualmente, si C y D cuerdas y β una flecha de Q_A tales que $C\beta^{-1}D$ es una cuerda, entonces $M(D)$ es un submódulo de $M(C\beta^{-1}D)$. Más aún, el cociente $M(C\beta^{-1}D)/M(D)$ es isomorfo a $M(C)$.

El siguiente lema es un resumen de algunos lemas que se encuentran en [14] y que son esenciales para el desarrollo de este capítulo.

Lema 2.1.8 Sean $A = kQ_A/I_A$ un álgebra de cuerdas y C una cuerda en Q_A . Se satisfacen los siguientes enunciados:

- (a) Si C no comienza en un pico, entonces existen una flecha β y una cuerda directa D tal que la cuerda $C_h = C\beta D^{-1}$ comienza en una profundidad. Más aún, el morfismo inclusión $M(C) \rightarrow M(C_h)$ es un monomorfismo irreducible.
- (b) Si C no termina en un pico, entonces existen una flecha β y una cuerda directa D tal que la cuerda ${}_h C = D\beta^{-1}C$ termina en una profundidad. Más aún, el morfismo inclusión $M(C) \rightarrow M({}_h C)$ es un monomorfismo irreducible.
- (c) Si C no comienza en una profundidad, entonces existen una flecha β y una cuerda directa D tal que la cuerda $C_c = C\beta^{-1}D$ comienza en un pico. Más aún, el morfismo proyección $M(C_c) \rightarrow M(C)$ es un epimorfismo irreducible.

(d) Si C no termina en una profundidad, entonces existen una flecha β y una cuerda directa D tal que la cuerda ${}_cC = D^{-1}\beta C$ termina en un pico. Más aún, el morfismo proyección $M({}_cC) \rightarrow M(C)$ es un epimorfismo irreducible.

Observación 2.1.9 Dada una cuerda C , sigue de la definición de las álgebras de cuerdas que las cuerdas C_h , ${}_hC$, C_c y ${}_cC$ (en caso de que existan) son únicas. En efecto, consideremos una cuerda C que no comienza en un pico. Entonces existe una flecha $\beta \in (Q_A)_1$ tal que $C\beta$ es una cuerda. Por la Definición 2.1.1, la flecha β es única. Si $C\beta$ es una cuerda que comienza en una profundidad entonces $C_h = C\beta$. En caso contrario, existe una única flecha α_1 tal que $C\beta\alpha_1^{-1}$ es una cuerda. Si $C\beta\alpha_1^{-1}$ es una cuerda que comienza en una profundidad entonces $C_h = C\beta\alpha_1^{-1}$. En caso contrario, iteramos el mismo argumento una cantidad finita de veces y obtenemos que $C_h = C\beta\alpha_1^{-1} \dots \alpha_r^{-1}$ es una cuerda que comienza en una profundidad. Debido a que las flechas β , α_j , $j = 1, \dots, r$, son únicas, resulta que la cuerda C_h es única.

Con argumentos similares podemos demostrar que las cuerdas ${}_hC$, C_c y ${}_cC$ son únicas.

Dada A un álgebra de cuerdas, estamos en condiciones de describir a los A -módulos proyectivos e inyectivos indescomponibles en función de las cuerdas.

Sea u un vértice de Q_A , el módulo proyectivo P_u correspondiente al vértice u es un módulo cuerda. Más precisamente, $P_u = M(C_2C_1^{-1})$ donde $C_1 = \alpha_m \dots \alpha_1$ y $C_2 = \lambda_n \dots \lambda_1$ son caminos (o cuerdas directas) que terminan en una profundidad, con $s(C_1) = v = s(C_2)$.

Los sumandos indescomponibles de $\text{rad } P_u$ están dados por los módulos $R_1 = M(\alpha_2^{-1} \dots \alpha_m^{-1})$ y $R_2 = M(\lambda_n \dots \lambda_2)$. Sin pérdida de generalidad, si suponemos que $\text{rad } P$ es indescomponible, entonces podemos considerar $R_2 = 0$, es decir que $C_2 = \varepsilon_u$.

De manera similar, el módulo inyectivo I_u correspondiente al vértice u es un módulo cuerda. Más precisamente, $I_u = M(D_2^{-1}D_1)$ donde $D_1 = \gamma_1 \dots \gamma_s$ y $D_2 = \beta_1 \dots \beta_r$ son caminos (o cuerdas directas) que comienzan en un pico, con $e(D_1) = u = e(D_2)$.

Los sumandos indescomponibles de $I/\text{soc } I_u$ están dados por los módulos $J_1 = M(\gamma_2 \dots \gamma_s)$ y $J_2 = M(\beta_r^{-1} \dots \beta_2^{-1})$. Si $I/\text{soc } I_u$ es indescomponible, sin pérdida de generalidad consideraremos $J_2 = 0$, es decir que $D_2 = \varepsilon_u$.

En [14] se prueba que dada A un álgebra de cuerdas entonces $\alpha(\Gamma_{\text{mod } A}) \leq 2$, es decir, que todas las sucesiones que casi se parten tienen a lo sumo dos términos

del medio indescomponibles. A continuación describiremos las sucesiones que casi se parten de los módulos cuerdas.

Las sucesiones que casi se parten con un único término del medio indescomponible se construyen de la siguiente manera. Para cada flecha β , consideremos la cuerda $B = B_2^{-1}\beta B_1^{-1}$ que comienza y termina en un pico, donde B_1 y B_2 son caminos en Q_A . Vamos a denotar por $U(\beta)$ y $V(\beta)$ los módulos cuerdas $M(B_2^{-1})$ y $M(B_1^{-1})$, respectivamente. Existe una sucesión que casi se parte de la forma

$$0 \longrightarrow U(\beta) \longrightarrow M(B) \longrightarrow V(\beta) \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

Más aún, toda sucesión que casi se parte con un único término del medio indescomponible es de la forma (2.1). Estas sucesiones están indexadas, en una forma natural, con la cantidad de flechas de Q_A .

Asimismo, en [14] se describen todas las sucesiones que casi se parten con dos términos del medio indescomponibles que comienzan en un módulo cuerda.

Consideremos C una cuerda tal que $M(C)$ no es un módulo inyectivo y no es isomorfo a un módulo de la forma $U(\beta)$ descrito en la sucesión (2.1). Describiremos la sucesión que casi se parte que comienza en $M(C)$. Vamos a separar dicha descripción en cuatro casos, dependiendo si la cuerda C comienza o termina en un pico.

- Si C no comienza ni termina en un pico, entonces tanto C_h como ${}_hC$ están definidas y existe una sucesión que casi se parte de la forma

$$0 \longrightarrow M(C) \longrightarrow M({}_hC) \oplus M(C_h) \longrightarrow M({}_hC_h) \longrightarrow 0.$$

- Si C no comienza pero termina en un pico, entonces C_h está definida. Como $M(C)$ no es isomorfo a $U(\beta)$ para ningún $\beta \in (Q_A)_1$, entonces C no es una cuerda inversa. Por lo tanto podemos escribir a C como $C = C_1^{-1}\gamma D$, donde C_1 es un camino y D una cuerda. Así resulta que $C = {}_cD$. Más aún, como C no comienza en un pico, tampoco lo hace la cuerda D y en consecuencia D_h está definido. Existe una sucesión que casi se parte de la forma

$$0 \longrightarrow M(C) \longrightarrow M(D) \oplus M(C_h) \longrightarrow M(D_h) \longrightarrow 0.$$

- Ahora consideremos el caso en que C comienza pero no termina en un pico. Entonces sabemos que existe la cuerda ${}_hC$ y dualmente al caso anterior podemos escribir a la cuerda C como D_c , con D una cuerda en Q_A . Entonces existe una sucesión que casi se parte de la forma

$$0 \longrightarrow M(C) \longrightarrow M({}_hC) \oplus M(D) \longrightarrow M({}_hD) \longrightarrow 0.$$

- Finalmente consideremos el caso en que C comienza y termina en un pico. Como $M(C)$ no es inyectivo, C no es de la forma $D_2^{-1}D_1$, con D_1 y D_2 cuerdas directas. Por consiguiente, podemos escribir a C como $C_2^{-1}\gamma D\beta^{-1}C_1$, donde C_1 y C_2 son caminos y D una cuerda. De esta manera resulta que $C = {}_cD_c$ y existe la siguiente sucesión que casi se parte

$$0 \longrightarrow M(C) \longrightarrow M(D_c) \oplus M({}_cD) \longrightarrow M(D) \longrightarrow 0.$$

Dualmente, se pueden describir las sucesiones que casi se parten que terminan en un módulo cuerda $M(C)$, analizando si C comienza o termina en una profundidad.

En el siguiente ejemplo describiremos algunas sucesiones que casi se parten.

Ejemplo 2.1.10 Consideremos el álgebra de cuerdas dada por la siguiente presentación

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \xrightarrow{\gamma} 3 \quad \text{con } I = \langle \beta\alpha \rangle$$

Vamos a calcular una sucesión que casi se parte con un único término del medio indescomponible. En efecto, consideremos la flecha $\gamma : 2 \rightarrow 3$, entonces la cuerda $B = \varepsilon_3^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$ comienza y termina en un pico. Siguiendo la notación introducida anteriormente, los caminos B_1 y B_2 están dados por $B_1 = \gamma\alpha\beta$ y $B_2 = \varepsilon_3$, respectivamente. Entonces existe una sucesión que casi se parte como sigue:

$$0 \longrightarrow M(\varepsilon_3^{-1}) \longrightarrow M(\varepsilon_3^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}) \longrightarrow M(\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}) \longrightarrow 0.$$

Ahora calculemos una sucesión que casi se parte con dos términos del medio indescomponibles. En efecto, consideremos la cuerda $C = \gamma\alpha$. Notemos que C es una cuerda que no comienza en un pico pero sí termina en un pico. Entonces podemos definir la cuerda $C_h = \gamma\alpha\beta\gamma^{-1}$. Más aún, la cuerda C podemos escribirla como $C = \varepsilon_3^{-1}\gamma\alpha = {}_cD$, donde D en este caso es la cuerda α . Por lo tanto, la sucesión que casi se parte que comienza en $M(C)$ es:

$$0 \longrightarrow M(\gamma\alpha) \longrightarrow M(\alpha) \oplus M(\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}) \longrightarrow M(\alpha\beta\gamma^{-1}) \longrightarrow 0.$$

2.2. Grados y álgebras de cuerdas

A lo largo de esta sección consideraremos A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Como sólo trabajaremos con el álgebra A , simplemente

vamos a denotar por (Q, I) a una presentación de A , es decir, $A \simeq kQ/I$. Mostraremos cómo calcular el índice de nilpotencia de $\mathfrak{K}^m(\text{mod } A)$ teniendo en cuenta solamente la presentación del álgebra A .

Recordemos que dado un vértice u en Q , el A -módulo inyectivo I_u correspondiente al vértice u está dado por el módulo cuerda $M(D_2^{-1}D_1)$, con D_1 y D_2 son caminos que comienzan en un pico y $e(D_1) = u = e(D_2)$. J_1 y J_2 denotan los sumandos indescomponibles de $I_u/\text{soc}I_u$.

Denotaremos por $\overline{J_1}$ ($\overline{J_2}$, respectivamente) el A -submódulo de I_u tal que el cociente de I_u por $\overline{J_1}$ ($\overline{J_2}$, respectivamente) es J_2 (J_1 , respectivamente). Es decir $J_2 = I_u/\overline{J_1}$ y $J_1 = I_u/\overline{J_2}$. Observemos que $\overline{J_1}$ y $\overline{J_2}$ son A -módulos indescomponibles. Más aún, $\overline{J_1} = M(D_1)$ y $\overline{J_2} = M(D_2)$.

De manera similar, el A -módulo proyectivo P_u correspondiente al vértice u está dado por el módulo cuerda $M(C_2C_1^{-1})$, con C_1 y C_2 son caminos que terminan en una profundidad y $s(C_1) = u = e(C_2)$. R_1 y R_2 denotan los sumandos indescomponibles de $\text{rad } P_u$.

Denotaremos por $\overline{R_1}$ ($\overline{R_2}$, respectivamente) el A -módulo cociente de P_u por R_2 (R_1 , respectivamente), es decir $\overline{R_1} = P_u/R_2$ y $\overline{R_2} = P_u/R_1$. Nuevamente observemos que $\overline{R_1}$ y $\overline{R_2}$ son A -módulos indescomponibles. Más aún, $\overline{R_1} = M(C_1)$ y $\overline{R_2} = M(C_2)$.

De ahora en adelante vamos a fijar un vértice u en el carcaj Q y denotaremos a los módulos proyectivo e inyectivo correspondientes al vértice u simplemente por P e I , respectivamente.

Para cada A -módulo indescomponible Z definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{M}_Z = \{X \in \text{ind } A \mid Z \text{ es un submódulo de } X\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{S}_Z = \{X \in \text{ind } A \mid \exists Y \in \text{ind } A \text{ tal que } Y \text{ es un submódulo de } X \text{ y } X/Y \simeq Z\}.$$

El siguiente resultado caracteriza a los conjuntos $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ y $\mathcal{S}_{\overline{R_2}}$ en función de cuerdas del carcaj ordinario de un álgebra de cuerdas.

Lema 2.2.1 *Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Sean $I = M(D_2^{-1}D_1)$ y $P = M(C_2C_1^{-1})$ A -módulos inyectivo y proyectivo indescomponibles, respectivamente, donde $D_1 = \gamma_1 \dots \gamma_s$ y $D_2 = \beta_1 \dots \beta_r$ son caminos que comienzan en un pico y $C_1 = \alpha_m \dots \alpha_1$ y $C_2 = \lambda_n \dots \lambda_1$ son caminos que terminan en una profundidad. Sean J_1 y J_2 los sumandos directos indescomponibles de $I/\text{soc } I$ y R_1 y R_2 los sumandos directos indescomponibles de $\text{rad } P$. Entonces,*

- (a) $\mathcal{M}_{\overline{J_2}} = \{M(C) \text{ tal que } C \text{ o } C^{-1} \text{ pertenece a } \mathcal{C}_{D_2}\}$, donde
 $\mathcal{C}_{D_2} = \{D_2^{-1}D \text{ donde } D \text{ es trivial o } D = \gamma_1 D' \text{ con } D' \text{ una cuerda}\}.$

- (b) $\mathcal{S}_{\overline{R_2}} = \{M(D) \text{ tal que } D \text{ o } D^{-1} \text{ pertenece a } \mathcal{D}_{C_2}\}$, donde
 $\mathcal{D}_{C_2} = \{C_2C \text{ donde } C \text{ es trivial o } C = \alpha_1^{-1}C' \text{ con } C' \text{ una cuerda}\}.$

Demostración: Sólo probaremos el enunciado (a) ya que el (b) se deduce de manera dual.

Asumamos que $X \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, entonces $\overline{J_2} \subset X$. Si $X = \overline{J_2}$ entonces $X = M(D_2^{-1})$. En caso contrario, consideramos C la cuerda tal que $X = M(C)$. Como $\overline{J_2}$ es un submódulo de X podemos considerar que $C = D_2^{-1}\alpha D$, para algún $\alpha \in Q_1$ y para D una cuerda. Afirmamos que $\alpha = \gamma_1$. En efecto, como $I = I(u) = M(D_2^{-1}D_1)$ con $u \in Q_0$ y $u = e(D_2) = s(D_2^{-1}) = e(\alpha)$, entonces tenemos que a lo sumo una de las siguientes condiciones se cumplen: $\alpha = \beta_1$, o bien $\alpha = \gamma_1$. Si $\alpha = \beta_1$ se contradice el hecho que C es cuerda, ya que $C = \beta_r^{-1} \dots \beta_1^{-1} \beta_1 D$ no sería un paseo reducido. Por lo tanto, tenemos que $\alpha = \gamma_1$ y por consiguiente $C \in \mathcal{C}_{D_2}$.

Recíprocamente, es claro que $M(D_2^{-1}) = \overline{J_2} \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Ahora consideremos C una cuerda tal que $C = D_2^{-1}\gamma_1 D$, donde D es una cuerda. Luego, por la Observación 2.1.7 tenemos que $M(D_2^{-1})$ es un submódulo de $M(C)$. Por lo tanto $M(C) \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. \square

Observación 2.2.2 Dado I un A -módulo inyectivo indescomponible con J_1 y J_2 los sumandos directos de $I/\text{soc } I$ resulta que I y $\overline{J_2}$ pertenecen al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Más aún, I es el único módulo inyectivo indescomponible que pertenece a $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$.

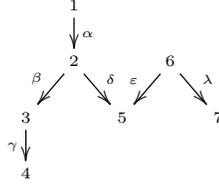
Ahora, si consideramos una cuerda C de la forma $C = D_2^{-1}\gamma_1 D \gamma_1^{-1} D_2$ claramente D no puede ser trivial, pues de otra manera C no sería reducida. Notemos que tanto C como C^{-1} son cuerdas distintas que pertenecen a \mathcal{C}_{D_2} , pero $M(C)$ y $M(C^{-1})$ representan al mismo módulo cuerda.

Para facilitar la lectura, a un módulo indescomponible $M(C)$ que pertenece a $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ tal que $M(C) \neq M(D_2)$ y $M(C)$ no es de la forma $M(D_2^{-1}\gamma_1 D \gamma_1^{-1} D_2)$ simplemente escribiremos $M(C) = M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ con D una cuerda.

Podemos notar que el mismo análisis que se hizo anteriormente para los módulos $\overline{J_2}$ y $\overline{R_2}$ puede hacerse para $\overline{J_1}$ y $\overline{R_1}$ ya que $I = M(D_2^{-1}D_1) = M(D_1^{-1}D_2)$ y $P = M(C_2C_1^{-1}) = M(C_1C_2^{-1})$.

A continuación presentaremos algunos ejemplos para mostrar cómo se construyen los conjuntos $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ y $\mathcal{S}_{\overline{J_2}}$

Ejemplo 2.2.3 (a). Sea $A = kQ/I$ el álgebra de cuerdas dada por la presentación



con $I_A = \langle \beta\alpha \rangle$. Vamos a denotar a los módulos indescomponibles teniendo en cuenta su serie de Loewy.

Consideremos $I_5 = M(\varepsilon^{-1}\delta\alpha) : \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 6 \\ 5 \end{array}$. Entonces, $I_5/\text{soc}I_5 = J_1(5) \oplus J_2(5)$

donde $J_1(5) = M(\alpha) : \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$ y $J_2(5) = M(\varepsilon_6) : \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array}$. Luego, $\overline{J_2}(5) = M(\varepsilon^{-1}) : \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array}$.

Por lo tanto, $\mathcal{M}_{\overline{J_2}} = \{X_i\}_{i=1}^5$ donde

$X_1 = \overline{J_2} = M(\varepsilon^{-1}) : \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array}$, $X_2 = M(\varepsilon^{-1}\delta) : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 5 \end{array}$, $X_3 = I_5 = M(\varepsilon^{-1}\delta\alpha) : \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 6 \\ 5 \end{array}$,

$X_4 = M(\varepsilon^{-1}\delta\beta^{-1}) : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 3 \ 5 \end{array}$ y $X_5 = M(\varepsilon^{-1}\delta\beta^{-1}\gamma^{-1}) : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 3 \ 5 \\ 4 \end{array}$.

Consideremos ahora $P_2 = M(\gamma\beta\delta^{-1}) : \begin{array}{c} 2 \\ 3 \ 5 \\ 4 \end{array}$. Entonces, $\text{rad } P_2 = R_1(2) \oplus R_2(2)$

donde $R_1(2) = M(\varepsilon_5) : \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array}$ y $R_2(2) = M(\gamma) : \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$. Luego, $\overline{R_2}(2) = M(\gamma\beta) : \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$.

Por lo tanto, $\mathcal{S}_{\overline{R_2}} = \{X_i\}_{i=1}^4$ donde

$X_1 = \overline{R_2} = M(\gamma\beta) : \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$, $X_2 = P_2 = M(\gamma\beta\delta^{-1}) : \begin{array}{c} 2 \\ 3 \ 5 \\ 4 \end{array}$,

$X_3 = M(\gamma\beta\delta^{-1}\varepsilon) : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 3 \ 5 \\ 4 \end{array}$ y $X_4 = M(\gamma\beta\delta^{-1}\varepsilon\lambda^{-1}) : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 3 \ 5 \ 7 \\ 4 \end{array}$.

(b). Sea $A = kQ/I$ el álgebra de cuerdas dada por la presentación

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \xrightarrow{\gamma} 3$$

con la relación $\beta\alpha = 0$.

Sea $I_3 = M(\varepsilon_3^{-1}\gamma\alpha\beta) : \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$. Entonces $J_2(3) = 0$ y $\overline{J}_2(3) = M(\varepsilon_3^{-1}) : 3$.

Luego, $\mathcal{M}_{\overline{J}_2} = \{X_i\}_{i=1}^7$ donde

$$X_1 = \overline{J}_2(3) = M(\varepsilon_3^{-1}) : 3, X_2 = M(\gamma) : \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}, X_3 = M(\gamma\alpha) : \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix},$$

$$X_4 = M(\gamma\beta^{-1}) : \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}, X_5 = I_3 = M(\gamma\alpha\beta) : \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}, X_6 = M(\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}) : \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix},$$

$$X_7 = M(\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}) = M(\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}) : \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}.$$

Notemos que el módulo cuerda X_7 puede obtenerse mediante dos cuerdas distintas de $\mathcal{C}_{\varepsilon_3}$.

En la siguiente proposición describimos las sucesiones que casi se parten que comienzan (terminan, respectivamente) en un A -módulo indescomponible perteneciente a $\mathcal{M}_{\overline{J}_2}$ ($\mathcal{S}_{\overline{R}_2}$, respectivamente).

Proposición 2.2.4 *Sea $A = kQ/I$ un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Sean $I = M(D_2^{-1}D_1)$ y $P = M(C_2C_1^{-1})$ A -módulos inyectivo y proyectivo indescomponibles, respectivamente, donde $D_1 = \gamma_1 \dots \gamma_s$ y $D_2 = \beta_1 \dots \beta_r$ son caminos que comienzan en un pico y $C_1 = \alpha_m \dots \alpha_1$ y $C_2 = \lambda_n \dots \lambda_1$ son caminos que terminan en una profundidad. Sean J_1 y J_2 los sumandos directos indescomponibles de $I/\text{soc } I$ y R_1 y R_2 los sumandos directos indescomponibles de $\text{rad } P$.*

(a) *Sea X un módulo no inyectivo de $\mathcal{M}_{\overline{J}_2}$. Entonces se satisface uno de los siguientes enunciados.*

(i) *Si $X = \overline{J}_2$ entonces $\alpha'(X) = 1$ y $0 \rightarrow \overline{J}_2 \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} Y \rightarrow 0$ es una sucesión que casi se parte con $X' \in \mathcal{M}_{\overline{J}_2}$.*

(ii) *Si $X = M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$ entonces $\alpha'(X) = 2$ y*

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{(f',g')^t} Y \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte con $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{\overline{J}_2}$ y donde f, g, f', g' son epimorfismos con núcleo igual a \overline{J}_2 .

(iii) Si $X \neq \overline{J_2}$ y $X \neq M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$ entonces $\alpha'(X) = 2$ y

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{(f',g')^t} Y \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte con $X_2 \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, donde f, g' son epimorfismos con $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g') = \overline{J_2}$, y si f', g son epimorfismos entonces sus núcleos no son iguales a $\overline{J_2}$.

(b) Sea Y un módulo no proyectivo de $\mathcal{S}_{\overline{R_2}}$. Entonces se satisface uno de los siguientes enunciados.

(i) Si $Y = \overline{R_2}$ entonces $\alpha(Y) = 1$ y $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{g} \overline{R_2} \rightarrow 0$ es una sucesión que casi se parte con $X' \in \mathcal{S}_{\overline{R_2}}$.

(ii) Si $Y = M(C_2\alpha_1^{-1}C\alpha_1C_2^{-1})$ entonces $\alpha(Y) = 2$ y

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{(f',g')^t} Y \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte con $X_1, X_2 \in \mathcal{S}_{\overline{R_2}}$ y donde f, g, f', g' son monomorfismos con conúcleo igual a $\overline{R_2}$.

(iii) Si $Y \neq \overline{R_2}$ y $Y \neq M(C_2\alpha_1^{-1}C\alpha_1C_2^{-1})$ entonces $\alpha(Y) = 2$ y

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{(f,g)} X_1 \oplus X_2 \xrightarrow{(f',g')^t} Y \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte con $X_1 \in \mathcal{S}_{\overline{R_2}}$, donde f, g' son monomorfismos con $\text{Coker}(f) = \text{Coker}(g') = \overline{R_2}$, y si f', g son monomorfismos entonces sus conúcleos no son iguales a $\overline{R_2}$.

Demostración: Sólo probaremos el inciso (a) ya que el (b) se deduce de manera dual.

(a), (i) Sea $X = \overline{J_2}$. Luego $X = M(D_2^{-1})$. Observemos que D_2^{-1} no comienza en un pico ya que $D_2^{-1}\gamma_1$ es una cuerda. Por lo tanto, $(D_2^{-1})_h = D_2^{-1}\gamma_1 D$ está definida de manera única con D una cuerda inversa que comienza en una profundidad. Entonces existe una sucesión que casi se parte

$$0 \rightarrow M(D_2^{-1}) \xrightarrow{f} M(D_2^{-1}\gamma_1 D) \xrightarrow{g} M(D) \rightarrow 0$$

donde el término del medio es indescomponible, ver 2.1. Por el Lema 2.2.1(a), el módulo cuerda $M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ pertenece a $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, probando así el primer enunciado.

(a), (ii) Sea $C = D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2$ y $X = M(C)$. Como C es una cuerda que comienza y termina en un pico, la sucesión que casi se parte que comienza en X es de la forma

$$0 \rightarrow M(C) \xrightarrow{(f,g)} M(D_2^{-1}\gamma_1 D) \oplus M(D\gamma_1^{-1}D_2) \xrightarrow{(f',g')^t} M(D) \rightarrow 0.$$

Por el Lema 2.2.1(a) tenemos que $M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ y $M(D\gamma_1^{-1}D_2) = M(D_2^{-1}\gamma_1 D^{-1})$ pertenecen al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Además, en virtud del Lema 2.1.8, el morfismo $f : M(C) \rightarrow M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ es un epimorfismo irreducible cuyo núcleo es $\overline{J_2}$. Asimismo, los morfismos g, f', g' son también epimorfismos irreducibles con núcleo $\overline{J_2}$.

(a), (iii) Sea $X = M(C)$ tal que $X \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, $X \neq \overline{J_2}$ y $X \neq M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $C = D_2^{-1}\gamma_1 D$ con D una cuerda. Como D_2^{-1} es una cuerda que termina en un pico, también lo es C . Por ende, siguiendo la teoría enunciada anteriormente, para describir la sucesión que casi se parte que comienza en el módulo X tenemos que analizar la cuerda D . En efecto, D satisface una de las siguientes condiciones:

- (1) D comienza en un pico, o
- (2) D no comienza en un pico.

Si D satisface (1) entonces D no puede ser una cuerda directa ya que X no es un módulo inyectivo. Por lo tanto, podemos escribir $D = D''\alpha^{-1}D'$ con $\alpha \in Q_1$ y donde D' es una cuerda directa. Luego $C = D_2^{-1}\gamma_1 D''\alpha^{-1}D'$ y la sucesión que casi se parte que comienza en X es de la forma:

$$0 \rightarrow M(C) \rightarrow M(D''\alpha^{-1}D') \oplus M(D_2^{-1}\gamma_1 D'') \rightarrow M(D'') \rightarrow 0$$

con los dos sumandos directos del término del medio indescomponibles. Además, por Lema 2.2.1(a) resulta que $M(D_2^{-1}\gamma_1 D'') \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$.

Por el Lema 2.1.8, los morfismos $M(C) \rightarrow M(D)$ y $M(D_2^{-1}\gamma_1 D'') \rightarrow M(D'')$ son epimorfismos con núcleo igual a $\overline{J_2}$, y los morfismos $M(C) \rightarrow M(D_2^{-1}\gamma_1 D'')$ y $M(D''\alpha^{-1}D') \rightarrow M(D'')$ son epimorfismos con núcleo igual a $M(D')$.

Afirmamos que $M(D') \neq \overline{J_2}$. De hecho, si suponemos que $M(D') = \overline{J_2}$ entonces $D' = D_2$ o $D' = D_2^{-1}$. Asumamos primero que $D' = D_2^{-1}$. Como D' y D_2^{-1} son cuerdas directa e inversa, respectivamente, entonces por la igualdad éstas deben ser triviales. Escribimos $D_2 = \varepsilon_u$. Luego, la cuerda C es de la forma $C = \varepsilon_u^{-1}\gamma_1 D''\alpha^{-1}\varepsilon_u$. Más aún, como D_2 es trivial existe una única flecha terminando en el vértice u , y dado que $e(\alpha) = u = e(\gamma_1)$, se tiene que $\alpha = \gamma_1$, contradiciendo que $X = M(C)$ no es un módulo de la forma $M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$.

Ahora asumamos que $D' = D_2$. Debido a que $e(\alpha) = u$ a lo sumo existen dos posibilidades: $\alpha = \gamma_1$ o $\alpha = \beta_1$. Si $\alpha = \gamma_1$, entonces resulta una contradicción a lo asumido ya que $M(C)$ sería de la forma $M(D_2^{-1}\gamma_1 D''\gamma_1^{-1}D_2)$. Ahora, si $\alpha = \beta_1$ se contradice el hecho de que C es una cuerda, pues no sería un paseo reducido dado que $\alpha^{-1}D_2 = \beta_1^{-1}\beta_1 \dots \beta_r$. Por lo tanto $D' \neq D_2$ y por consiguiente $M(D') \neq \overline{J_2}$.

Finalmente, si D satisface (2) entonces D no comienza en un pico y por ende tampoco lo hace la cuerda C . Luego, $D_h = D\alpha D'$ y $C_h = C\alpha D'$ están definidas,

donde α es una flecha de Q y D' es una cuerda. Entonces, la sucesión que casi se parte que comienza en el módulo X es

$$0 \rightarrow M(C) \rightarrow M(D_2^{-1}\gamma_1 D\alpha D') \oplus M(D) \rightarrow M(D\alpha D') \rightarrow 0$$

con $M(D_2^{-1}\gamma_1 D\alpha D') \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Más aún, en virtud del Lema 2.1.8, los morfismos $M(C) \rightarrow M(D)$ y $M(D_2^{-1}\gamma_1 D\alpha D') \rightarrow M(D\alpha D')$ con epimorfismos cuyo núcleo es $M(D_2) = \overline{J_2}$, y $M(C) \rightarrow M(D_2^{-1}\gamma_1 D\alpha D')$ y $M(D) \rightarrow M(D\alpha D')$ son monomorfismos. Queda así probada la proposición. \square

Recordemos que la Proposición 1.7.6 presentada en el Capítulo 1 describe las configuraciones de sucesiones que casi se parten, cuando consideramos un epimorfismo irreducible entre módulos indescomponibles de grado finito, para $\alpha(\Gamma) \leq 2$.

El propósito del siguiente resultado es determinar el grado a izquierda de cualquier morfismo irreducible $I \rightarrow I/\text{soc } I$, donde I es un módulo inyectivo indescomponible. Para dicho objetivo vamos a considerar cada epimorfismo irreducible de I a un sumando directo indescomponible de $I/\text{soc } I$. Vamos a aplicar la Proposición 1.7.6 y probar que los módulos involucrados en el camino seccional δ de tal lema pertenecen al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Dualmente, vamos a determinar el grado a derecha de cualquier morfismo irreducible $\text{rad } P \rightarrow P$.

Continuando con la notación establecida anteriormente, presentamos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.5 *Sea $A \simeq kQ/I$ un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Se satisfacen los siguientes enunciados.*

- (a) *Sean $I = M(D_2^{-1}D_1)$ un A -módulo inyectivo indescomponible (no simple) y J_1, J_2 los sumandos directos indescomponibles de $I/\text{soc } I$. Sea $f : I \rightarrow J_1$ el epimorfismo irreducible con $d_l(f) = l \geq 1$. Entonces, existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \overline{J_2} & \cdots & N_1 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & M_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & M_2 & \xrightarrow{g_2} & N_{l-1} & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & M_{l-1} & \xrightarrow{g_{l-1}} & J_1 = N_l & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & I & \xrightarrow{f} & & &
 \end{array} \tag{2.2}$$

con $\overline{J_2} \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{l-1} \rightarrow I$ un camino seccional de longitud l y $M_k \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ para todo $k = 1, \dots, l-1$. Más aún, M_k aparece exactamente dos veces en el camino seccional si $M_k = M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$ y solamente una vez si $M_k \neq M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$. Por otro lado, dado un módulo $M \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ entonces $M = \overline{J_2}$, $M = I$ o $M = M_k$ para algún $k = 1, \dots, l-1$.

(b) Sea $P = M(C_2C_1^{-1})$ un A -módulo proyectivo indescomponible (no simple) y R_1, R_2 los sumandos directos indescomponibles de $\text{rad } P$. Sea $f : R_1 \rightarrow P$ el monomorfismo irreducible con $d_r(f) = l \geq 1$. Entonces, existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N_{l-1} & \cdots & \overline{R_2} \\
 & & \uparrow & \cdots & \uparrow \\
 & & N_2 & \xrightarrow{g_2} & M_{l-1} \\
 & & \uparrow & \cdots & \uparrow \\
 & & N_1 & \xrightarrow{g_1} & M_2 \\
 & & \uparrow & \cdots & \uparrow \\
 R_1 & \xrightarrow{f} & M_1 & \xrightarrow{\quad} & M_2 \\
 & \searrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\
 & & P & \xrightarrow{\quad} & M_1
 \end{array} \tag{2.3}$$

con $P \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{l-1} \rightarrow \overline{R_2}$ un camino seccional de longitud l y $M_k \in \mathcal{S}_{\overline{R_2}}$ para todo $k = 1, \dots, l-1$. Más aún, M_k aparece exactamente dos veces en el camino seccional si $M_k = M(C_2\alpha_1^{-1}C\alpha_1C_2^{-1})$ y solamente una vez si $M_k \neq M(C_2\alpha_1^{-1}C\alpha_1C_2^{-1})$. Por otro lado, dado un módulo $M \in \mathcal{S}_{\overline{R_2}}$ entonces $M = P$, $M = \overline{R_2}$ o $M = M_k$ para algún $k = 1, \dots, l-1$.

Demostración: Sólo probaremos el inciso (a) ya que el inciso (b) se deduce de manera dual.

(a). Sea $f : I \rightarrow J_1$ la poyección canónica tal que $d_l(f) = l \geq 1$. Como $\text{Ker}(f) = \overline{J_2}$, por la Proposición 1.7.6 existe una configuración de sucesiones que casi se parten como en (2.2), donde $M_k = \tau N_{k+1}$ para cada $k = 1, \dots, l-1$, $\delta : \overline{J_2} \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{l-1} \rightarrow I$ es un camino seccional de longitud l tal que $f\delta = 0$ y $\alpha'(\overline{J_2}) = 1$.

Primero probaremos que cada M_k pertenece al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, para $k = 1, \dots, l-1$. Lo probaremos por inducción sobre el grado a izquierda de f . Si $d_l(f) = 1$, entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \rightarrow \overline{J_2} \rightarrow I \xrightarrow{f} J_1 \rightarrow 0$ con el término del medio indescomponible. Como los módulos $\overline{J_2}$ e I pertenecen al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, obtenemos lo buscado.

Ahora, si $l > 1$ por hipótesis inductiva asumamos que M_1, \dots, M_{l-2} están en $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ y probemos entonces que M_{l-1} también pertenece a dicho conjunto.

Sea $0 \longrightarrow M_{l-2} \xrightarrow{(g_{l-2}, f_{l-1})^T} N_{l-2} \oplus M_{l-1} \xrightarrow{(t_{l-1}, g_{l-1})} N_{l-1} \longrightarrow 0$ la sucesión que casi se parte que comienza en M_{l-2} . Por la Proposición 2.2.4, al menos uno de los módulos N_{l-2} o M_{l-1} del término del medio pertenece a $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Si ambos módulos pertenecen a $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, no hay nada que probar. En caso contrario, podemos afirmar por la Proposición 2.2.4 (a), (ii) que el módulo M_{l-2} no es de la forma $M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$. Entonces podemos escribir $M_{l-2} = M(D_2^{-1}\gamma_1 C_{l-2})$.

Por la existencia de la configuración (2.2) sabemos que el morfismo $g_{l-2} : M_{l-2} \rightarrow N_{l-2}$ es un epimorfismo irreducible con núcleo $\overline{J_2}$. Por otro lado, siguiendo el Lema 2.1.8, tenemos que $M(D_2^{-1}\gamma_1 C_{l-2})/M(D_2^{-1}) \simeq M(C_{l-2})$ y por consiguiente $\text{Im}(g_{l-2}) \simeq M(C_{l-2})$. Por lo tanto, $N_{l-2} \simeq M(C_{l-2})$.

Afirmamos que $M_{l-1} \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. En efecto, supongamos que $N_{l-2} \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Por el Lema 2.2.1(a) tenemos que $C_{l-2} = D_2^{-1}C'_{l-2}$ (donde C'_{l-2} puede ser tanto trivial como de la forma $C'_{l-2} = \gamma_1 C''_{l-2}$, con C''_{l-2} una cuerda) o de manera inversa $C_{l-2} = C'_{l-2}D_2$ (donde C'_{l-2} puede ser tanto trivial como de la forma $C'_{l-2} = C''_{l-2}\gamma_1^{-1}$ con C''_{l-2} una cuerda). Notemos que el último caso no es posible, ya que si $C_{l-2} = C'_{l-2}\gamma_1^{-1}D_2$ entonces $M_{l-2} = M(D_2^{-1}\gamma_1 C''_{l-2}\gamma_1^{-1}D_2)$ contradiciendo lo que habíamos asumido. Más aún, D_2 tampoco es trivial. En efecto, si D_2 fuera trivial entonces $M_{l-2} = M(\varepsilon_u^{-1}\gamma_1 C_{l-2})$. Sumado a esto tenemos dos opciones para C_{l-2} : que C_{l-2} sea trivial o no lo sea. Supongamos que C_{l-2} es trivial, entonces $C_{l-2} = \varepsilon_u$ y es una cuerda que no comienza en un pico ya que M_{l-2} no es un módulo inyectivo. Luego está definido $(C_{l-2})_h = \varepsilon_u \gamma_1 D'$ ya que como D_2 es trivial resulta que γ_1 es la única flecha de Q que tiene como vértice final a u . Por consiguiente, la sucesión que casi se parte que comienza en M_{l-2} es la siguiente

$$0 \longrightarrow M(\varepsilon_u^{-1}\gamma_1 \varepsilon_u) \longrightarrow M(\varepsilon_u^{-1}\gamma_1 \varepsilon_u \gamma_1 D_{l-2}) \oplus M(\varepsilon_u) \longrightarrow M(\varepsilon_u \gamma_1 D') \longrightarrow 0$$

donde ambos módulos del término del medio indescomponibles pertenecen a $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, contradiciendo así lo que habíamos asumido. Por lo tanto C_{l-2} no es trivial.

Ahora, si C_{l-2} no es trivial entonces $C_{l-2} = \varepsilon_u^{-1}\gamma_1 C''_{l-2}$ y por ende $M_{l-2} = M(\varepsilon_u^{-1}\gamma_1 \varepsilon_u^{-1}\gamma_1 C''_{l-2})$. Con el mismo análisis anterior, C''_{l-2} no es una cuerda directa que comienza en un pico, pues M_{l-2} no es un A -módulo inyectivo. Luego, al igual que antes, la sucesión que casi se parte que comienza en M_{l-2} tiene ambos términos del medio en el conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, contradiciendo nuevamente lo que habíamos asumido. Por lo tanto podemos concluir que D_2 no es trivial.

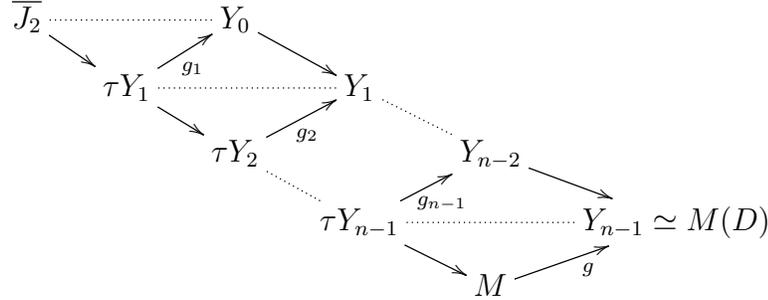
Ahora, continuemos analizando los casos faltantes asumiendo que D_2 no es trivial. Vamos a descartarlo probando que podemos construir un módulo banda.

Si $C_{l-2} = D_2^{-1}C'_{l-2}$, como $M_{l-2} = M(D_2^{-1}\gamma_1 C_{l-2})$ entonces $D_2^{-1}\gamma_1 D_2^{-1}$ es una cuerda. Por lo tanto todas las potencias positivas de la cuerda $D_2^{-1}\gamma_1$ están definidas, obteniendo así una cuerda banda contradiciendo que A es de tipo de representación finito.

Ahora, si $C_{l-2} = D_2$ entonces $D_2^{-1}\gamma_1 D_2$ es una cuerda. Como ningún subpaseo de $D_2^{-1}\gamma_1 D_2$ pertenece a I , resulta que todas las potencias naturales de la cuerda $D_2^{-1}\gamma_1 D_2 \gamma_1^{-1}$ están definidas, contradiciendo nuevamente que A es de tipo de representación finito.

Todas estas contradicciones provienen de suponer primero que N_{l-2} es un módulo de $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Por lo tanto, $N_{l-2} \notin \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ obteniendo así que $M_{l-1} \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, probando lo querido.

A continuación probaremos que dado $M \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, entonces $M = M_k$ para algún $k = 0, \dots, l$ considerando a $M_0 = \overline{J_2}$ y $M_l = I$. Por Lema 2.2.1, como $M \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ entonces $M = M(D_2^{-1})$ o $M = M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ donde D es una cuerda. En el caso en que $M = M(D_2^{-1})$, entonces $M = M_0$ probando así lo deseado. En caso contrario, por el Lema 2.1.8 la proyección canónica $g : M(D_2^{-1}\gamma_1 D) \rightarrow M(D)$ es un epimorfismo irreducible con $\text{Ker}(g) = \overline{J_2}$. Por ser A un álgebra de tipo de representación finito, siguiendo el Teorema 1.7.8 resulta que $d_l(g) = n < \infty$. Más aún, por la Proposición 1.7.6 existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue:



donde $\overline{J_2} \rightarrow \tau Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau Y_{n-1} \rightarrow M$ es un camino seccional.

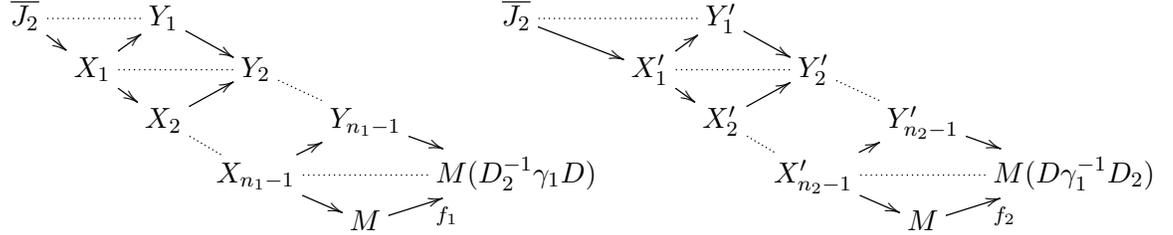
Por otra parte, el epimorfismo irreducible $f : I \rightarrow J_1$ es tal que $d_l(f) = l$. Más aún, existe una configuración de sucesiones que casi se parten como en (2.2).

Afirmamos que $n \leq l$. En efecto, si $n > l$, como ambas configuraciones anteriormente mencionadas involucran sucesiones que casi se parten comenzando en los mismos módulos, resulta que $M_i \simeq \tau Y_i$ para $1 \leq i \leq l$, contradiciendo así que $M_l = I$ es un módulo inyectivo. Por lo tanto $n \leq l$ y en consecuencia $M = M_n$.

Por último vamos a determinar el número de módulos no isomorfos M_k en el camino seccional $\overline{J_2} \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow I$ en (2.2). Vamos a probar que los módulos de la forma $M(D_2^{-1}\gamma_1 D \gamma_1^{-1} D_2)$ aparecen exactamente dos veces en (2.2) mientras que los otros módulos M_k en (2.2) son no isomorfos dos a dos.

Consideremos $M = M(D_2^{-1}\gamma_1 D \gamma_1^{-1} D_2)$. Por la Proposición 2.2.4(a), (ii) los morfismos $f_1 : M(D_2^{-1}\gamma_1 D \gamma_1^{-1} D_2) \rightarrow M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ y $f_2 : M(D_2^{-1}\gamma_1 D \gamma_1^{-1} D_2) \rightarrow M(D \gamma_1^{-1} D_2)$ son epimorfismos irreducibles tales que $\text{Ker}(f_1) = \text{Ker}(f_2) = \overline{J_2}$.

Como A es un álgebra de tipo de representación finito, entonces por el Teorema 1.7.8 tenemos que $d_l(f_1) = n_1 \leq l$ y $d_l(f_2) = n_2 \leq l$. En consecuencia, existen dos configuraciones de sucesiones que casi se parten como las siguientes:



Si $n_1 = n_2$, por la unicidad (salvo isomorfismos) de las sucesiones que casi se parten deducimos que $Y_i \simeq Y'_i$ para todo $1 \leq i \leq n_1$. Pero $Y_{n_1} \simeq M(D_2^{-1}\gamma_1 D) \not\simeq M(D\gamma_1^{-1}D_2) \simeq Y'_{n_2}$. Por lo tanto, $n_1 \neq n_2$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $n_1 < n_2$. Luego, $M \simeq M_{n_1}$ y $M \simeq M_{n_2}$, con $1 \leq n_1 < n_2 \leq l$, probando así que M aparece por lo menos dos veces como un módulo en el camino seccional descrito en (2.2).

Ahora supongamos que $M \simeq M_k$ para algún $1 \leq k \leq l$, $k \neq n_1$ y $k \neq n_2$. El epimorfismo irreducible $g_k : M_k \rightarrow N_k$ es tal que $d_l(g_k) = k$. Como $\alpha'(M) = 2$ resulta que N_k tiene dos posibilidades: $N_k \simeq M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ o $N_k \simeq M(D\gamma_1^{-1}D_2)$. De esta manera tenemos que $d_l(g_k) = n_1$ o $d_l(g_k) = n_2$, contradiciendo así lo que habíamos asumido. En conclusión, probamos que $M = M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$ aparece exactamente dos veces en el camino seccional $\overline{J_2} \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{n-1} \rightarrow I$ de la configuración (2.2).

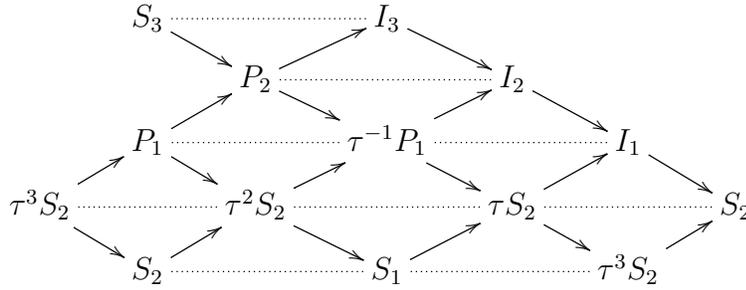
Ahora asumamos que $M \simeq \overline{J_2}$, $\simeq I$ o $M \simeq M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$. En los dos primeros casos, M claramente aparece sólo una vez en (2.2) pues existe una única sucesión que casi se parte con término del medio indescomponible que comienza en un módulo de $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$ y hay un único módulo inyectivo indescomponible en el conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$, respectivamente. Consideremos por último que $M \simeq M(D_2^{-1}\gamma_1 D)$ y supongamos que M aparece dos veces en la configuración (2.2), es decir, $M \simeq M_k$ y $M \simeq M_j$ con $1 \leq k < l$, $1 \leq j < l$ y $k \neq j$. Entonces, las sucesiones que casi se parten $0 \rightarrow M_k \rightarrow M_{k+1} \oplus N_k \rightarrow N_{k+1} \rightarrow 0$ y $0 \rightarrow M_j \rightarrow M_{j+1} \oplus N_j \rightarrow N_{j+1} \rightarrow 0$ son isomorfas. Por la Proposición 2.2.4, (a), (iii) sabemos que $M_{k+1} \rightarrow N_{k+1}$ y $M_{j+1} \rightarrow N_{j+1}$ son epimorfismos irreducibles con núcleo igual a $\overline{J_2}$, y además $N_k \rightarrow N_{k+1}$ y $N_j \rightarrow N_{j+1}$ son tanto monomorfismos irreducibles o si son epimorfismos su núcleo no es igual a $\overline{J_2}$. Por lo tanto, los morfismos $M_{k+1} \rightarrow N_{k+1}$ y $M_{j+1} \rightarrow N_{j+1}$ son isomorfos y por ende $k = d_l(g_k) = d_l(g_j) = j$, contradiciendo que $k \neq j$, lo que habíamos supuesto. En conclusión, en estos casos M aparece sólo una vez en (2.2), probando así el resultado. \square

A continuación, mostraremos dos ejemplos donde algunos módulos aparecen dos veces en el camino seccional mencionado anteriormente.

Ejemplo 2.2.6 (a). Consideremos el álgebra de cuerdas dada por la siguiente presentación

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2 \xrightarrow{\gamma} 3$$

con la relación $\beta\alpha = 0$. El carcaj de Auslander-Reiten es el siguiente:



donde los mismos módulos en dicho carcaj están identificados entre sí.

Siguiendo la notación de la proposición anterior, si consideramos el módulo inyectivo indescomponible correspondiente al vértice 3, tenemos que $I_3 = M(D_2^{-1}D_1)$ con $D_2 = \varepsilon_3$ y $D_1 = \gamma\alpha\beta$. Luego, como se puede observar en el camino seccional

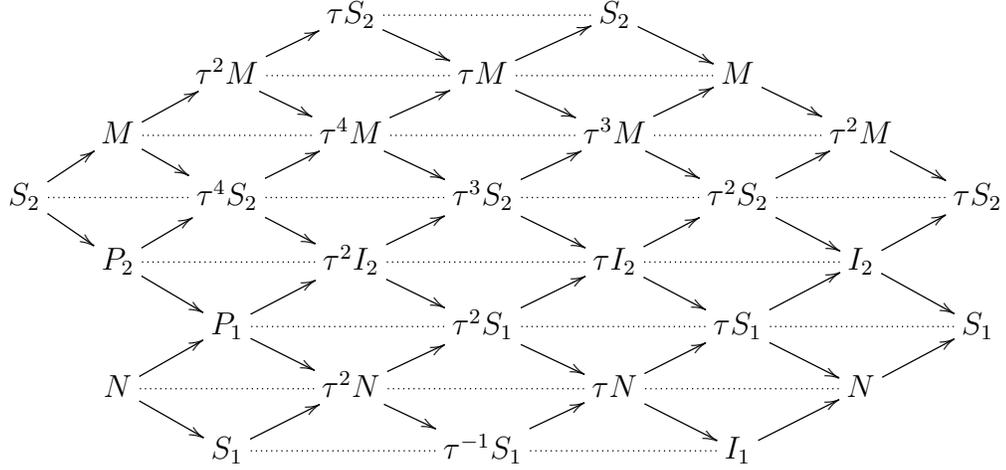
$$S_3 \rightarrow P_2 \rightarrow \tau^{-1}P_1 \rightarrow \tau S_2 \rightarrow \tau^3 S_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow I_3$$

el módulo proyectivo indescomponible $P_2 = M(\varepsilon_3^{-1}\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\varepsilon_3)$ aparece dos veces, mientras que el resto de los módulos que intervienen en el camino sólo aparecen una vez.

(b). Consideremos el álgebra de cuerdas dada por la siguiente presentación

$$\alpha \circlearrowleft 1 \xrightarrow{\beta} 2 \circlearrowright \gamma$$

con las relaciones $\alpha^3 = 0$, $\gamma^2 = 0$ y $\beta\alpha = 0$. El carcaj de Auslander-Reiten es el siguiente:



donde los mismos módulos en dicho carcaj están identificados entre sí.

Si consideramos el módulo inyectivo indescomponible correspondiente al vértice 1, resulta que $I_1 = M(D_2^{-1}D_1)$ con $D_2 = \varepsilon_1$ y $D_1 = \alpha^2$. Luego, el camino seccional mencionado en la proposición anterior comienza en el módulo S_1 y termina en el módulo I_1 y tiene longitud 20. Notemos que los módulos $\tau^3 S_2 = M(\varepsilon_1^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\alpha^{-1}\varepsilon_1)$, $\tau^2 I_2 = M(\varepsilon_1^{-1}\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\alpha^{-2}\varepsilon_1)$, $\tau I_2 = M(\varepsilon_1^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\alpha^{-1}\varepsilon_1)$ y $\tau^2 S_1 = M(\varepsilon_1^{-1}\alpha\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\alpha^{-2}\varepsilon_1)$ aparecen dos veces, mientras que el resto aparece sólo una vez.

Estamos en condiciones de presentar uno de los resultados principales de esta sección, que se deduce inmediatamente de la Proposición 2.2.5 y del Lema 2.2.1.

Teorema 2.2.7 *Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Sean I y P A -módulos inyectivo y proyectivo indescomponibles, respectivamente. Sean J_1 y J_2 los sumandos directos indescomponibles de $I/\text{soc } I$ y R_1 y R_2 los sumandos directos indescomponibles de $\text{rad } P$. Entonces,*

$$(a) \ d_l(I \rightarrow J_1) = \text{card}(\mathcal{C}_{D_2}) - 1 \ \text{y} \ d_l(I \rightarrow J_2) = \text{card}(\mathcal{C}_{D_1}) - 1;$$

$$(b) \ d_r(R_1 \rightarrow P) = \text{card}(\mathcal{D}_{C_2}) - 1 \ \text{y} \ d_r(R_2 \rightarrow P) = \text{card}(\mathcal{D}_{C_1}) - 1,$$

siempre que dichos morfismos irreducibles estén definidos.

Por la Observación 2.2.2, sabemos que si existe una cuerda C tal que C y C^{-1} pertenece a \mathcal{C}_{D_2} , obtenemos el mismo módulo cuerda en $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. El teorema anterior puede ser enunciado en función de conjuntos de módulos cuerdas.

Siguiendo la notación usada en la proposición anterior, consideremos los conjuntos

$$\mathcal{M}_1 = \{M(C) \mid C = D_1^{-1}\beta_1 D\beta_1^{-1}D_1 \text{ con } D \text{ una cuerda no trivial}\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{M(C) \mid C = D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2 \text{ con } D \text{ una cuerda no trivial}\},$$

$$\mathcal{S}_1 = \{M(C) \mid C = C_1\lambda_1^{-1}D\lambda_1 C_1^{-1} \text{ con } D \text{ una cuerda no trivial}\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{M(C) \mid C = C_2\alpha_1^{-1}D\alpha_1 C_2^{-1} \text{ con } D \text{ una cuerda no trivial}\}.$$

Entonces podemos enunciar el Teorema 2.2.7 como sigue:

Teorema 2.2.8 *Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Sean I y P A -módulos inyectivo y proyectivo indescomponibles, respectivamente. Sean J_1 y J_2 los sumandos directos indescomponibles de $I/\text{soc } I$ y R_1 y R_2 los sumandos directos indescomponibles de $\text{rad } P$. Entonces,*

$$(a) \quad \begin{aligned} d_i(I \rightarrow J_1) &= \text{card}(\mathcal{M}_{\overline{J_2}} - \mathcal{M}_2) + 2 \text{card}(\mathcal{M}_2) - 1 \quad \text{y} \\ d_i(I \rightarrow J_2) &= \text{card}(\mathcal{M}_{\overline{J_1}} - \mathcal{M}_1) + 2 \text{card}(\mathcal{M}_1) - 1; \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} d_r(R_1 \rightarrow P) &= \text{card}(\mathcal{S}_{\overline{R_2}} - \mathcal{S}_2) + 2 \text{card}(\mathcal{S}_2) - 1 \quad \text{y} \\ d_r(R_2 \rightarrow P) &= \text{card}(\mathcal{S}_{\overline{R_1}} - \mathcal{S}_1) + 2 \text{card}(\mathcal{S}_1) - 1, \end{aligned}$$

siempre que dichos morfismos irreducibles estén definidos.

Observación 2.2.9 En el caso que no existan módulos de la forma $M(C) = M(D_2^{-1}\gamma_1 D\gamma_1^{-1}D_2)$ entonces todos los módulos en el camino seccional son no isomorfos dos a dos. En tal caso, $\text{card}(\mathcal{C}_{D_2}) = \text{card}(\mathcal{M}_{\overline{J_2}})$.

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.7 y del Teorema 1.7.7 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.10 *Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Sean I y P A -módulos inyectivo y proyectivo indescomponibles, respectivamente, y supongamos que no son módulos simples. Consideremos J_1 y J_2 los sumandos directos indescomponibles de $I/\text{soc } I$ y R_1 y R_2 los sumandos directos indescomponibles de $\text{rad } P$. Entonces,*

$$(a) \quad d_i(I \rightarrow I/\text{soc } I) = \text{card}(\mathcal{C}_{D_2}) + \text{card}(\mathcal{C}_{D_1}) - 2.$$

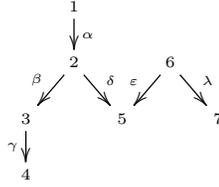
$$(b) \quad d_r(\text{rad } P \rightarrow P) = \text{card}(\mathcal{D}_{C_2}) + \text{card}(\mathcal{D}_{C_1}) - 2.$$

Recordemos que, por el Teorema 1.7.16, para calcular el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra de tipo de representación finito, sólo hace falta conocer los grados a izquierda de los morfismos irreducibles de la forma $I \rightarrow I/\text{soc}I$, donde I es un módulo inyectivo indescomponible; y los grados a derecha de los morfismos irreducibles de la forma $\text{rad}P \rightarrow P$, donde P es un módulo proyectivo indescomponible.

Por el Teorema 2.2.10, observemos que dichos grados los podemos calcular a partir del cardinal de ciertos conjuntos de cuerdas de Q .

A continuación, presentaremos un ejemplo para mostrar cómo calculamos el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos, teniendo en cuenta la presentación del álgebra A y el Teorema 1.7.16.

Ejemplo 2.2.11 Consideremos $A = kQ/I$ el álgebra de cuerdas dada por la presentación



con $I = \langle \beta\alpha \rangle$.

Sean I_u y P_u los A -módulos inyectivo y proyectivo correspondientes al vértice u , respectivamente. Sean $J_1(u)$, $J_2(u)$ y $R_1(u)$, $R_2(u)$ los sumandos directos indescomponibles de $I_u/\text{soc}I_u$ y $\text{rad}P_u$, respectivamente.

Para $i = 1, 2$ denotamos por $m_i(u) = \text{card}(\mathcal{C}_{D_i(u)})$ y por $n_i(u) = \text{card}(\mathcal{D}_{C_i(u)})$. Consideremos n_u y m_u los valores definidos en la Notación 1.7.13. Notemos que si I_u es un módulo simple, tenemos que $m_1(u) = 1 = m_2(u)$. De la misma manera, si P_u es un módulo simple entonces $n_1(u) = 1 = n_2(u)$. Además, resulta de la reciente observación y del Teorema 2.2.10 que

$$n_u = n_1(u) + n_2(u) - 2 \quad \text{y} \quad m_u = m_1(u) + m_2(u) - 2.$$

Más aún, recordemos que $r_u = m_u + n_u$.

Calculando $m_i(u)$ y $n_i(u)$ para cada vértice $u \in Q_0$ obtenemos los siguientes resultados:

u	$m_1(u)$	$m_2(u)$	m_u	$n_1(u)$	$n_1(u)$	n_u	\mathbf{r}_u
1	1	1	0	1	5	4	4
2	1	2	1	3	4	5	6
3	1	5	4	1	2	1	5
4	1	6	5	1	1	0	5
5	5	3	6	1	1	0	6
6	1	1	0	6	2	6	6
7	7	1	6	1	1	0	6

Por lo tanto, por el Teorema 1.7.16 tenemos que $r_A = 7$, es decir, $\mathfrak{R}^7(\text{mod } A) = 0$, mientras que $\mathfrak{R}^6(\text{mod } A) \neq 0$.

Veremos más adelante en el Teorema 4.2.9, que para conocer el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ sólo basta calcular los valores r_2 y r_3 , ya que 2 y 3 son los únicos vértices que no son ni pozos ni fuentes en Q .

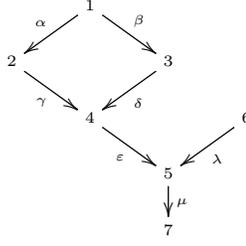
2.3. Cómo leer grados a través del carcaj ordinario.

Sea $A \simeq kQ/I$ un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Para cada vértice $u \in Q_0$, vamos a definir dos carcajes Q_u^e y Q_u^s como siguen:

- (i) a) Los vértices $(Q_u^e)_0$ son las cuerdas C en Q tales que $e(C) = u$, donde C es el camino trivial ε_u o es de la forma $C = \alpha C'$, con $\alpha \in Q_1$.
- b) Si $a = C$ y $b = C'$ son dos vértices de $(Q_u^e)_0$, entonces existe una flecha $a \rightarrow b$ en Q_u^e si C' es el paseo reducido de $C\beta^{-1}$, para alguna flecha $\beta \in Q_1$.
- (ii) a) Los vértices $(Q_u^s)_0$ son las cuerdas C en Q tales que $s(C) = u$, donde C es el camino trivial ε_u o es de la forma $C = C'\alpha$, con $\alpha \in Q_1$.
- b) Si $a = C$ y $b = C'$ son dos vértices de $(Q_u^s)_0$, entonces existe una flecha $a \rightarrow b$ en Q_u^s si C' es el paseo reducido de βC , para alguna flecha $\beta \in Q_1$.

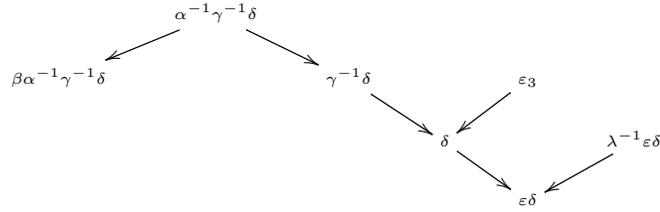
A continuación, presentaremos un ejemplo para mostrar que estos dos nuevos carcajes no son necesariamente subcarcajes de Q .

Ejemplo 2.3.1 Sea $A = kQ/I$ el álgebra de cuerdas dado por la presentación

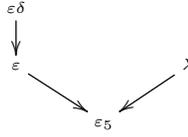


con $I = \langle \delta\beta, \varepsilon\gamma, \mu\varepsilon \rangle$.

Consideremos el vértice $u = 3$. Entonces, el carcaj Q_3^s es el siguiente



Se puede observar que Q_3^s no es un subcarcaj de Q , pero si consideramos el vértice $u = 5$ podemos notar que Q_5^e es un subcarcaj de Q como podemos ver a continuación:



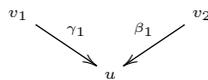
Proposición 2.3.2 Sea $A = kQ/I$ una álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Sean $I = I_u$ y $P = P_u$ los A -módulos inyectivo y proyectivo indescomponibles correspondientes al vértice $u \in Q_0$, respectivamente. Entonces,

(a) $d_l(I \rightarrow I/\text{soc } I) = \text{card}((Q_u^e)_0) - 1$;

(b) $d_r(\text{rad } P \rightarrow P) = \text{card}((Q_u^s)_0) - 1$,

siempre que dichos morfismos irreducibles estén definidos.

Demostración: Probaremos únicamente el inciso (a) ya que el inciso (b) se deduce de manera dual. Vamos a considerar el caso general, es decir, cuando Q tiene un subcarcaj de la forma:



Las cuerdas de Q correspondientes a los vértices de Q_u^e son de la forma:

- (i) $C_0 = \varepsilon_u$,
- (ii) $C_1 = \gamma_1 C'_1$ con C'_1 una cuerda,
- (iii) $C_2 = \beta_1 C'_2$ con C'_2 una cuerda.

Observemos que existe una biyección entre las cuerdas dadas en (ii) y las cuerdas $D_2^{-1}C_1$ que pertenecen al conjunto $\mathcal{C}_{D_2} - \{D_2\}$. También existe una biyección entre las cuerdas dadas en (iii) y las cuerdas de la forma $D_1^{-1}C_2$ pertenecientes al conjunto $\mathcal{C}_{D_1} - \{D_1\}$.

Por lo tanto, por la Proposición 2.2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
 d_l(I \rightarrow \text{soc}I) &= \text{card}(\mathcal{C}_{D_2}) - 1 + \text{card}(\mathcal{C}_{D_1}) - 1 \\
 &= \text{card}(\mathcal{C}_{D_2} - \{D_2\}) + \text{card}(\mathcal{C}_{D_1} - \{D_1\}) \\
 &= \text{card}((Q_u^e)_0) - 1.
 \end{aligned}$$

pues en esa biyección no estamos considerando la cuerda $C_0 = \varepsilon_u$. \square

Ejemplo 2.3.3 Consideremos A el álgebra de cuerdas dada en el Ejemplo 2.3.1. Por el resultado anterior tenemos que $d_l(I_5 \rightarrow I_5/\text{soc}I_5) = 3$ ya que Q_5^e tiene cuatro vértices, y $d_r(\text{rad}P_3 \rightarrow P_3) = 6$ ya que Q_3^s tiene siete vértices.

A continuación, para cada vértice $u \in Q_0$ construiremos los carcajes Q_u^e y Q_u^s . Más aún, vamos a calcular el grado a izquierda y a derecha de los morfismos irreducibles $f_u : I_u \rightarrow I_u/\text{soc}I_u$ y $g_u : \text{rad}P_u \rightarrow P_u$, respectivamente, en el caso de que ellos existan. Siguiendo la Notación 1.7.13, denotamos por $r_u = m_u + n_u$.

u	1	2	3	4	5	6	7
Q_u^e	ε_1					ε_6	
$d_l(f_u)$	—	2	4	4	3	—	2
Q_u^s							ε_7
$d_r(g_u)$	4	2	6	2	1	4	—
$r(u)$	4	4	10	6	4	4	2

Para calcular el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod}A)$, como veremos en el Teorema 4.2.9, sólo hace falta analizar el máximo valor del conjunto $\{r_2, r_3, r_4, r_5\}$,

ya que los vértices 1 y 6 son fuentes de Q y el vértice 7 es un pozo de Q . Observemos que dicho máximo se da en el vértice $u = 3$. Por lo tanto, concluimos que $\mathfrak{R}^{11}(\text{mod } A) = 0$, mientras que $\mathfrak{R}^{10}(\text{mod } A) \neq 0$.

2.4. Grados de morfismos irreducibles en un álgebra de cuerdas.

Consideremos $A \simeq kQ/I$ un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito y fijemos $I_u = M(D_2^{-1}D_1)$ un A -módulo inyectivo indescomponible donde J_1 y J_2 son los sumandos directos indescomponibles de $I_u/\text{soc } I_u$. Asumamos que $d_l(I_u \rightarrow J_1) = n$. Por el Teorema 2.2.7 tenemos que $\text{card}(\mathcal{C}_{D_2}) = n + 1$.

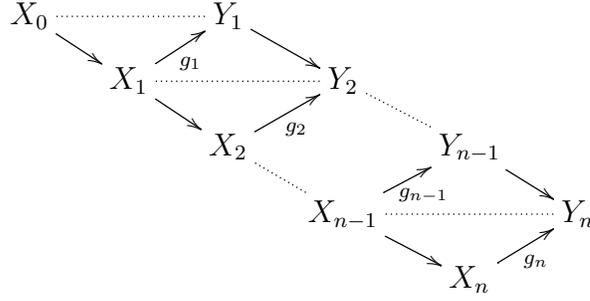
Podemos ordenar los elementos del conjunto $\mathcal{C}_{D_2} = \{C_0, \dots, C_n\}$ de la siguiente manera: diremos que $C_i < C_{i+1}$ para $i = 0, \dots, n - 1$, si existe un morfismo irreducible de $M(C_i)$ a $M(C_{i+1})$.

Recordemos que si $C \in \mathcal{C}_{D_2}$ entonces C es una cuerda que termina en un pico.

Sea $C_0 = D_2^{-1}$ y $C_1 = (D_2^{-1})_h = D_2^{-1}\gamma_1 C'_1$ con C'_1 una cuerda inversa que comienza en una profundidad. Definimos las siguientes cuerdas de manera inductiva.

Consideremos ya definida $C_i = D_2^{-1}\gamma_1 C'_i$. Si C'_i no comienza en un pico, entonces definimos $C_{i+1} = D_2^{-1}\gamma_1 C'_{i+1}$ donde $C'_{i+1} = (C'_i)_h$, es decir, C'_{i+1} es de la forma $C'_{i+1} = C'_i \beta C''_i$ con β una flecha y C''_i una cuerda inversa que comienza en una profundidad. Por lo tanto, por el Lema 2.1.8 existe un morfismo irreducible de $M(C_i)$ a $M(C_{i+1})$. Ahora, si C'_i comienza en un pico (pero no es una cuerda directa), entonces C'_i se puede escribir como $C'_i = C''_i \alpha^{-1} C'''_i$, con $\alpha \in Q_1$ y C'''_i una cuerda directa. Entonces, definimos a C_{i+1} como $C_{i+1} = D_2^{-1}\gamma_1 C'_{i+1}$ donde $C'_{i+1} = C''_i$. Nuevamente, por el Lema 2.1.8 existe un morfismo irreducible de $M(C_i)$ a $M(C_{i+1})$. En caso contrario, si C'_i comienza en un pico y es una cuerda directa, entonces $M(C_i)$ es el módulo inyectivo de $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Por el Lema 2.2.1 sabemos que en todos los casos se tiene que $C_{i+1} \in \mathcal{C}_{D_2}$. Siguiendo esta construcción resulta que el último módulo $M(C_n)$ es el módulo inyectivo de $\mathcal{M}_{\overline{J_2}}$. Por lo tanto, $M(C_n) = M(D_2^{-1}D_1)$.

Vamos a denotar $M(C_i) = X_i$ para $i = 0, \dots, n$. Asimismo, vamos a construir el camino seccional de la Proposición 2.2.5. Más aún, tenemos una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue:



donde $d_l(g_i : X_i \rightarrow Y_i) = i$, para $i = 1, \dots, n$.

A continuación probaremos que dado un epimorfismo irreducible entre A -módulos indescomponibles $f : M \rightarrow N$, existe un A -módulo inyectivo indescomponible tal que, para algún $i = 1, \dots, n$, resulta que $f \simeq g_i$ de la configuración anterior.

Lema 2.4.1 *Sea $A \simeq kQ/I$ un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito y sea $f : M \rightarrow N$ un epimorfismo irreducible con $M, N \in \text{ind } A$. Entonces, existe un único $u \in Q_0$ tal que $\text{Ker}(f) = \overline{J_2}(u)$, donde I_u es el A -módulo inyectivo correspondiente al vértice u y $J_1(u), J_2(u)$ son los sumandos directos de $I/\text{soc } I_u$. Más aún, $M \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}(u)}$.*

Demostración: Sea $f : M \rightarrow N$ un epimorfismo irreducible entre los módulos indescomponibles $M = M(C)$ y $N = M(C')$. Afirmamos que C' o bien no comienza o no termina en una profundidad, porque en caso contrario $M(C')$ no podría ser el codominio de un epimorfismo. Luego, sin pérdida de generalidad podemos asumir que C' es una cuerda que no termina en una profundidad (si no, podemos considerar C'^{-1}). En consecuencia, siguiendo la descripción de las sucesiones que casi se parten con dos términos en el medio, C es de la forma $C = D^{-1}\alpha C' =_c C'$ con $\alpha \in Q_1$ y D un camino que comienza en un pico. Más aún, $\text{Ker}(f) \simeq M(D)$.

Consideremos ahora el vértice $u \in Q_0$ tal que $e(D) = u$. El A -módulo inyectivo correspondiente al vértice u es de la forma $I_u = M(D_2^{-1}D_1)$ con D_1 y D_2 caminos que comienzan en un pico y tales que $e(D_1) = u = e(D_2)$. Dado que tanto D^{-1} como D_2^{-1} son cuerdas inversas que terminan en un pico con $e(D) = e(D_2)$ entonces $D = D_2$. Más aún, si $J_1(u)$ y $J_2(u)$ son los sumandos directos de $I_u/\text{soc } I_u$, entonces $\overline{J_2}(u) = M(D) = \text{Ker}(f)$. Además, por el Lema 2.2.1 $M \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}(u)}$, probando así el resultado propuesto. \square

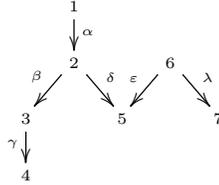
Observación 2.4.2 Por el lema anterior, para cualquier epimorfismo irreducible entre módulos indescomponibles $f : M \rightarrow N$, tenemos que $M \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}(u)}$ para

algún vértice $u \in Q_0$. Si M aparece sólo una vez en la configuración de sucesiones que casi se parten descripta anteriormente, es decir, $M \simeq X_k$ para algún $1 \leq k \leq n$, entonces $d_l(f) = k$. En caso contrario, si $M \simeq X_k$ y $M \simeq X_j$ con $1 \leq k < j \leq n$, tenemos que analizar el módulo N para conocer el grado a izquierda de f . De hecho, si $N \simeq X_{k+1}$, entonces $d_l(f) = j$. De otra manera, $N \simeq Y_{k+1}$ y entonces concluimos que $d_l(f) = k$.

De manera similar podemos leer el grado a derecha de cualquier monomorfismo irreducible entre módulos indescomponibles $g : M \rightarrow N$, dando un orden para el conjunto \mathcal{D}_{C_2} , donde $M(C_2)$ es el conúcleo de g . Dualmente al orden dado para conjunto \mathcal{C}_{D_2} , en este caso tenemos que $D_i < D_{i+1}$ en \mathcal{D}_{C_2} , si existe un morfismo irreducible $M(D_{i+1}) \rightarrow M(D_i)$. Más precisamente, $D_0 = \overline{R_2}$, $D_1 = {}_c D_0$ y para continuar con el orden de las cuerdas restantes de \mathcal{D}_{C_2} debemos analizar si éstas terminan en una profundidad.

A continuación, presentaremos un ejemplo para mostrar como podemos calcular el grado a izquierda de cualquier epimorfismo irreducible a partir del quiver con relaciones de A , es decir, sin tener en cuenta el carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod } A$.

Ejemplo 2.4.3 (a). Sea $A \simeq kQ/I$ el álgebra de cuerdas dado en el Ejemplo 2.2.3.



con $I = \langle \beta\alpha \rangle$.

Sea f el epimorfismo irreducible $f : M \rightarrow N$, donde $M: \begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}$ y $N: \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$.

Denotamos a $M = M(C)$ y $N = M(C')$ donde $C = \varepsilon^{-1}\delta\beta^{-1}$ y $C' = \beta^{-1}$. Observemos que $C = \varepsilon^{-1}\delta C'$, por lo tanto siguiendo la construcción anterior tenemos que ε^{-1} es la cuerda inversa que termina en un pico y la flecha γ_1 está representada por δ . Más aún, $\text{Ker}(f) = M(\varepsilon^{-1}): \begin{smallmatrix} 6 \\ 5 \end{smallmatrix}$.

Vamos a denotar por $\overline{J_2}(5)$ el A -módulo $M(\varepsilon^{-1})$ y vamos a ordenar al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}(5)}$ como describimos anteriormente. Consideramos $X_0 = M(\varepsilon^{-1})$ y $X_1 = M(\varepsilon^{-1}\delta C_1)$ con C_1 una cuerda inversa que comienza en una profundidad. Luego, X_1 es de la forma $X_1 = M(\varepsilon^{-1}\delta\beta^{-1}\gamma^{-1})$. Como C_1 es una cuerda que comienza en un pico y no es directa, escribimos $C_1 = \beta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon_4$, donde ε_4 es una cuerda

directa. Por lo tanto, definimos a X_2 como $X_2 = M(\varepsilon^{-1}\delta C_2)$ con $C_2 = \beta^{-1}$. Nuevamente, C_2 es una cuerda que comienza en un pico y no es directa, entonces definimos X_3 como $X_3 = M(\varepsilon^{-1}\delta C_3)$ con $C_3 = \varepsilon_2$. Ahora, C_3 no comienza en un pico, entonces definimos $X_4 = M(\varepsilon^{-1}\delta C_4)$ con $C_4 = \alpha$. Como C_4 es una cuerda directa que comienza en un pico, resulta que X_4 es el módulo inyectivo de $\mathcal{M}_{\overline{J_2}(5)}$, obteniendo así el siguiente conjunto ordenado:

$$\mathcal{M}_{\overline{J_2}(5)} = \{X_0 : \begin{array}{c} 6 \\ 5 \end{array}, X_1 : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 3 \ 5 \\ 4 \end{array}, X_2 : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 3 \ 5 \end{array}, X_3 : \begin{array}{c} 2 \ 6 \\ 5 \end{array}, X_4 : \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 6 \\ 5 \end{array} \}.$$

Como $M = X_2 \in \mathcal{M}_{\overline{J_2}(5)}$, concluimos que $d_l(f) = 2$.

(b). Sea $A = kQ/I$ el álgebra de cuerdas dada por la presentación

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 2 \xrightarrow{\gamma} 3$$

con la relación $\beta\alpha = 0$.

Consideremos el epimorfismo irreducible $f : P_2 \rightarrow I_3$ y calculemos su grado a izquierda. Tenemos que el codominio es $I_3 = M(\varepsilon_3^{-1}\gamma\alpha\beta)$. Como dicha cuerda termina en una profundidad, siguiendo el algoritmo anterior vamos a considerar su cuerda inversa, es decir, $I_3 = M(C')$ con $C' = \beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$. Así, C' no termina en una profundidad y ${}_c C' = \varepsilon_3^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1} = C$ con $M(C) = P_2$. En este caso, $D = \varepsilon_3$ y $e(\varepsilon_3) = 3$. Por lo tanto, siguiendo el Lema 2.4.1, para obtener el grado a izquierda de f debemos ordenar el conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}(3)}$ donde $\overline{J_2}(3) = M(\varepsilon_3) = S_3$.

El módulo P_2 aparece dos veces en el conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}(3)}$ ya que es de la forma $M(\varepsilon_3^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon_3)$. Por consiguiente, tenemos que analizar en qué lugar aparece el módulo I_3 , que también pertenece a dicho conjunto.

En efecto, comencemos ordenando al conjunto. Para ello, consideramos $C_0 = \varepsilon_3^{-1}$ y $C_1 = (C_0)_h = \varepsilon_3^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$. Observemos que $P_2 = M(C_1)$. Luego, debemos construir la cuerda C_2 y analizar si I_3 es $M(C_2)$ o no.

En efecto, tenemos que $C_1 = \varepsilon_3^{-1}\gamma C'_1$ con $C'_1 = \beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}$ una cuerda que comienza en un pico y no es directa. Luego podemos escribirla como $C'_1 = (\beta^{-1}\alpha^{-1})\gamma^{-1}\varepsilon_3$ y de esta manera definimos a $C_2 = \varepsilon_3^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}$. En este caso $M(C_2) \neq I_3$, por lo tanto afirmamos que $d_l(f) = 1$. Si en caso contrario, $M(C_2)$ hubiese sido I_3 , deberíamos continuar ordenando al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}(3)}$ hasta que el módulo P_2 aparezca nuevamente.

Hasta aquí hemos analizado el grado de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles. Los siguientes resultados nos permiten determinar los grados

de los morfismos irreducibles cuando el dominio o el codominio de un morfismo irreducible es un módulo descomponible.

Proposición 2.4.4 *Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Consideremos $f : M \rightarrow N_1 \oplus N_2$ un morfismo irreducible, con M, N_1 y N_2 A -módulos indescomponibles. Entonces se satisface uno de los siguientes enunciados.*

- (a) *Si M no es inyectivo, entonces $d_r(f) = 1$ y $d_l(f) = \infty$.*
- (b) *Si M es inyectivo, entonces $d_r(f) = \infty$ y $d_l(f) < \infty$. El valor de $d_l(f)$ está dado en el Teorema 2.2.10.*

Demostración: Consideremos $f : M \rightarrow N_1 \oplus N_2$ un morfismo irreducible, con $M, N_1, N_2 \in \text{ind } A$.

(a) Si M no es un módulo inyectivo, entonces existe una sucesión de Auslander-Reiten que comienza en el módulo M y en consecuencia f es un morfismo minimal que casi se parte a izquierda inyectivo. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 1.7.3 resulta que $d_r(f) = 1$ y en consecuencia $d_l(f) = \infty$.

(b) Si M es un A -módulo inyectivo, digamos $M = I$, entonces $N_1 = J_1$ y $N_2 = J_2$, donde J_1 y J_2 son los sumandos indescomponibles del módulo $I/\text{soc } I$. Por lo tanto, en virtud del Teorema 1.7.8 resulta que $d_l(f) < \infty$ y en consecuencia $d_r(f) = \infty$. Más aún, si consideramos $f_1 : I \rightarrow J_1$ y $f_2 : I \rightarrow J_2$, entonces $d_l(f) = d_l(f_1) + d_l(f_2)$ y su valor exacto lo podemos determinar por el Teorema 2.2.10. \square

Dualmente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.5 *Sea A un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. Consideremos $f : M_1 \oplus M_2 \rightarrow N$ un morfismo irreducible, con M_1, M_2 y N A -módulos indescomponibles. Entonces se satisface uno de los siguientes enunciados.*

- (a) *Si N no es proyectivo, entonces $d_r(f) = \infty$ y $d_l(f) = 1$.*
- (b) *Si M es proyectivo, entonces $d_r(f) < \infty$ y $d_l(f) = \infty$. El valor de $d_r(f)$ está dado en el Teorema 2.2.10.*

Capítulo 3

Sobre la composición de morfismos irreducibles.

Uno de los problemas que interesan en la teoría de representaciones es el estudio de composiciones de morfismos irreducibles y la relación con la potencia del radical a la cual pertenecen. Sigue de la definición de radical, que la composición de n morfismos irreducibles pertenece a la potencia n -ésima del radical.

Uno de los primeros resultados en esta dirección fue dado por K. Igusa y G. Todorov, quienes probaron que la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles que forman parte de un camino seccional pertenece al $\mathfrak{R}^n \setminus \mathfrak{R}^{n+1}$. S. Liu generalizó este resultado para ciertos caminos que denominó caminos preseccionales.

En este capítulo estudiaremos composiciones no nulas de n morfismos irreducibles que pertenecen a la potencia $n + 1$ del radical.

3.1. Composición de n morfismos irreducibles en la potencia $n + 1$ del radical, que no pertenece al radical infinito.

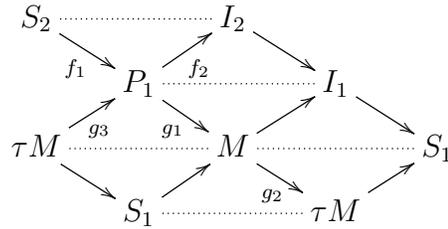
En [21], C. Chaio, F. Coelho y S. Trepode dieron una caracterización para que la composición de dos morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles pertenezca al radical al cubo. Más aún, los autores probaron que no existen morfismos irreducibles f y g tales que $gf \in \mathfrak{R}^3 \setminus \mathfrak{R}^4$. Continuando con este estudio, E. R. Alvares y F. Coelho probaron en [1], que si la composición de dos morfismos irreducibles pertenece a \mathfrak{R}^3 , entonces pertenece a \mathfrak{R}^5 . Además, presentaron el siguiente ejemplo, que muestra la existencia dos morfismos irreducibles cuya

composición pertenece a $\mathfrak{R}^5 \setminus \mathfrak{R}^6$.

Ejemplo 3.1.1 Sea A el álgebra dada por la presentación

$$\alpha \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \end{array} 1 \xrightarrow{\beta} 2$$

donde $I = \langle \alpha^2 \rangle$. El carcaj de Auslander-Reiten de $\Gamma_{\text{mod } A}$ es el siguiente.



donde los mismos módulos en dicho carcaj están identificados entre sí.

Consideremos los morfismos irreducibles $h_1 : S_2 \rightarrow P_1$ y $h_2 : P_1 \rightarrow I_2$, con $h_1 = f_1$ y $h_2 = f_2 + f_2 g_3 g_2 g_1$. Luego, la composición

$$h_2 h_1 = f_2 f_1 + f_2 g_3 g_2 g_1 f_1 = f_2 g_3 g_2 g_1 f_1$$

es no nula y pertenece a $\mathfrak{R}^5(S_2, I_2) \setminus \mathfrak{R}^6(S_2, I_2)$, debido a que los morfismos de la última composición forman parte de un camino seccional.

Siguiendo con esta línea de investigación, en [22], los autores estudiaron caracterizaciones para que la composición de tres morfismos irreducibles pertenezca a la cuarta potencia del radical, considerando que la composición de dos morfismos no pertenezca al radical al cubo.

En virtud de generalizar este enfoque, C. Chaio en [19] estudió la composición de n morfismos irreducibles sobre caminos casi preseccionales. Recordemos la definición de camino preseccional y casi preseccional.

Definición 3.1.2 *Un camino $Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n$ en $\Gamma_{\text{mod } A}$ se dice **preseccional** si para cada i , con $1 \leq i \leq n - 1$, tal que $Y_{i-1} \simeq \tau Y_{i+1}$ entonces existe un morfismo irreducible $Y_{i-1} \oplus \tau Y_{i+1} \rightarrow Y_i$. O, equivalentemente, si $\tau^{-1} Y_{i-1} \simeq Y_{i+1}$, entonces existe un morfismo irreducible $Y_i \rightarrow \tau^{-1} Y_{i-1} \oplus Y_{i+1}$.*

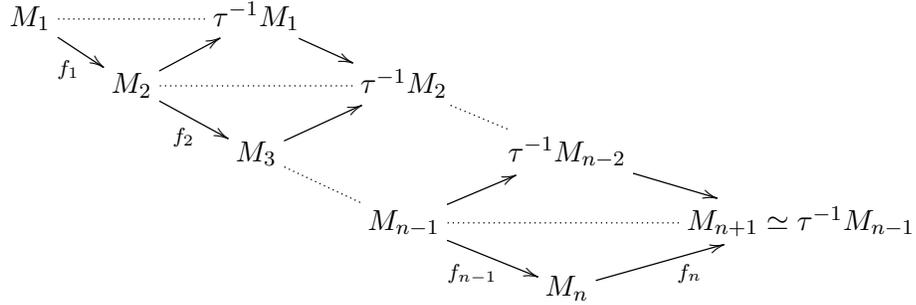
Notemos que todo camino seccional es también un camino preseccional.

Definición 3.1.3 Un camino $Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_n$ en Γ_A se dice **casi presecional a izquierda** si $Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-1}$ es un camino presecional en $\Gamma_{\text{mod } A}$ e $Y_n \simeq \tau^{-1}Y_{n-2}$.

Dualmente se define camino casi presecional a derecha.

C. Chaio probó el siguiente resultado.

Teorema 3.1.4 [19, Teorema 2.18] Sea A un álgebra y supongamos que existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue

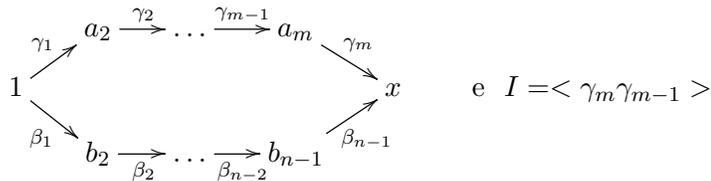


donde $f_1 : M_1 \rightarrow M_2, \dots, f_n : M_n \rightarrow M_{n+1}$ son morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles con $f_n \dots f_1$ en un camino casi presecional a izquierda tal que $f_{n-1} \dots f_1 \notin \mathfrak{R}^n(M_1, M_n)$. Sean $h_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ morfismos irreducibles para $i = 1, \dots, n$ tales que la composición $0 \neq h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+1}(M_1, M_{n+1})$. Entonces $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+3}(M_1, M_{n+1})$.

Nuestro objetivo es determinar para qué números naturales t la composición no nula de n morfismos irreducibles que pertenece a \mathfrak{R}^{n+1} , también pertenece a $\mathfrak{R}^{n+t} \setminus \mathfrak{R}^{n+t+1}$. Notemos que bajo las hipótesis del Teorema 3.1.4, el valor de t es mayor o igual que tres.

Vamos a considerar las siguientes familias de álgebras.

Sean m y n números naturales, con $m \geq 2$ y $n \geq 2$. Vamos a denotar por $(U(m, n-1), I)$ el siguiente carcaj con relaciones:



Probaremos que en la categoría de módulos de un álgebra A dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$, con $m, n \geq 2$, existe una composición de n morfismos irreducibles que pertenece a $\mathfrak{R}^{n+2m} \setminus \mathfrak{R}^{n+2m+1}$.

Observemos que el álgebra A es un álgebra de cuerdas. Más aún, es de tipo de representación finito, debido a que no se puede construir una cuerda C tal que para todo número natural n , C^n sea una cuerda.

A lo largo de esta sección vamos a utilizar la siguiente notación.

Notación 3.1.5 Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$ con $m, n \geq 2$. Consideremos las siguientes cuerdas de $U(m, n-1)$:

- Para $1 \leq j \leq m-1$ definimos

- $G_j = \gamma_j \cdots \gamma_1$, y
- $\overline{G}_j = \gamma_{m-1} \cdots \gamma_j$.

- Para $1 \leq i \leq n-1$ definimos

- $B_i = \beta_i \cdots \beta_1$, y
- $\overline{B}_i = \beta_{n-1} \cdots \beta_i$.

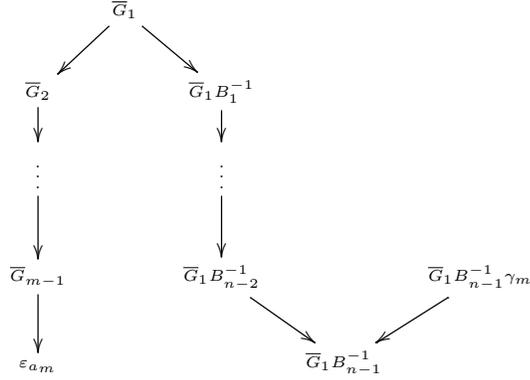
Notemos que $G_{m-1} = \overline{G}_1$ y $B_{n-1} = \overline{B}_1$.

Los siguientes resultados son esenciales para la demostración del Teorema 3.1.12.

Lema 3.1.6 Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$, con $m, n \geq 2$. Consideremos los morfismos irreducibles $\iota_{a_m} : \text{rad } P_{a_m} \rightarrow P_{a_m}$ y $\theta_{a_m} : I_{a_m} \rightarrow I_{a_m}/\text{soc } I_{a_m}$, donde P_{a_m} e I_{a_m} son los A -módulos proyectivo e inyectivo correspondientes al vértice a_m , respectivamente. Entonces, $d_r(\iota_{a_m}) = m + n - 1$. Más aún, $d_r(\iota_{a_m}) = d_l(\theta_{a_m})$.

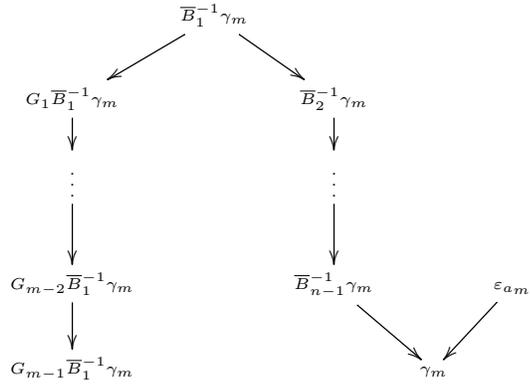
Demostración: Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$, con $m, n \geq 2$. Para el vértice a_m en $U(m, n-1)$, consideremos los morfismos irreducibles ι_{a_m} y θ_{a_m} como en el enunciado. Como presentamos en la Sección 2.3 del capítulo anterior, $d_l(\theta_{a_m})$ y $d_r(\iota_{a_m})$ se pueden determinar en función de la cantidad de vértices de los carcajes $Q_{a_m}^e$ y $Q_{a_m}^s$, respectivamente.

Recordemos que los vértices del carcaj $Q_{a_m}^e$ son las cuerdas C tales que $e(C) = a_m$, y $C = \varepsilon_{a_m}$ o C es de la forma $C = \gamma_{m-1}C'$, con C' una cuerda. Utilizando la Notación 3.1.5, el carcaj $Q_{a_m}^e$ es el siguiente.



Observemos que el cardinal del conjunto $(Q_{a_m}^e)_0$ es igual a $m + n$. En conclusión, por la Proposición 2.3.2 tenemos que $d_l(\theta_{a_m}) = \text{card}((Q_{a_m}^e)_0) - 1$. Por lo tanto $d_l(\theta_{a_m}) = m + n - 1$.

De manera dual, podemos construir el carcaj $Q_{a_m}^s$. Siguiendo la Notación 3.1.5, el carcaj $Q_{a_m}^s$ es el siguiente.



También $Q_{a_m}^s$ tiene $m + n$ vértices. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.3.2 tenemos que $d_r(\iota_{a_m}) = m + n - 1$. \square

Observación 3.1.7 Observemos que la cuerda

$$G_{m-1} \bar{B}_1^{-1} \gamma_m = \bar{G}_1 B_{n-1}^{-1} \gamma_m$$

es un vértice tanto del carcaj $Q_{a_m}^e$ como del carcaj $Q_{a_m}^s$. Vamos a denotar por L al módulo cuerda que proviene de dicha cuerda.

Dados X, Y y Z módulos indescomponibles, denotaremos por $X \rightsquigarrow Y \rightsquigarrow Z$ a los caminos de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de X a Z que pasan por el módulo Y .

Proposición 3.1.8 Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n - 1), I)$, con $m, n \geq 2$. Consideremos P_{a_m}, S_{a_m} e I_{a_m} los módulos proyectivo, simple e inyectivo correspondientes al vértice a_m . Sea L el módulo cuerda $M(G_{m-1}\overline{B}_1^{-1}\gamma_m)$. Entonces existe en $\text{mod } A$ un camino seccional de la forma

$$P_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow S_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I_{a_m}.$$

Más aún, el ciclo $L \rightsquigarrow S_{a_m} \rightsquigarrow L$ tiene longitud igual a $2m$.

Demostración: Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n - 1), I)$, con $m, n \geq 2$. Sea I_{a_m} el A -módulo inyectivo correspondiente al vértice a_m y consideremos el morfismo irreducible $\theta_{a_m} : I_{a_m} \rightarrow I_{a_m}/\text{soc}I_{a_m}$. Observemos que $I_{a_m}/\text{soc}I_{a_m}$ es un módulo indescomponible. Más aún, $\text{Ker}(\theta_{a_m}) = S_{a_m}$ y por el lema anterior $d_l(\theta_{a_m}) = m + n - 1$. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.2.5, existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{a_m} & \cdots & \tau^{-1}S_{a_m} & & & & \\
 \searrow^{f_1} & & \nearrow & & & & \\
 M_1 & \cdots & \tau^{-1}M_1 & & & & \\
 \searrow^{f_2} & & \nearrow & & & & \\
 M_2 & \cdots & \tau^{-1}M_2 & & & & \\
 & & \nearrow & & & & \\
 & & M_{m+n-2} & \cdots & \tau^{-1}N_{m+n-3} & \cdots & I_{a_m}/\text{soc}I_{a_m} \\
 & & \searrow^{f_{m+n-1}} & & \nearrow & & \\
 & & I_{a_m} & & \nearrow^{\theta_{a_m}} & &
 \end{array}$$

donde el camino $S_{a_m} \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_{m+n-2} \rightarrow I_{a_m}$ es un camino seccional.

Por otra parte, los módulos en dicho camino seccional están en correspondencia con los módulos cuerdas $M(C)$, donde C son las cuerdas de los vértices del carcaj $Q_{a_m}^e$. En particular, el módulo cuerda $L = M(\overline{G}_1\overline{B}_{n-1}^{-1}\gamma_m)$, es un módulo que aparece en dicho camino. Además, $L \neq S_{a_m}$ y $L \neq I_{a_m}$. Por lo tanto, podemos representar al camino de la siguiente manera

$$S_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I_{a_m}.$$

Afirmamos que la longitud del camino $S_{a_m} \rightsquigarrow L$ es igual a m . Para probar la afirmación debemos ordenar el conjunto $\mathcal{C}_{\varepsilon_{a_m}}$, como presentamos en la Sección 2.4. Recordemos que $C_i < C_{i+1}$ si existe un morfismo irreducible $M(C_i) \rightarrow M(C_{i+1})$. Para dar dicho orden tenemos que analizar si las cuerdas comienzan en un pico. En particular, si C_i es una cuerda que no termina en un pico, entonces definimos C_{i+1} como $(C_i)_h$.

Sea $C_0 = \varepsilon_{a_m}^{-1}$. Como C_0 no comienza en un pico, definimos $C_1 = (C_0)_h = \varepsilon_{a_m}^{-1}\gamma_{m-1} = \overline{G}_{m-1}$. Luego, existe un morfismo irreducible $S_{a_m} = M(C_0) \rightarrow M(C_1)$.

Observemos que para $2 \leq j \leq m-1$, las cuerdas $\overline{G}_j = \gamma_{m-1} \dots \gamma_j$ no comienzan en un pico. Más aún, $(\overline{G}_2)_h = \overline{G}_1 B_{n-1}^{-1}$ y para $3 \leq j \leq m-1$ tenemos que $(\overline{G}_j)_h = \overline{G}_j \gamma_{j-1} = \overline{G}_{j-1}$. Luego, continuando con el orden del conjunto $\mathcal{C}_{\varepsilon_{a_m}}$, definimos para $2 \leq i \leq m-2$ las cuerdas $C_i = \overline{G}_{m-i}$ y $C_{m-1} = \overline{G}_1 B_{n-1}^{-1}$.

Finalmente, C_{m-1} tampoco comienza en un pico. Entonces $C_m = (C_{m-1})_h = \overline{G}_1 B_{n-1}^{-1} \gamma_m$. De esta manera obtenemos que el módulo cuerda $M(C_m)$ es igual a L .

Por lo tanto, tenemos un camino de morfismos irreducibles

$$S_{a_m} = M(C_0) \rightarrow M(C_1) \rightarrow \dots \rightarrow M(C_{m-1}) \rightarrow M(C_m) = L \rightsquigarrow I_{a_m} \quad (3.1)$$

y el camino $S_m \rightsquigarrow L$ tiene longitud m .

Dualmente, consideremos P_{a_m} el A -módulo proyectivo indescomponible correspondiente al vértice a_m y el morfismo irreducible $\iota_{a_m} : \text{rad } P_{a_m} \rightarrow P_{a_m}$. Observemos que $\text{rad } P_{a_m}$ es un módulo indescomponible y además, $\text{Coker}(\iota_{a_m}) = S_{a_m}$. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.2.5 y el Lema 3.1.6, existe un camino seccional $P_{a_m} \rightsquigarrow S_{a_m}$ de longitud $m+n-1$. Nuevamente, los módulos de dicho camino están en correspondencia con las cuerdas de los vértices del carcaj $Q_{a_m}^s$. En particular, el módulo cuerda $L = M(G_{m-1} \overline{B}_1^{-1} \gamma_m)$ es un módulo de dicho camino seccional. Más aún, $L \neq P_{a_m}$ y $L \neq S_{a_m}$. Por lo tanto, dicho camino es de la forma $P_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow S_{a_m}$.

Nuevamente, afirmamos que el camino $L \rightsquigarrow S_{a_m}$ tiene longitud igual a m . En este caso, para determinar la longitud de dicho camino debemos ordenar el conjunto $\mathcal{D}_{\varepsilon_{a_m}}$.

De manera dual a lo que vimos anteriormente, $D_i < D_{i+1}$ si existe un morfismo irreducible $M(D_{i+1}) \rightarrow M(D_i)$. Para dar dicho orden debemos analizar si las cuerdas terminan en una profundidad. En particular, si D_i es una cuerda que no termina en una profundidad, entonces definimos D_{i+1} como ${}_c D_i$.

Sea $D_0 = \varepsilon_{a_m}$. Como D_0 no termina en una profundidad definimos $D_1 = {}_c D_0 = \beta_1^{-1} \dots \beta_{n-1}^{-1} \gamma_m \varepsilon_m = B_{n-1}^{-1} \gamma_m$. Nuevamente, la cuerda D_1 no termina en una profundidad, entonces $D_2 = {}_c D_1 = \gamma_1 B_{n-1}^{-1} \gamma_m$. Notemos que para cada j , con $1 \leq j \leq m-2$, las cuerdas $G_j = \gamma_j \dots \gamma_1$ no terminan en una profundidad. Más aún, ${}_c(G_j) = \gamma_{j+1} G_j = G_{j+1}$. Por lo tanto, continuando el orden del conjunto $\mathcal{D}_{\varepsilon_{a_m}}$, definimos para $3 \leq i \leq m$ las cuerdas $D_i = G_{i-1} B_{n-1}^{-1} \gamma_m$. De esta manera, $M(D_m) = L$. Luego, el camino de morfismos irreducibles es de la forma

$$P_{a_m} \rightsquigarrow L = M(D_m) \rightarrow M(D_{m-1}) \rightarrow \dots \rightarrow M(D_1) \rightarrow M(D_0) = S_{a_m}. \quad (3.2)$$

Por lo tanto, el camino $L \rightsquigarrow S_{a_m}$ tiene longitud m .

Ahora, del camino (3.2) y del camino (3.1) obtenemos el camino

$$P_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow S_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I_{a_m}, \quad (3.3)$$

donde el ciclo $L \rightsquigarrow S_m \rightsquigarrow L$ tiene longitud igual a $2m$.

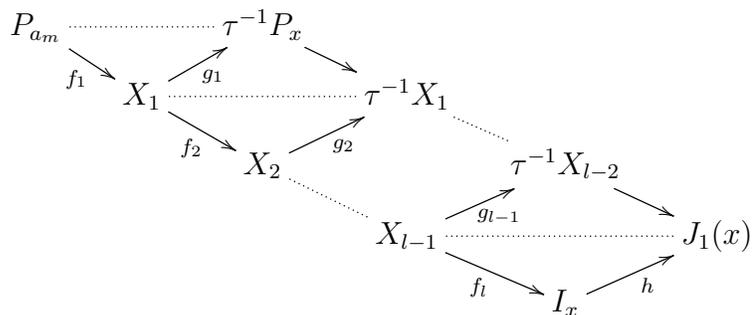
Resta probar que el camino (3.3) es seccional. Sabemos de su construcción que los caminos $P_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow S_{a_m}$ y $S_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I_{a_m}$ son seccionales. Luego, debemos analizar si el subcamino $M(D_1) \rightarrow S_m \rightarrow M(C_1)$ es seccional. Notemos que $M(D_1)$ es un módulo inyectivo, ya que $D_1 = B_{n-1}^{-1}\gamma_m$, donde B_{n-1} y γ_m son caminos que terminan en un pico. Más precisamente, como $e(B_{n-1}) = x = e(\gamma_m)$, entonces $M(D_1) = I_x$, donde I_x es el módulo inyectivo correspondiente al vértice x . Por lo tanto, $M(C_1) \not\cong \tau^{-1}I_x$. En conclusión, el camino (3.3) es un camino seccional, completando de esta forma la prueba de la proposición. \square

Proposición 3.1.9 *Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$, con $m, n \geq 2$. Consideremos los módulos cuerda $L = M(\overline{G}_1 B_{n-1}^{-1} \gamma_m)$ y $N = M(\overline{G}_1 B_{n-2}^{-1})$. Entonces $f : L \rightarrow N$ es un epimorfismo irreducible. Más aún, $d_l(f) = n - 1$.*

Demostración: Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$, con $m, n \geq 2$. Consideremos $L = M(C)$ y $N = M(D)$ los módulos cuerda de mod A , donde $C = \gamma_{m-1} \dots \gamma_1 \beta_1^{-1} \dots \beta_{n-1}^{-1} \gamma_m$ y $D = \gamma_{m-1} \dots \gamma_1 \beta_1^{-1} \dots \beta_{n-2}^{-1}$. Notemos que D es una cuerda que no comienza en una profundidad. Más aún, $D_c = D \beta_{n-1}^{-1} \gamma_m = C$. Por lo tanto, en virtud del Lema 2.1.8,(c) tenemos que $f : M(C) \rightarrow M(D)$ es un epimorfismo irreducible, donde $\text{Ker}(f) \simeq M(C)/M(D) \simeq M(\gamma_m) = P_{a_m}$. Más aún, como A es un álgebra de tipo de representación finito, f tiene grado a izquierda finito.

Vamos a calcular el valor exacto de $d_l(f)$ con el algoritmo establecido en el capítulo anterior. Ya vimos que el $\text{Ker}(f) \simeq M(\gamma_m)$. Como $e(\gamma_m) = x$, consideramos el módulo $I_x = M(\gamma_m^{-1} B_{n-1})$. De esta manera, los sumandos indescomponibles de $I_x/\text{soc}I_x$ resultan $J_1(x) = M(B_{n-2})$ y $J_2(x) = S_{a_m}$. Además, considerando el morfismo irreducible $h : I_x \rightarrow J_1(x)$, tenemos que $\text{Ker}(f) \simeq M(\gamma_m) \simeq \text{Ker}(h)$. Por lo tanto, asumiendo que $d_l(h) = l$, el morfismo $f : L \rightarrow N$ está representado por algún morfismo $g_i : X_i \rightarrow \tau^{-1}X_{i-1}$ de la siguiente configuración de sucesiones

que casi se parten.



donde $\alpha'(P_x) = 1$ y $\phi : P_x \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_{l-1} \rightarrow I_x$ es un camino seccional. Además, los módulos que aparecen en el camino ϕ pertenecen al conjunto $\mathcal{M}_{\overline{J_2}(x)}$. En particular, el módulo L aparece en dicho camino seccional. Como $L \not\cong P_x$ y $L \not\cong I_x$, entonces $L \simeq X_j$, para algún j , $1 \leq j \leq l-1$.

Por otra parte, en la demostración de la Proposición 3.1.8, probamos la existencia de un camino seccional

$$\rho : P_{a_m} \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow L \rightarrow \dots \rightarrow M_{m+n-3} \rightarrow I_x \rightarrow S_{a_m}$$

de longitud $m+n-1$. y que además el camino $L \rightsquigarrow S_{a_m}$ tiene longitud m .

Como $\dim_k(\text{Hom}_A(P_{a_m}, S_{a_m})) = 1$, entonces $l = m+n-2$. Más aún, afirmamos que para cada i , $1 \leq i \leq l-1$ tenemos que $M_i \simeq X_i$. En efecto, como $\alpha'(P_m) = 1$, entonces $X_1 \simeq M_1$. Por otra parte, como ρ es un camino seccional, $M_2 \not\cong \tau^{-1}P_x$. Por lo tanto, $X_2 \simeq M_2$. Siguiendo con este argumento resulta que $X_i \simeq M_i$, para $1 \leq i \leq l-1$. De esta manera, como el camino $L \rightsquigarrow S_{a_m}$ tiene longitud m , entonces $L \simeq X_{n-1}$. Por lo probado en la Sección 2.4 del capítulo anterior, tenemos que $d_l(f) = n-1$, probando el resultado. \square

Observación 3.1.10 En las demostraciones de la Proposición 3.1.8 y la Proposición 3.1.9 hemos probado la existencia de un camino seccional

$$P_{a_m} \xrightarrow{\phi} L \rightsquigarrow S_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I_{a_m}$$

donde el camino ϕ tienen longitud $n-1$ y el ciclo $L \rightsquigarrow L$ tiene longitud $2m$. Más aún, sabemos que existe un morfismo irreducible $f : L \rightarrow N$. Afirmamos que el módulo N es parte de dicho camino seccional. En efecto, en la demostración Proposición 3.1.8 hemos ordenado las primeras m cuerdas C_1, \dots, C_m del conjunto $\mathcal{C}_{\varepsilon_{a_m}}$, donde $C_m = \overline{G_1} B_{n-1}^{-1} \gamma_m$ y $M(C_m) = L$. Continuemos con el orden de dicho conjunto. Observemos que C_m es una cuerda que comienza en un pico. Luego,

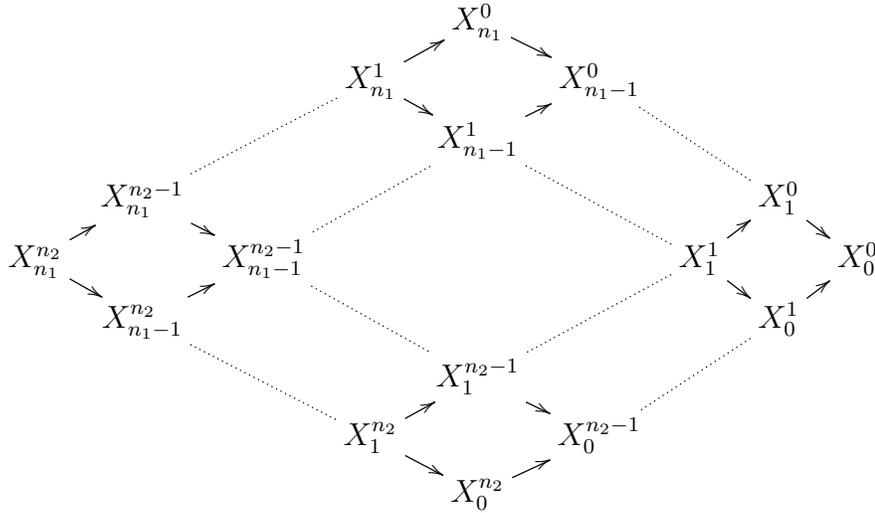
podemos escribir a C_m como $\overline{G}_1 B_{n-2}^{-1} \beta_{n-1}^{-1} \gamma_m$. De esta manera, $C_{m+1} = \overline{G}_1 B_{n-2}^{-1}$ y $N = M(C_{m+1})$. Además, N no es un módulo del camino $P_{a_m} \rightsquigarrow S_{a_m}$, debido a que la cuerda $\overline{G}_1 B_{n-2}^{-1}$ no es un vértice del carcaj $Q_{a_m}^s$. Así, podemos concluir que el camino seccional mencionado anteriormente es de la forma

$$P_{a_m} \rightsquigarrow L \rightsquigarrow S_{a_m} \rightsquigarrow L \rightarrow N \rightsquigarrow I_{a_m}$$

donde la flecha representa un morfismo irreducible.

A continuación transcribiremos parcialmente la Proposición 2.3 de [19] que nos será de utilidad para el próximo resultado.

Proposición 3.1.11 *Sea A un álgebra y $X_i^j \in \text{ind } A$, para $i = 1, \dots, n_1$ y $j = 1, \dots, n_2$. Sea Γ una componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$, con $\alpha(\Gamma) \leq 2$ y $\dim_k(\text{Irr}(X, Y)) \leq 1$, para todo $X, Y \in \Gamma$. Supongamos que existe en Γ una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue*

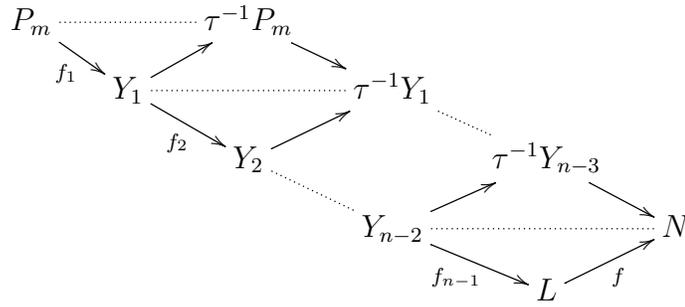


donde $\alpha(X_i^j) = 2$ para $i = 1, \dots, n_1$ y $j = 1, \dots, n_2$. Sean $g_i : X_i^{n_2} \rightarrow X_{i-1}^{n_2}$ para $i = 1, \dots, n_1$ y $f_j : X_0^j \rightarrow X_0^{j-1}$ para $j = 1, \dots, n_2$ morfismos irreducibles que satisfacen la relación de malla de la configuración anterior. Entonces la composición $f_1 \dots f_{n_2} g_1 \dots g_{n_1} \notin \mathfrak{R}^{n_1+n_2+1}$. Más aun, para cualesquiera morfismos irreducibles $h_0^j : X_0^j \rightarrow X_0^{j-1}$ y $h_i^{n_2} : X_i^{n_2} \rightarrow X_{i-1}^{n_2}$ en mod A para $i = 1, \dots, n_1$ y $j = 1, \dots, n_2$ se satisface $h_0^1 \dots h_0^{n_2} h_1^{n_2} \dots h_{n_1}^{n_2} \notin \mathfrak{R}^{n_1+n_2+1}$.

Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema.

Teorema 3.1.12 Sea A el álgebra dada por la presentación $(U(m, n-1), I)$, con $m, n \geq 2$. Entonces existen morfismos irreducibles $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$, y X_i A -módulos indescomponibles para $1 \leq i \leq n+1$, tales que $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+2m}(X_1, X_{n+1}) \setminus \mathfrak{R}^{n+2m+1}(X_1, X_{n+1})$. Además, $h_{n-1} \dots h_1 \notin \mathfrak{R}^n(X_1, X_n)$ y $h_n \dots h_2 \notin \mathfrak{R}^n(X_2, X_{n+1})$.

Demostración: Consideremos el epimorfismo irreducible $f : L \rightarrow N$ de la Proposición 3.1.9. Hemos probado que el grado a izquierda de f es igual a $n-1$ y que $\text{Ker}(f) = P_m$. Por lo tanto, existe una configuración de sucesiones que casi se parten como sigue:



tal que $\delta : P_m \rightarrow Y_1 \rightarrow \dots \rightarrow Y_{n-2} \rightarrow L$ es un camino seccional de longitud $n-1$ y $ff_{n-1} \dots f_1 = 0$. Además, por la Observación 3.1.10 existe un camino seccional de la forma

$$P_m \xrightarrow{\phi} L \xrightarrow{\rho_1} S_m \xrightarrow{\rho_2} L \rightarrow N \rightsquigarrow I_m.$$

donde $\ell(\phi) = n-1$ y $\ell(\rho_2\rho_1) = 2m$. Más aún, hemos probado que los módulos involucrados en el camino $\phi : P_m \rightsquigarrow L$ son los mismos que los módulos involucrados en el camino δ .

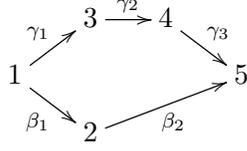
Consideremos $X_1 = P_m$, $X_n = L$, $X_{n+1} = N$ y $X_i = Y_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-1$. Definimos los morfismos irreducibles $h_i = f_i$ para $1 \leq i \leq n-2$, $h_{n-1} = f_{n-1} + f_{n-1}\rho$, donde $\rho : L \rightsquigarrow L$ es una composición de $2m$ morfismos irreducibles que son parte del camino seccional $\rho_2\rho_1$, y $h_n = f$. De esta manera la composición

$$\begin{aligned} h_n \dots h_1 &= f(f_{n-1} + f_{n-1}\rho)f_{n-2} \dots f_1 \\ &= ff_{n-1}f_{n-2} \dots f_1 + ff_{n-1}\rho f_{n-2} \dots f_1 \\ &= ff_{n-1}\rho f_{n-2} \dots f_1. \end{aligned}$$

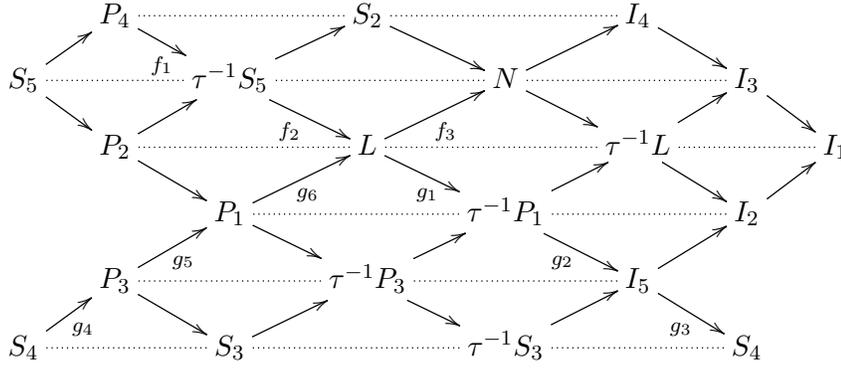
pertenece a $\mathfrak{R}^{n+2m}(X_1, X_{n+1}) \setminus \mathfrak{R}^{n+2m+1}(X_1, X_{n+1})$, debido a que los morfismos son parte de un camino seccional de largo $n+2m$. Además, $h_{n-1} \dots h_1 \notin \mathfrak{R}^n(X_1, X_n)$ y en virtud de la Proposición 3.1.11 tenemos que $h_n \dots h_2 \notin \mathfrak{R}^n(X_2, X_{n+1})$. De esta manera queda demostrado el teorema. \square

Visualicemos lo probado hasta el momento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.13 Sea A el álgebra de cuerdas dada por la presentación



con $I = \langle \gamma_3 \gamma_2 \rangle$. El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma_{\text{mod } A}$ es el siguiente.



donde los mismos módulos en el carcaj están identificados entre sí.

Definimos el morfismo irreducible $h_2 : \tau^{-1}S_5 \rightarrow L$ como

$$h_2 = f_2 + g_6 g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 f_2.$$

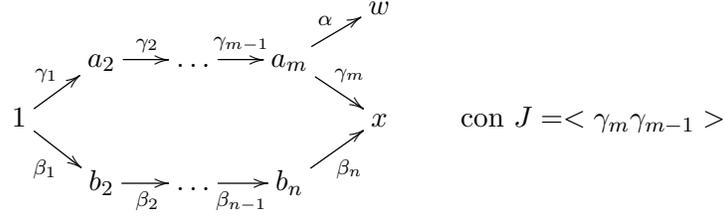
De esta manera, $f_3 h_2 f_1 : P_4 \rightarrow N$ es una composición de 3 morfismos irreducibles que pertenece a $\mathfrak{R}^9(P_4, N) \setminus \mathfrak{R}^{10}(P_4, N)$, ya que

$$\begin{aligned} f_3 h_2 f_1 &= f_3 f_2 f_1 + f_3 g_6 g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 f_2 f_1 \\ &= f_3 g_6 g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 f_2 f_1, \end{aligned}$$

y los morfismos de esta última composición pertenecen a un camino seccional de longitud 9.

Observación 3.1.14 En el Teorema 3.1.12 hemos encontrado familias de álgebras en las cuales existe una composición de n morfismos irreducibles, para $n \geq 2$, que pertenece a $\mathfrak{R}^{n+t} \setminus \mathfrak{R}^{n+t+1}$, con $t \geq 4$ y t un número par.

A continuación estudiaremos la problemática planteada para valores impares de t . Para ello, vamos a considerar la siguiente familia de carcajes con relaciones. Para $n \geq 1$ y $m \geq 2$, consideremos $(V(m, n), J)$



Si consideramos ahora A un álgebra de cuerdas dada por la presentación $(V(m, n - 2), J)$ con $n \geq 3$ y $m \geq 2$, entonces existe una composición de n morfismos irreducibles en mod A tal que pertenece a $\mathfrak{R}^{n+2m+1} \setminus \mathfrak{R}^{n+2m+2}$.

Enunciaremos los resultados análogos a los que presentamos anteriormente, pero sin efectuar su demostración ya que se deduce de forma similar.

Proposición 3.1.15 *Sea A el álgebra dada por la presentación $(V(m, n - 2), J)$, con $m \geq 2$ y $n \geq 3$. Consideremos $P_x = S_x$ e I_x los módulos simple proyectivo e inyectivo correspondientes al vértice x en $V(m, n - 2)$. Sea L el módulo cuerda $L = M(\alpha\gamma_{m-1} \dots \gamma_1\beta_1^{-1} \dots \beta_{n-1}^{-1}\gamma_m\alpha^{-1})$. Entonces existe en mod A un camino seccional de la forma*

$$P_x \rightsquigarrow L \rightsquigarrow L \rightsquigarrow I_x.$$

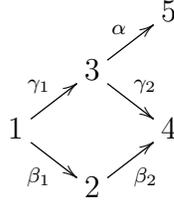
Más aún, el ciclo $L \rightsquigarrow L$ tiene longitud igual a $2m + 1$.

Proposición 3.1.16 *Sea A el álgebra dada por la presentación $(V(m, n - 2), J)$, con $m \geq 2$ y $n \geq 3$. Sean $L = M(\alpha\gamma_{m-1} \dots \gamma_1\beta_1^{-1} \dots \beta_{n-1}^{-1}\gamma_m\alpha^{-1})$ y $N = M(\alpha\gamma_{m-1} \dots \gamma_1\beta_1^{-1} \dots \beta_{n-1}^{-1}\gamma_m)$ A -módulos indescomponibles y $f : L \rightarrow N$ un morfismo. Entonces f es un epimorfismo irreducible. Más aún, $d_l(f) = n - 1$.*

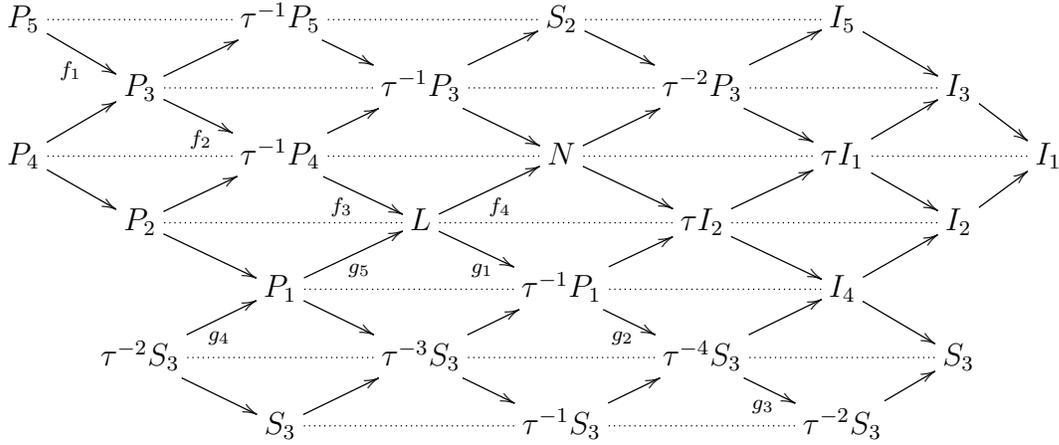
Teorema 3.1.17 *Sea A el álgebra dada por la presentación $(V(m, n - 2), J)$, con $m \geq 2$ y $n \geq 3$. Entonces existen morfismos irreducibles $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$, y X_i A -módulos indescomponibles para $1 \leq i \leq n + 1$, tales que $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+2m+1}(X_1, X_{n+1}) \setminus \mathfrak{R}^{n+2m+2}(X_1, X_{n+1})$. Además, $h_{n-1} \dots h_1 \notin \mathfrak{R}^n(X_1, X_n)$ y $h_n \dots h_2 \notin \mathfrak{R}^n(X_2, X_{n+1})$.*

En el siguiente ejemplo, ilustraremos la problemática planteada para un valor impar de t . Más precisamente, presentaremos la existencia de una composición de 4 morfismos irreducibles que pertenece a $\mathfrak{R}^{4+5} \setminus \mathfrak{R}^{4+6}$.

Ejemplo 3.1.18 *Sea A el álgebra dada por la presentación*



con $I = \langle \gamma_2 \gamma_1 \rangle$. El carcaj de Auslander-Reiten es el siguiente.



donde los mismos módulos en el carcaj están identificados entre sí.

Definimos el morfismo irreducible $h_3 : \tau^{-1}P_4 \rightarrow L$ como

$$h_3 = f_3 + g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 f_3.$$

De esta manera, la composición

$$\begin{aligned} f_4 h_3 f_2 f_1 &= f_4 f_3 f_2 f_1 + f_4 g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 f_3 f_2 f_1 \\ &= f_4 g_5 g_4 g_3 g_2 g_1 f_3 f_2 f_1, \end{aligned}$$

es una composición de 4 morfismos irreducibles que pertenece a $\mathfrak{R}^9 \setminus \mathfrak{R}^{10}$, ya que los morfismos de la última composición pertenecen a un camino seccional de largo 9.

3.2. Composición de n morfismos irreducibles que pertenece a \mathfrak{R}^{n+3} y no pertenece a \mathfrak{R}^{n+4}

En el Teorema 3.1.12 y el Teorema 3.1.17 hemos encontrado familias de álgebras donde existe una composición de n morfismos irreducibles que pertenece a

$\mathfrak{R}^{n+t} \setminus \mathfrak{R}^{n+t+1}$, con $n \geq 3$ y $t \geq 4$. Más aún, con la condición de que la composición de $n - 1$ morfismos no pertenece a \mathfrak{R}^n .

Dedicaremos esta sección a estudiar el problema para $t = 3$. En el Ejemplo 3.1.1, presentamos un álgebra donde existe una composición de 2 morfismos irreducibles que pertenece a $\mathfrak{R}^5 \setminus \mathfrak{R}^6$. Más aún, es claro que cada morfismo no pertenece a \mathfrak{R}^2 debido a que son irreducibles.

Vamos a considerar la siguiente familia de carcajes con relaciones para $n \geq 2$, y la vamos a denotar por $(W(n), I)$.

$$\alpha \curvearrowright 1 \xrightarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow{\beta_2} \dots \xrightarrow{\beta_n} n+1 \quad \text{e } I = \langle \alpha^2, \beta_2\beta_1 \rangle .$$

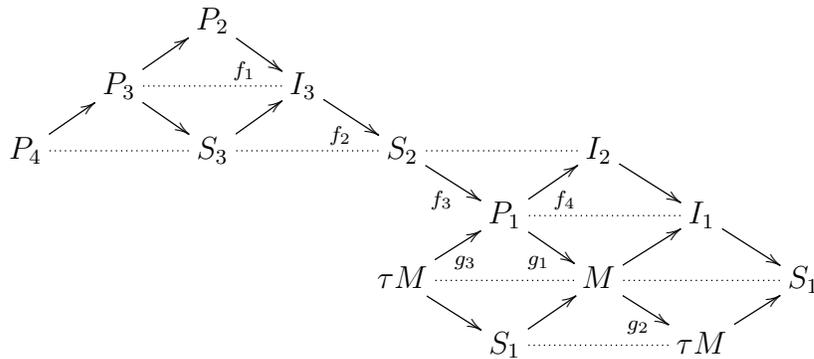
Si consideramos A un álgebra dada por la presentación $(W(n-1), I)$ con $n \geq 3$, entonces existe en mod A una composición de n morfismos irreducibles $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$, tal que $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{n+3}(X_1, X_{n+1}) \setminus \mathfrak{R}^{n+4}(X_1, X_{n+1})$, pero con la condición de que la composición $h_n \dots h_2$ pertenece a $\mathfrak{R}^n(X_2, X_{n+1})$.

Mostraremos esta situación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1 Consideremos el álgebra A dada por la presentación

$$\alpha \curvearrowright 1 \xrightarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow{\beta_2} 3 \xrightarrow{\beta_3} 4$$

con $I = \langle \alpha^2, \beta_2\beta_1 \rangle$. El carcaje de Auslander-Reiten de $\Gamma_{\text{mod } A}$ es el siguiente.



donde los mismos módulos en dicho carcaje están identificados entre sí.

De la misma manera que presentamos en los ejemplos anteriores, si consideramos el morfismo irreducible $h_3 = f_3 + g_3g_2g_1f_3$, la composición $f_4h_3f_2f_1$ es una composición de 4 morfismos irreducibles que pertenece a $\mathfrak{R}^7(P_2, I_2) \setminus \mathfrak{R}^8(P_2, I_2)$, pero en este caso, $f_4h_3f_2 \in \mathfrak{R}^4(I_3, I_2)$.

Nota: Hasta el momento no hemos encontrado ejemplos donde exista una composición de n morfismos irreducible que pertenezca a $\mathfrak{R}^{n+3} \setminus \mathfrak{R}^{n+4}$, y que la composición de $n-1$ morfismos no pertenezca a \mathfrak{R}^n . Por otra parte, no hemos podido probar que tal composición no existe.

Si consideramos un álgebra A que esté bajo las hipótesis del Teorema 3.1.4 y suponemos que dicha composición pertenece a $\mathfrak{R}^{n+3} \setminus \mathfrak{R}^{n+4}$, entonces se puede probar que debe existir en $\text{mod } A$ un ciclo de longitud 3.

Daremos una caracterización para la existencia de ciclos de longitud 3. Recordemos que un camino $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow X_1 \rightarrow X_2$ se dice **ciclo seccional**, si dicho camino es seccional. El siguiente resultado nos será de utilidad para nuestro objetivo.

Teorema 3.2.2 [10] *Sea A un álgebra. Entonces no existen ciclos seccionales en el carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod } A$.*

Recordemos también que dado un morfismo irreducible $f : X \rightarrow Y$ entre módulos indescomponibles, con Y un módulo no proyectivo, entonces existe un morfismo irreducible $\tau Y \rightarrow X$. Dualmente, si X no es un módulo inyectivo, entonces existe un morfismo irreducible de $Y \rightarrow \tau^{-1}X$.

Además, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n X \neq 0$ y $\tau^n Y \neq 0$, entonces existe un isomorfismo k -lineal $\text{Irr}(X, Y) \cong \text{Irr}(\tau^n X, \tau^n Y)$.

Probemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3 *Sea A un álgebra. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

- (a) *Existe un módulo indescomponible no proyectivo M y un morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$.*
- (b) *Existe en $\text{mod } A$ un ciclo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de longitud 3.*

Demostración: Sea M un A -módulo no proyectivo indescomponible tal que existe un morfismo irreducible de M a su trasladado de Auslander-Reiten, τM ; digamos $f : M \rightarrow \tau M$.

Supongamos primero que M no es un módulo inyectivo. Entonces existe $\tau^{-1}M$ y más aún, existe un morfismo irreducible $\tau M \rightarrow \tau^{-1}M$. Por otra parte, existe un morfismo irreducible de $\tau^{-1}M$ en $\tau^{-1}\tau M \simeq M$. Por lo tanto, existe un camino de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles

$$\tau^{-1}M \rightarrow M \rightarrow \tau M \rightarrow \tau^{-1}M$$

que es un ciclo de longitud tres.

Ahora, si M es un módulo inyectivo, entonces afirmamos que τM no es un módulo proyectivo. En efecto, supongamos que τM es un módulo proyectivo. Entonces el morfismo irreducible f es un epimorfismo y un monomorfismo simultáneamente, lo que resulta una contradicción. Por lo tanto, τM no es un módulo proyectivo y en consecuencia existe $\tau^2 M$. Con los mismos argumentos que antes, existe un morfismo irreducible $\tau^2 M \rightarrow M$ y un morfismo irreducible de τM en $\tau(\tau M) = \tau^2 M$. Por lo tanto, existe el siguiente camino de morfismos irreducibles

$$M \rightarrow \tau M \rightarrow \tau^2 M \rightarrow M$$

que es un ciclo de longitud tres.

Recíprocamente, supongamos que existe en $\text{mod } A$ un ciclo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de longitud tres como el siguiente

$$M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M.$$

En virtud del Teorema 3.2.2, dicho ciclo no es seccional, en consecuencia el camino $M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M \rightarrow M_1$ no es seccional. Por lo tanto, se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (1) $M \simeq \tau M_2$. Luego, existe un morfismo irreducible $M_2 \rightarrow \tau M_2$.
- (2) $M_1 \simeq \tau M$. Luego, existe un morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$.
- (3) $M_2 \simeq \tau M_1$. Luego, existe un morfismo irreducible $M_1 \rightarrow \tau M_1$.

En conclusión, en todos los casos existe un morfismo irreducible de un módulo a su trasladado de Auslander-Reiten, probando así el resultado. \square

Vamos a presentar familias de álgebras donde existan un módulo M y un morfismo irreducible de M a su trasladado de Auslander-Reiten. Para ello consideremos los siguientes carcajes con relaciones:

$$\tilde{Q}_1 : \quad \alpha \circlearrowleft \bullet \xrightarrow{\beta} x \quad \text{e } I_1 = \langle \alpha^n, \beta\alpha \rangle, \quad n \geq 2$$

$$\tilde{Q}_2 : \quad x \xrightarrow{\beta} \bullet \circlearrowright \alpha \quad \text{e } I_2 = \langle \alpha^n, \alpha\beta \rangle, \quad n \geq 2$$

$$\tilde{Q}_3 : \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \gamma_1 \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \swarrow \gamma_m \\ \bullet \\ \downarrow \beta \\ x \end{array} \quad \text{e } I_3 = \langle \beta\alpha \rangle, \quad m \geq 1$$

$$\tilde{Q}_4 : \quad \begin{array}{c} x \\ \downarrow \beta \\ \bullet \\ \swarrow \gamma_1 \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ \swarrow \gamma_m \\ \bullet \end{array} \quad \text{e } I_4 = \langle \alpha\beta \rangle, \quad m \geq 1$$

Se puede probar que para un álgebra A dada por una presentación (Q, I) que satisface alguna de las siguientes cuatro condiciones, entonces existe un módulo indecomponible no proyectivo $M \in \text{mod } A$ y un morfismo irreducible de M en τM .

- (1) \tilde{Q}_1 es un subcarcaj pleno de Q e $I_1 \subset I$. Más aún, si existe $\delta : x \rightarrow y$ en Q , entonces $\delta\beta \in I$. Además, no existen otras flechas en Q que incidan en los vértices de \tilde{Q}_1 .
- (2) \tilde{Q}_2 es un subcarcaj pleno de Q e $I_2 \subset I$. Más aún, si existe $\delta : y \rightarrow x$ en Q , entonces $\beta\delta \in I$. Además, no existen otras flechas en Q que incidan en los vértices de \tilde{Q}_2 .
- (3) \tilde{Q}_3 es un subcarcaj pleno de Q e $I_3 \subset I$. Más aún, si existe $\delta : x \rightarrow y$ en Q , entonces $\delta\beta \in I$. Además, no existen otras flechas en Q que incidan en los vértices de \tilde{Q}_3 .
- (4) \tilde{Q}_4 es un subcarcaj pleno de Q e $I_4 \subset I$. Más aún, si existe $\delta : y \rightarrow x$ en Q , entonces $\beta\delta \in I$. Además, no existen otras flechas en Q que incidan en los vértices de \tilde{Q}_4 .

En efecto, observemos que el Ejemplo 3.2.1, el álgebra A está dada por una presentación que satisface la condición (1). En este caso, los módulos M , S_1 y

τM no son módulos proyectivos y, más aún, existe un morfismo irreducible de dichos módulos a su trasladado de Auslander-Reiten.

Las álgebras que satisfagan las condiciones (3) o (4) son álgebras de tipo de representación infinito. Por ejemplo, si consideramos las álgebra de cuerdas dadas por la presentación (\tilde{Q}_3, I_3) , para $m \geq 1$, el módulo inyectivo correspondiente al vértice x , I_x , satisface que existe un morfismo irreducible $I_x \rightarrow \tau I_x$. Más precisamente, la sucesión que casi se parte que termina en I_x tiene un único término del medio indescomponible.

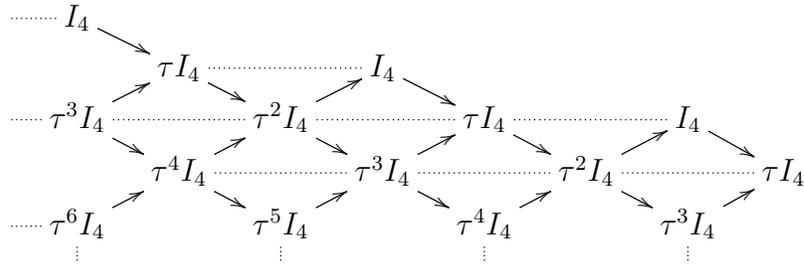
$$0 \rightarrow M(\gamma_1^{-1} \dots \gamma_m^{-1}) \rightarrow M(\gamma_1^{-1} \dots \gamma_m^{-1} \alpha \gamma_1^{-1} \dots \gamma_m^{-1} \beta^{-1}) \rightarrow M(\gamma_1^{-1} \dots \gamma_m^{-1} \beta^{-1}) \rightarrow 0$$

donde $M(\gamma_1^{-1} \dots \gamma_m^{-1} \beta^{-1}) = I_x$ y $M(\gamma_1^{-1} \dots \gamma_m^{-1}) = \tau I_x$. Notemos que además, $\tau I_x = I_x / \text{soc} I_x$. Por lo tanto, existe un morfismo irreducible $I_x \rightarrow \tau I_x$. Más aún, si Γ es la componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$ tal que $I_x \in \Gamma$, todos los módulos M tal que $M \in \Gamma$, satisfacen la condición de la existencia de un morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$. A continuación presentaremos un ejemplo particular para describir esta situación.

Ejemplo 3.2.4 Sea A el álgebra dada por la presentación

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow \gamma_1 & \downarrow \alpha & \\ 2 & & 3 \\ \searrow \gamma_2 & & \downarrow \beta \\ & & 4 \end{array} \quad \text{con } I = \langle \alpha \beta \rangle$$

Sea Γ componente de $\Gamma_{\text{mod } A}$ que contiene al módulo inyectivo I_4 . Entonces Γ es la siguiente.



donde los mismos módulos en Γ están identificados entre sí. Observemos que todos los módulos de esta componente son dominio de un morfismo irreducible, cuyo codominio es su trasladado de Auslander-Reiten.

Definición 3.2.5 *Un módulo indescomponible M en $\text{mod } A$ se dice τ -estable a izquierda si existe $\tau^n M$ para todo n natural.*

Dualmente, M se dice τ -estable a derecha si existe $\tau^{-n} M$ para todo n natural.

Definición 3.2.6 *Un módulo indescomponible M se dice τ -estable si es estable a izquierda y a derecha.*

En particular, si un módulo τ -estable M satisface que $\tau^m M \simeq M$ para algún número natural m , entonces se dice que M es τ -periódico. Más aún, M tiene período m si $\tau^m M \simeq M$ y $\tau^k M \not\simeq M$ para todo $1 \leq k < m$.

Para presentar el último resultado de esta sección es necesario recordar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.7 [36, Teorema 2.3] *Consideremos A un álgebra y $\Gamma_{\text{mod } A}$ el carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod } A$. Sea Γ un subcarcaj pleno de $\Gamma_{\text{mod } A}$. Supongamos que Γ satisface alguna de las siguientes condiciones.*

- (1) *Si X es un módulo no proyectivo en Γ , entonces τX está en Γ y la sucesión que casi se parte que termina en X tiene al menos dos términos en el medio en Γ .*
- (2) *Si X es un módulo no inyectivo en Γ , entonces $\tau^{-1} X$ está en Γ y la sucesión que casi se parte que comienza en X tiene al menos dos términos en el medio en Γ .*

Entonces no existen ciclos orientados en Γ .

Probemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.8 *Sea A un álgebra. Consideremos M un A -módulo no proyectivo tal que existe un morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$. Si M es un módulo τ -estable, entonces M es τ -periódico y tiene período 3.*

Demostración: Sea A un álgebra y consideremos M un módulo indescomponible y τ -estable tal que existe un morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$. Supongamos que M no es τ -periódico. Entonces para todo número entero n , los módulos $\tau^n M$ están definidos. Más aún, dados $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $r \neq s$ tenemos que $\tau^s M \not\simeq \tau^r M$.

Debido a la existencia de un morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$, entonces existe un morfismo irreducible de $\tau^k M \rightarrow \tau^{k+1} M$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Más aún, sabemos que existe un morfismo irreducible de $\tau^2 M \rightarrow M$. Por lo tanto, para todo número entero k también existe un morfismo irreducible $\tau^k M \rightarrow \tau^{k-2} M$.

Consideremos Γ el subcarcaj pleno de $\Gamma_{\text{mod } A}$ cuyos módulos son de la forma $\tau^k M$ para todo número entero k . Observemos que todo módulo de Γ no es proyectivo ni inyectivo. Más aún, para todo módulo $\tau^k M$ en Γ , tenemos que $\tau^k M \rightarrow \tau^{k+1} M \oplus \tau^{k-2} M$ es un morfismo irreducible. En consecuencia, como $\tau^{k+1} M \not\cong \tau^{k-2} M$, todas las sucesiones que casi se parten en Γ tienen al menos dos términos del medio indescomponibles. Por lo tanto, por el Teorema 3.2.7 no existen ciclos orientados en Γ , contradiciendo el Teorema 3.2.3. En conclusión, M es τ -periódico.

Afirmamos que el módulo M tiene período 3. En efecto, sea n el τ -período del módulo M , es decir, $M \simeq \tau^n M$ y $M \not\cong \tau^k M$ para $1 \leq k < n$. Como existen morfismos irreducibles $M \rightarrow \tau M$ y $\tau^2 M \rightarrow M$ y no existen lazos en $\Gamma_{\text{mod } A}$, deducimos que $n > 2$. Por otra parte, debido a la existencia del morfismo irreducible $M \rightarrow \tau M$, existe un ciclo en $\Gamma_{\text{mod } A}$ de la forma

$$\psi : M \rightarrow \tau M \rightarrow \tau^2 M \rightarrow \dots \rightarrow \tau^{n-1} M \rightarrow \tau^n M \simeq M.$$

En virtud del Teorema 3.2.2, sabemos que el camino $M \xrightarrow{\psi} M \rightarrow \tau M$ no es seccional. Por lo tanto $\tau^k M \simeq \tau(\tau^{k+2} M) \simeq \tau^{k+3} M$ para algún $k \leq n$. En conclusión, para cualquier valor de k que satisfaga lo anterior, tenemos que $M \simeq \tau^3 M$, concluyendo así que M tiene τ -período 3. \square

Capítulo 4

Radical y teoría de inclinación

El objetivo de este capítulo es establecer relaciones entre el radical de la categoría de módulos de un álgebra A dada, y el radical de la categoría de módulos de $\text{End}_A T$, donde T es un A -módulo inclinante. Para ello utilizaremos la teoría de inclinación.

En la primera sección introduciremos algunas nociones básicas de la teoría de inclinación, y en las siguientes secciones presentaremos los resultados obtenidos en ese contexto.

4.1. Preliminares sobre la teoría de inclinación

La teoría de inclinación compara las categorías de módulos sobre un álgebra A y el álgebra de endomorfismos de un cierto A -módulo T , al que se denomina módulo inclinante.

Recordemos que dada A un álgebra y M un A -módulo, el **álgebra de endomorfismos** $B = \text{End}_A M$ es una k -álgebra con respecto a la composición de morfismos. Más aún, la acción natural de B en M hace de M un B - A -bimódulo, dado que la linealidad de cada elemento $f \in B$ implica $f(ma) = f(m)a = (fm)a$, para todo $m \in M$ y $a \in A$. Para todo A -módulo a derecha N , el grupo abeliano $\text{Hom}_A(M, N)$ tiene estructura de B -módulo a derecha dada por $(fb)(m) = f(bm)$, para $f \in \text{Hom}_A(M, N)$, $b \in B$ y $m \in M$.

El objetivo principal de esta sección es presentar el teorema de inclinación, el cual establece equivalencias entre subcategorías plenas de $\text{mod } A$ y $\text{mod } B$, con $B = \text{End}_A(T)$ para T un cierto A -módulo.

Esta sección está basada en [3], [6, Capítulo VI] y [4, Capítulo 2].

Definición 4.1.1 Un par $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ de subcategorías aditivas y plenas de $\text{mod } A$ es un **par de torsión** si:

- (a) $\text{Hom}_A(M, N) = 0$ para todo $M \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{F}$.
- (b) Si $\text{Hom}_A(M, F) = 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $M \in \mathcal{T}$.
- (c) Si $\text{Hom}_A(T, N) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$, entonces $N \in \mathcal{F}$.

En otras palabras, un par de torsión es un par de subcategorías aditivas tales que no hay ningún morfismo no nulo de la primera subcategoría a la segunda, y son maximales con esa propiedad. Las subcategorías \mathcal{T} y \mathcal{F} se denominan **clase de torsión** y **clase sin torsión**, respectivamente.

Definición 4.1.2 Un par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ se dice **escindido**, si cada A -módulo indescomponible pertenece a \mathcal{T} o a \mathcal{F} .

El siguiente resultado da condiciones para la existencia de pares de torsión.

Proposición 4.1.3 (a) Sea \mathcal{T} una subcategoría aditiva y plena de $\text{mod } A$. Existe una subcategoría \mathcal{F} tal que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión si y sólo si \mathcal{T} es cerrado por cocientes y por extensiones.

(b) Sea \mathcal{F} una subcategoría aditiva y plena de $\text{mod } A$. Existe una subcategoría \mathcal{T} tal que $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión si y sólo si \mathcal{F} es cerrado por submódulos y por extensiones.

(c) Si $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es un par de torsión de $\text{mod } A$, entonces para todo módulo M existe una única sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow tM \rightarrow M \rightarrow M/tM \rightarrow 0 \quad (4.1)$$

con $tM \in \mathcal{T}$ y $M/tM \in \mathcal{F}$; única en el sentido que toda sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

con $L \in \mathcal{T}$ y $N \in \mathcal{F}$, es isomorfa a la sucesión (4.1).

La sucesión exacta (4.1) se dice **canónica**.

Recordemos que dado $M \in \text{mod } A$, podemos definir una subcategoría plena de $\text{mod } A$, cuyos objetos son los A -módulos generados por M . A dicha subcategoría la denotamos por $\text{Gen } M$.

No siempre $\text{Gen } M$ es una clase de torsión cuando M es un módulo arbitrario. A continuación enunciaremos una condición sobre el módulo M para que $\text{Gen } M$ sea una clase de torsión.

Lema 4.1.4 *Sea T un A -módulo tal que $\text{Ext}_A^1(T, M) = 0$ para todo $M \in \text{Gen } T$. Entonces, $\text{Gen } T$ es una clase de torsión. Además, la clase sin torsión correspondiente es $\{M \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$.*

La siguiente definición es fundamental para el desarrollo de esta tesis.

Definición 4.1.5 *Un A -módulo T se dice **inclinante** si satisface las siguientes propiedades:*

$$(T_1) \text{ dp } T \leq 1.$$

$$(T_2) \text{ Ext}_A^1(T, T) = 0.$$

(T₃) *Existe una sucesión exacta corta*

$$0 \rightarrow A_A \rightarrow T'_A \rightarrow T''_A \rightarrow 0$$

con T' y T'' en $\text{add } T$.

Si un módulo T cumple sólo las dos primeras propiedades (T₁) y (T₂) decimos que es un módulo **inclinante parcial**.

Lema 4.1.6 *Sea T un A -módulo tal que $\text{dp } T \leq 1$. Entonces, T es inclinante parcial si y sólo si $\text{Ext}_A^1(T, M) = 0$ para todo $M \in \text{Gen } T$.*

Una consecuencia directa del lema anterior es que todo módulo inclinante parcial induce un par de torsión $(\text{Gen } T, \mathcal{F})$, con $\mathcal{F} = \{M \in \text{mod } A \mid \text{Hom}_A(T, M) = 0\}$.

Se prueba que la clase de torsión $\text{Gen } T$ es igual a la clase $\{M \in \text{mod } A \mid \text{Ext}_A^1(T, M) = 0\}$ cuando T es un módulo inclinante, ver [4, Capítulo 2, Teorema 3.5]. Luego, vamos a denotar como $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ el par de torsión inducido por T .

Enunciaremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad para demostrar el teorema de inclinación de Brenner y Butler.

Corolario 4.1.7 *Sean T un A -módulo inclinante y $B = \text{End}_A(T)$. Entonces $M \in \mathcal{T}(T)$ si y sólo si $\varepsilon_M : \text{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \rightarrow M$ es un isomorfismo.*

Lema 4.1.8 *Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End}_A T$. Para $M, N \in \mathcal{T}(T)$ hay isomorfismos funtoriales:*

$$(a) \operatorname{Hom}_A(M, N) \cong \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(T, M), \operatorname{Hom}_A(T, N)).$$

$$(b) \operatorname{Ext}_A^1(M, N) \cong \operatorname{Ext}_B^1(\operatorname{Hom}_A(T, M), \operatorname{Hom}_A(T, N)).$$

El Lema 4.1.8 muestra que la restricción del funtor $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ sobre la subcategoría $\mathcal{T}(T)$ es un funtor fiel, pleno y preserva extensiones.

La base de la teoría de inclinación es que, si T_A es un A -módulo inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$, entonces ${}_B T$ es un B^{op} -módulo inclinante. Esto hace simétricos los roles de A y B .

Lema 4.1.9 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \operatorname{End} T_A$. Entonces, ${}_B T$ es un B -módulo inclinante a izquierda y existe un isomorfismo entre A y $(\operatorname{End} {}_B T)^{op}$, dado por $a \mapsto (t \mapsto ta)$.

A continuación veremos que un A -módulo inclinante T_A induce un par de torsión en la categoría $\operatorname{mod} B$.

Corolario 4.1.10 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$. Entonces T induce un par de torsión $(\mathcal{X}(T_A), \mathcal{Y}(T_A))$ en $\operatorname{mod} B$, donde

$$\mathcal{X}(T_A) = D\mathcal{F}({}_B T) = \{X_B \mid X \otimes_B T = 0\}$$

e

$$\mathcal{Y}(T_A) = D\mathcal{T}({}_B T) = \{Y_B \mid \operatorname{Tor}_1^B(Y, T) = 0\}.$$

Definición 4.1.11 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$. Entonces

- (a) T se dice **separante** si el par de torsión inducido $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ en $\operatorname{mod} A$ es escindido.
- (b) T se dice **escindido** si el par de torsión inducido $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ en $\operatorname{mod} B$ es escindido.

Lema 4.1.12 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \operatorname{End}_A T$. Entonces $Y \in \mathcal{Y}(T_A)$ si y sólo si el morfismo functorial $\delta_Y : Y \rightarrow \operatorname{Hom}_A(T, Y \otimes_B T)$ definido por $y \mapsto (t \mapsto y \otimes t)$ es un isomorfismo.

Ahora estamos en condiciones de presentar el teorema de inclinación. Este resultado es fundamental para el desarrollo de las siguientes secciones de este capítulo.

Teorema 4.1.13 (Brenner-Butler) Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End}_A T$. Entonces:

- (a) Los funtores $\text{Hom}_A(T, -)$ y $- \otimes_B T$ inducen equivalencias cuasi-inversas entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$.
- (b) Los funtores $\text{Ext}_A^1(T, -)$ y $\text{Tor}_1^B(-, T)$ inducen equivalencias cuasi-inversas entre $\mathcal{F}(T)$ y $\mathcal{X}(T)$.

Demostración: Sólo probaremos el primer inciso. Para la demostración del inciso (b), referimos al lector a [6, Capítulo VI, Teorema 3.8].

(a) Comencemos probando que si $Y \in \mathcal{Y}(T_A)$, entonces $Y \otimes_B T \in \mathcal{T}(T_A)$.

Sea $Y \in \mathcal{Y}(T_A)$, sabemos que existe un epimorfismo $B^m \mapsto Y$, con $m > 0$, por ser B un generador en $\text{mod } B$, y por lo tanto un epimorfismo

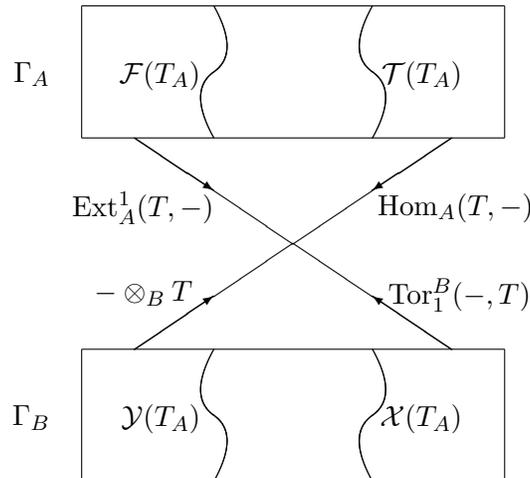
$$T_A^m \cong B^m \otimes_B T_A \mapsto Y \otimes_B T.$$

Luego, $Y \otimes_B T \in \text{Gen } T_A = \mathcal{T}(T_A)$.

Sea ahora $M \in \mathcal{T}(T_A)$. Probaremos que $\text{Hom}_A(T, M) \in \mathcal{Y}(T_A)$ por dualidad, teniendo en cuenta que ${}_B T$ es un módulo inclinante y que $A \cong (\text{End}_B T)^{op}$. En efecto, como $M \in \mathcal{T}(T_A)$, entonces $DM \in \mathcal{Y}({}_B T)$. Luego, $T \otimes_A DM \in \mathcal{T}({}_B T)$. Por lo tanto, $\text{Hom}_A(T, M) \cong D(T \otimes_A DM) \in \mathcal{Y}(T_A)$, probando lo deseado.

Por el Corolario 4.1.7 sabemos que $\text{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \cong M$ para $M \in \mathcal{T}(T_A)$. Por otro lado, usando el Lema 4.1.12 tenemos que $Y \cong \text{Hom}_A(T, Y \otimes_B T)$ para $Y \in \mathcal{Y}(T_A)$, lo que termina la demostración de (a). \square

Es posible visualizar las equivalencias inversas del teorema de inclinación en los carcajes de Auslander-Reiten de A y B . En la siguiente figura se muestran las clases \mathcal{T}, \mathcal{F} en $\text{mod } A$, y las clases \mathcal{X}, \mathcal{Y} en $\text{mod } B$, y las equivalencias inversas.



El siguiente resultado, denominado el Lema de Conexión, tiene un gran interés

teórico para nosotros ya que da una caracterización de los módulos inyectivos pertenecientes a la subcategoría $\mathcal{Y}(T)$ en $\text{mod } B$.

Lema 4.1.14 *Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B = \text{End}_A T$. Sean P e I la cobertura proyectiva y la envolvente inyectiva de un A -módulo simple S , respectivamente. Entonces*

$$\tau^{-1}\text{Hom}_A(T, I) \simeq \text{Ext}_A^1(T, P).$$

En particular, $P \in \text{add}T$ si y sólo si $\text{Hom}_A(T, I)$ es un B -módulo inyectivo.

El siguiente corolario será de utilidad para el próximo ejemplo.

Corolario 4.1.15 *Sea T un A -módulo inclinante. Entonces, $L \in \text{add}T$ si y sólo si $L \in \mathcal{T}(T)$ y $\tau L \in \mathcal{F}(T)$.*

En el siguiente ejemplo introduciremos un módulo inclinante particular.

Ejemplo 4.1.16 [4, Capítulo 2, Ejemplo 3.12(c)]. Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra. Consideremos S un A -módulo simple proyectivo no inyectivo. Es conocido que $S = S_a$, donde $a \in Q_0$ es un pozo del carcaj Q . Entonces el módulo

$$T[a] = \tau^{-1}(S_a) \oplus (\oplus_{b \neq a} P_b)$$

es un módulo inclinante, el cual se denomina **módulo APR-inclinante**. Además $T[a]$ es separante. En efecto, consideremos la sucesión exacta que casi se parte

$$0 \rightarrow S_a \rightarrow P \rightarrow \tau^{-1}(S_a) \rightarrow 0$$

Como S_a es simple, tenemos que P es proyectivo. Entonces $T[a]$ satisface (T_1) y (T_3) de la Definición 4.1.5, pues ningún sumando indescomponible de P es isomorfo a S_a , debido a la Observación 1.5.12.

La condición (T_2) es una consecuencia de

$$\text{Ext}_A^1(T[a], T[a]) \cong \text{DHom}_A(T[a], \tau T[a]) \cong \text{DHom}_A(T[a], S_a) = 0$$

pues S_a es simple proyectivo y $\text{dp } T[a] \leq 1$.

Veamos ahora que el par de torsión $(\mathcal{T}(T[a]), \mathcal{F}(T[a]))$ es escindido. En efecto, $M \in \mathcal{T}(T[a])$ si y sólo si $0 = \text{Ext}_A^1(T[a], M) \cong \text{DHom}(M, \tau T[a]) \cong \text{DHom}(M, S_a)$. Ésto ocurre si y sólo si ningún sumando directo de M indescomponible es isomorfo a S_a . Como $S_a \cong \tau T[a] \in \mathcal{F}(T[a])$ (por el Corolario 4.1.15) se deduce que $\mathcal{F}(T[a]) = \text{add } S_a$, mientras que $\mathcal{T}(T[a]) = \text{add}(\text{ind } A \setminus \{S_a\})$.

Por lo recientemente visto, sabemos que cualquier A -módulo APR-inclinante es separante. A continuación daremos una caracterización para determinar cuándo dicho módulo es escindido. Para ello recordemos la siguiente definición.

Definición 4.1.17 *Sea $A \simeq kQ/I$ un álgebra y asumamos que Q no tiene ciclos orientados. En particular Q contiene al menos un pozo. Un **pozo** $a \in Q_0$ se dice **libre** si no es el punto final de una relación de Q . En caso contrario decimos que el **pozo** a es **ligado**.*

Lema 4.1.18 *El módulo APR-inclinante $T[a]$ es escindido si y sólo si el vértice a es un pozo libre. Más aún, en este caso el quiver ordinario Q_B de $B = \text{End}(T[a])$ no tiene ciclos orientados y el vértice $a' \in (Q_B)_0$, correspondiente al pozo libre $a \in (Q_A)_0$, es una fuente.*

4.2. Sobre el radical y la teoría de inclinación

A lo largo de esta sección vamos a considerar A un álgebra, T un A -módulo inclinante y $B \simeq \text{End}_A T$. Estudiaremos los morfismos de la categoría $\text{mod } A$ y su relación con el radical para compararlos con los morfismos inducidos en la categoría $\text{mod } B$.

En la siguiente proposición vamos a asumir que T es un módulo separante. El resultado es dual si se considera a T un módulo escindido.

Recordemos que dado un morfismo $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N)$ con $n \geq 2$, entonces $f = \sum_{i=1}^s g_i f_i$ para algún $s \in \mathbb{N}$, donde cada f_i pertenece al $\mathfrak{R}_A(M, X_i)$, con $X_i \in \text{ind } A$, y cada $g_i : X_i \rightarrow N$ es una suma finita de composiciones de $n-1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles. Más aún, si $f \notin \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$ entonces algún f_i es irreducible.

Proposición 4.2.1 *Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante separante y $B = \text{End}_A(T)$. Sean M, N A -módulos indescomponibles de $\mathcal{T}(T)$, $f : M \rightarrow N$ un morfismo y $n \geq 1$. Si $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N)$ entonces $F(f) \in \mathfrak{R}_B^n(F(M), F(N))$, donde $F = \text{Hom}_A(T, -)$.*

Más aún, si $F(f) \notin \mathfrak{R}_B^{n+1}(F(M), F(N))$ entonces existe un camino no nulo de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles como sigue

$$F(M) \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{n-1} \rightarrow F(N)$$

donde cada \tilde{X}_i pertenece a $\mathcal{Y}(T)$, para $1 \leq i \leq n-1$.

Demostración: Consideremos $F = \text{Hom}_A(T, -)$ la equivalencia entre las subcategorías $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$ definida en el Teorema 4.1.13. Sean M, N módulos indescomponibles de $\mathcal{T}(T)$ y $f : M \rightarrow N$ un morfismo tal que $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N)$, para algún $n \geq 1$. Probaremos por inducción que $F(f) \in \mathfrak{R}_B^n(F(M), F(N))$.

Si $n = 1$, entonces f no es un isomorfismo. En consecuencia, por el Teorema 4.1.13, $F(f)$ no es un isomorfismo en $\text{mod } B$. Luego, $F(f) \in \mathfrak{R}_B(F(M), F(N))$.

Consideremos ahora que $n \geq 2$ y asumamos que si un morfismo $h : X \rightarrow Y$ pertenece $\mathfrak{R}_A^{n-1}(X, Y)$, con X e Y en $\mathcal{T}(T)$, entonces $F(h) \in \mathfrak{R}_B^{n-1}(F(X), F(Y))$. Por la Proposición 1.3.9 existen un número natural $s \geq 1$ y módulos indescomponibles X_1, \dots, X_s , tales que $f = \sum_{i=1}^s g_i f_i$, con $f_i \in \mathfrak{R}_A(M, X_i)$ y $g_i = \sum_{k=1}^{t_i} h_i^k$ donde cada h_i^k es una composición de $n-1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, con $1 \leq i \leq s$, $1 \leq k \leq t_i$ y $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto, cada $g_i \in \mathfrak{R}_A^{n-1}(X_i, N)$. Como $f \neq 0$, vamos a asumir que cada morfismo f_i y cada morfismo g_i son no nulos.

Dado que T es un A -módulo inclinante separante, todos los módulos indescomponibles X_i , con $1 \leq i \leq s$, pertenecen a $\mathcal{T}(T)$, pues $M \in \mathcal{T}(T)$ y no existen morfismos no nulos desde la subcategoría $\mathcal{T}(T)$ a la subcategoría $\mathcal{F}(T)$. Por lo tanto, por el Teorema 4.1.13 resulta que $F(f) = \sum_{i=1}^s F(g_i)F(f_i)$, con $F(f_i) \in \mathfrak{R}_A(F(M), F(X_i))$ y por hipótesis inductiva tenemos que $F(g_i) \in \mathfrak{R}_A^{n-1}(F(X_i), F(N))$. Por consiguiente $F(f) \in \mathfrak{R}_B^n(F(M), F(N))$, probando así la primera implicación.

Ahora asumamos que $F(f) \notin \mathfrak{R}_B^{n+1}(F(M), F(N))$, y en consecuencia $f \notin \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$. Para $n = 1$, existe trivialmente un camino de longitud 1 entre $F(M)$ y $F(N)$, pues $F(f)$ es un morfismo irreducible.

Si $n \geq 2$, como $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N) \setminus \mathfrak{R}_A^{n+1}(M, N)$ entonces existe un $s \geq 1$ tal que $f = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{t_i} h_i^k f_i$ donde cada $h_i^k = h_i^{k, n-1} \dots h_i^{k, 1}$ es una composición de $n-1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles en $\mathcal{T}(T)$. Luego, $F(f) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{t_i} F(h_i^{k, n-1}) \dots F(h_i^{k, 1}) F(f_i)$. Si todos los sumandos de $F(f)$ pertenecen a $\mathfrak{R}_B^{n+1}(F(M), F(N))$, entonces el morfismo $F(f)$ pertenece a $\mathfrak{R}_B^{n+1}(F(M), F(N))$, generando así una contradicción con lo asumido.

Luego, existe por lo menos un i_0 y un k_0 , con $1 \leq i_0 \leq s$ y $1 \leq k_0 \leq t_{i_0}$ tal que $F(h_{i_0}^{k_0, n-1}) \dots F(h_{i_0}^{k_0, 1}) F(f_{i_0}) \notin \mathfrak{R}_B^{n+1}(F(M), F(N))$ resultando así ser una composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de $\mathcal{Y}(T)$. Queda así probado el resultado. \square

El resultado anterior es también válido si consideramos un morfismo entre módulos indescomponibles pertenecientes a la clase sin torsión. Lo enunciaremos a continuación.

Proposición 4.2.2 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante separante y

$B = \text{End}_A(T)$. Sean M, N A -módulos indescomponibles de $\mathcal{F}(T)$, $g : M \rightarrow N$ un morfismo y $n \geq 1$. Si $g \in \mathfrak{R}_A^n(M, N)$ entonces $F'(g) \in \mathfrak{R}_B^n(F'(M), F'(N))$, donde $F' = \text{Ext}_A^1(T, -)$.

Más aún, si $F'(g) \notin \mathfrak{R}_B^{n+1}(F'(M), F'(N))$ entonces existe un camino no nulo de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles como sigue

$$F'(M) \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{n-1} \rightarrow F'(N)$$

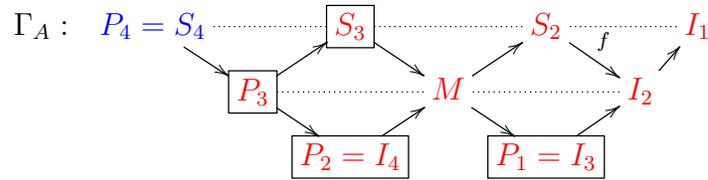
donde cada \tilde{X}_i pertenece a $\mathcal{X}(T)$, para $1 \leq i \leq n - 1$.

El siguiente ejemplo muestra que si consideramos un A -módulo inclinante separante pero no escindido, dado un morfismo en $\text{mod } A$ que no pertenezca a alguna potencia del radical, el morfismo inducido en $\text{mod } B$ puede pertenecer a dicha potencia.

Ejemplo 4.2.3 Sea $A = kQ_A/I_A$ el álgebra dada por la presentación

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \quad \text{con } I_A = \langle \gamma\beta\alpha \rangle$$

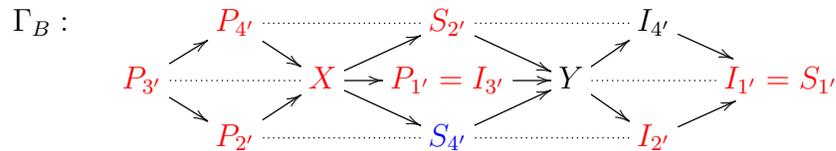
cuyo carcaj de Auslander-Reiten es



Consideremos el A -módulo inclinante $T = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus S_3$. En este caso, el álgebra de endomorfismos $B = \text{End}_A T = kQ_B/I_B$ está dada por la presentación

$$\begin{array}{ccc} & 2' & \\ \gamma' \nearrow & & \beta' \searrow \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & 3' \\ \alpha' \searrow & & \delta' \nearrow \\ & 4' & \end{array} \quad \text{con } I_B = \langle \beta'\gamma' - \delta'\alpha' \rangle$$

El carcaj de Auslander-Reiten es



Observemos que el A -módulo inclinante T es separante pero no es escindido, ya que los B -módulos indescomponibles Y e $I_{4'}$ no pertenecen ni a la subcategoría $\mathcal{X}(T)$ ni a la subcategoría $\mathcal{Y}(T)$.

El morfismo $f : S_2 \rightarrow I_2$ de $\text{mod } A$ no pertenece a $\mathfrak{R}^2(S_2, I_2)$ por ser un morfismo irreducible, mientras que $\text{Hom}_A(T, f) \in \mathfrak{R}^2(S_{2'}, I_{2'})$ debido a que no existe un camino de longitud 1 entre $S_{2'}$ e $I_{2'}$.

Como consecuencia de la Proposición 4.2.1 y su dual, se deduce el siguiente resultado.

Corolario 4.2.4 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante separante y escindido y $B = \text{End}_A(T)$. Sean M, N A -módulos indescomponibles de $\mathcal{T}(T)$, $f : M \rightarrow N$ un morfismo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $f \in \mathfrak{R}_A^n(M, N)$ si y sólo si $F(f) \in \mathfrak{R}_B^n(F(M), F(N))$, donde $F = \text{Hom}_A(T, -)$.

El Corolario 4.2.4 también es válido si consideramos un morfismo entre módulos indescomponibles pertenecientes a la clase sin torsión.

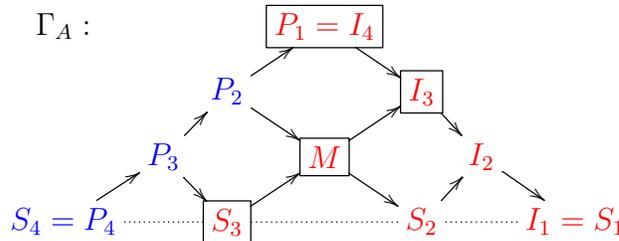
Los resultados anteriores muestran el vínculo entre los morfismos y su relación con el radical cuando consideramos el dominio y el codominio en la misma subcategoría.

El siguiente ejemplo muestra que el resultado no es válido si dichos módulos pertenecen a distintas subcategorías.

Ejemplo 4.2.5 Sea $A = kQ$ el álgebra dada por la presentación

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

El carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod } A$ es el siguiente:

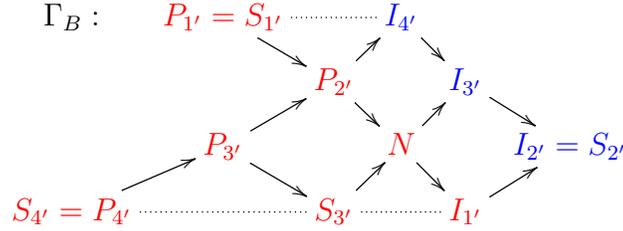


donde los módulos encuadrados denotan los sumandos del módulo inclinante $T = P_1 \oplus I_3 \oplus M \oplus S_3$. Denotamos con rojo y con azul los módulos indescomponibles de la subcategoría de torsión y la subcategoría sin torsión de $\text{mod } A$, respectivamente.

Entonces $B = \text{End}_A T = kQ'$ está dada por la presentación:

$$1' \leftarrow 2' \rightarrow 3' \rightarrow 4'$$

y el carcaj de Auslander-Reiten de $\text{mod } B$ es



Ahora, si consideramos un morfismo irreducible $f : P_2 \rightarrow P_1$ en $\text{mod } A$, donde $P_2 \in \mathcal{F}(T)$ y $P_1 \in \mathcal{T}(T)$, tenemos que $f \in \mathfrak{R}(P_2, P_1) \setminus \mathfrak{R}^2(P_2, P_1)$. Por otro lado, $\text{Ext}_A^1(T, P_2) \simeq S_{2'}$ y $\text{Hom}_A(T, P_1) \simeq S_{1'}$ son B -módulos simples no isomorfos, y por lo tanto el único morfismo que existe entre ellos es el morfismo nulo, el cual pertenece al radical infinito.

Como una aplicación inmediata del Corolario 4.2.4, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.2.6 Sean A un álgebra, T un A -módulo inclinante separante y escindido y $B = \text{End}_A(T)$. Entonces, $f : M \rightarrow N$ es un morfismo irreducible entre A -módulos indescomponibles de $\mathcal{T}(T)$ ($\mathcal{F}(T)$, respectivamente) si y sólo si $F(f) : F(M) \rightarrow F(N)$ ($F'(f) : F'(M) \rightarrow F'(N)$, respectivamente) es un morfismo irreducible entre B -módulos indescomponibles de $\mathcal{Y}(T)$ ($\mathcal{X}(T)$, respectivamente), donde $F = \text{Hom}_A(T, -)$ ($F' = \text{Ext}_A^1(T, -)$, respectivamente).

A continuación probaremos un resultado que será necesario para la demostración del próximo lema. Además, sale como una consecuencia inmediata que podemos simplificar los cálculos al momento de hallar el índice de nilpotencia de un álgebra de tipo de representación finito.

Para ello recordemos la Notación 1.7.13

Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito y sea a un vértice de Q_A .

Si $P_a = S_a$ se define $n_a = 0$. En caso contrario, consideramos el morfismo irreducible $\iota_a : \text{rad}(P_a) \rightarrow P_a$ y definimos $n_a = d_r(\iota_a)$.

Dualmente, si $I_a = S_a$ se define $m_a = 0$. En caso contrario, definimos $m_a = d_l(\theta_a)$, donde $\theta_a : I_a \rightarrow I_a/\text{soc}(I_a)$.

Por último definimos $r_a = m_a + n_a$. Por el Lema 1.7.14 sabemos que los morfismos $\varphi_a : P_a \rightarrow I_a$ que factorizan por S_a satisfacen que $\varphi_a \in \mathfrak{R}^{r_a}(P_a, I_a) \setminus \mathfrak{R}^{r_a+1}(P_a, I_a)$.

Proposición 4.2.7 *Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito. Asumamos que Q_A tiene al menos un pozo y consideremos $P_a = S_a$ un A -módulo simple y proyectivo. Entonces existe un vértice $b \neq a$ tal que $r_a \leq r_b$.*

Demostración: Sea a un pozo del carcaj Q_A . Como $P_a = S_a$, un morfismo no nulo $\varphi_a : P_a \rightarrow I_a$ es tal que $\varphi_a \in \mathfrak{R}^{r_a}(P_a, I_a) \setminus \mathfrak{R}^{r_a+1}(P_a, I_a)$. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 1.3.9, existe un camino no nulo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de longitud r_a

$$P_a \xrightarrow{h_1} X_1 \xrightarrow{h_2} \cdots \xrightarrow{h_{r_a-1}} X_{r_a-1} \xrightarrow{h_{r_a}} I_a$$

Afirmamos que X_1 es proyectivo. En efecto, supongamos que no lo es. Luego existe un morfismo irreducible $\tau X_1 \rightarrow P_a$. Debido a que P_a es proyectivo, τX_1 es sumando directo de $\text{rad} P_a$ y $\text{rad} P_a = 0$ por ser P_a un A -módulo simple. Por lo tanto $\tau X_1 = 0$ y en consecuencia X_1 es un A -módulo proyectivo. Denotemos $X_1 = P_b$ para algún vértice $b \neq a$. Consideremos $\psi = h_{r_a} \cdots h_2 : P_b \rightarrow I_a$ el morfismo no nulo proveniente del camino anterior. Luego $\psi \in \mathfrak{R}^{r_a-1}(P_b, I_a) \setminus \mathfrak{R}^{r_a}(P_b, I_a)$. Como $b \neq a$, ψ no factoriza por S_b . En virtud del Lema 1.7.9, existe un morfismo no nulo $\xi : I_a \rightarrow I_b \in \mathfrak{R}(I_a, I_b)$ tal que $\xi\psi$ es no nulo y factoriza a través de S_b . Por lo tanto, $\xi\psi \in \mathfrak{R}^{r_a}(P_b, I_b)$. Siguiendo la Observación 1.7.15 resulta que $r_a \leq r_b$. \square .

Considerando $I_a = S_a$ un módulo simple e inyectivo, con un análisis similar se obtiene un resultado dual al anterior. A continuación enunciamos el resultado.

Proposición 4.2.8 *Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito. Asumamos que Q_A tiene al menos una fuente y consideremos $I_a = S_a$ un A -módulo simple inyectivo. Entonces existe un vértice $b \neq a$ tal que $r_a \leq r_b$.*

Recordemos que, como enunciamos en el Teorema 1.7.16, el índice de nilpotencia r_A del radical de la categoría de módulos de un álgebra $A = kQ_A/I_A$ de tipo de representación finito viene dado por

$$r_A = \text{máx}\{r_a, \text{ con } a \in (Q_A)_0\} + 1.$$

Sigue como una consecuencia inmediata de la Proposición 4.2.7 y de la Proposición 4.2.8, que para calcular dicho índice de nilpotencia sólo basta con analizar los vértices de Q_A que no son pozos ni fuentes. Enunciamos el Teorema A.

Teorema 4.2.9 *Sea $A = kQ_A/I$ un álgebra de tipo de representación finito. Denotamos por \mathcal{V} al subconjunto de vértices de Q_A que no son ni pozos ni fuentes.*

Asumamos que $\mathcal{V} \neq \emptyset$ y para cada $a \in \mathcal{V}$ definimos $r_a = d_r(\iota_a) + d_l(\theta_a)$, donde $\theta_a : \text{rad} P_a \rightarrow P_a$ e $\iota_a : I_a \rightarrow I_a/\text{soc} I_a$ son morfismos irreducibles y P_a e I_a denotan a los módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles correspondientes al vértice a . Entonces el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod} A)$ está dado por:

$$r_A = \max\{r_a, \text{ con } a \in \mathcal{V}\} + 1.$$

Observación 4.2.10 Sea A un álgebra. Puede suceder que el conjunto \mathcal{V} sea vacío, es decir, todos los vértices de Q_A son pozos o fuentes. En dicho caso afirmamos que no existe un ideal admisible de kQ_A . En efecto, supongamos existe un camino de longitud mayor o igual a 2, más precisamente, $a_{s+1} \xrightarrow{\alpha_s} a_s \xrightarrow{\alpha_{s-1}} \dots \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1$, con $s \geq 2$. De esta manera a_2 es un vértice que no es ni un pozo ni una fuente, contradiciendo lo asumido. Luego, $A \simeq kQ_A$, deduciendo así que A es un álgebra hereditaria.

En la próxima sección, estudiaremos a las álgebras hereditarias de tipo de representación finito. Más precisamente, probaremos en el Lema 4.3.3 que $r_a = r_b$ para todo $a, b \in (Q_A)_0$. En consecuencia, para calcular del índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod} A)$ sólo basta con calcular un solo valor de r_a , para algún $a \in (Q_A)_0$. Más aún, en este caso el valor de r_a está dado en función de la cantidad de vértices de Q_A , ver el Teorema 4.3.9.

A continuación vamos a considerar A un álgebra y B el álgebra de endomorfismos de módulos inclinantes particulares. El objetivo es comparar el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de ambas álgebras, cuando éstas sean de tipo de representación finito.

Es sabido que dada un álgebra A de tipo de representación infinito, el álgebra $B = \text{End}_A(T)$, donde T es un A -módulo inclinante separante, también es de tipo de representación infinito. Recíprocamente, si T es un A -módulo inclinante escindido y B es de tipo de representación infinito, entonces A es de tipo de representación infinito.

Para presentar el primer resultado, es necesario introducir la siguiente notación.

Notación 4.2.11 Dado un álgebra de tipo de representación finito $A \simeq kQ_A/I_A$ vamos a denotar por $(R_A)_0$ al subconjunto de $(Q_A)_0$ de todos los vértices que determinen el índice de nilpotencia del radical de su categoría de módulo, es decir,

$$(R_A)_0 = \{u \in (Q_A)_0 \text{ tal que } r_u = r_A - 1\} \subset (Q_A)_0.$$

Teorema 4.2.12 *Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra, T un A -módulo inclinante separante y $B = \text{End}_A T$. Si B es de tipo de representación finito y para algún $u \in (R_A)_0$ se tiene que $P_u \in \text{add} T$, entonces*

$$r_A \leq r_B,$$

donde r_A y r_B denotan los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente.

Demostración: Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra y $B = \text{End}_A T$, donde T es un A -módulo inclinante separante que satisface que $P_u \in \text{add} T$, para algún $u \in (R_A)_0$. Asumamos que B es de tipo de representación finito, y por consiguiente, A es de tipo de representación finito. Sean r_A y r_B los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente y probemos que $r_A \leq r_B$.

Por hipótesis, sabemos que el vértice $u \in (Q_A)_0$ satisface que $r_A - 1 = r_u$. Consideremos $\varphi_u : P_u \rightarrow I_u$ un morfismo no nulo que factoriza por S_u , entonces $\varphi_u \in \mathfrak{R}^{r_A-1}(P_u, I_u) \setminus \mathfrak{R}^{r_A}(P_u, I_u)$. Como T es un A -módulo inclinante separante y P_u e $I_u \in \mathcal{T}(T)$, resulta de la Proposición 4.2.1 que $0 \neq F(\varphi_u) \in \mathfrak{R}_B^{r_A-1}(F(P_u), F(I_u))$. Por consiguiente, como $\mathfrak{R}_B^{r_A-1}(\text{mod } B) \neq 0$, debido a la maximalidad de r_B deducimos que $r_A \leq r_B$. \square

En el Teorema 4.2.12 hemos probado cómo se relacionan los índices de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra y el de su álgebra de endomorfismos de un cierto módulo inclinante, cuando éstas son de tipo de representación finito.

A continuación vamos a dar una caracterización para que dichos índices de nilpotencia sean iguales. Para ello es necesario demostrar el siguiente lema. Este resultado está probado por M. Hoshino en la demostración de la Proposición 6 en [32]. A continuación proponemos una prueba diferente, realizada en función del radical.

Lema 4.2.13 *Sean $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito y $B = \text{End}_A T$ donde T es un A -módulo inclinante separante. Asumamos que B es un álgebra de tipo de representación finito y denotemos por F al funtor $\text{Hom}_A(T, -)$. Entonces para todo vértice $u \in (Q_A)_0$ tal que $P_u \in \text{add} T$, se tiene que $F(P_u)$ y $F(I_u)$ son B -módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles, respectivamente, tales que $\text{top} F(P_u) = \text{soc} F(I_u)$.*

Demostración: Sean A un álgebra de tipo de representación finito y T un A -módulo inclinante separante. Sea u un vértice de Q_A tal que $P_u \in \text{add} T$.

Sabemos que el A -módulo inyectivo indescomponible $I_u \in \mathcal{T}(T)$ por ser T separante. Más aún, $F(P_u)$ es un B -módulo proyectivo indescomponible y por el Lema de Conexión 4.1.14 resulta que $F(I_u)$ es un B -módulo inyectivo indescomponible. Denotemos dichos módulos por $F(P_u) = \tilde{P}_{v'}$ y $F(I_u) = \tilde{I}_{w'}$, con $v', w' \in (Q_B)_0$.

Afirmamos que $v' = w'$. En efecto, supongamos que v' y w' son vértices distintos de Q_B . Sea $\psi_u : P_u \rightarrow I_u$ un morfismo no nulo de $\text{mod } A$ que factoriza por S_u , luego $\psi_u \in \mathfrak{R}^{r_u}(P_u, I_u) \setminus \mathfrak{R}^{r_u+1}(P_u, I_u)$. Como T es un módulo inclinante separante, por la Proposición 4.2.1 tenemos que $F(\psi_u) \in \mathfrak{R}^{r_u}(\tilde{P}_{v'}, \tilde{I}_{w'})$. Claramente, $F(\psi_u)$ no factoriza por el B -módulo simple $\tilde{S}_{w'}$, pues $v' \neq w'$. Por lo tanto, por el Lema 1.7.10 existe un morfismo que no es un isomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{P}_{w'} \rightarrow \tilde{P}_{v'}$ tal que $F(\psi_u)\tilde{\varphi} \neq 0$. Como $\tilde{P}_{w'}$ es un B -módulo proyectivo indescomponible, existen T_w un A -módulo indescomponible perteneciente a $\text{add } T$ y un morfismo no nulo que no es isomorfismo $\varphi : T_w \rightarrow P_u$ tales que $\tilde{P}_{w'} = F(T_w)$ y $\tilde{\varphi} = F(\varphi)$. Más aún, el morfismo $\psi_u\varphi$ es no nulo y pertenece a $\mathfrak{R}^{r_u+1}(T_w, I_u)$. En virtud del Lema 1.7.11, existe una composición no nula $P_u \rightarrow T_w \xrightarrow{\psi_u\varphi} I_u \rightarrow I_u$ que pertenece a $\mathfrak{R}^{r_u+1}(P_u, I_u)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, concluimos que $v' = w'$. \square

Proposición 4.2.14 Sean $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito, T un A -módulo inclinante separante y asumamos que $B = \text{End}_A T$ es un álgebra de tipo de representación finito. Supongamos que existe un vértice $u \in (R_A)_0 \subset (Q_A)_0$ tal que $P_u \in \text{add } T$.

Si $r_A = r_B$ entonces existe un camino no nulo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles como sigue

$$F(P_u) \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{r_A-2} \rightarrow F(I_u)$$

de longitud $r_A - 1$.

Demostración: Sea A un álgebra de tipo de representación finito y T un A -módulo separante. Asumamos que $B = \text{End}_A(T)$ es un álgebra de tipo de representación finito tal que $r_A = r_B$, donde r_A y r_B denotan el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente.

Asumamos que existe un vértice $u \in (R_A)_0$ tal que $P_u \in \text{add } T$, es decir $r_A - 1 = r_u$. Consideremos $\varphi_u : P_u \rightarrow I_u$ un morfismo no nulo que se factoriza por S_u . Luego sabemos que $\varphi_u \in \mathfrak{R}^{r_A-1}(P_u, I_u) \setminus \mathfrak{R}^{r_A}(P_u, I_u)$ y en consecuencia, existe un camino de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles como sigue:

$$P_u \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{r_A-2}} X_{r_A-2} \xrightarrow{f_{r_A-1}} I_u.$$

Como T es un módulo separante, afirmamos que cada X_i con $1 \leq i \leq r_A - 2$ pertenece a la subcategoría $\mathcal{T}(T)$ ya que $P_u \in \mathcal{T}(T)$ y no existen morfismos no nulos de $\mathcal{T}(T)$ a $\mathcal{F}(T)$. Luego, por el Teorema 4.1.13 existe un camino de no isomorfismos no nulo como sigue:

$$\tilde{\psi} = F(P_u) \xrightarrow{F(f_1)} F(X_1) \rightarrow \dots \rightarrow F(X_{r_A-2}) \xrightarrow{F(f_{r_A-1})} F(I_u).$$

Claramente cada $F(X_i)$ es un B -módulo indescomponible perteneciente a $\mathcal{Y}(T)$, para $1 \leq i \leq r_A - 2$. Afirmamos que cada $F(f_i)$ son morfismos irreducibles. En efecto, supongamos que existe un j , con $1 \leq j \leq r_A - 1$ tal que $F(f_j)$ no es irreducible. Entonces $F(f_j) \in \mathfrak{R}^2(F(X_{j-1}), F(X_j))$ y en consecuencia el morfismo $\tilde{\psi} \in \mathfrak{R}^{r_A}(\text{mod } B) = \mathfrak{R}^{r_B}(\text{mod } B)$, lo que contradice que $\mathfrak{R}^{r_B}(\text{mod } B) = 0$.

Por lo tanto, cada morfismo $F(f_i)$ es irreducible, obteniendo así lo deseado. \square

Más adelante demostraremos que si A es un álgebra inclinada y B es un álgebra hereditaria, entonces vale la recíproca de la proposición anterior.

A continuación consideraremos a B como el álgebra de endomorfismos de un módulo APR-inclinante.

Observación 4.2.15 Sea $A \simeq kQ_A/I$ un álgebra y $T[a]$ un A -módulo APR-inclinante, donde a es un pozo de Q_A . Sigue de la construcción $T[a]$ y de la Proposición 4.2.7 que siempre existe un vértice $u \in (R_A)_0$ tal que $P_u \in \text{add } T[a]$.

El siguiente resultado es un caso particular del Teorema 4.2.12.

Lema 4.2.16 *Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra y asumamos que existe un pozo $a \in (Q_A)_0$. Sean $T[a]$ el A -módulo APR-inclinante asociado al vértice a y $B = \text{End}_A(T[a])$. Si B es de tipo de representación finito, entonces $r_A \leq r_B$, donde r_A y r_B denotan los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente.*

A continuación consideraremos el caso en que $T[a]$ sea un A -módulo APR-inclinante, donde a es un pozo libre de Q_A .

Lema 4.2.17 *Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito y supongamos que existe un pozo libre $a \in (Q_A)_0$. Sean $T[a]$ el A -módulo APR-inclinante asociado al vértice a y $B = \text{End}_A(T[a])$. Entonces, $r_A = r_B$, donde r_A y r_B denotan los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente.*

Demostración:

Asumamos que $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra de tipo de representación finito. Luego, B también lo es. Denotemos por r_A y r_B los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente.

Por el Lema 4.2.16, tenemos que $r_A \leq r_B$. Probemos ahora que se satisface la igualdad. En efecto, supongamos que $r_A < r_B$ o equivalentemente $r_A \leq r_B - 1$. Como a es un pozo libre en $(Q_A)_0$, por el Lema 4.1.18 sabemos que a' , el vértice correspondiente a a en Q_B , es una fuente. Luego, en virtud de la Proposición 4.2.8, existe un vértice $b' \in (Q_B)_0$ con $b' \neq a'$, tal que $r_{b'} = r_B - 1$. Sea $\tilde{\varphi}_{b'} : \tilde{P}_{b'} \rightarrow \tilde{I}_{b'}$ un morfismo no nulo que factoriza por $\tilde{S}_{b'}$ en $\text{mod } B$. Entonces, sigue del Lema 1.7.14 que $\tilde{\varphi}_{b'} \in \mathfrak{R}_B^{r_B-1}(\tilde{P}_{b'}, \tilde{I}_{b'}) \setminus \mathfrak{R}_B^{r_B}(\tilde{P}_{b'}, \tilde{I}_{b'})$.

Más aún, los B -módulos indescomponibles $\tilde{P}_{b'}$ y $\tilde{I}_{b'}$ pertenecen a la subcategoría $\mathcal{Y}(T[a])$ pues $a' \neq b'$. Luego, por el Teorema de Inclinación, existen módulos indescomponibles $M, N \in \mathcal{T}(T[a])$ y un morfismo no nulo $f : M \rightarrow N$ tales que $\tilde{P}_{b'} = F(M)$, $\tilde{I}_{b'} = F(N)$ y $\tilde{\varphi}_{b'} = F(f)$. Por el Corolario 4.2.4 resulta que $f \in \mathfrak{R}_A^{r_B-1}(M, N) \setminus \mathfrak{R}_A^{r_B}(M, N)$, lo que es una contradicción pues $\mathfrak{R}^{r_A}(\text{mod } A) = 0$ y $r_A \leq r_B - 1$. Por lo tanto concluimos que $r_A = r_B$. \square

4.3. Índice de nilpotencia de un álgebra hereditaria.

El teorema principal de esta sección, como otros resultados necesarios para su demostración, fueron presentados en mi tesis de Licenciatura. Debido al hecho que dichos resultados son herramientas muy útiles para el desarrollo de esta tesis y que además no han sido publicados, vamos a transcribirlos en esta sección con sus respectivas demostraciones.

El objetivo es determinar el índice de nilpotencia de un álgebra hereditaria de tipo de representación finito en función a la cantidad de vértices que tiene su carcaj ordinario. Para su demostración, vamos a utilizar herramientas de la teoría de inclinación y propiedades de las álgebras hereditarias, muchas de las cuales hemos introducido en el Capítulo 1.

Es sabido que en las álgebras hereditarias de tipo de representación finito, existe una única componente Γ en el carcaj de Auslander-Reiten ($\Gamma = \Gamma_{\text{mod } H}$). Queremos probar que dicha componente es una componente con longitud. Para ello vamos a analizar el gráfico de órbitas de Γ .

Lema 4.3.1 *Sea H un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, tal que $H \cong kQ_H$. Entonces el gráfico de órbitas $O(\Gamma_{\text{mod } H})$ es igual al grafo subyacente*

$\overline{Q_H}$.

Demostración: Consideremos H un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, con $H \cong kQ_H$, y supongamos que Q_H tiene n vértices.

Analicemos ahora el gráfico de órbitas de $\Gamma_{\text{mod } H}$. En el carcaj de Auslander-Reiten sólo hay n órbitas distintas, y cada H -módulo proyectivo indescomponible pertenece a una de ellas. Luego, por la definición de gráfico de órbitas, $O(\Gamma_{\text{mod } H})$ tiene un punto por cada H -módulo proyectivo indescomponible, y hay una arista entre dos puntos distintos, si existe un morfismo irreducible entre dos módulos proyectivos indescomponibles.

El Lema 1.6.5 nos dice que existe un morfismo irreducible $f : P_b \rightarrow P_a$, donde P_b y P_a son H -módulos proyectivos indescomponibles, si y sólo si existe una flecha $a \rightarrow b$ en Q_H . Luego el carcaj subyacente $\overline{Q_H}$ resulta igual al gráfico de órbitas $O(\Gamma_{\text{mod } H})$. \square

Proposición 4.3.2 *Sea $H = kQ_H$ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito. Entonces $\Gamma_{\text{mod } H}$ es un carcaj con longitud.*

Demostración: Sea $H \cong kQ_H$ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito. Entonces $\overline{Q_H}$ es un grafo Dynkin. Por lo probado en el Lema 4.3.1, el gráfico de órbitas $O(\Gamma_{\text{mod } H})$ es igual a $\overline{Q_H}$ que es de tipo árbol, ver el Teorema 1.6.6. Por lo tanto, $\Gamma_{\text{mod } H}$ es simplemente conexo y en virtud del Teorema 1.4.2 resulta que $\Gamma_{\text{mod } H}$ es una componente con longitud. \square

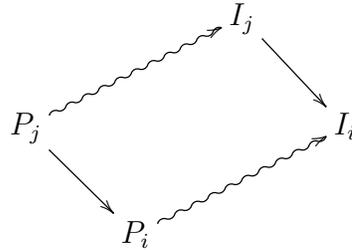
El siguiente lema es esencial para la demostración del resultado principal de esta sección. Recordemos que para calcular el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra A de tipo de representación finito, basta con analizar los caminos de la forma $P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a$, donde P_a , S_a e I_a son los A -módulos proyectivo, simple e inyectivo correspondientes al vértice a en Q_A . Más precisamente, recordando la Notación 1.7.13, para cada vértice $a \in (Q_A)_0$, definimos el número r_a como $r_a = \ell(P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a)$. El índice de nilpotencia r_A de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ está dado por

$$r_A = \text{máx}\{r_a\}_{a \in (Q_A)_0} + 1.$$

Lema 4.3.3 *Sea $H = kQ_H$ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito. Entonces $r_a = r_b$, para todo par de vértices a y b en Q_H .*

Demostración: Sabemos que r_a está dado por la longitud de los caminos de la forma $P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a$. Como $\Gamma_{\text{mod } H}$ es un carcaj con longitud, sólo basta con

analizar los caminos que comienzan en P_a y terminan en I_a . En efecto, primero probemos que si existe una flecha entre dos vértices en el carcaj ordinario asociado al álgebra H , los caminos que deseamos analizar tienen la misma longitud. Sean $i, j \in (Q_H)_0$ tales que existe una flecha $i \rightarrow j$, entonces por el Lema 1.6.5 y su dual, existen morfismos irreducibles $P_j \rightarrow P_i$ e $I_j \rightarrow I_i$, donde P_j y P_i son los H -módulos proyectivos correspondientes al vértice j e i , respectivamente; e I_j e I_i son los H -módulos inyectivos correspondientes al vértice j e i , respectivamente. Además, por el Lema 1.7.11, para todo vértice $a \in (Q_H)_0$ existe un camino no nulo $P_a \rightsquigarrow I_a$. Luego en $\Gamma_{\text{mod } H}$ vamos a tener un diagrama de la siguiente forma:



Ahora supongamos que el camino de morfismos irreducibles $P_j \rightsquigarrow I_j$ tiene longitud igual a r . En consecuencia el camino $P_j \rightsquigarrow I_j \rightarrow I_i$ tiene longitud $r + 1$, pues la flecha representa a un morfismo irreducible entre módulos indescomponibles. Como estamos en una componente con longitud, el camino $P_j \rightarrow P_i \rightsquigarrow I_i$ también tiene longitud $r + 1$, y como la flecha representa a un morfismo irreducible entre módulos indescomponibles, resulta que el camino $P_i \rightsquigarrow I_i$ tiene longitud r .

Luego, hemos probado que si existe una flecha $i \rightarrow j$ o $j \rightarrow i$ en Q_H , los caminos $P_i \rightsquigarrow I_i$ y $P_j \rightsquigarrow I_j$ tienen la misma longitud. Como el álgebra H es conexa, se deduce que todos los caminos de la forma $P_a \rightsquigarrow I_a$ tienen el mismo largo. En particular, todos los caminos de la forma $P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a$ tienen la misma longitud, y en consecuencia

$$r_a = \ell(P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a) = \ell(P_b \rightsquigarrow S_b \rightsquigarrow I_b) = r_b. \square$$

Consideremos $H \simeq kQ_H$ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito. Nuestro próximo objetivo es probar que el índice de nilpotencia r_H no depende de la orientación de Q . Es decir, dos álgebra hereditarias con el mismo grafo subyacente tienen el mismo índice de nilpotencia del radical de su categoría de módulos.

Vamos a recordar algunos resultados necesarios para dicho objetivo.

Sea $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra y consideremos que el vértice a es un pozo en

Q_A . El módulo APR-inclinante $T[a]$ está dado por

$$T[a] = \tau^{-1}(S_a) \oplus (\oplus_{b \neq a} P_b),$$

donde S_a es un simple proyectivo y P_b denota al A -módulo proyectivo correspondientes al vértice b en Q_A . En particular, cuando consideramos $H = kQ_H/I_H$ un álgebra hereditaria, todo pozo siempre es un pozo libre debido a que $I_H = 0$. El siguiente resultado describe como obtener el carcaj ordinario del álgebra de endomorfismos $B = \text{End}_H T[a]$. Recordemos también que $\mu_a(Q_H)$ denota a la mutación del carcaj Q_H sobre el vértice a , ver la Definición 1.2.2.

Teorema 4.3.4 [6, Teorema 5.3] *Sea $H \simeq kQ_H$ un álgebra hereditaria y consideremos al vértice a un pozo (libre) en Q_H . Sean $T[a]$ el H -módulo APR-inclinante correspondiente al vértice a y $B = \text{End}_H T[a]$. Entonces B es un álgebra hereditaria isomorfa al álgebra de caminos kQ_B , donde $Q_B = \mu_a(Q_H)$.*

Lema 4.3.5 [6, Lema 5.2] *Sean Q y Q' dos carcajes de tipo árbol con el mismo grafo subyacente. Entonces existe una secuencia de carcajes $Q = Q^1, \dots, Q^{t+1}$ y puntos $a_i \in Q^i$, con $1 \leq i \leq t+1$, tales que*

- (i) para cada s tal que $1 \leq s \leq t$, a_s es un pozo en Q^s y $Q^{s+1} = \mu_{a_s}(Q^s)$; y
- (ii) $Q^{t+1} = Q'$.

Estamos en condiciones de presentar el siguiente resultado.

Lema 4.3.6 *Sean $H = kQ_H$ y $H' = kQ_{H'}$ dos álgebra hereditaria de tipo de representación finito con el mismo grafo subyacente, $\overline{Q_H} = \overline{Q_{H'}}$. Denotemos por r_H y $r_{H'}$ los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } H)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } H')$, respectivamente. Entonces, $r_H = r_{H'}$.*

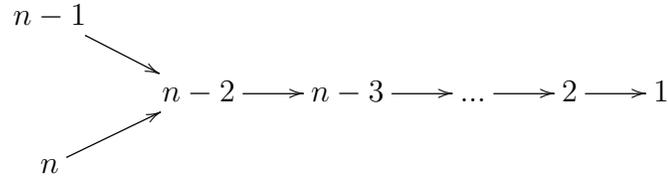
Demostración: Consideremos dos álgebras hereditarias $H = kQ_H$ y $H' = kQ_{H'}$ de tipo de representación finito tales que $\overline{Q_H} = \overline{Q_{H'}}$. En particular, dichos carcajes son de tipo árbol. Por el Lema 4.3.5, existe una secuencia de carcajes $Q_H = Q^1, \dots, Q^{t+1}$ y puntos $a_s \in Q^s$, con $1 \leq s \leq t$, tales que a_s es un pozo en Q^s y $\mu_{a_s}(Q^s) = Q^{s+1}$, con $Q^{t+1} = Q_{H'}$. Entonces, en cada paso podemos considerar $T[a_s]$ el módulo APR-inclinante en $\text{mod } kQ^s$ correspondiente al pozo $a_s \in Q^s$. En consecuencia, por el Teorema 4.3.4 tenemos que $\text{End}_{kQ^s}(T[a_s]) \simeq kQ^{s+1}$. Además, por el Lema 4.2.17 cada una de estas álgebras son de tipo de representación finito. Más aún, los índices de nilpotencia del radical de sus respectivas categorías de módulos no varían, es decir, $r_{kQ^s} = r_{kQ^{s+1}}$, para $1 \leq s \leq t$. Por lo tanto,

$$r_H = r_{kQ^1} = r_{kQ^{t+1}} = r_{H'}. \quad \square$$

Observación 4.3.7 Sigue del Lema 4.3.3, del Lema 4.3.6 y del Teorema 1.7.16 que dada un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, para calcular el índice de nilpotencia del radical de su categoría de módulos, sólo hace falta fijar una orientación del carcaj ordinario del álgebra, y analizar un sólo camino de la forma $P_a \rightsquigarrow I_a$, donde P_a e I_a son los módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles correspondientes al mismo vértice a , respectivamente.

El siguiente lema es necesario para la demostración del teorema principal de esta sección.

Lema 4.3.8 *Sea Q el siguiente grafo orientado*



con $n \geq 4$. Consideremos $i \in Q_0$, con $i = 1, \dots, n-2$. Sean P_i e I_i los kQ -módulos proyectivo e inyectivo, respectivamente, correspondiente al vértice i . Entonces, $\tau^{-(n-2)}P_i \cong I_i$.

Demostración: Observemos que en $\text{mod } kQ$ los módulos proyectivos no son inyectivos y viceversa.

Probemos primero que $\tau^{-(n-2)}P_1 \cong I_1$, o lo que es equivalente $P_1 \cong \tau^{n-2}I_1$. Para ello vamos a calcular los trasladados de Auslander-Reiten por definición, ver la Proposición 1.5.9.

Comencemos calculando τI_1 . La presentación proyectiva minimal de I_1 resulta

$$P_{n-2} \xrightarrow{p_1} P_n \oplus P_{n-1} \xrightarrow{p_0} I_1 \longrightarrow 0$$

Aplicando a esa sucesión el funtor Nakayama ν obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \tau I_1 \longrightarrow \nu(P_{n-2}) \xrightarrow{\nu(p_1)} \nu(P_n \oplus P_{n-1}) \xrightarrow{\nu(p_0)} \nu(I_1)$$

que es equivalente a

$$0 \longrightarrow \tau I_1 \longrightarrow I_{n-2} \xrightarrow{\nu(p_1)} I_n \oplus I_{n-1} \longrightarrow 0$$

ya que $\nu(P_i) \cong I_i$ y $\nu(p_1)$ es un epimorfismo por ser un morfismo entre módulos inyectivos. Por lo tanto resulta que

$$\tau(I_1) \cong \text{Ker}(\nu(p_1)) \cong S_{n-2}.$$

Ahora calculemos $\tau(S_{n-2})$. La presentación proyectiva minimal de S_{n-2} es

$$P_{n-3} \xrightarrow{p_3} P_{n-2} \xrightarrow{p_2} S_{n-2} \longrightarrow 0$$

Aplicando a esa sucesión el funtor Nakayama resulta la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \tau S_{n-2} \longrightarrow I_{n-3} \xrightarrow{\nu(p_3)} I_{n-2} \longrightarrow 0$$

Por lo tanto:

$$\tau(S_{n-2}) \cong \text{Ker}(\nu(p_3)) \cong S_{n-3}.$$

Iterando este último procedimiento sucesivamente obtenemos que $\tau(S_{i+1}) \cong S_i$ para $i = 1, \dots, n-3$. Luego

$$\tau^{n-2}I_1 \cong \tau^{n-3}S_{n-2} \cong \tau^{n-4}S_{n-3} \cong \dots \cong \tau S_2 \cong S_1 \cong P_1$$

Logrando el resultado deseado.

De manera inductiva vamos a probar que $\tau^{-(n-2)}P_i$ está definido y es isomorfo a I_i para $i = 2, \dots, n-2$.

En efecto, supongamos que

$$\tau^{-(n-2)}P_1 \cong I_1, \tau^{-(n-2)}P_2 \cong I_2, \dots, \tau^{-(n-2)}P_{k-1} \cong I_{k-1},$$

para $k < n-2$.

Queremos probar que $\tau^{-(n-2)}P_k$ está definido. Más aún, $\tau^{-(n-2)}P_k \cong I_k$.

Supongamos que $\tau^{-(n-2)}P_k$ no está definido. Esto significa que existe j , con $1 \leq j < n-2$, tal que $\tau^{-j}P_k$ es inyectivo. Denotemos $\tau^{-j}P_k = I_l$. Observemos que $l \neq 1, \dots, k-1$ ya que inyectivos distintos perteneces a distintas τ -órbitas.

Como $\tau^{-(n-2)}P_{k-1} \cong I_{k-1}$ por hipótesis inductiva, entonces $\tau^{-t}P_{k-1}$ está definido para todo t , con $1 \leq t \leq n-2$. En particular $\tau^{-j}P_{k-1}$ está definido. Por el Lema 1.5.14 tenemos

$$\text{Hom}_{kQ}(P_{k-1}, P_k) \cong \text{Hom}_{kQ}(\tau^{-j}P_{k-1}, \tau^{-j}P_k) = \text{Hom}_{kQ}(\tau^{-j}P_{k-1}, I_l) \quad (4.2)$$

Como existe un morfismo irreducible $P_{k-1} \rightarrow P_k$, entonces por (4.2) existe un morfismo $\tau^{-j}P_{k-1} \rightarrow I_l$ y es irreducible. Más aún, $\tau^{-j}P_{k-1}$ no es inyectivo (pues $j < n-2$), luego existe un morfismo irreducible

$$I_l \rightarrow \tau^{-j-1}P_{k-1}. \quad (4.3)$$

Por ser kQ hereditaria se tiene que $\tau^{-j-1}P_{k-1}$ es inyectivo. Como por hipótesis inductiva P_{k-1} está en la misma τ -órbita que I_{k-1} , resulta que $\tau^{-j-1}P_{k-1} \cong I_{k-1}$. Así en (4.3) se tiene un morfismo irreducible $I_l \rightarrow I_{k-1}$, con lo cual existe una

flecha $k - 1 \rightarrow l$ en Q , y por la orientación de Q resulta que $l = k - 2$. Así obtenemos que

$$\tau^{-j}P_k = I_l = I_{k-2} \stackrel{HI}{\cong} \tau^{-(n-2)}P_{k-2}$$

Por lo tanto P_k y P_{k-2} están en la misma τ -órbita, lo que es un absurdo por ser proyectivos distintos. Por lo tanto hemos probado que $\tau^{-(n-2)}P_k$ está definido.

Veamos ahora que $\tau^{-(n-2)}P_k \cong I_k$.

Como existe un morfismo irreducible $P_{k-1} \rightarrow P_k$, por (4.2) existe también un morfismo irreducible $\tau^{-(n-2)}P_{k-1} \rightarrow \tau^{-(n-2)}P_k$ (tomando $j = n - 2$). Además, por hipótesis inductiva, $\tau^{-(n-2)}P_{k-1} \cong I_{k-1}$, entonces $\tau^{-(n-2)}P_k$ también es inyectivo por ser kQ hereditaria. Sea $\tau^{-(n-2)}P_k = I_l$, luego en Q existe una flecha $l \rightarrow k - 1$. Por lo tanto, por la orientación de Q , $l = k$ probando el resultado. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.3.9 *Sea $H = kQ$ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito y sea r_H el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } H)$.*

- (a) Si $\overline{Q} = A_n$, entonces $r_H = n$, para $n \geq 1$.
- (b) Si $\overline{Q} = D_n$, entonces $r_H = 2n - 3$, para $n \geq 4$.
- (c) Si $\overline{Q} = E_6$, entonces $r_H = 11$.
- (d) Si $\overline{Q} = E_7$, entonces $r_H = 17$.
- (e) Si $\overline{Q} = E_8$, entonces $r_H = 29$.

Demostración: (a) Consideremos $H \cong kQ$ donde Q está dado por el siguiente grafo orientado:

$$n \longrightarrow n - 1 \longrightarrow \dots \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Así resulta que $P_1 = S_1$ e $I_1 = P_n$.

El Lema 1.6.5, permite construir un camino no nulo de morfismos irreducibles de longitud $n - 1$ como sigue:

$$S_1 = P_1 \xrightarrow{f_1} P_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} P_n = I_1$$

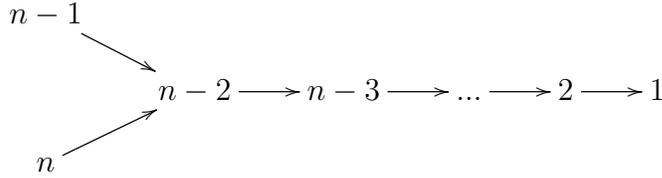
En virtud del Lema 4.3.3, todos los caminos de la forma $P_i \rightsquigarrow I_i$, tienen longitud igual a $n - 1$. Dado que el carcaj de Auslander-Reiten, $\Gamma_{\text{mod } H}$, es con

longitud, todos los caminos de la forma $P_i \rightsquigarrow S_i \rightsquigarrow I_i$ también tienen longitud igual a $n - 1$, para $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto, por la Observación 1.7.18 resulta que

$$r_H = \max\{\ell(P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a)\}_{a \in Q_0} + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

Ahora sea $H' \cong kQ'$, donde $\overline{Q'} = A_n$. Por el Lema 4.3.6, $r_{H'} = r_H = n$, demostrando así el primer enunciado.

(b) Sea $H \cong kQ$, donde Q está dado por el siguiente grafo orientado



Sin pérdida de generalidad, vamos a analizar la longitud del camino $P_1 \rightsquigarrow I_1$.

El Lema 1.6.5, permite construir un camino no nulo de $n - 2$ morfismos irreducibles como sigue:

$$P_1 \xrightarrow{f_1} P_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-3}} P_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} P_{n-1} \quad (4.4)$$

Debido a que el módulo proyectivo P_{n-2} no es inyectivo, existe un morfismo irreducible $P_{n-1} \rightarrow \tau^{-1}P_{n-2}$.

Por el Lema 4.3.8, existe $\tau^{-(n-2)}P_i$ para $i \in Q_0$, con $i = 1, \dots, n - 2$. Por lo tanto existe $\tau^{-j}P_i$ para $1 \leq j \leq n - 2$.

Probaremos a continuación la existencia de los morfismos irreducibles de la forma $\tau^{-i}P_{n-(i+1)} \rightarrow \tau^{-i-1}P_{n-(i+2)}$ para $i = 1, \dots, n - 3$. En efecto, el Lema 1.5.14 nos brinda la siguiente equivalencia:

$$\text{Hom}_H(\tau^{-i}P_{n-(i+1)}, \tau^{-i-1}P_{n-(i+2)}) \cong \text{Hom}_H(P_{n-(i+1)}, \tau^{-1}P_{n-(i+2)})$$

Como existe un morfismo irreducible $P_{n-(i+2)} \rightarrow P_{n-(i+1)}$, y $P_{n-(i+2)}$ no es inyectivo para $i = 1, \dots, n - 3$, entonces existe un morfismo irreducible $P_{n-(i+1)} \rightarrow \tau^{-1}P_{n-(i+2)}$. Por lo tanto, la equivalencia anterior nos garantiza un morfismo irreducible $\tau^{-i}P_{n-(i+1)} \rightarrow \tau^{-i-1}P_{n-(i+2)}$ probando lo deseado.

Luego nos podemos construir el siguiente camino de $n - 2$ morfismos irreducibles:

$$P_{n-1} \xrightarrow{g_1} \tau^{-1}P_{n-2} \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_{n-3}} \tau^{-(n-3)}P_2 \xrightarrow{g_{n-2}} \tau^{-(n-2)}P_1 \quad (4.5)$$

Sabemos que $\tau^{-(n-2)}P_1 \cong I_1$ por el Lema 4.3.8, por lo tanto uniendo los caminos (4.4) y (4.5), podemos construir el siguiente camino de $2(n-2)$ morfismos irreducibles

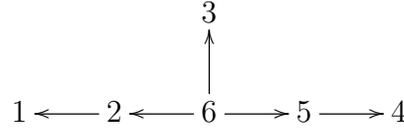
$$S_1 \cong P_1 \xrightarrow{f_1} P_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-3}} P_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} P_{n-1} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_1} \tau^{-1}P_{n-2} \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_{n-3}} \tau^{-(n-3)}P_2 \xrightarrow{g_{n-2}} \tau^{-(n-2)}P_1 \cong I_1$$

Por el Lema 4.3.3, todos los caminos de la forma $P_a \rightsquigarrow I_a$, con $a \in Q_0$ también tienen longitud $2(n-2)$, y al ser el carcaj de Auslander-Reiten con longitud por ser H hereditaria, resulta que los caminos $P_i \rightsquigarrow S_i \rightsquigarrow I_i$ también tienen longitud igual a $2(n-2)$. Luego, por el Teorema 1.7.16 resulta que

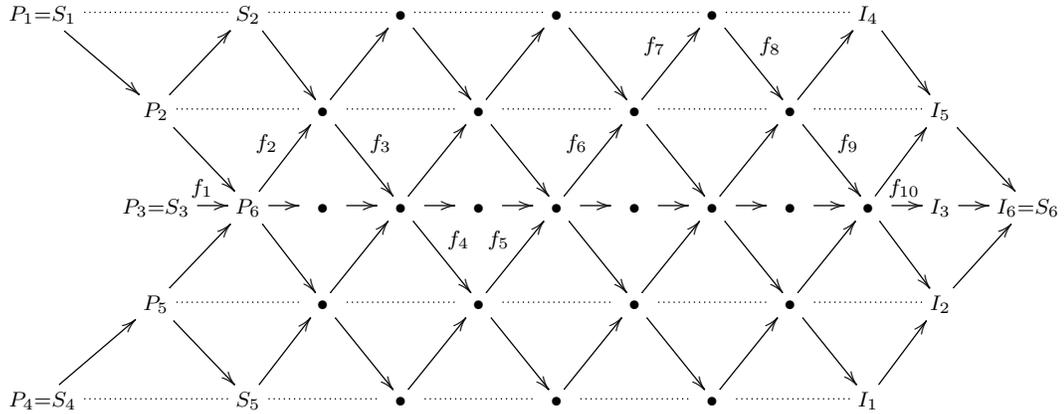
$$r_H = \max\{\ell(P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a)\}_{a \in Q_0} + 1 = 2(n-2) + 1 = 2n - 3.$$

Consideremos ahora H' un álgebra hereditaria, donde $H' \cong kQ'$ con $\overline{Q'} = D_n$. Entonces por el Lema 4.3.6 resulta que $r_{H'} = r_H = 2n - 3$.

(c) Consideremos el álgebra $H \cong kQ$, donde Q está dado por el siguiente grafo orientado:



Entonces el carcaj de Auslander-Reiten tiene la forma:



Podemos notar que el camino $P_3 \rightsquigarrow I_3$ está dado por la composición de los siguientes morfismos irreducibles:

$$P_3 \xrightarrow{f_1} P_6 \xrightarrow{f_2} \tau^{-1}P_2 \xrightarrow{f_3} \tau^{-1}P_6 \xrightarrow{f_4} \tau^{-2}P_5 \xrightarrow{f_5} \tau^{-2}P_6 \xrightarrow{f_6} \tau^{-3}P_2 \xrightarrow{f_7}$$

$$\tau^{-3}S_2 \xrightarrow{f_8} \tau^{-4}P_2 \xrightarrow{f_9} \tau^{-4}P_6 \xrightarrow{f_{10}} I_3$$

cuya longitud es igual a 10. Luego, por la Observación 4.3.7 concluimos que $r_H = 11$. Entonces si consideramos cualquier álgebra $H' \cong kQ'$ con $\overline{Q'} = E_6$ resulta que $r_{H'} = 11$.

De la misma manera podemos demostrar los incisos (d) y (e). \square

4.4. Álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin

En esta sección vamos a aplicar algunos resultados presentados anteriormente en un conjunto particular de álgebras: las álgebras inclinadas iteradas.

Para ello recordemos la siguiente definición.

Definición 4.4.1 *Sea Δ un carcaj finito, conexo y sin ciclos orientados. Un álgebra A se dice **álgebra inclinada iterada de tipo Δ** si existen una secuencia de álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m = k\Delta$ y una secuencia de A_i -módulos inclinantes separantes $T^{(i)}$, para $0 \leq i < m$ tales que $A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T^{(i)}$. En particular, si $m = 1$ entonces A se denomina **álgebra inclinada**.*

Observación 4.4.2 Se deduce directamente de la definición y del Teorema 4.2.12 que si Δ es un carcaj Dynkin, entonces un álgebra inclinada iterada de tipo Δ es de tipo de representación finito.

A continuación vamos a demostrar que si A es un álgebra inclinada vale el enunciado recíproco de la Proposición 4.2.14. Recordemos que $(R_A)_0$ denota al subconjunto de vértices de $(Q_A)_0$ que determinan el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$.

Proposición 4.4.3 *Sean $A \simeq kQ_A/I_A$ un álgebra inclinada, donde $B = \text{End}_A T$ es un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, con T un A -módulo inclinante separante. Asumamos que existe un vértice $u \in (R_A)_0 \subset (Q_A)_0$ tal que $P_u \in \text{add } T$.*

$r_A = r_B$ si y sólo existe un camino no nulo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles como sigue

$$F(P_u) \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{r_A-2} \rightarrow F(I_u)$$

de longitud $r_A - 1$.

Demostración: Sea A un álgebra inclinada y $B = \text{End}_A(T)$ un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, con T un A -módulo separante. Por la Observación 4.4.2, A también es de tipo de representación finito. Denotemos por r_A y r_B el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } B)$, respectivamente. Asumamos que existe un vértice $u \in (R_A)_0$ tal que $P_u \in \text{add } T$, es decir $r_A - 1 = r_u$. La primera implicación se deduce de la Proposición 4.2.14.

Recíprocamente, sabemos que existe camino no nulo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles en $\text{mod } B$ de longitud $r_A - 1$ como sigue:

$$F(P_u) \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{r_A-2} \rightarrow F(I_u). \quad (4.6)$$

Probemos entonces que $r_A = r_B$. Por el Lema 4.2.13, sabemos que $F(P_u) = \tilde{P}_{u^*}$ y $F(I_u) = \tilde{I}_{u^*}$ son B -módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles correspondientes al mismo vértice $u^* \in (Q_B)_0$.

Por otra parte, como B es un álgebra hereditaria, siguiendo el Lema 4.3.3 sabemos que cualquier camino de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de la forma $\tilde{P}_{a^*} \rightsquigarrow \tilde{I}_{a^*}$ tiene longitud $r_B - 1$, para todo $a^* \in (Q_B)_0$. En particular, el camino (4.6) tiene longitud $r_B - 1$, por lo tanto $r_A = r_B$. \square

En esta sección presentaremos una cota del índice de nilpotencia de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin. Para ello, recordemos el siguiente resultado.

Teorema 4.4.4 [30, Teorema 6.2] *Sean Δ un carcaj Dynkin y A un álgebra inclinada iterada de tipo Δ . Entonces existen una secuencia de álgebras $A = A_0, A_1, \dots, A_m = k\Delta$ y una secuencia de A_i -módulos APR-inclinantes $T^{(i)}$, para $0 \leq i < m$ tales que $A_{i+1} = \text{End}_{A_i} T^{(i)}$.*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 4.2.16 y del Teorema 4.3.9.

Corolario 4.4.5 *Sean Δ un carcaj Dynkin y A un álgebra inclinada iterada de tipo Δ , entonces:*

- (a) Si $\bar{\Delta} = A_n$, entonces $\mathfrak{R}_A^n(\text{mod } A) = 0$ para $n \geq 1$.
- (b) Si $\bar{\Delta} = D_n$, entonces $\mathfrak{R}_A^{2n-3}(\text{mod } A) = 0$ para $n \geq 4$.
- (c) Si $\bar{\Delta} = E_6$, entonces $\mathfrak{R}_A^{11}(\text{mod } A) = 0$.
- (d) Si $\bar{\Delta} = E_7$, entonces $\mathfrak{R}_A^{17}(\text{mod } A) = 0$.
- (e) Si $\bar{\Delta} = E_8$, entonces $\mathfrak{R}_A^{29}(\text{mod } A) = 0$.

Observación 4.4.6 Los valores encontrados en el teorema anterior proporcionan una cota del índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin, pero no necesariamente ese valor es dicho índice de nilpotencia.

El siguiente ejemplo muestra que el índice de nilpotencia de un álgebra inclinada iterada no depende del tipo Dynkin de la cual proviene.

Ejemplo 4.4.7 Sea A_1 el álgebra dada por la presentación

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5 \quad \text{con } I_1 = \langle \beta\alpha \rangle$$

y A_2 el álgebra dada por la presentación

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \xrightarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{\delta} 5 \quad \text{con } I_2 = \langle \beta\alpha, \delta\gamma \rangle$$

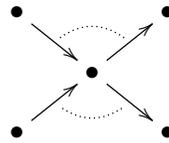
Ambas álgebras son álgebras inclinadas iteradas de tipo A_5 . Por lo tanto, por el teorema anterior sabemos que $\mathfrak{R}^5(\text{mod } A_1) = 0 = \mathfrak{R}^5(\text{mod } A_2)$.

Podemos notar que tanto el álgebra A_1 como el álgebra A_2 son álgebras de cuerdas. Por consiguiente, para determinar el índice de nilpotencia del radical de sus categorías de módulos podemos aplicar lo estudiado en el Capítulo 2. Por lo tanto, tenemos que $r_{A_1} = 5$ mientras que $r_{A_2} = 4$.

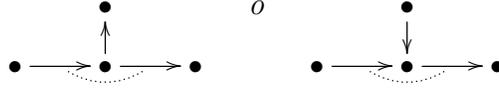
Las álgebras inclinadas iteradas de tipo Dynkin están descritas a partir de su carcaj con relaciones. Sólo transcribiremos dicha descripción para las álgebras inclinada iterada de tipo A_n . Para el caso de las álgebras inclinadas iteradas de tipo D_n y E_p con $p = 6, 7, 8$, sugerimos al lector dirigirse a [7, 34] y [28], respectivamente.

Teorema 4.4.8 [5] *Un álgebra $A = kQ_A/I_A$ es inclinada iterada de tipo A_n si y sólo si el carcaj con relaciones (Q_A, I_A) satisface las siguientes condiciones:*

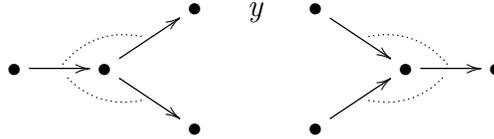
- (i) $\overline{Q_A}$ es un árbol.
- (ii) Cada vértice en Q_A tiene a lo sumo cuatro vecinos.
- (iii) Todas las relaciones tienen longitud dos.
- (iv) Si un vértice tiene cuatro vecinos, entonces el siguiente es un subcarcaj pleno de (Q_A, I_A) :



(v) Si un vértice tiene tres vecinos, entonces uno de los siguientes es un subcarcaj pleno de (Q_A, I_A) :



(vi) No existen subcarcajes plenos de (Q_A, I_A) de la forma:



Observación 4.4.9 Podemos notar que un álgebra inclinada iterada A de tipo A_n es, en particular, un álgebra de cuerdas de tipo de representación finito. El Corolario 4.4.5 nos proporciona una cota inmediata del índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$, a saber, $r_A \leq n$. En el caso de necesitar el valor exacto de dicho índice de nilpotencia, podemos calcularlo desde el carcaj con relaciones del álgebra utilizando el Teorema 2.2.10 presentado en el Capítulo 2.

A continuación vamos a presentar la relación entre la composición de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles con la potencia del radical al cual pertenece. Para ello recordemos el siguiente resultado

Proposición 4.4.10 [31, Corolario 7.6] *Sea A un álgebra inclinada iterada de tipo de representación finito, entonces $\text{mod } A$ es dirigida.*

El siguiente resultado se deduce de la Proposición 4.4.10 y de la Proposición 1.7.20.

Proposición 4.4.11 *Sean Δ un carcaj Dynkin y A un álgebra inclinada iterada de tipo Δ . Sean $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, para $1 \leq i \leq n$. Entonces $h_n \dots h_1 \in \mathfrak{R}_A^{n+1}(X_1, X_{n+1})$ si y sólo si $h_n \dots h_1 = 0$.*

Capítulo 5

Grados en álgebras inclinadas de conglomerado

En [12], los autores introdujeron la categoría de conglomerado \mathcal{C} como el cociente \mathcal{D}/F de la categoría derivada $\mathcal{D} = \mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ de un álgebra hereditaria H sobre el funtor $F = \tau_{\mathcal{D}}^{-1}[1]$, donde $\tau_{\mathcal{D}}$ es el trasladado de Auslander-Reiten en \mathcal{D} y $[1]$ el funtor suspensión. En [13], A. Buan, R. Marsh e I. Reiten definieron las álgebras inclinadas de conglomerado como aquellas álgebras de la forma $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$, donde T es un objeto inclinante en \mathcal{C} .

Estas álgebras son muy cercanas a las álgebras hereditarias en el sentido que un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito tiene el mismo número de clases de isomorfismos de módulos indescomponibles que el álgebra hereditaria de la cual proviene.

Simultáneamente y de manera independiente, P. Caldero, F. Chapoton y R. Schiffler en [15] introdujeron la categoría de conglomerado de tipo A_n desde un punto de vista geométrico. Más tarde, en [38], R. Schiffler introduce, también geoméricamente, la categoría de conglomerado de tipo D_n .

El objetivo de este capítulo es determinar el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito, en función de la cantidad de vértices que tiene su carcaj ordinario.

En la primer sección introduciremos el concepto de la categoría derivada de un álgebra hereditaria con el fin de describir la categoría de conglomerado y definir las álgebras inclinadas de conglomerado.

En la siguiente sección, demostraremos el resultado principal, considerando un álgebra inclinada de conglomerado desde el punto de vista introducido en [13]. Más precisamente, daremos el índice de nilpotencia de cualquier álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito en función de la cantidad de

vértices del carcaj ordinario asociado a ella.

En la tercer sección de este capítulo, probaremos los mismos resultados que en la Sección 2 para las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n y D_n , desde el punto de vista geométrico presentado en [15] y [38], respectivamente.

5.1. Sobre la categoría derivada de un álgebra hereditaria

En esta sección comenzaremos introduciendo los conceptos de categorías trianguladas con el fin de describir la categoría derivada de un álgebra hereditaria de tipo de representación finito y la categoría de conglomerado de dicha álgebra.

Esta sección está basada esencialmente en los resultados de los artículos [12] y [31].

Definición 5.1.1 Sea \mathfrak{C} una categoría aditiva y T un automorfismo de \mathfrak{C} , denominado funtor de traslación. Una **séxtupla** (X, Y, Z, u, v, w) en \mathfrak{C} está dada por objetos $X, Y, Z \in \mathfrak{C}$ y por morfismos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$. Un **morfismo de séxtuplas** de (X, Y, Z, u, v, w) a (X', Y', Z', u', v', w') es una terna (f, g, h) de morfismos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & Tf \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \end{array}$$

Los elementos de un conjunto \mathfrak{T} de séxtuplas en \mathfrak{C} se denominan **triángulos**. Un conjunto \mathfrak{T} se dice una **triangulación de \mathfrak{C}** si se satisfacen las siguientes condiciones.

- (TR1) Cada séxtupla isomorfa a un triángulo es un triángulo. Cada morfismo $u : X \rightarrow Y$ puede ser sumergido en un triángulo (X, Y, Z, u, v, w) . La séxtupla $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ es un triángulo.
- (TR2) (X, Y, Z, u, v, w) es un triángulo si y sólo si $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ es un triángulo.
- (TR3) Dados dos triángulos (X, Y, Z, u, v, w) y (X', Y', Z', u', v', w') , y morfismos $f : X \rightarrow X'$, $g : Y \rightarrow Y'$ tales que $u'f = gu$, entonces existe un morfismo (f, g, h) del primer triángulo al segundo.

(TR4) (Axioma del octaedro) Dados los triángulos (X, Y, Z', u, i, i') , (Y, Z, X', v, j, j') y (X, Z, Y', vu, k, k') , entonces existen morfismos $f : Z' \rightarrow Y'$ y $g : Y' \rightarrow X'$ tales que el siguiente diagrama conmuta y la tercera fila es un triángulo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T^{-}Y' & \xrightarrow{T^{-}k'} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & \\
 \downarrow T^{-}g & & \downarrow u & & \downarrow vu & & \\
 T^{-}X' & \xrightarrow{T^{-}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' \xrightarrow{j'} TY \\
 & & \downarrow i & & \downarrow k & & \downarrow 1_{X'} \downarrow Ti \\
 & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' \xrightarrow{Ti j'} TZ' \\
 & & \downarrow i' & & \downarrow k' & & \\
 & & TX & \xrightarrow{1_{TX}} & TX & &
 \end{array}$$

La categoría aditiva \mathfrak{C} junto al funtor de traslación T y la triangulación \mathfrak{T} se denomina una **categoría triangulada**.

Un triángulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en \mathfrak{C} se denomina **triángulo de Auslander-Reiten** si se satisfacen las siguientes condiciones.

- (AR1) X, Z son indescomponibles;
- (AR2) $w \neq 0$;
- (AR3) Si $f : W \rightarrow Z$ no es una retracción, entonces existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $vf' = f$.

Decimos que la categoría \mathfrak{C} tiene triángulos de Auslander-Reiten si para todo objeto indescomponible $Z \in \mathfrak{C}$ existe un triángulo que satisface la definición anterior.

Proposición 5.1.2 Sea $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ un triángulo de Auslander-Reiten. Se satisfacen las siguientes condiciones.

- (i) Dado X o Z , el mencionado triángulo es único salvo isomorfismos de triángulos.
- (ii) Los morfismos u y v son irreducibles.
- (iii) Si $f : Z_1 \rightarrow Z$ es irreducible, entonces existe una sección $g : Z_1 \rightarrow Y$ tal que $f = vg$.

(iv) Si $f : X \rightarrow X_1$ es irreducible, entonces existe una retracción $g : Y \rightarrow X_1$ tal que $f = gu$.

A continuación presentaremos la noción de la categoría derivada acotada. Para ello, comenzaremos definiendo la categoría de complejos y la categoría de homotopía, dando las nociones necesarias para nuestro propósito.

Sea \mathcal{A} una categoría aditiva. Un **complejo** $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sobre \mathcal{A} es una colección de objetos X^i y morfismos $d^i : X^i \rightarrow X^{i+1}$ tales que $d^{i+1}d^i = 0$. Un complejo $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ se dice **acotado** si $X^i = 0$ para casi todo $i \in \mathbb{Z}$, y se denomina **concentrado** si existe $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^{i_0} \neq 0$ y $X^i = 0$ para todo $i \neq i_0$. En este caso podemos identificar al complejo X^\bullet con el objeto X^{i_0} de \mathcal{A} .

Dados $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$ e $Y^\bullet = (Y^i, d_Y^i)$ dos complejos en \mathcal{A} , un morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ es una secuencia de morfismos $f^\bullet = \{f^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, con $f^i : X^i \rightarrow Y^i$, tales que $d_X^i f^{i+1} = f^i d_Y^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{-1} & \xrightarrow{d_X^{-1}} & X^0 & \xrightarrow{d_X^0} & X^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{-1} & \xrightarrow{d_Y^{-1}} & Y^0 & \xrightarrow{d_Y^0} & Y^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Denotamos por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ la **categoría de complejos**. Denotamos por $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ a la subcategoría plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ de complejos acotados.

Si \mathcal{A} es una subcategoría plena de una categoría abeliana, se define la i -ésima cohomología de un complejo X^\bullet en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ como $H^i(X^\bullet) = \text{Ker } d_X^i / \text{Im } d_X^{i-1}$.

Un morfismo $u^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ en $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, se dice **cuasi-isomorfismo** si induce un isomorfismo en cohomología, es decir $H^i(u^\bullet) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$ es isomorfismo para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Decimos que dos morfismos de complejos $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ son **homotópicos** si existe una sucesión de morfismos $X^i \xrightarrow{s^i} Y^{i-1}$ tal que $f^i - g^i = d_Y^{i-1}s^i + s^{i+1}d_X^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Sea $Ht(X^\bullet, Y^\bullet)$ la colección de morfismos de X^\bullet a Y^\bullet que son homotópicos al morfismo nulo, esta colección forma un ideal de morfismos en la categoría de complejos.

La **categoría de homotopía** $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ es una categoría cociente que tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ y los morfismos son clases en

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, Y^\bullet) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^\bullet, Y^\bullet) / \text{Ht}(X^\bullet, Y^\bullet).$$

El **funtor suspensión (shift)** $T : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ se define en los objetos por $(TX^\bullet)^i = X^{i+1}$, $(d_{TX})^i = -(d_X)^{i+1}$ y en los morfismos por $(Tf^\bullet)^i = f^{i+1}$. Además T es un automorfismo y denotamos a su inversa por T^- .

Vamos a considerar H un álgebra hereditaria y $\text{mod } H$ su categoría de módulos. La categoría derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ de complejos acotados es la categoría que se obtiene de $\mathcal{K}^b(\text{mod } H)$ por la localización con respecto al conjunto de cuasi-isomorfismos, ([35, Section 2.5]). $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ es una categoría triangulada cuyo funtor de traslación es el funtor suspensión, denotado por $[1]$. Además, $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ es una categoría aditiva. Más aún, tiene triángulos de Auslander-Reiten. Los objetos indescomponibles de $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ son los complejos concentrados X^\bullet , cuya única entrada es un H -módulo indescomponible. El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$ se construye pegando infinitas copias de $\Gamma(\text{mod } H)$ (ver [30, I.5]). En particular, si H es un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, es decir, $H \simeq k\Delta$ con Δ un carcaj Dynkin, entonces $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H)) \simeq \mathbb{Z}\Delta$.

El siguiente resultado nos será de utilidad en este capítulo. Recordemos que una componente Γ de un carcaj de traslación conexo se dice que es una componente con longitud, si todos los caminos paralelos en Γ tienen la misma longitud.

Proposición 5.1.3 *Sea H un álgebra hereditaria de tipo de representación finito. Entonces $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$ es un carcaj con longitud.*

Demostración: Vamos a probar que $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$ es con longitud analizando su gráfico de órbitas. Como H es un álgebra hereditaria de tipo de representación finito, entonces $H \simeq k\Delta$, con Δ un carcaj Dynkin. Más aún, $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H)) \simeq \mathbb{Z}\Delta$. Es claro que el gráfico de órbitas de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$ es isomorfo a $\overline{\Delta}$, donde $\overline{\Delta}$ denota al grafo subyacente de Δ . En consecuencia, dicho gráfico de órbitas es de tipo árbol. Por lo tanto $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$ es un carcaj de traslación simplemente conexo y por el Teorema 1.4.2 tenemos que $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$ es con longitud. \square

A partir de ahora, vamos a considerar H un álgebra hereditaria de dimensión finita, y vamos a denotar por \mathcal{D} a la categoría derivada de complejos acotados $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$. En [12], los autores definen la categoría de conglomerado $\mathcal{C} = \mathcal{C}_H$ del álgebra H como la categoría de órbitas $\mathcal{C} = \mathcal{D}/F$, donde $F = \tau^{-1}[1]$ es la composición del funtor suspensión $[1]$ con el trasladado de Auslander-Reiten τ en la categoría \mathcal{D} . Los objetos de \mathcal{C} son clases provenientes de los objetos de \mathcal{D} , y los morfismos en \mathcal{C} se definen como

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^i X, Y).$$

En la Proposición 5.1.5 veremos que estos sumandos son casi todos nulos.

A continuación vamos a enumerar algunas propiedades básicas de \mathcal{C} .

- (i) \mathcal{C} es una categoría triangulada, cuyo funtor de traslación sobre \mathcal{C} también lo denotamos por $[1]$.
- (ii) \mathcal{C} tiene triángulos de Auslander-Reiten inducidos por los triángulos de Auslander-Reiten de \mathcal{D} . También denotamos al trasladado de Auslander-Reiten de \mathcal{C} por τ .

Observación 5.1.4 De la condición (ii) podemos deducir que los morfismos irreducibles en \mathcal{C} son inducidos por morfismos irreducibles en \mathcal{D} . Más aún, caminos no nulos de morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles en \mathcal{C} son inducidos por caminos no nulos de morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles en \mathcal{D} . Además, ambos caminos tienen la misma longitud, es decir, la misma cantidad de morfismos irreducibles.

Vamos a considerar $\mathcal{S} = \text{ind}(\text{mod } H \vee H[1])$, el conjunto que consiste en los H -módulos indescomponibles, junto con los objetos $P[1]$, donde P es un H -módulo proyectivo indescomponible. Podemos interpretar a \mathcal{S} como el dominio fundamental de \mathcal{C} por la acción de F sobre \mathcal{D} , conteniendo exactamente un representante de cada F -órbita sobre $\text{ind } \mathcal{D}$.

Proposición 5.1.5 Sean X e Y objetos en \mathcal{S} . Entonces

- (a) $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^i X, Y) = 0$ para todo $i \neq -1, 0$.
- (b) Si X o Y no están sobre un ciclo orientado en \mathcal{D} , entonces $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^i X, Y) \neq 0$ para a lo sumo un valor de i .

Observación 5.1.6 Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H de tipo de representación finito. Sean \tilde{X} e \tilde{Y} objetos indescomponibles y $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ un morfismo en \mathcal{C} . Si denotamos por X e Y en \mathcal{S} a representantes de \tilde{X} e \tilde{Y} en \mathcal{D} , respectivamente, entonces por la Proposición 5.1.5 (a) tenemos que

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^i X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1} X, Y) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y).$$

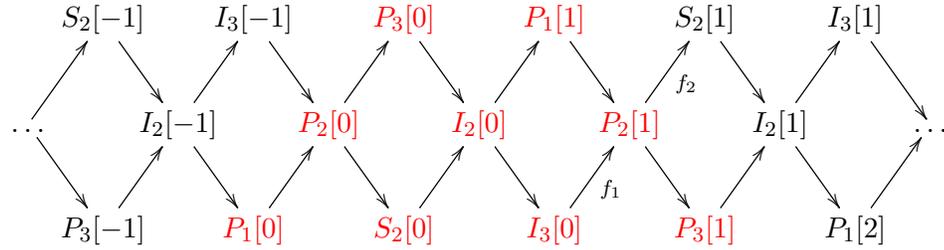
Más aún, como $\Gamma(\mathcal{D})$ es con longitud, por lo tanto es dirigida y no hay ciclos en \mathcal{D} . Luego, por la Proposición 5.1.5 (b), por lo menos uno de los sumandos de la igualdad anterior es cero, es decir, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1} X, Y) = 0$ o bien $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = 0$.

A continuación presentaremos un ejemplo donde podemos visualizar la categoría derivada acotada de un álgebra hereditaria, y el dominio fundamental de \mathcal{C} por la acción de F sobre \mathcal{D} .

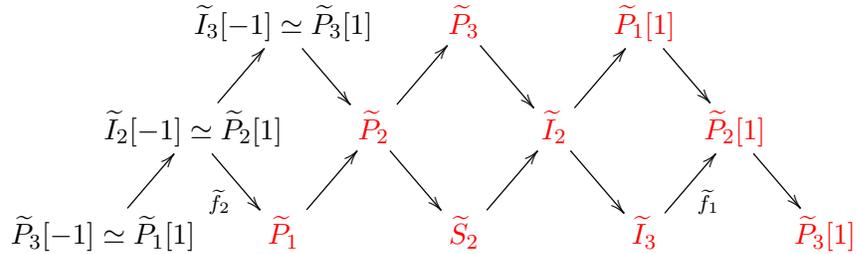
Ejemplo 5.1.7 Sea H el álgebra hereditaria dada por el carcaj

$$3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

El carcaj de Auslander-Reiten de la categoría derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } H)$ es el siguiente:



Denotamos con rojo a los módulos indescomponibles que conforman el dominio fundamental \mathcal{S} . Podemos visualizar la categoría de conglomerado \mathcal{C} de la siguiente manera:



Observemos que el camino de morfismos irreducibles en \mathcal{C}

$$\tilde{I}_3 \xrightarrow{\tilde{f}_1} \tilde{P}_2[1] \xrightarrow{\tilde{f}_2} \tilde{P}_1$$

es inducido por el camino de morfismos irreducibles en \mathcal{D}

$$I_3[0] \xrightarrow{f_1} P_2[1] \xrightarrow{f_2} S_2[1].$$

5.2. Álgebras inclinadas de conglomerado

En esta sección vamos introducir el concepto de álgebra inclinada de conglomerado, siguiendo la definición dada en [13]. Nuestro objetivo es determinar el índice de nilpotencia de un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito en función de la cantidad de vértices que tiene el carcaj ordinario que representa a dicha álgebra. Más precisamente, probaremos que el índice de nilpotencia es invariante bajo mutaciones, y utilizaremos el hecho de que las álgebras hereditarias son un caso particular de álgebras inclinadas de conglomerado.

Por abuso de notación, vamos a denotar por X al objeto \tilde{X} de \mathcal{C} , que tiene como representante al objeto $X \in \mathcal{S}$.

Definición 5.2.1 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H . Un **objeto** T en \mathcal{C} se dice **inclinante** si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, T) = 0$ y T es maximal con respecto a esta propiedad, es decir, si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T \oplus X, T \oplus X) = 0$, entonces $X \in \text{add } T$.*

Definición 5.2.2 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H . El álgebra $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$, donde T es un objeto inclinante en \mathcal{C} , se denomina **álgebra inclinada de conglomerado**.*

Notación 5.2.3 Siguiendo la notación presentada en [13], vamos a denotar por Γ a un álgebra inclinada de conglomerado $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ (Definición 5.2.2).

El próximo resultado muestra la conexión que existe entre la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria y la categoría de módulos de un álgebra inclinada de conglomerado.

Teorema 5.2.4 [13] *Sean T un objeto inclinante de \mathcal{C} y $G = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$, donde $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{mod } \Gamma$. Entonces, el funtor \bar{G} inducido por G*

$$\bar{G} : \mathcal{C}/\text{add}(\tau T) \rightarrow \text{mod } \Gamma$$

es una equivalencia.

Sea $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ un álgebra inclinada de conglomerado. Se deduce del teorema anterior que un Γ -módulo proyectivo indescomponible P_u es de la forma $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_u)$, donde T_u es un sumando indescomponible de T . Además, es conocido que el Γ -módulo inyectivo indescomponible I_u , que es la cubierta inyectiva del módulo simple $S_u = \text{top } P_u$, es de la forma $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau^2 T_u)$.

A continuación presentaremos algunas nociones y resultados de la teoría de álgebras inclinadas de conglomerado, que serán necesarias para esta tesis.

Proposición 5.2.5 *Las sucesiones de Auslander-Reiten en $\text{mod } \Gamma \simeq \mathcal{C}/\text{add}(\tau T)$ son inducidas por triángulos de Auslander-Reiten en \mathcal{C} .*

Se deduce de la proposición anterior que los morfismos irreducibles en $\text{mod } \Gamma$ que no factorizan por $\text{add}(\tau T)$ son inducidos por morfismos irreducibles en \mathcal{C} . Más aún, caminos de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles en $\text{mod } \Gamma$ son inducidos por caminos de morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles en \mathcal{C} , y ambos tienen la misma longitud.

Definición 5.2.6 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H . Un **objeto inclinante casi completo** en \mathcal{C} es un objeto \bar{T} tal que $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(\bar{T}, \bar{T}) = 0$ y existe un objeto indescomponible X , denominado **complemento**, tal que $\bar{T} \oplus X$ es un objeto inclinante.*

Teorema 5.2.7 *Sea H un álgebra hereditaria y \bar{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} . Entonces \bar{T} tiene exactamente dos complementos no isomorfos. A dichos complementos los notaremos por M y M^* .*

Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$, donde $T = \bar{T} \oplus M$ y $T' = \bar{T} \oplus M^*$ son dos objetos inclinantes de \mathcal{C} que provienen de las completaciones M y M^* de un objeto inclinante casi completo \bar{T} . Es sabido que podemos obtener un álgebra de la otra mediante una mutación de sus carcajes ordinarios. Recordemos la Definición 1.2.2.

Definición 5.2.8 *Sea Q un carcaj sin flechas múltiples, sin lazos y sin dos-ciclos. Sea x un vértice de Q . La mutación μ_x en el vértice x transforma el carcaj Q en un nuevo carcaj $Q' = \mu_x Q$ que se construye de la siguiente manera:*

- (1) *Se agrega un nuevo vértice y .*
- (2) *En caso de existir un camino de la forma $i \rightarrow x \rightarrow j$, se analiza la existencia de una flecha de j a i :*
 - I. *Si existe una flecha de j a i , entonces ésta se elimina.*
 - II. *Si no existe una flecha de j a i , entonces se agrega una flecha de i a j .*
- (3) *Para todo vértice i , se reemplazan todas las flechas de i a x por flechas de y a i , y se reemplazan todas las flechas de x a i por flechas de i a y .*
- (4) *Se elimina el vértice x .*

El siguiente resultado relaciona las álgebras Γ y Γ' mediante una mutación de sus carcajes ordinarios.

Teorema 5.2.9 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H . Sean $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ álgebras inclinadas de conglomerado, donde $T = \bar{T} \oplus M$, $T' = \bar{T} \oplus M^*$ y \bar{T} es un objeto inclinante casi completo de \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Denotamos por Q_{Γ} y $Q_{\Gamma'}$ los carcajes ordinarios de Γ y Γ' , respectivamente. Sea x el vértice de Q_{Γ} proveniente del sumando M de T . Entonces $Q_{\Gamma'} = \mu_x Q_{\Gamma}$.*

A continuación transcribiremos algunos resultados relacionados con las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo de representación finito que nos serán de utilidad.

Proposición 5.2.10 *Sea $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ un álgebra inclinada de conglomerado, \mathcal{C} la categoría de conglomerado del álgebra hereditaria H y T un objeto inclinante en \mathcal{C} . Entonces Γ es de tipo de representación finito si y sólo si H es de tipo de representación finito. En este caso, el número de módulos indescomponibles en $\text{mod } H$ y en $\text{mod } \Gamma$ coinciden.*

Proposición 5.2.11 *Si $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ es un álgebra inclinada de conglomerado conexa y de tipo de representación finito, entonces existe un único diagrama Dynkin Δ , tal que Γ es inclinada de conglomerado de tipo Δ .*

El siguiente corolario es esencial para el resultado principal de este capítulo.

Corolario 5.2.12 *Sea Δ un carcaj conexo y acíclico. La clase de carcajes que se obtienen de Δ por sucesivas mutaciones coincide con la clase de carcajes de las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo Δ . Más aún, si Δ es de tipo Dynkin, existe una cantidad finita de dichas clases.*

Recordemos que dada un álgebra A , el top de un A -módulo M , $\text{top } M$, se define como el cociente del módulo sobre su radical, es decir, $\text{top } M = M/\text{rad } M$. En el caso particular de que M es un A -módulo proyectivo indescomponible, $\text{top } M$ es un módulo simple.

Notación: Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H . Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ las álgebras inclinadas de conglomerado, donde \bar{T} es un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* , $T = \bar{T} \oplus M$ y $T' = \bar{T} \oplus M^*$.

Si consideramos Q_{Γ} y $Q_{\Gamma'}$ los carcajes ordinarios de las álgebras Γ y Γ' , respectivamente, vamos a denotar por a a los vértices de Q_{Γ} y $Q_{\Gamma'}$ provenientes de

un sumando indescomponible T_a de \bar{T} . Al vértice de Q_Γ proveniente del sumando M de T lo denotaremos por x , y al vértice de $Q_{\Gamma'}$ proveniente del sumando M^* de T' lo denotaremos por y .

Proposición 5.2.13 *Sea \bar{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ con $T = \bar{T} \oplus M$ y $T' = \bar{T} \oplus M^*$. Entonces,*

- (a) *El Γ -módulo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau M^*)$ es simple. Más aún, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau M^*) \simeq \text{top } P_x$, donde $P_x = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$.*
- (b) *El Γ' -módulo $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', \tau M)$ es simple. Más aún, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', \tau M) \simeq \text{top } P'_y$, donde $P'_y = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', M^*)$.*

Como vimos en el Teorema 5.2.4, el functor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)$ induce una equivalencia entre las categorías $\mathcal{C}/\text{add}(\tau T)$ y $\text{mod } \Gamma$. Más aún, en la proposición anterior se ve que dicha equivalencia transforma a τM^* en S_x . Análogamente, el functor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', -)$ induce una equivalencia entre las categorías $\mathcal{C}/\text{add}(\tau T')$ y $\text{mod } \Gamma'$, que transforma a τM en S'_y . Si ahora consideramos $\tilde{T} = \bar{T} \oplus M \oplus M^*$, obtenemos equivalencias entre $\mathcal{C}/\text{add}(\tilde{T})$ y $\text{mod } \Gamma/\text{add } S_x$, y análogamente, entre $\mathcal{C}/\text{add}(\tilde{T})$ y $\text{mod } \Gamma'/\text{add } S'_y$.

En consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.2.14 *Sea \bar{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ con $T = \bar{T} \oplus M$ y $T' = \bar{T} \oplus M^*$. Sean S_x y S'_y los simples correspondientes a $\text{top}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M))$ y $\text{top}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', M^*))$, respectivamente. Entonces existe una equivalencia*

$$F : \text{mod } \Gamma/\text{add } S_x \rightarrow \text{mod } \Gamma'/\text{add } S'_y.$$

Observación 5.2.15 Consideremos las álgebras inclinadas de conglomerado Γ y Γ' como en el teorema anterior. Sea T_a un sumando directo indescomponible de \bar{T} , y denotamos por $P_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T_a)$ e $I_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau^2 T_a)$ a los Γ -módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles correspondientes al vértice $a \in Q_\Gamma$, respectivamente. Denotamos por $P'_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', T_a)$ e $I'_a = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', \tau^2 T_a)$ a los Γ' -módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles correspondientes al vértice $a \in Q_{\Gamma'}$, respectivamente.

Por la equivalencia presentada en el Teorema 5.2.14, es claro que $F(P_a) = P'_a$ y $F(I_a) = I'_a$, ya que provienen del mismo objeto indescomponible en la categoría de conglomerado \mathcal{C} .

Ya estamos en condiciones de presentar los resultados principales de esta sección.

Proposición 5.2.16 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H y \bar{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ con $T = \bar{T} \oplus M$ y $T' = \bar{T} \oplus M^*$. Sean S_x y S'_y los simples top de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$ y de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', M^*)$, respectivamente y $F : \text{mod } \Gamma / \text{add } S_x \rightarrow \text{mod } \Gamma' / \text{add } S'_y$ la equivalencia del Teorema 5.2.14.*

Sea $f : X \rightarrow Y$, con $X, Y \in \text{ind } \Gamma$. Entonces f es un morfismo irreducible en $\text{mod } \Gamma$ que no factoriza por $\text{add } S_M$ si y sólo si $F(f)$ es un morfismo irreducible en $\text{mod } \Gamma'$ que no factoriza por $\text{add } S_{M^}$.*

Demostración: Sean Γ y Γ' las álgebras inclinadas de conglomerado definidas como en el enunciado. Sean X e Y módulos indescomponibles de $\text{mod } \Gamma$ y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo no nulo que no factoriza por $\text{add } S_M$. Por la equivalencia dada en el Teorema 5.2.14, se tiene que $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ es no nulo y no factoriza por $\text{add } S_{M^*}$.

Probemos que si f es irreducible, entonces $F(f)$ también lo es. Para ello debemos ver que $F(f)$ no es una sección ni una retracción, y si existen un módulo $\tilde{Z} \in \text{mod } \Gamma'$ y morfismos $\tilde{g} : F(X) \rightarrow \tilde{Z}$ y $\tilde{h} : \tilde{Z} \rightarrow F(Y)$ tales que $F(f) = \tilde{h}\tilde{g}$, entonces \tilde{g} es una sección o bien \tilde{h} es una retracción. En efecto, supongamos que $F(f)$ es una sección, entonces existe un morfismo $\tilde{f}' : F(Y) \rightarrow F(X)$ tal que $\tilde{f}'F(f) = 1_{F(X)}$. Más aún, \tilde{f}' no factoriza por $\text{add } S_{M^*}$ pues, si lo hiciera, $F(f)$ también factorizaría por $\text{add } S_{M^*}$ ya que $F(f) = F(f)1_{F(X)} = F(f)\tilde{f}'F(f)$. En consecuencia, existe un morfismo $f' : Y \rightarrow X$ tal que $\tilde{f}' = F(f')$. Por lo tanto

$$F(1_X) = 1_{F(X)} = F(f')F(f) = F(f'f)$$

y debido a que F es un funtor fiel, obtenemos que $1_X = f'f$ y en consecuencia f es una sección, lo que contradice que f es un morfismo irreducible. Por lo tanto $F(f)$ no es una sección. De manera análoga se prueba que $F(f)$ no es una retracción.

Ahora asumamos que existe un módulo $\tilde{Z} \in \text{mod } \Gamma'$ y morfismos $\tilde{g} : F(X) \rightarrow \tilde{Z}$ y $\tilde{h} : \tilde{Z} \rightarrow F(Y)$ tales que $F(f) = \tilde{h}\tilde{g}$. Como $F(f)$ no factoriza por $\text{add } S_{M^*}$, tampoco lo hacen los morfismos \tilde{g} y \tilde{h} . Por el Teorema 5.2.14, existen $Z \in \text{mod } \Gamma$ y morfismos $g : X \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow Y$ que no factorizan por $\text{add } S_M$ tales que $\tilde{g} = F(g)$ y $\tilde{h} = F(h)$. Por lo tanto $F(f) = F(h)F(g) = F(hg)$, y por ser F un funtor fiel, tenemos que $f = hg$. Como f es un morfismo irreducible, entonces g es una sección o bien h es una retracción, y en consecuencia $\tilde{g} = F(g)$ es una sección o $\tilde{h} = F(h)$ es una retracción, resultando así $F(f)$ un morfismo irreducible.

Considerando F' la equivalencia cuasi-inversa de F , la recíproca se prueba de manera análoga. \square

Nuestro propósito es calcular el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito. Por el Teorema 1.7.16 sabemos que este índice está dado en función de los grados de ciertos morfismos irreducibles, o equivalentemente, está dado en función de la máxima potencia del radical a la cuál pertenecen ciertos morfismos relacionados. Recordemos la Notación 1.7.13 y adaptémosla a este contexto.

Notación 5.2.17 Sea $A \simeq kQ/I$ un álgebra de tipo de representación finito y sea u un vértice de Q_A . Consideremos los morfismos $\iota_u : \text{rad}(P_u) \rightarrow P_u$ y $\theta_u : I_u \rightarrow I_u/\text{soc}(I_u)$, donde P_u , S_u e I_u denotan los módulos proyectivo, simple e inyectivo correspondiente al vértice u , respectivamente. En caso en que $P_u \neq S_u$ entonces ι_u es un morfismo irreducible. Dualmente, si $I_u \neq S_u$ entonces θ_u es un morfismo irreducible. Definimos los siguientes valores:

$$n_u = \begin{cases} 0 & \text{si } S_u = P_u \\ d_r(\iota_u) & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad m_u = \begin{cases} 0 & \text{si } S_u = I_u \\ d_l(\theta_u) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Definimos $r_u = m_u + n_u$. Finalmente, el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$, denotado por r_A , se define como $r_A = \max\{r_u, \text{ con } u \in (Q_A)_0\} + 1$.

Para una mejor comprensión de los siguientes resultados, al considerar dos álgebras $\Gamma \simeq kQ_\Gamma/I_\Gamma$ y $\Gamma' \simeq kQ_{\Gamma'}/I_{\Gamma'}$, vamos a denotar los valores recién definidos por $r_u = m_u + n_u$, para $u \in Q_\Gamma$, y por $r'_v = m'_v + n'_v$ para $v \in Q_{\Gamma'}$.

Recordemos que los morfismos de P_a a I_a que factorizan por S_a pertenecen a $\mathfrak{R}^{r_a}(P_a, I_a)$, pero no pertenecen a la siguiente potencia del radical (ver el Lema 1.7.14). Más aún, por la maximalidad de r_a , si existe un morfismo $f \in \mathfrak{R}^k(P_a, I_a)$, entonces $k \leq r_a$.

Vamos a probar que el índice de nilpotencia es invariante bajo mutaciones.

Siguiendo la notación presentada anteriormente, denotamos por a al vértice de Q_Γ y $Q_{\Gamma'}$ proveniente de T_a , un sumando indescomponible de \bar{T} ; y denotamos por x (y , respectivamente) al vértice de Q_Γ ($Q_{\Gamma'}$, respectivamente) provenientes del sumandos M de T (M^* de T' , respectivamente).

Los siguientes lemas son necesarios para el próximo teorema.

Lema 5.2.18 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H de tipo de representación finito y sea \bar{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C}*

con completaciones M y M^* . Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(\overline{T} \oplus M)^{op} \simeq kQ_{\Gamma}/I_{\Gamma}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(\overline{T} \oplus M^*)^{op} \simeq kQ_{\Gamma'}/I_{\Gamma'}$ las álgebras inclinadas de conglomerado, respectivamente. Entonces, para todo sumando indescomponible T_a de \overline{T} , se satisface que $r_a = r'_a$.

Demostración: Sean H un álgebra hereditaria de tipo de representación finito y \mathcal{C} su categoría de conglomerado. Consideremos \overline{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Sean $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ álgebras inclinadas de conglomerado, donde $T = \overline{T} \oplus M$ y $T' = \overline{T} \oplus M^*$ son objetos inclinantes en \mathcal{C} .

Sean T_a un sumando indescomponible de \overline{T} . Consideremos P_a, S_a e I_a los Γ -módulos proyectivo, simple e inyectivo correspondientes al vértice $a \in Q_{\Gamma}$, respectivamente; y P'_a, S'_a e I'_a a los Γ' -módulos proyectivo, simple e inyectivo correspondientes al vértice $a \in Q_{\Gamma'}$, respectivamente. Sean r_a y r'_a los valores definidos en la Notación 5.2.17. Probemos que $r_a = r'_a$.

Sea $f_a : P_a \rightarrow I_a$ un morfismo no nulo de $\text{mod } \Gamma$ que factoriza por S_a . Luego, por el Lema 1.7.14 sabemos que $f_a \in \mathfrak{R}_{\Gamma}^{r_a}(P_a, I_a) \setminus \mathfrak{R}_{\Gamma}^{r_a+1}(P_a, I_a)$. Por lo tanto, en virtud de la Proposición 1.3.9 podemos escribir al morfismo f_a como $f_a = \sum_{i=1}^s g_i f_i$, para algún $s \geq 1$, donde cada $f_i \in \mathfrak{R}_{\Gamma}(P_a, X_i)$, con $X_i \in \text{ind } \Gamma$, y cada g_i es una suma finita de composiciones de $r_a - 1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles.

Sea S_x el Γ -módulo simple que es el top del Γ -módulo proyectivo indescomponible $P_x = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$. Como $S_a \neq S_x$ afirmamos que ni los morfismos f_i ni los morfismos g_i factorizan por $\text{add } S_x$, pues $\text{Hom}_{\Gamma}(P_a, S_x) = 0 = \text{Hom}_{\Gamma}(S_x, I_a)$. Por lo tanto, por la equivalencia $F : \text{mod } \Gamma / \text{add } S_x \rightarrow \text{mod } \Gamma' / \text{add } S_y$ dada en el Teorema 5.2.14, resulta que $F(f_a) = \sum_{i=1}^s F(g_i)F(f_i)$ es un morfismo no nulo, donde cada $F(f_i) \in \mathfrak{R}_{\Gamma'}(F(P_a), F(X_i))$. Más aún, por la Proposición 5.2.16, cada $F(g_i)$ es una suma finita de composiciones de $r_a - 1$ morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles. Luego, $F(f_a) \in \mathfrak{R}_{\Gamma'}^{r_a}(F(P_a), F(I_a))$. Por la Observación 5.2.15, sabemos que $F(f_a) \in \mathfrak{R}_{\Gamma'}^{r'_a}(P'_a, I'_a)$. Por lo tanto, en virtud de la Observación 1.7.15 tenemos que $r_a \leq r'_a$.

De manera análoga podemos probar que $r'_a \leq r_a$ utilizando la equivalencia cuasi-inversa de F , concluyendo así que $r_a = r'_a$. \square

Lema 5.2.19 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H de tipo de representación finito y sea \overline{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Consideremos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op} \simeq kQ_{\Gamma}/I_{\Gamma}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op} \simeq kQ_{\Gamma'}/I_{\Gamma'}$ las álgebras inclinadas de conglomerado con $T = \overline{T} \oplus M$ y $T' = \overline{T} \oplus M^*$. Sean x e y los vértices de Q_{Γ} y $Q_{\Gamma'}$, respectivamente provenientes de los sumandos M de T y M^* de T' , respectivamente. Entonces $r_x = r'_y$.*

Demostración: Sean $\Gamma \simeq kQ_\Gamma/I_\Gamma$ y $\Gamma' \simeq kQ_{\Gamma'}/I_{\Gamma'}$ las álgebras inclinadas de conglomerado definidas como en el enunciado. Consideremos x el vértice de Q_Γ proveniente del sumando M de T e y el vértice de $Q_{\Gamma'}$ proveniente del sumando M^* de T' . Vamos a probar que $r_x = r'_y$. Para ello veamos que $n_x = m'_y$ y que $m_x = n'_y$, donde $r_x = n_x + m_x$ y $r'_y = n'_y + m'_y$ son los valores definidos en la Notación 5.2.17.

Consideremos $f_x : P_x \rightarrow S_x$ un morfismo no nulo. Entonces, por el Lema 1.7.14 sabemos que $f_x \in \mathfrak{R}^{n_x}(P_x, S_x) \setminus \mathfrak{R}^{n_x+1}(P_x, S_x)$. Por lo tanto, por la Proposición 1.3.9 sabemos que existe un camino en $\text{mod } \Gamma$ de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles

$$\varphi_x : P_x \xrightarrow{h_1} X_1 \xrightarrow{h_2} X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_{n_x-1} \xrightarrow{h_{n_x}} S_x.$$

de longitud n_x . Por la equivalencia definida en el Teorema 5.2.4, éste es inducido por un camino no nulo de morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles en la categoría de conglomerado, que no factoriza por $\text{add } \tau T$

$$\tilde{\varphi}_x : M \xrightarrow{\tilde{h}_1} \tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{h}_2} \tilde{X}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{X}_{n_x-1} \xrightarrow{\tilde{h}_{n_x}} \tau M^* \quad (5.1)$$

y también de longitud n_x , donde $P_x = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, M)$, $S_x = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau M^*)$ y cada $X_i = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tilde{X}_i)$, para $1 \leq i \leq n_x - 1$.

Por otra parte, si consideramos $g'_y : S'_y \rightarrow I'_y$ un morfismo no nulo en $\text{mod } \Gamma'$, por el Lema 1.7.14 tenemos que $g'_y \in \mathfrak{R}^{m'_y}(S'_y, I'_y) \setminus \mathfrak{R}^{m'_y+1}(S'_y, I'_y)$. Por lo tanto, con un análisis análogo al anterior, existe ψ'_y un camino no nulo de m'_y morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de S'_y a I'_y en $\text{mod } \Gamma'$. Más aún, este camino es inducido por un camino no nulo $\tilde{\psi}'_y$, de τM a $\tau^2 M^*$, de m'_y morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles de la categoría de conglomerado \mathcal{C} , que no factoriza por $\text{add } T'$, como sigue:

$$\tilde{\psi}'_y : \tau M \rightarrow \tilde{Y}'_1 \rightarrow \tilde{Y}'_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{Y}'_{m'_y-1} \rightarrow \tau^2 M^* \quad (5.2)$$

ya que $S'_y = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', \tau M)$ e $I'_y = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T', \tau^2 M^*)$.

Además, tenemos que $0 \neq \tilde{\varphi}_x \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \tau M^*)$, donde $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \tau M^*) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}M, \tau M^*) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \tau M^*)$; y también $0 \neq \tilde{\psi}'_y \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, \tau M^*)$, donde $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tau M, \tau^2 M^*) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}\tau M, \tau^2 M^*) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau M, \tau^2 M^*)$. En ambos casos sólo uno de los sumandos es no nulo debido a que H es de tipo de representación finito, (ver la Observación 5.1.6).

Luego, si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}M, \tau M^*) \neq 0$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}\tau M, \tau^2 M^*) \neq 0$ ya que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}M, \tau M^*) &= \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau M[-1], \tau M^*) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau^2 M[-1], \tau^2 M^*) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}\tau M, \tau^2 M^*). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, el camino (5.1) es inducido por un camino de $\tau M[-1]$ a τM^* de morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles en \mathcal{D} de longitud n_x , y el camino (5.2) es inducido por un camino de $\tau^2 M[-1]$ a $\tau^2 M^*$ de morfismos irreducibles entre objetos indescomponibles en \mathcal{D} de longitud m'_y . Más aún, como $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau M[-1], \tau M^*) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\tau^2 M[-1], \tau^2 M^*)$ y $\Gamma(\mathcal{D})$ es un carcaj con longitud, entonces $n_x = m'_y$.

Ahora, si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \tau M^*) \neq 0$, con el mismo argumento, también concluimos que $n_x = m'_y$.

Análogamente, considerando $g_x : S_x \rightarrow I_x$ un morfismo no nulo en $\text{mod } \Gamma$ y $f'_y : P'_y \rightarrow S'_y$ un morfismo no nulo en $\text{mod } \Gamma'$, con un análisis análogo al anterior podemos concluir que $m_x = n'_y$. Por lo tanto, $r_x = m_x + n_x = n'_y + m'_y = r'_y$. \square

Teorema 5.2.20 *Sea \mathcal{C} la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H de tipo de representación finito. Sea \bar{T} un objeto inclinante casi completo en \mathcal{C} con completaciones M y M^* . Sean $T = \bar{T} \oplus M$ y $T' = \bar{T} \oplus M^*$ objetos inclinantes en \mathcal{C} y $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\Gamma' = \text{End}_{\mathcal{C}}(T')^{op}$ las álgebras inclinadas de conglomerado, respectivamente.*

Entonces, $r_{\Gamma} = r_{\Gamma'}$, donde r_{Γ} y $r_{\Gamma'}$ denotan los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } \Gamma)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } \Gamma')$, respectivamente.

Demostración: Sean $\Gamma \simeq kQ_{\Gamma}/I_{\Gamma}$ y $\Gamma' \simeq kQ_{\Gamma'}/I_{\Gamma'}$ las álgebras inclinadas de conglomerado definidas en el enunciado. Como H es de tipo de representación finito, entonces Γ y Γ' también lo son. Denotamos por r_{Γ} y $r_{\Gamma'}$ los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } \Gamma)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } \Gamma')$, respectivamente. Vamos a probar que $r_{\Gamma} = r_{\Gamma'}$.

En efecto, sabemos que

$$r_{\Gamma} = \text{máx}\{r_u \mid u \in (Q_{\Gamma})_0\} + 1 = \text{máx}\{r_u \mid T_u \in \text{ind}(\text{add } T)\} + 1, \text{ y}$$

$$r_{\Gamma'} = \text{máx}\{r'_v \mid v \in (Q_{\Gamma'})_0\} + 1 = \text{máx}\{r'_v \mid T_v \in \text{ind}(\text{add } T')\} + 1.$$

Por el Lema 5.2.18, tenemos que $r_a = r'_a$ para todo vértice a de Q_{Γ} y $Q_{\Gamma'}$ proveniente del sumando indescomponible T_a de \bar{T} en \mathcal{C} . Más aún, por el Lema 5.2.19, sabemos que $r_x = r'_y$, donde x denota al vértice de Q_{Γ} proveniente del sumando M de T en \mathcal{C} , e y denota al vértice de $Q_{\Gamma'}$ proveniente del sumando M^* de T' en \mathcal{C} . Por lo tanto, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} r_{\Gamma} &= \text{máx}\{r_u \mid T_u \in \text{ind}(\text{add } T)\} + 1 \\ &= \text{máx}\{r_a \mid T_a \in \text{ind}(\text{add } \bar{T}), r_x\} + 1 \\ &= \text{máx}\{r'_a \mid T_a \in \text{ind}(\text{add } \bar{T}), r'_y\} + 1 \\ &= \text{máx}\{r'_v \mid T_v \in \text{ind}(\text{add } T')\} + 1 \\ &= r_{\Gamma'}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

Probando que $r_\Gamma = r_{\Gamma'}$. \square

Teorema 5.2.21 Sean Δ un carcaj Dynkin y Γ un álgebra inclinada de conglomerado de tipo Δ . Denotamos por r_Γ el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } \Gamma)$, entonces,

- (a) Si $\overline{\Delta} = A_n$, entonces $r_\Gamma = n$ para $n \geq 1$.
- (b) Si $\overline{\Delta} = D_n$, entonces $r_\Gamma = 2n - 3$ para $n \geq 4$.
- (c) Si $\overline{\Delta} = E_6$, entonces $r_\Gamma = 11$.
- (d) Si $\overline{\Delta} = E_7$, entonces $r_\Gamma = 17$.
- (e) Si $\overline{\Delta} = E_8$, entonces $r_\Gamma = 29$.

Demostración: Sea $\Gamma \simeq kQ_\Gamma/I_\Gamma$ un álgebra inclinada de conglomerado de tipo Δ , donde Δ es un carcaj Dynkin y sea H el álgebra hereditaria $H = k\Delta$.

Como H es de tipo de representación finito, por la Proposición 5.2.10, sabemos que Γ también lo es. Sean r_H y r_Γ los índices de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } H)$ y $\mathfrak{R}(\text{mod } \Gamma)$, respectivamente. Afirmamos que $r_\Gamma = r_H$.

En efecto, por el Corolario 5.2.12, podemos transformar el álgebra Γ en el álgebra H , por una secuencia finita de mutaciones del carcaj Q_Γ , y en cada paso, por el Teorema 5.2.20, sabemos que los índices de nilpotencia del radical de la categoría de módulos no varían. Por lo tanto, $r_\Gamma = r_H$ y en virtud del Teorema 4.3.9 tenemos el resultado deseado. \square

A continuación vamos a establecer la relación existente entre la composición de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, y la potencia del radical a la cual pertenece dicha composición. Para ello, probemos primero el siguiente resultado.

Proposición 5.2.22 Sea Γ un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito. Sean M y N en $\text{ind } \Gamma$ tales que $\text{Irr}_\Gamma(M, N) \neq 0$. Entonces $\dim_k(\text{Hom}_\Gamma(M, N)) = 1$. En particular, $\mathfrak{R}_\Gamma^2(M, N) = 0$.

Demostración: Sea Γ un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito. Entonces, $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ donde $\mathcal{C} = \mathcal{D}/F$ es la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria H de tipo de representación finito y T un objeto inclinante de \mathcal{C} .

Como $\text{Irr}_\Gamma(M, N) \neq 0$, entonces existe un morfismo irreducible, digamos $f : M \rightarrow N$. Queremos probar que todos los morfismos $g : M \rightarrow N$ en $\text{mod } \Gamma$ son

k -linealmente dependientes a f . En efecto, supongamos que existe un morfismo no nulo $g : M \rightarrow N$ que es k -linealmente independiente con f . Como Γ es de tipo de representación finito, sabemos que $\dim_k(\text{Irr}_\Gamma(M, N)) = 1$. En consecuencia, g no es un morfismo irreducible, por lo tanto $g \in \mathfrak{R}^2(M, N)$. Más aún, debido a que $\mathfrak{R}^\infty(\text{mod } \Gamma) = 0$, existe un $n \geq 2$ tal que $g \in \mathfrak{R}^n(M, N) \setminus \mathfrak{R}^{n+1}(M, N)$.

Por lo tanto, existen morfismos $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ en la categoría de conglomerado \mathcal{C} que no factorizan por $\text{add}(\tau T)$. Además, estos morfismos son inducidos por morfismos en la categoría derivada. Más aún, como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{M}, \tilde{N}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F^{-1}M, N) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, N)$, y sólo uno de los sumandos es no nulo, podemos deducir la existencia en $\Gamma(\mathcal{D})$ de un morfismo irreducible y de un camino de longitud n , con $n \geq 2$, entre los mismos módulos, contradiciendo que $\Gamma(\mathcal{D})$ es un carcaj con longitud.

Por lo tanto, no existe un morfismo $g : M \rightarrow N$ en $\text{mod } \Gamma$ que sea linealmente independiente con f . Luego $\dim_k(\text{Hom}_\Gamma(M, N)) = 1$. Más aún, como f es irreducible, deducimos que $\mathfrak{R}_\Gamma^2(M, N) = 0$. \square

Teorema 5.2.23 *Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito. Consideremos $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles con $X_i \in \text{ind } A$ para $1 \leq i \leq m$. Entonces $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{m+1}(X_1, X_{m+1})$ si y sólo si $h_m \dots h_1 = 0$.*

Demostración: Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo de representación finito. Consideremos X_1, \dots, X_{m+1} módulos indescomponibles de $\text{mod } A$ y $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles, para $1 \leq i \leq m$.

Si $h_m \dots h_1 = 0$, es claro que $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{m+1}(X_1, X_{m+1})$.

Recíprocamente, supongamos que $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{m+1}(X_1, X_{m+1})$ y $h_m \dots h_1 \neq 0$. Entonces, por el Teorema 1.7.19 existen morfismos irreducibles $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$, para $1 \leq i \leq m$ tales que $f_m \dots f_1 = 0$. Por la Proposición 5.2.22, sabemos que para cada i se satisface que $\dim_k(\text{Hom}_A(X_i, X_{i+1})) = 1$. Por lo tanto, f_i y h_i son k -linealmente dependientes, es decir, para cada i podemos escribir a h_i como $h_i = \lambda_i f_i$, donde λ_i es un elemento no nulo de k . En consecuencia, $h_m \dots h_1 = \lambda f_m \dots f_1 = 0$, contradiciendo lo que habíamos asumido. Por lo tanto, $h_m \dots h_1 = 0$ demostrando así lo deseado. \square

5.3. Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n y de tipo D_n .

En [15], P. Caldero, F. Chapoton y R. Schiffler presentaron a la categoría de conglomerado de las álgebras hereditarias de tipo A_n de una manera geométrica.

Más precisamente, teniendo en cuenta las diagonales de un polígono de $n+3$ vértices. Los morfismos entre las diagonales son realizados geoméricamente usando movimientos de pivoteos elementales y relaciones de malla. Más tarde, en [38], R. Schifler exhibió a la categoría de conglomerado de las álgebras hereditarias de tipo D_n también geoméricamente, reemplazando el polígono de $n+3$ vértices por un polígono de n vértices con una punción en su centro. En este caso, en vez de tener en cuenta las diagonales del polígono, el autor considera las clases de homotopía entre dos vértices. Los morfismos también son definidos usando movimientos de pivoteos elementales y relaciones de malla, generalizando el concepto introducido en [15].

Las álgebras inclinadas de conglomerado también se definieron de manera geométrica. Las de tipo A_n son aquellas que se obtienen desde una triangulación arbitraria de un polígono de $n+3$ vértices. La categoría de módulos está completamente determinada por la triangulación y, más aún, los objetos inclinantes de la categoría de conglomerado están en correspondencia con las triangulaciones del polígono. Para el caso D_n se tiene un resultado similar. Las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo D_n son aquellas que se obtienen desde una triangulación arbitraria de un polígono de n vértices con una punción. Como en el caso A_n , la categoría de módulos también está completamente determinada por la triangulación y los objetos inclinantes están en correspondencia con las triangulaciones del polígono.

El objetivo de esta sección es presentar una demostración distinta de la dada en el Teorema 5.2.21 para determinar el índice de nilpotencia de las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n y D_n , utilizando las triangulaciones mencionadas.

5.3.1. Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n .

Vamos a comenzar esta sección presentando la realización geométrica de la categoría de conglomerado de tipo A_n .

Fijamos un entero positivo n y consideramos un polígono (regular) de $n+3$ vértices. Una **diagonal** es un segmento en el interior del polígono cuyos extremos son vértices no adyacentes del polígono. Siguiendo la notación de [15], las diagonales se denominan **raíces** y las denotamos con letras griegas. En algunos casos, denotaremos a una raíz α por $M_{a,b}$, donde a y b son los vértices del polígono que representan a los extremos de la diagonal α .

Sean a y b vértices del polígono. Decimos que a y b son **vértices vecinos** si el segmento \overline{ab} es una arista del polígono. En particular, vamos a diferenciar si a es **vecino antihorario** de b o si a es **vecino horario** de b , dependiendo de las

posiciones relativas de los vértices en el polígono.

Una **triangulación** T del polígono es un conjunto maximal de diagonales que no se intersecan. Dicha triangulación divide al polígono en **triángulos**. A las diagonales de la triangulación T las llamamos **raíces negativas**, mientras que las otras diagonales las denominamos **raíces positivas**. Existen n raíces negativas, a las cuales las denotamos por $-\alpha_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Dada una raíz positiva α , el **soporte de** α , $\text{Supp } \alpha$, es el conjunto de raíces negativas que cruzan a α .

Un **movimiento de pivoteo elemental** de una raíz α a una raíz α' está definido si las correspondientes diagonales comparten un vértice, denominado **pivot**. En tal caso, dicho movimiento se define como la rotación sobre el pivot en sentido antihorario desde α hasta α' . A un movimiento de pivoteo elemental con pivot en el vértice a , lo denotamos por P^a . Un **camino de pivoteos** entre dos raíces α y α' es una secuencia de movimientos de pivoteos elementales de α a α' . Sea P un camino de pivoteos, de **longitud de** P , $\ell(P)$, es la cantidad de movimientos de pivoteos elementales que tiene la secuencia.

Sea n un entero positivo y consideremos un polígono de $n + 3$ vértices. Denotamos por \mathcal{C} a la categoría cuyos objetos indescomponibles son las diagonales del polígono, es decir, las raíces (negativas y positivas), y los morfismos entre dos raíces están generados por caminos de pivoteos, con la siguiente relación de malla:

- (i) Si existe un camino de pivoteos desde $\alpha = M_{a,b}$ hasta $\alpha' = M_{c,d}$ tal que $P^d P^a(\alpha) = \alpha'$, entonces $P^d P^a(\alpha) = P^c P^b(\alpha)$.
- (ii) Si en algún paso de la secuencia de pivoteo, una diagonal se transforma en una arista del polígono, entonces la relación de malla es cero.

La siguiente figura ilustra la condición (i).



En [15], los autores probaron que la categoría \mathcal{C} es equivalente a la categoría de conglomerado de tipo A_n . Más aún, también probaron que los objetos inclinantes están en correspondencia con las triangulaciones T del polígono.

A continuación definiremos un carcaj proveniente de una triangulación T de un polígono de $n + 3$ vértices.

Sea T una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices. Definimos el carcaj Q_T como sigue:

- los vértices de Q_T están en biyección con las raíces negativas de T . Podemos considerar a los vértices como el punto medio de cada diagonal de T .
- Existe una arista entre dos vértices de Q_T si las diagonales correspondientes son lados de un mismo triángulo en T . Una arista $i - j$ está orientada como la flecha $i \rightarrow j$ en Q_T si existe un movimiento de pivoteo de $-\alpha_j$ a $-\alpha_i$.

Siguiendo la notación de [15], denotamos por $\text{mod } Q_T$ a la categoría de módulos sobre el carcaj Q_T con la siguiente relación: en todo tres-ciclo, la composición de dos flechas consecutivas es cero.

El siguiente resultado es esencial para nuestro trabajo.

Teorema 5.3.1 [15] *Las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo A_n son precisamente aquellas que se obtienen de una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices.*

A continuación vamos a introducir a los objetos de $\text{mod } Q_T$, indexados por las raíces positivas. Sea α una raíz positiva, el módulo $M(\alpha) = (M^\alpha, f^\alpha) = (M_i^\alpha, f_{i,j}^\alpha)$ está dado por la siguiente representación:

$$M_i^\alpha = \begin{cases} k & \text{si } -\alpha_i \in \text{Supp } \alpha, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad f_{i,j}^\alpha = \begin{cases} \text{id}_k & \text{si } M_i^\alpha = k = M_j^\alpha \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.5)$$

Observación 5.3.2 El módulo simple correspondiente al vértice j en Q_T está dado por $M(\alpha_j)$, donde α_j es la raíz positiva que interseca únicamente a $-\alpha_j$ en T , es decir, $\text{Supp } \alpha_j = \{-\alpha_j\}$.

A continuación recordaremos la definición de la siguiente categoría, introducida en [15].

Sea T una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices. La categoría k -lineal \mathcal{C}_T se define como sigue:

- Los objetos de \mathcal{C}_T son combinaciones lineales de raíces positivas con escalares positivos.

- Los morfismos entre dos raíces positivas α y α' están generados por movimientos de pivoteos elementales y la siguiente relación de malla.
 - (i) Si existe un camino de pivoteos desde $\alpha = M_{a,b}$ hasta $\alpha' = M_{c,d}$ tal que $P^d P^a(\alpha) = \alpha'$, entonces $P^d P^a(\alpha) = P^c P^b(\alpha)$.
 - (ii) Si en algún paso de la secuencia de pivoteo, una diagonal se transforma en una raíz negativa o en una arista del polígono, entonces la relación de malla es cero.

El espacio de morfismos entre dos objetos de \mathcal{C}_T se puede extender por sumas directas.

Vamos a definir Θ un funtor aditivo entre las categorías \mathcal{C}_T y $\text{mod } Q_T$.

Dada α una raíz positiva, definimos $\Theta(\alpha) = M(\alpha)$ dada por la representación presentada en (5.5). Definimos Θ sobre cualquier objeto de \mathcal{C}_T extendiéndolo por sumas directas.

Ahora, vamos a definir el funtor Θ sobre los morfismos. Por aditividad, es suficiente definirlo sobre morfismos entre raíces positivas. Consideremos primero $P : \alpha \rightarrow \alpha'$ un movimiento de pivoteo elemental. Entonces $\Theta(P) : M(\alpha) \rightarrow M(\alpha')$, se define como id_k cuando sea posible, y 0 en caso contrario. Se puede generalizar para cualquier morfismo entre dos raíces positivas. Así definido, en [15] se prueba que se satisface la relación de malla.

Teorema 5.3.3 [15, Teorema 4.4] *Sea T una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices. Entonces el funtor definido anteriormente*

$$\Theta : \mathcal{C}_T \rightarrow \text{mod } Q_T$$

es una equivalencia de categorías.

Observación 5.3.4 Por el Teorema 5.3.1 y el Teorema 5.3.3, estudiar la categoría de módulos de un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n , es equivalente a estudiar la categoría \mathcal{C}_T , donde T es una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices, asociada a dicha álgebra.

En [15, Corolario 4.7] se enuncia que existe una biyección entre las raíces positivas y los módulos indescomponibles de $\text{mod } Q_T$. Más aún, los factores de composición de un módulo M están dados por el soporte de la correspondiente raíz positiva dada por dicha biyección.

A continuación presentaremos algunas descripciones de la categoría \mathcal{C}_T , teniendo en cuenta la equivalencia de categorías definida anteriormente. Para ello recordemos la siguiente notación dada en [15].

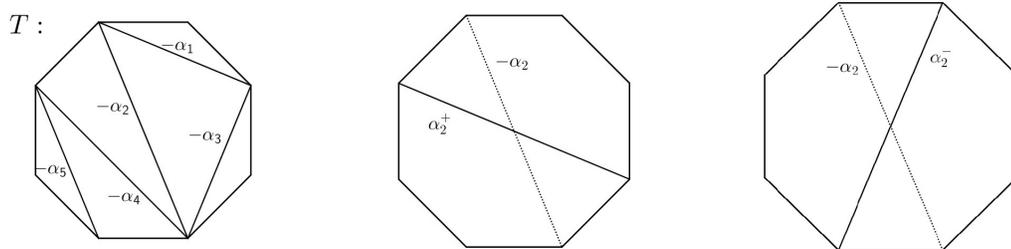
Sea $\alpha = M_{a,b}$ una diagonal del polígono. Definimos $r^+(\alpha) = M_{c,d}$ y $r^-(\alpha) = M_{e,f}$, donde los vértices c y d (e y f) son los vecinos antihorario (horario) de a y b , respectivamente.

Teorema 5.3.5 Sean T una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices y \mathcal{C}_T la correspondiente categoría. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados.

- (i) Los morfismos irreducibles en \mathcal{C}_T son sumas directas de morfismos dados por los movimientos de pivoteos elementales.
- (ii) La relación de malla de \mathcal{C}_T es la relación de malla del carcaj de Auslander-Reiten de \mathcal{C}_T .
- (iii) Sea α una raíz positiva de \mathcal{C}_T . Entonces $\tau\alpha = r^-(\alpha)$, donde τ denota al trasladado de Auslander-Reiten.
- (iv) Los objetos proyectivos indescomponibles de \mathcal{C}_T están dados por $r^+(T)$.
- (v) Los objetos inyectivos indescomponibles de \mathcal{C}_T están dados por $r^-(T)$.

Notación: Sean T una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices y \mathcal{C}_T la correspondiente categoría. Consideremos $-\alpha_j$ una raíz negativa. Vamos a denotar por α_j^+ y α_j^- al objeto proyectivo e inyectivo indescomponible correspondiente a la raíz $-\alpha_j$, respectivamente, es decir, $\alpha_j^+ = r^+(-\alpha_j)$ y $\alpha_j^- = r^-(-\alpha_j)$. Es claro que, $M(\alpha_j^+) = P_j$ y $M(\alpha_j^-) = I_j$, donde P_j e I_j son los módulos proyectivo e inyectivo indescomponibles en $\text{mod } Q_T$ correspondiente al vértice $j \in Q_T$, respectivamente.

La siguiente figura muestra, para una triangulación particular T , el objeto proyectivo P_2 y el objeto inyectivo I_2 en \mathcal{C}_T , correspondientes a la raíz negativa $-\alpha_2$.



Dados dos módulos $M(\alpha)$ y $M(\alpha')$ de $\text{mod } Q_T$, en [15, Lemma 3.4] se prueba que $\dim_k(\text{Hom}_{\text{mod } Q_T}(M(\alpha), M(\alpha'))) \leq 1$. Por consiguiente, dados A un álgebra de conglomerado de tipo A_n y $M, N \in \text{mod } A$, tenemos que $\dim_k(\text{Hom}_A(M, N)) \leq 1$.

Como una consecuencia inmediata obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3.6 *Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n . Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Para cada $Z \in \text{ind } A$ tenemos que $\mathfrak{R}_A(\text{End}_A(Z)) = 0$.*

(b) *Sean $M, N \in \text{ind } A$ tales que $\text{Irr}_A(M, N) \neq 0$, entonces $\mathfrak{R}^2(M, N) = 0$.*

Demostración: (a) Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n y Z un A -módulo indescomponible. Como $\text{Hom}_A(Z, Z) \neq 0$, entonces $\text{Hom}_A(Z, Z)$ tiene dimensión uno. Por lo tanto todo morfismo $f : Z \rightarrow Z$ es un isomorfismo, concluyendo así que $\mathfrak{R}_A(\text{End}_A(Z)) = 0$.

(b) Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo irreducible entre A -módulos indescomponibles. Supongamos que $\mathfrak{R}_A^2(M, N) \neq 0$. Entonces existe $g : M \rightarrow N$ un morfismo no nulo, tal que $g \in \mathfrak{R}_A^2(M, N)$. Como $\dim_k(\text{Hom}_A(M, N)) = 1$, podemos escribir a f como $f = \lambda g$, donde λ es un elemento inversible de k . Por lo tanto $f \in \mathfrak{R}_A^2(M, N)$, contradiciendo que f es un morfismo irreducible. \square

Estamos en condiciones de presentar el siguiente resultado, que es esencial para el teorema principal de la sección.

Teorema 5.3.7 *Sea T una triangulación de un polígono con $n+3$ vértices y consideremos $-\alpha_j$ una raíz negativa. Sean α_j^+ y α_j^- los objetos proyectivo e inyectivo correspondientes a $-\alpha_j$, respectivamente. Entonces todos los caminos de pivoteos $\varphi_j : \alpha_j^+ \rightsquigarrow \alpha_j^-$ tienen longitud $n - 1$.*

Demostración: Sea T una triangulación y consideremos $-\alpha_j = M_{a,b}$ una raíz negativa. Sean α_j^+ e α_j^- los objetos proyectivo e inyectivo de \mathcal{C}_T correspondientes a $-\alpha_j$, respectivamente. Vamos a denotar a dichos objetos en función a sus extremos en el polígono, es decir, $\alpha_j^+ = M_{p_1, p_2}$ y $\alpha_j^- = M_{q_1, q_2}$.

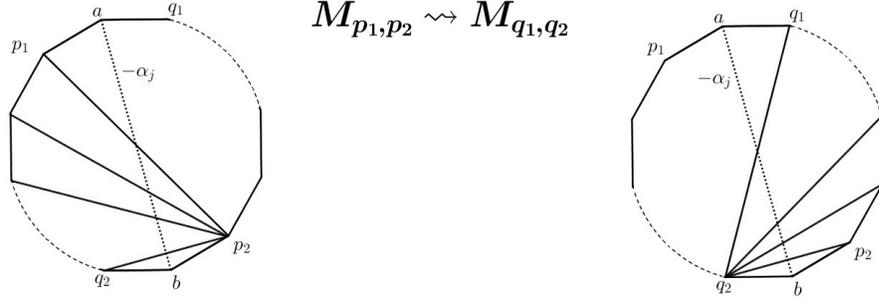
Consideremos $P_j = M(\alpha_j^+)$ e $I_j = M(\alpha_j^-)$ los módulos proyectivo e inyectivo de $\text{mod } Q_T$ correspondientes al vértice j , respectivamente. Sabemos que $\text{Hom}_{\text{mod } Q_T}(P_j, I_j) \neq 0$. En consecuencia, por el Teorema 5.3.3 tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-) \neq 0$. Por lo tanto existe un camino de pivoteos

$$\alpha_j^+ \xrightarrow{P^1} \alpha^1 \xrightarrow{P^2} \alpha^2 \xrightarrow{P^3} \dots \longrightarrow \alpha^{m-1} \xrightarrow{P^m} \alpha_j^-.$$

donde cada α^i son raíces positivas y cada P^k son movimientos de pivoteos elementales, para $1 \leq i \leq m - 1$ y $1 \leq k \leq m$. Queremos probar que $m = n - 1$.

Sin pérdida de generalidad (por la relación de malla) podemos asumir que los m_1 primeros movimientos P^1, \dots, P^{m_1} tienen de pivot el vértice p_2 y transforman la raíz $\alpha_j^+ = M_{p_1, p_2}$ en la raíz M_{q_1, p_2} , y que los siguientes $m - m_1$ movimientos

$P^{m_{j_1}+1}, \dots, P^{m_j}$ tienen de pivot al vértice q_1 y transforman la raíz M_{q_1, p_2} en la raíz $\alpha_j = M_{q_1, q_2}$, como ilustra la siguiente figura.



Podemos notar que por la posición relativa en el polígono de los vértices mencionados, todas las diagonales de este camino son raíces positivas, ya que intersecan a la raíz negativa $-\alpha_j$.

Ahora, etiquetemos a los vértices del polígono de la siguiente manera: denotamos por 1 al vecino antihorario del vértice p_1 , y continuamos enumerando el resto de los vértices en sentido antihorario. En consecuencia, el vértice p_1 queda etiquetado por $n + 3$ y el vértice q_1 queda etiquetado por $n + 1$. Más aún, los objetos proyectivo e inyectivo correspondientes de $-\alpha_j$ quedan etiquetados como

$$\begin{aligned}\alpha_j^+ &= M_{(n+3), (m_1+2)}, \\ \alpha_j^- &= M_{(m_1), (m+2)},\end{aligned}$$

Por lo tanto, por las etiquetas del vértice q_1 tenemos que $n + 1 = m + 2$, y en consecuencia $m = n - 1$.

En conclusión, dada una raíz negativa $-\alpha_j$, existe un camino de pivoteos no nulo de α_j^+ a α_j^- de longitud $n - 1$. Más aún, dado que $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)) = 1$, cualquier camino de pivoteos no nulo de la forma $\alpha_j^+ \rightsquigarrow \alpha_j^-$ tiene longitud $n - 1$. \square

Teorema 5.3.8 *Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n . Entonces $r_A = n$, donde r_A denota al índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$.*

Demostración: Por la Observación 1.7.18, dada A un álgebra de tipo de representación finito, el índice de nilpotencia del $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ está dado en función del camino de mayor longitud de la forma $P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a$, con $a \in (Q_a)_0$.

Consideremos A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n . Entonces existe T una triangulación de un polígono de $n + 3$ vértices tal que la categoría $\text{mod } Q_T$ es equivalente a la categoría \mathcal{C}_T . Más aún, los módulos proyectivo, simple

e inyectivo indescomponibles P_j , S_j e I_j , correspondientes al vértice $j \in (Q_T)_0$, respectivamente, están dados por las raíces α_j^+ , α_j y α_j^- , donde $-\alpha_j$ es una raíz negativa de T . Por el Teorema 5.3.7, todo camino de pivoteos no nulo de α_j^+ a α_j^- tiene longitud $n - 1$. En consecuencia, todo camino no nulo de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles en mod A de P_j a I_j tiene longitud $n - 1$. En particular aquellos que factorizan por el módulo S_j . Más aún, por la arbitrariedad de la elección del vértice $j \in Q_T$, deducimos que cualquier camino de la forma $P_a \rightsquigarrow S_a \rightsquigarrow I_a$, con $a \in Q_T$, tiene longitud $n - 1$. Por lo tanto, si denotamos por r_A el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$ tenemos que

$$r_A = \max_{j \in (Q_T)_0} \{\ell(P_j \rightsquigarrow S_j \rightsquigarrow I_j)\} + 1 = n - 1 + 1 = n. \square$$

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la composición de morfismos irreducibles y la potencia del radical a la cual pertenece.

Proposición 5.3.9 *Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n . Consideremos $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles con $X_i \in \text{ind } A$ para $1 \leq i \leq m$. Entonces $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{m+1}(X_1, X_{m+1})$ si y sólo si $h_m \dots h_1 = 0$.*

Demostración: Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo A_n y consideremos m morfismos irreducibles $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$, con $1 \leq i \leq m$, donde cada X_i es un módulo indescomponible.

Si $h_m \dots h_1 = 0$, es claro que $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{m+1}(X_1, X_{m+1})$.

Recíprocamente, consideremos que $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^{m+1}(X_1, X_{m+1})$ y supongamos que $h_m \dots h_1 \neq 0$. Entonces, por el Teorema 1.7.19, existen morfismos irreducibles $f_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ tales que $f_m \dots f_1 = 0$. Como $\text{Hom}_A(X_i, X_{i+1}) \neq 0$ entonces $\dim_k(\text{Hom}_A(X_i, X_{i+1})) = 1$, para $1 \leq i \leq m + 1$. Más aún, a cada h_i se lo puede escribir como $h_i = \lambda_i f_i$, con $\lambda_i \in k^*$.

En consecuencia, $h_m \dots h_1 = \lambda f_m \dots f_1 = 0$, contradiciendo lo que habíamos asumido. Por lo tanto $h_m \dots h_1 = 0$. \square

5.3.2. Álgebras inclinadas de conglomerado de tipo D_n .

Siguiendo el mismo enfoque presentado en la sección anterior, en [38], R. Schiffler introdujo a la categoría de conglomerado de tipo D_n desde un punto de vista geométrico. Más precisamente, consideró una triangulación en un polígono regular de n vértices, con una punción en su centro.

Muchas de las nociones que presentaremos aquí son una generalización de lo introducido en la sección anterior en el caso A_n .

Consideremos un polígono regular de n vértices con una punción en su centro.

Si $a \neq b$ son vértices en el polígono, denotamos por $\delta_{a,b}$ al camino de a a b sobre el borde del polígono en el sentido antihorario, y no pasa por el mismo vértice dos veces, (ver Figura 5.1). Si $a = b$, $\delta_{a,a}$ es el camino que recorre el borde del polígono exactamente una vez y a es el único vértice que pasa por $\delta_{a,a}$ dos veces.

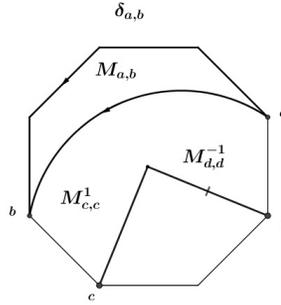


Figura 5.1: $\delta_{a,b}$, $M_{a,b}$ y $M_{c,c}^\epsilon$

Si $a \neq b$, $|\delta_{a,b}|$ denota el número de vértices que pertenecen al camino $\delta_{a,b}$, incluyendo a los vértices a y b . Si $a = b$, $|\delta_{a,a}| = n + 1$. Siguiendo el concepto introducido en la sección anterior, decimos que b es el **vecino antihorario** (**vecino horario**, respectivamente) de a si $|\delta_{a,b}| = 2$ ($|\delta_{a,b}| = n$, respectivamente).

Una **diagonal** es una tres-upla (a, α, b) , donde a y b son vértices del polígono con punción y α es un camino de a a b que satisface

- (1) α es homotópico a $\delta_{a,b}$, es decir, podemos transformar continuamente al camino α en el camino $\delta_{a,b}$.
- (2) α yace en el interior del polígono, excepto por sus vértices extremos a y b .
- (3) α no tiene autointersecciones.
- (4) $|\delta_{a,b}| \geq 3$.

Dos diagonales (a, α, b) y (c, β, d) se dicen **equivalentes** si $a = c$, $b = d$ y α es homotópico a β . Denotamos por E al conjunto de las clases de equivalencia de las diagonales. Es claro que un elemento en E está unívocamente determinado por el par ordenado de vértices (a, b) . Denotaremos por $M_{a,b}$ la clase de equivalencia de las diagonales (a, α, b) .

En [38], el autor define $E' = \{M_{a,b}^\epsilon \mid M_{a,b} \in E, \epsilon = \pm 1 \text{ y } \epsilon = 1 \text{ if } a \neq b\}$ al conjunto de las diagonales etiquetadas.

Por cada par ordenado de vértices (a, b) tales que $a \neq b$ y b no es vecino antihorario de a , existe exactamente una diagonal etiquetada $M_{a,b}^1 \in E'$, que

denotaremos simplemente por $M_{a,b}$. Para cada vértice a , existen exactamente dos diagonales etiquetadas: $M_{a,a}^{-1}$ y $M_{a,a}^1$. Estas se representarán como un segmento que tiene como vértices extremos a a y a la punción del polígono. Si $\epsilon = -1$, dicho segmento será marcado con una línea, mientras que si $\epsilon = 1$, el segmento no estará marcado, ver Figura 5.1.

Sean $M = M_{a,b}^\epsilon$ y $N = M_{c,d}^{\epsilon'}$ dos diagonales en E' . El **número de cruces** $e(M, N)$ de M a N es el menor número de intersecciones de $M_{a,b}$ y $M_{c,d}$ en el interior del polígono con punción. Si $a \neq b$ o $c \neq d$, el número de cruces es claro. En el caso en que $a = b$ y $c = d$, no es tan directo decir cuándo dichas diagonales se cruzan. En [38], el autor definió dicho número como sigue:

$$e(M, N) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq c \text{ y } \epsilon \neq \epsilon' \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (5.6)$$

Decimos que M cruza a N si $e(M, N)$ es por lo menos 1. Sigue de su construcción que el número de cruces es a lo sumo 2.

Generalizando el concepto en el caso A_n , vamos a definir los movimientos de pivoteos elementales, que corresponderán a morfismos irreducibles en la categoría de conglomerado.

Un movimiento elemental manda una diagonal etiquetada $M_{a,b}^\epsilon \in E'$ a otra diagonal etiquetada $M_{a',b'}^{\epsilon'} \in E'$ que satisfacen ciertas condiciones. Dichas condiciones vamos a separarlas en cuatro casos dependiendo la posición relativa de a y b . Vamos a denotar por c (d , respectivamente) el vecino antihorario de a (b , respectivamente).

1. Si $|\delta_{a,b}| = 3$ entonces hay precisamente un movimiento de pivoteo elemental $M_{a,b} \mapsto M_{a,d}$.
2. Si $4 \leq |\delta_{a,b}| \leq n-1$, entonces hay precisamente dos movimientos de pivoteo elementales: $M_{a,b} \mapsto M_{c,b}$ y $M_{a,b} \mapsto M_{a,d}$.
3. Si $|\delta_{a,b}| = n$, entonces $d = a$ y hay precisamente tres movimientos de pivoteo elementales $M_{a,b} \mapsto M_{c,b}$, $M_{a,b} \mapsto M_{a,a}^1$ y $M_{a,b} \mapsto M_{a,a}^{-1}$.
4. Si $|\delta_{a,b}| = n+1$, entonces $a = b$ y hay precisamente un movimiento elemental $M_{a,a}^\epsilon \mapsto M_{c,a}$.

Notemos que en todos los casos, en un movimiento de pivoteo elemental las diagonales etiquetadas comparten un vértice. A dicho vértice lo denominamos **pivot**. Al igual que antes, un **camino de pivoteos** entre dos diagonales etiquetadas es una secuencia de movimientos de pivoteos elementales.

Consideremos un polígono de n vértices con una punción. Como antes, una **triangulación** en dicho polígono es un conjunto maximal de diagonales etiquetadas que no se intersecan. A diferencia del caso A_n , aquí una triangulación no necesariamente corta al polígono en triángulos. Como presentamos en la sección anterior, dada una triangulación T , las diagonales etiquetadas que pertenecen a T se denominan **raíces negativas** y las otras diagonales etiquetadas se denominan **raíces positivas**. En [38, Lemma 3.4] se prueba que una triangulación de un polígono de n vértices con una punción tiene exactamente n elementos. A esas n raíces negativas las denotaremos por $-\alpha_i$.

Se define también el trasladado τ de una diagonal $M_{a,b}^\epsilon \in E'$ como sigue: denotamos por a' y b' los vecinos horario de a y b , respectivamente.

1. Si $a \neq b$, entonces $\tau M_{a,b} = M_{a',b'}$.
2. Si $a = b$, entonces $\tau M_{a,a}^\epsilon = M_{a',a'}^{-\epsilon}$, para $\epsilon = \pm 1$.

Notación 5.3.10 Vamos a unificar la notación presentada en la sección anterior. Notemos que si $a \neq b$, $\tau M_{a,b}$ está definido como $r^-(M_{a,b})$ presentado en el Teorema 5.3.5. En el caso que $a = b$, definimos $r^-(M_{a,a}^\epsilon) = \tau M_{a,a}^\epsilon$, como enunciamos recientemente en el punto 2.

De forma similar al caso A_n , se define \mathcal{C} una categoría k -lineal como sigue. Los objetos son sumas directas de raíces (positivas y negativas) en E' . Por aditividad es suficiente definir los morfismos entre raíces. Dadas dos raíces M y N , el espacio de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ es el cociente del k -espacio vectorial generado por caminos de pivoteo de M a N , sobre el espacio generado por la siguiente relación, denominada relación de malla: Para cada raíz $X \in E'$, la relación de malla está dada por

$$\sum \tau X \mapsto Y_i \mapsto X,$$

donde $\tau X \mapsto Y_i$ y $Y_i \mapsto X$ son todos los movimientos de pivoteos elementales que comienzan (terminan, respectivamente) en τX (X , respectivamente). Por lo visto anteriormente, estas sumas tienen a lo sumo tres sumandos.

Esta categoría \mathcal{C} es equivalente a una categoría de conglomerado de tipo D_n , ver [38, Teorema 4.3].

La siguiente proposición nos será de utilidad para nuestro trabajo.

Proposición 5.3.11 *Sea \mathcal{C} la categoría de diagonales etiquetadas de un polígono de n vértices con una punción. Sean $M, N \in \text{ind } \mathcal{C}$. Entonces la dimensión como k -espacio vectorial de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ es igual a $e(\tau M, N)$.*

A continuación presentaremos la equivalencia que relaciona a las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo D_n con la categoría de diagonales etiquetadas. Para ello vamos a definir una nueva categoría k -lineal.

Sea T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Definimos a la categoría \mathcal{C}_T de la siguiente manera. Los objetos de \mathcal{C}_T son sumas directas de raíces positivas en E' . El espacio de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N)$ entre dos raíces positivas M, N es el cociente del k -espacio vectorial generado por caminos de pivoteo de M a N entre raíces positivas, sobre el espacio generado por la relación de malla presentada para la categoría \mathcal{C} , con la condición adicional de que la composición $\tau X \mapsto Y_i \mapsto X$ es cero si alguno de los tres objetos es una raíz negativa. Los morfismos se extienden por aditividad para cualquier par de objetos de \mathcal{C}_T .

Observación 5.3.12 Dada la definición de las categorías \mathcal{C} y \mathcal{C}_T , tenemos que \mathcal{C}_T es una subcategoría de \mathcal{C} , pero ésta no es plena. Por lo tanto, dados M, N objetos de \mathcal{C}_T , resulta que

$$\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N)) \leq \dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)).$$

Consideremos un polígono de n vértices con una punción y \mathcal{C} la categoría de diagonales etiquetadas. Un objeto inclinante en la categoría \mathcal{C} es un conjunto maximal de diagonales etiquetadas que no se intersecan, es decir, es una triangulación del polígono.

Sea T una triangulación de un polígono con punción de n vértices. Entonces, el álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ se denomina **álgebra inclinada de conglomerado**. Se muestra en [38, Sección 6.4] que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tau^{-1}T, -)$ induce una equivalencia de categorías

$$\varphi_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \text{mod}(\text{End}_{\mathcal{C}}(T))^{op}.$$

Más aún, si denotamos a las diagonales de T por T_1, \dots, T_n , el vector dimensión de un módulo $\varphi_T(M_{a,b}^\epsilon)$ está dado por

$$(\underline{\dim} \varphi_T(M_{a,b}^\epsilon))_i = e(M_{a,b}^\epsilon, T_i).$$

Teorema 5.3.13 [38] *Las álgebras inclinadas de conglomerado de tipo D_n son precisamente aquellas que se obtienen de una triangulación de un polígono de n vértices con una punción.*

Con lo presentado hasta ahora estamos en condiciones de probar los resultados principales de esta sección.

Lema 5.3.14 *Sea T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Se satisfacen los siguientes enunciados.*

- (a) *Para cada objeto indescomponible $M \in \mathcal{C}_T$, el k -espacio vectorial $\text{End}_{\mathcal{C}_T}(M)$ tiene dimensión uno.*
- (b) *Si M y N son objetos indescomponibles de \mathcal{C}_T tal que existe un movimiento de pivoteo elemental de M a N , entonces $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N)$ tiene dimensión uno.*

Demostración: Vamos a probar el resultado usando el concepto de número de cruces entre dos raíces. Por la Proposición 5.3.11 y la Observación 5.3.12 tenemos que dadas dos raíces positivas M y N , $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N)) \leq e(\tau M, N)$.

(a) Sea $M = M_{a,b}^\epsilon$ un objeto indescomponible de \mathcal{C}_T .

Si $M = M_{a,a}^\epsilon$, entonces $\tau M = M_{a',a'}^{-\epsilon}$, donde a' es el vecino horario de a . Por la definición del número de cruces, obtenemos que $e(\tau M, M) = 1$.

Si $M = M_{a,b}$, con $a \neq b$, entonces $\tau M = M_{a',b'}$, con a' y b' los vecinos horario de a y b , respectivamente, como ilustra la Figura 5.2.

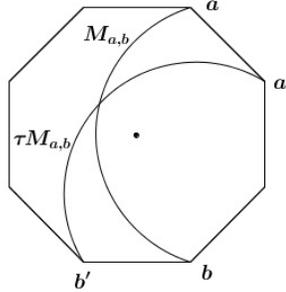


Figura 5.2: $e(\tau M, M)$

Luego, podemos observar que $e(\tau M, M) = 1$.

En ambos casos $\dim_k \text{End}_{\mathcal{C}_T}(M) \leq e(\tau M, M) = 1$. Más aún, $\text{End}_{\mathcal{C}_T}(M) \neq 0$. Por lo tanto, $\dim_k \text{End}_{\mathcal{C}_T}(M) = 1$.

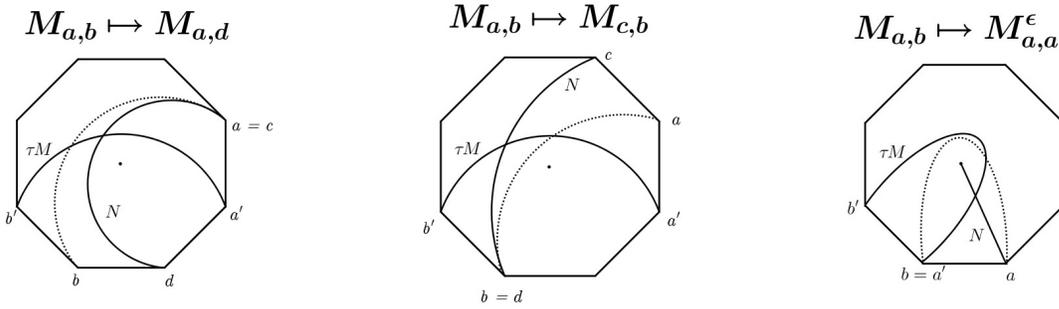
(b) Sean $M = M_{a,b}^\epsilon$ y $N = M_{c,d}^{\epsilon'}$ objetos indescomponibles de \mathcal{C}_T tales que existe un movimiento de pivoteo elemental de M a N . Luego, $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N) \neq 0$. Para probar la afirmación vamos a analizar los siguientes dos casos:

1. Si $a = b$, entonces hay precisamente un movimiento de pivoteo elemental $M \rightarrow N$, donde $d = a$ y c es el vecino antihorario de a . Sea $\tau M = M_{a',a'}^{-\epsilon}$, con a' el vecino horario de a . Entonces, es claro que $e(\tau M, N) = 1$.

2. Si $a \neq b$, entonces los siguientes son los diferentes tipos de movimientos de pivoteo elementales:

- (i) $M_{a,b} \mapsto M_{a,d}$, donde d es el vecino antihorario de b , si $3 \leq |\delta_{a,b}| \leq n-1$;
- (ii) $M_{a,b} \mapsto M_{c,b}$ donde c es el vecino antihorario de a , si $4 \leq |\delta_{a,b}| \leq n$;
- (iii) $M_{a,b} \mapsto M_{a,a}^\epsilon$, con $\epsilon = \pm 1$, si $|\delta_{a,b}| = n$.

Sea $\tau M = M_{a',b'}^{\epsilon''}$, con a' y b' los vecinos horario de a y b , respectivamente. En todos los casos tenemos que $e(\tau M, N) = 1$, como ilustra la siguiente figura



Así, $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N) \leq 1$ y como $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N) \neq 0$, entonces $\dim_k \text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M, N) = 1$, probando lo deseado. \square

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3.15 *Sea T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Entonces, se satisfacen los siguientes enunciados.*

- (a) *Para cada $M \in \text{ind } \mathcal{C}_T$, tenemos que $\mathfrak{R}_{\mathcal{C}_T}(\text{End}_{\mathcal{C}_T}(M)) = 0$.*
- (b) *Si $M, N \in \text{ind } \mathcal{C}_T$ y $\text{Irr}_{\mathcal{C}_T}(M, N) \neq \emptyset$, entonces $\mathfrak{R}_{\mathcal{C}_T}^2(M, N) = 0$.*

Dada T una triangulación de un polígono con n vértices con una punción, vamos a describir los objetos proyectivos, inyectivos y simples de la categoría \mathcal{C}_T , de manera análoga a lo descrito en el caso A_n .

- Los objetos simples de \mathcal{C}_T están dados por las raíces positivas que intersecan a una única raíz negativa.
- Los objetos proyectivos indescomponibles de \mathcal{C}_T están dados por $r^+(T)$.
- Los objetos inyectivos indescomponibles de \mathcal{C}_T están dados por $r^-(T)$.

Observación 5.3.16 Consideremos T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Sean \mathcal{C} la categoría de diagonales etiquetadas y $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ el álgebra inclinada de conglomerado. Como vimos anteriormente, la categoría de raíces positivas \mathcal{C}_T es equivalente a la categoría $\text{mod}(\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op})$. Dicha equivalencia está dada por el funtor φ_T , inducido por $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tau^{-1}T, -)$.

Análogamente al caso A_n , dada $-\alpha_j$ una raíz negativa, el módulo proyectivo indecomponible P_j está dado por la imagen de la raíz positiva $r^+(-\alpha_j)$, es decir $P_j = \varphi_T(r^+(-\alpha_j))$. De la misma manera, el módulo inyectivo indecomponible I_j está dado por $\varphi_T(r^-(-\alpha_j))$ y el módulo simple S_j está dado por $\varphi_T(\alpha_j)$, donde α_j es la raíz positiva que interseca únicamente a la raíz negativa $-\alpha_j$ en T .

Para simplificar la notación, vamos a denotar por α_j^+ y α_j^- al objeto proyectivo e inyectivo indecomponible correspondiente a la raíz $-\alpha_j$, respectivamente.

Lema 5.3.17 *Sea T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Consideremos α_j^+ y α_j^- al objeto proyectivo e inyectivo indecomponibles de \mathcal{C}_T correspondiente a la raíz negativa $-\alpha_j$, respectivamente. Entonces $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)) = 1$.*

Demostración: Por la Proposición 5.3.11 y la Observación 5.3.12, sabemos que $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)) \leq e(\tau\alpha_j^+, \alpha_j^-)$. Como $\tau\alpha_j^+ = -\alpha_j$ y $\alpha_j^- = \tau(-\alpha_j)$, tenemos que analizar el número de cruces $e(-\alpha_j, \tau(-\alpha_j))$.

Considerando los casos en que $-\alpha_j = M_{a,a}^\epsilon$, con $\epsilon \in \{-1, 1\}$, o $-\alpha_j = M_{a,b}$, con $a \neq b$, de manera análoga a la demostración del Lema 5.3.14, podemos probar que $e(-\alpha_j, \tau(-\alpha_j)) = 1$ (ver Figura 5.2). Por lo tanto, tenemos que $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)) \leq 1$.

Más aún, si consideramos $\Gamma = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ y $\varphi_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \text{mod } \Gamma$ la equivalencia de categorías definida anteriormente, tenemos que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-) \neq 0$ ya que $\text{Hom}_{\Gamma}(P_j, I_j) \neq 0$. Por lo tanto, $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)) = 1$. \square

Estamos en condiciones de determinar la longitud de los caminos de pivoteos de la forma $\alpha_j^+ \rightsquigarrow \alpha_j \rightsquigarrow \alpha_j^-$ en \mathcal{C}_T , que representan caminos de morfismos irreducibles de la forma $P_j \rightsquigarrow S_j \rightsquigarrow I_j$ en $\text{mod}(\text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op})$. Como $\dim_k(\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)) = 1$, todos los caminos de pivoteos no nulo de α_j^+ a α_j^- tienen la misma longitud. En particular los caminos de pivoteos no nulos de la forma $\alpha_j^+ \rightsquigarrow \alpha_j \rightsquigarrow \alpha_j^-$.

Antes de probar el próximo resultado, recordemos la siguiente notación dada en [38]. Sean a y b vértices en el polígono. Denotamos por $[a, b]$ al conjunto de todos los vértices que yacen sobre el camino $\delta_{a,b}$. Por $]a, b[$ denotamos el conjunto de vértices $[a, b] \setminus \{a, b\}$, y por $]a, b]$ ($[a, b[$, respectivamente) denotamos el conjunto de vértices pertenecientes a $[a, b] \setminus \{a\}$ ($[a, b] \setminus \{b\}$, respectivamente).

Teorema 5.3.18 Sea T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Dada $-\alpha_j$ una raíz negativa, denotamos por α_j^+ y α_j^- al objeto proyectivo e inyectivo de \mathcal{C}_T correspondientes a $-\alpha_j$, respectivamente. Entonces todo camino de pivoteos no nulo de α_j^+ a α_j^- tiene longitud igual a $2n - 4$.

Demostración: Sea T una triangulación de un polígono de n vértices con una punción. Consideremos $-\alpha_j$ una raíz negativa arbitraria de T y sean α_j^+ y α_j^- los objetos proyectivo e inyectivo de \mathcal{C}_T correspondientes a $-\alpha_j$, respectivamente. Vamos a analizar la longitud de los caminos de pivoteos de α_j^+ a α_j^- .

Para dicho propósito, vamos a estudiar dos casos diferentes:

Caso 1. $-\alpha_j = M_{a,a}^\epsilon$, con $\epsilon \in \{-1, 1\}$, y

Caso 2. $-\alpha_j = M_{a,b}$ con $a \neq b$.

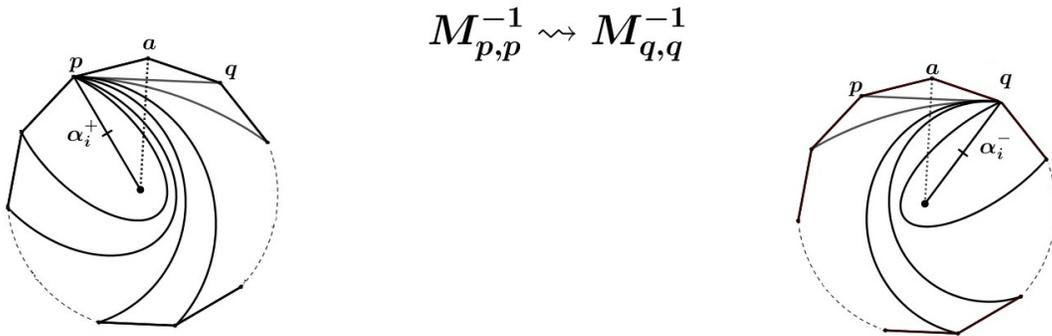
Caso 1. Sea $-\alpha_j = M_{a,a}^\epsilon$, con $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Entonces $\alpha_j^+ = M_{p,p}^{-\epsilon}$ y $\alpha_j^- = M_{q,q}^{-\epsilon}$, donde p y q son los vértices vecinos antihorario y horario de a , respectivamente. Por las posiciones relativas de los vértices p y q en el polígono, sabemos que $|\delta_{p,q}| = n - 1$, es decir, $\text{card}([p, q]) = n - 2$.

Como $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M_{p,p}^{-\epsilon}, M_{q,q}^{-\epsilon}) \neq 0$, entonces existe un camino de pivoteos no nulo como sigue:

$$M_{p,p}^{-\epsilon} \xrightarrow{P^1} \alpha^1 \xrightarrow{P^2} \alpha^2 \xrightarrow{P^3} \dots \longrightarrow \alpha^{m-1} \xrightarrow{P^m} M_{q,q}^{-\epsilon}.$$

Queremos determinar la longitud de dicho camino en función de la cantidad de vértices del polígono.

Sin pérdida de generalidad, por la relación de malla podemos asumir que los primeros k movimientos P^1, \dots, P^k tienen como pivot al vértice p y transforman la raíz $M_{p,p}^{-\epsilon}$ en la raíz $M_{p,q}$, y los últimos $m - k$ movimientos P^{k+1}, \dots, P^m tienen como pivot al vértice q y transforma la raíz $M_{p,q}$ en la raíz $M_{q,q}^{-\epsilon}$. Ilustramos la situación en la siguiente figura.



Además, por las posiciones relativas de los vértices a , p y q en el polígono, todas las raíces α^i , con $1 \leq i \leq m - 1$, intersecan a $-\alpha_j = M_{a,a}^c$ y en consecuencia son raíces positivas, es decir, objetos indescomponibles en \mathcal{C}_T . Más aún, como $\text{card}([p, q]) = n - 2$ tenemos que $k = n - 2$ y $m - k = n - 2$. Por lo tanto, $m = 2n - 4$.

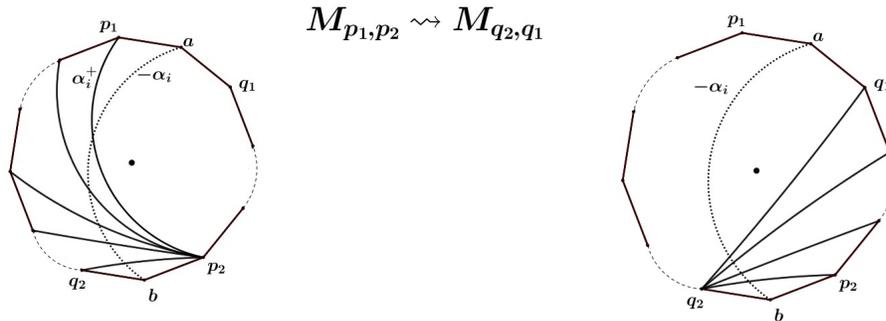
Caso 2. Ahora consideremos el caso en que $-\alpha_j = M_{a,b}$, con $a \neq b$. Entonces, $\alpha_j^+ = M_{p_1, p_2}$ y $\alpha_j^- = M_{q_1, q_2}$, donde p_1 y q_1 son los vértices vecinos antihorario y horario de a , respectivamente; y p_2 y q_2 son los vértices vecinos antihorario y horario de b , respectivamente.

Supongamos que hay k vértices en el conjunto $]a, b]$, es decir, $|\delta_{a,b}| = k + 1$, donde $2 \leq k \leq n - 1$. Entonces, por las posiciones relativas de los vértices a, b, p_1, p_2, q_1, q_2 en el polígono, tenemos que el conjunto $]p_1, q_2]$ tiene $k - 2$ vértices y el conjunto $]q_1, p_2]$ tiene $n - k - 2$ vértices.

Como en el primer caso, debido a que $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(M_{p_1, p_2}, M_{q_1, q_2}) \neq 0$, entonces existe un camino de pivoteos no nulo como sigue:

$$M_{p_1, p_2} \xrightarrow{P^1} \alpha^1 \xrightarrow{P^2} \alpha^2 \xrightarrow{P^3} \dots \rightarrow \alpha^{m-1} \xrightarrow{P^m} M_{q_1, q_2}. \quad (5.7)$$

Por las relaciones de malla existentes, sin pérdida de generalidad podemos asumir que los primeros $k - 2$ movimientos P^1, \dots, P^{k-2} tienen como pivot al vértice p_2 y transforman la raíz M_{p_1, p_2} en la raíz M_{q_2, p_2} . Los siguientes $n - k - 2$ movimientos P^{k-1}, \dots, P^{n-4} los podemos asumir como los movimientos de pivoteo elementales que tienen como pivot al vértice q_2 y transforman la raíz M_{q_2, p_2} en la raíz M_{q_2, q_1} . Ilustramos dicha situación en la siguiente figura.



Por lo tanto, en $n - 4$ movimientos tenemos un camino de pivoteos $M_{p_1, p_2} \rightsquigarrow M_{q_2, q_1}$.

Ahora, es claro que en n movimientos obtengo un camino $M_{q_2, q_1} \rightsquigarrow M_{q_1, q_2}$. En efecto, como $|\delta_{q_1, q_2}| = |\delta_{a,b}| = k + 1$, podemos asumir que los siguientes k

movimientos $P^{n-3}, \dots, P^{n-4+k}$ tienen como pivot el vértice q_2 y transforman la raíz M_{q_2, q_1} en la raíz M_{q_2, q_2}^ϵ y los últimos $n - k$ movimientos $P^{n-3+k}, \dots, P^{2n-4}$ también tienen de pivot al vértice q_2 y transforman la raíz M_{q_2, q_2}^ϵ en la raíz M_{q_1, q_2} , como ilustra la siguiente figura.



Más aún, por las posiciones relativas de los vértices a, b, p_1, p_2, q_1, q_2 en el polígono, todas las raíces α^i , $1 \leq i \leq m - 1$, intersecan a $M_{a, b}$. Por lo tanto, α^i son objetos indescomponibles en \mathcal{C}_T y en conclusión (5.7) es un camino en \mathcal{C}_T y tiene longitud $2n - 4$.

Como el k -espacio vectorial $\text{Hom}_{\mathcal{C}_T}(\alpha_j^+, \alpha_j^-)$ tiene dimensión uno, se deduce que todo camino de pivoteos no nulo tiene longitud $2n - 4$. \square

Finalmente enunciaremos y probaremos el resultado que determina el índice de nilpotencia del radical de la categoría de módulos de un álgebra inclinada de conglomerado de tipo D_n .

Teorema 5.3.19 *Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo D_n . Entonces $r_A = 2n - 3$, donde r_A denota al índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$.*

Demostración: Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo D_n . Entonces existe una triangulación T de un polígono de n vértices tal que el funtor $\varphi_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \text{mod } A$ es una equivalencia de categorías, donde φ_T está inducido por el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tau^{-1}T, -)$.

Para calcular el índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$, debemos analizar la longitud de los caminos de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles del módulo proyectivo indescomponible P_j al módulo inyectivo indescomponible I_j que factoriza por el módulo simple S_j . Más precisamente,

$$r_A = \max_{j \in Q_0} \{\ell(P_j \rightsquigarrow S_j \rightsquigarrow I_j)\} + 1.$$

Por otra parte, por la equivalencia mencionada anteriormente, dada $-\alpha_j$ una raíz negativa de T , tenemos que $P_j = \varphi_T(\alpha_j^+)$ e $I_j = \varphi_T(\alpha_j^-)$, donde $\alpha_j^+ = \tau^{-1}(-\alpha_j)$ y $\alpha_j^- = \tau(-\alpha_j)$.

Por el Teorema 5.3.18 sabemos que todo camino de pivoteos no nulo de α_j^+ a α_j^- en \mathcal{C}_T tiene longitud $2n - 4$. Luego, todo camino no nulo de morfismos irreducibles de P_j a I_j en mod A también tiene longitud $2n - 4$. Más aún, sigue del Lema 5.3.17 y de la equivalencia entre categorías φ_T , que $\dim_k(\text{Hom}_A(P_j, I_j)) = 1$. Por lo tanto, en particular los caminos no nulos de morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles de la forma $P_j \rightsquigarrow S_j \rightsquigarrow I_j$ tienen longitud $2n - 4$. Además, por la elección arbitraria de $-\alpha_j$, resulta que esto se cumple para todo $j \in Q_0$. Por lo tanto,

$$r_A = \max_{j \in Q_0} \{\ell(\phi_j)\} + 1 = 2n - 4 + 1 = 2n - 3,$$

probando así nuestro resultado. \square

Al igual que en el caso A_n , el siguiente resultado se deduce directamente del Corolario 5.3.15.

Proposición 5.3.20 *Sea A un álgebra inclinada de conglomerado de tipo D_n . Sean $h_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ morfismos irreducibles con $X_i \in \text{ind } A$. Entonces, $h_m \dots h_1 \in \mathfrak{R}^m(X_1, X_{n+1})$ si y sólo si $h_m \dots h_1 = 0$.*

Bibliografía

- [1] E. R. Alvares, F. U. Coelho. *A note on the composite of two irreducible morphisms*. Communications in Algebra 37, (2009), 2097–2099.
- [2] I. Assem. *Algèbres et modules*. Masson. Les Presses de l'Université d'Ottawa, (1997).
- [3] I. Assem. *Tilting theory - An introduction*. Topics in Algebra, Banach Center Publications 26, Part 1, PWN, (1990), 127-180.
- [4] I. Assem, J. A. Cappa, M. I. Platzeck, M. Verdecchia. *Módulos inclinantes y álgebras inclinadas*. Notas de Álgebra y Análisis 21, (2008).
- [5] I. Assem, D. Happel. *Generalized tilted algebras of type A_n* . Communications in Algebra 20, 9, (1981), 2101-2125.
- [6] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. *Elements of the representation theory of associative algebras*. London Mathematical Society, Student Texts 65, Cambridge University Press, (2006).
- [7] I. Assem, A. Skowronski. *Algèbres pré-inclinées et catégories dérivées*. Séminaire M. P. Malliavin, Lecture Notes in Mathematics 1404, Springer-Verlag, (1989), 1-34.
- [8] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø. *Representation theory of artin algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, (1995).
- [9] R. Bautista. *Irreducible morphisms and the radical of a category*. An. Inst. Mat. Nac. Autónoma México 22, (1982), 83-135.
- [10] R. Bautista, S. O. Smalø. *Nonexistent cycles*. Communications in Algebra 16, 11, (1983), 1755-1767.
- [11] K. Bongartz, P. Gabriel. *Covering Spaces in Representation-Theory*. Inventiones Mathematicae 65, Springer Verlag, (1982), 331-378.

- [12] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten and G. Todorov. *Tilting theory and cluster combinatorics*. Advances in Mathematics 204, (2006), 572-612.
- [13] A. Buan, R. Marsh and I. Reiten. *Cluster-tilted algebras*. Transaction of the American Mathematical Society 359, (2007), 323-332.
- [14] M. Butler, C. Ringel. *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*. Communications in Algebra 15, 1& 2, (1987), 145-179.
- [15] P. Caldero, F. Chapoton, R. Schiffler. *Quivers with relations arising from clusters (A_n case)*. Transaction of the American Mathematical Society 358, 3, (2006), 1347-1364.
- [16] C. Chaio. *On the Harada and Sai Bound*. Bulletin of the London Mathematical Society 44, 6, (2012), 1237-1245.
- [17] C. Chaio. *Degrees and Composition of irreducible morphisms in almost presectional paths*. Algebras and Representation Theory 17, 2, (2014), 407-432.
- [18] C. Chaio. *Problems solved by using degrees of irreducible morphisms*. Contemporary Mathematics 607, American Mathematical Society, (2014), 179-203.
- [19] C. Chaio. *A Generalization of the Composition of Irreducible Morphisms in Regular Components*. Algebras and Representation Theory 18, 2, (2015), 323-337.
- [20] C. Chaio. *Degrees in Auslander-Reiten components with almost split sequences of at most two middle terms*. Journal of Algebra and Its Applications 14, 7, (2015), (26 pages).
- [21] C. Chaio, F. U. Coelho, S. Trepode. *On the composite of irreducible morphisms in almost sectional path*. Journal of Pure and Applied Algebra 212, (2008), 244-261.
- [22] C. Chaio, F. U. Coelho, S. Trepode. *The composite of three irreducible morphisms in the fourth power of the radical*. Communications in Algebra 39, 2, (2011), 555-559.

- [23] C. Chaio, P. Le Meur, S. Trepode. *Degrees of irreducible morphisms and finite-representation type*. Journal of London Mathematical Society II 84, 1, (2011), 35-57.
- [24] C. Chaio, S. Liu. *A note on the radical of a module category*. Communications in Algebra 41, 12, (2013), 4419-4424.
- [25] C. Chaio, M. I. Platzeck, S. Trepode. *On the degree of irreducible morphisms*. Journal of Algebra 281, 1, (2004), 220-224.
- [26] C. Chaio, S. Trepode. *The composite of irreducible morphisms in standard components*. Journal of Algebra 323, 4, (2010), 1000-1011.
- [27] D. Eisenbud, José Antonio de La Peña. *Chains of maps between indecomposable modules*. J. Reine und Angewandte Mathematik, Crelles Journal 504, (1998), 29-35.
- [28] E. Fernández *Extensiones triviales y álgebras inclinadas iteradas*. (Tesis Doctoral), Universidad Nacional del Sur, (1999).
- [29] S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston. *Cluster algebras and triangulated surfaces. Part I: Cluster complexes*. Acta Mathematica 201, 1, (2008), 83-146.
- [30] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*. London Mathematical Society, Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, (1987).
- [31] D. Happel. *On the derived category of a finite-dimensional algebra*. Commentarii Mathematici Helvetici 62, (1987), 339-389.
- [32] M. Hoshino. *On splitting torsion theories induced by tilting modules*. Communications in Algebra 11, 4, (1983), 427-441.
- [33] K. Igusa, G. Todorov. *Radical layers of representable functors*. Journal of Algebra 89, (1984), 105-147.
- [34] B. Keller. *Algèbres héréditaires par morceaux de type D_n* . C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 312, (1991), 483-486.
- [35] S. König and A. Zimmermann. *Derived equivalences for group rings*. Springer, (2006).

- [36] S. Liu. *Degree of irreducible maps and the shapes of Auslander-Reiten quivers*. Journal of London Mathematical Society 2, 45, (1992), 32-54.
- [37] C. M. Ringel. *The self-injective Cluster tilted Algebras*. Archiv der Mathematik 91, (2008), 218-225.
- [38] R. Schiffler. *A geometric model for cluster categories of type D_n* . Journal of Algebraic Combinatorics 27, 1, (2008), 1-21.
- [39] B. Wald, J. Waschbüsch *Tame biserial algebras*. Journal of Algebra 95, (1985), 480-500.

Índice alfabético

- álgebra
 - conexa, 14
 - básica, 14
- álgebra de tipo de rep. finito, 16
- álgebra de tipo de rep. infinito, 16
- álgebra de caminos, 13
- álgebra de cuerdas, 35
- álgebra de endomorfismos, 89
- álgebra inclinada, 114
- álgebra inclinada iterada, 114
- álgebra hereditaria, 27
- álgebra inclinada de conglomerado, 126
- índice de nilpotencia de $\mathfrak{R}(\text{mod } A)$, 17
- camino
 - en mod A , 21
 - en un carcaj, 12
- camino de pivoteos, 138, 146
- camino seccional, 19
- caminos paralelos, 19
- carcaj, 12
 - de Auslander-Reiten, 21
 - con relaciones, 14
 - conexo, 12
 - finito, 12
 - ordinario, 14
- carcaj de traslación, 19
 - simplemente conexo, 20
- categoría, 9
- categoría de complejos, 122
- categoría de malla, 19
- categoría triangulada, 121
- ciclo en un carcaj, 12
- clase de torsión, 90
- clase sin torsión, 90
- complemento, 127
- componente
 - con longitud, 19
 - dirigida, 19
- cubierta proyectiva, 24
- cuerda en Q , 36
 - directa e inversa, 36
- cuerda que comienza/termina en un pico, 39
- cuerda que comienza/termina en una profundidad, 39
- diagonal de un polígono, 145
- diagonal en un polígono, 137
- dimensión proyectiva, 26
- envolvente inyectiva, 24
- equivalencia de categorías, 11
- funtor, 10
 - denso, 12
 - fiel, 11
 - pleno, 11
- funtor cuasi-inverso, 11
- funtor de suspensión, 123
- funtor Nakayama, 23
- gráfico de órbitas, 20
- grado de un morfismo irreducible, 29
- grafo subyacente, 12

grupo fundamental, 20
 ideal admisible, 14
 longitud de un camino, 19
 módulo APR-inclinante, 94
 módulo banda, 38
 módulo cuerda, 36
 módulo inclinante, 91
 escindido, 92
 separante, 92
 módulo inclinante parcial, 91
 morfismo de representaciones, 15
 morfismo funtorial, 11
 morfismo irreducible, 17
 morfismo minimal, 22
 morfismo que casi se parte, 22
 morfismo retracción, 16
 morfismo sección, 15
 movimiento de pivoteo elemental, 138,
 146
 mutación de un carcaj, 13
 número de cruces, 146
 objeto inclinante, 126
 par de torsión, 90
 escindido, 90
 paseo en un carcaj, 13
 paseo reducido, 36
 pozo libre, 95
 pozo ligado, 95
 presentación de un álgebra, 14
 presentación inyectiva minimal, 24
 presentación proyectiva minimal, 24
 raíz, 137
 radical de mod A , 16
 radical de un módulo, 23
 relación de homotopía, 20
 representación de $(Q; I)$, 15
 subcategoría, 10
 plena, 10
 subcuerda, 36
 sucesión que casi se parte, 22
 top de un módulo, 23
 triángulo de Auslander-Reiten, 121
 triangulación de un polígono, 138
 vértices vecinos, 137, 145
 zócalo de un módulo, 23

