Ecuaciones de Movimiento para Fuentes de Radiación Gravitatoria Axisimétricas

T. A. Rojas; R. G. Ortega

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCa.
Avda. Belgrano 300. CP 4700. Catamarca.

rortega@unca.edu.ar; trojas@unca.edu.ar

Recepción: 16/04/2012

Aceptado para publicación: 02/05/2013

Resumen

Elegimos una línea mundo compleja analítica en un espacio complejo cuadridimensional, considerando el caso particular con axisimetria. Obtenemos las ecuaciones para el momento lineal y la definición para el momento angular asintóticamente planos de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Encontramos las ecuaciones para la pérdida de masa, el cambio en el momento lineal y la conservación del momento angular para la simetría en estudio. Se establece una definición posible en las ecuaciones del centro de masa. Obtenemos finalmente las ecuaciones de movimiento para la línea mundo donde se relacionan el momento lineal y el momento angular estableciendo condiciones de axisimetría en el caso no estacionario.

Palabras Clave: Relatividad General; Einstein-Maxwell; Líneas Mundo Complejas.

Abstract:

We choose a complex analytic world line in a four-dimensional complex space, considering the particular axisimetric case. We obtain the equations for the momentum and the definition for the angular momentum of asymptotically flat Einstein-Maxwell equations. We find the equations for mass loss, the change in momentum and angular momentum conservation for the symmetry study. Finally obtain the equations of motion for the online world where you relate the momentum and angular momentum setting axisimetric conditions in the nonstationary case.

Keywords: General Relativity; Einstein-Maxwell; Complex World Lines.

0. Introducción

Estudiamos el movimiento de partículas en un campo gravitatorio bajo ciertas condiciones iniciales. Utilizamos ecuaciones conocidas para las componentes del tensor de Weyl, el shear asintótico y el aspecto de la masa¸ con el uso de los armónicos esféricos tensoriales. Buscamos encontrar las ecuaciones para el momento lineal y para el momento angular.

Calculamos la componente de Weyl ψ_1^0 directamente relacionada con la componente de Weyl ψ_2^0 , teniendo en cuenta las componentes con l=1.

Previamente exponemos las ecuaciones involucradas en nuestro estudio, para luego aplicar el teorema de perdida de masa de Bondi, lo que nos permite obtener las expresiones para el cambio en la masa y el cambio en el momento lineal.

El estudio en general se hace para el caso axisimétrico, por lo cual solo contribuyen aquellas componentes en la dirección del eje z. El hecho de usar esta consideración nos lleva a una extraordinaria simplificación en las ecuaciones, mejorando para este caso la interpretación de los resultados dentro de las limitaciones que esta idealización supone.

1. Ecuaciones

Utilizamos las expresiones para las componentes de Weyl [1][4] y sus derivadas respecto de u definidas como

$$\dot{\psi}_1^0 = -\hat{\partial}\psi_2^0 + 2\sigma\psi_3^0 \tag{1-1}$$

$$\dot{\psi}_2^0 = -\hat{\partial}\psi_3^0 + \sigma\psi_4^0 \tag{1-2}$$

$$\psi_3^0 = \hat{\partial}\dot{\bar{\sigma}} \tag{1-3}$$

$$\psi_4^0 = -\ddot{\bar{\sigma}} \tag{1-4}$$

siendo la constante $k = \frac{2G}{c^4}$.

Además introducimos la definición del aspecto de la masa como

$$\Psi = \psi_2^0 + \hat{\partial}^2 \overline{\sigma} + \sigma \dot{\overline{\sigma}} \qquad (1\text{-}5)$$

Y el shear asintótico definido como

$$\sigma = \sigma^{ij} Y_{2ij}^2 + \sigma^{ijk} Y_{3ijk}^2 \qquad (1\text{-}6)$$

Esta definición del shear nos permite encontrar términos adicionales en las ecuaciones de cambio en la masa, el cambio en el momento lineal y el cambio en el momento angular.

2. Ecuaciones para el cambio en la masa y el cambio en el momento lineal

Si tomamos la ecuación para el aspecto de la masa en armónicos esféricos tensoriales y la derivamos con respecto de u, obtenemos

$$\dot{\Psi} = -\frac{2\sqrt{2}G}{c^2}\dot{M} - \frac{6G}{c^3}\dot{P}^i Y_{1i}^0 + ... \qquad (2\text{-}1)$$

Por otro lado se puede aplicar el teorema de la perdida de masa de Bondi [1][3], dado por la ecuación

$$\dot{\Psi} = \dot{\sigma}\dot{\bar{\sigma}} \tag{2-2}$$

Para resolver el segundo miembro de esta ecuación usamos la ecuación (1-6) y realizamos los correspondientes productos en armónicos esféricos tensoriales,

$$\dot{\sigma}\dot{\bar{\sigma}} = \left(\dot{\sigma}^{ij} Y_{2ij}^{2} + \dot{\sigma}^{ij} Y_{2ij}^{2}\right)\!\left(\dot{\bar{\sigma}}^{lm} Y_{2lm}^{-2} + \dot{\bar{\sigma}}^{lmn} Y_{3lmn}^{-2}\right) = \tag{2-3}$$

Entonces obtenemos usando también (2-1) ecuación

$$-\frac{2\sqrt{2}G}{c^{2}}\dot{M} = \frac{1}{5}\dot{\sigma}^{ij}\dot{\bar{\sigma}}^{ij} + \frac{6}{5}\dot{\sigma}^{ijk}\dot{\bar{\sigma}}^{ijk} - \frac{72}{35}\dot{\sigma}^{ijk}\dot{\bar{\sigma}}^{llk} \tag{2-4}$$

y con Y_{1i}^{0} tenemos

$$\frac{6G}{c^{3}}\dot{P}^{k} = \frac{3}{7}\left[\sigma^{ij}\dot{\bar{\sigma}}^{lij} + \sigma^{ljk}\dot{\bar{\sigma}}^{jk}\right] \tag{2-5}$$

de donde despejando convenientemente obtenemos las ecuaciones para $\dot{M}$ y $\dot{P}^{k}$

De estas ecuaciones es claro que tenemos pérdida de masa y que el momento lineal no se conserva. Resulta además característico, que para el shear aquí considerado, la ecuación para el cambio en el momento lineal involucra productos del tipo σ_{ij} por σ_{ijk}. De otro modo si $\sigma_{ijk} = 0$, momento lineal es una cantidad conservada.

3. Momento Lineal y Momento Angular

Utilizando las ecuaciones (1-1) a (1-6) encontramos considerando solo los términos para l=1 y aplicando las condiciones para axisimetría, que ψ_1^0 tiene la forma

$$\dot{\psi}_1^{0k} = -\frac{12G}{c^3}P^k + \hat{\partial}\left(\sigma\dot{\bar{\sigma}}\right) + 2\sigma\hat{\partial}\dot{\bar{\sigma}} \qquad (3\text{-}1)$$

Interpretamos esta componente de Weyl como

$$\dot{\psi}_1^{0k} = P^k + i\dot{J}^k \qquad (3\text{-}2)$$

Es decir que parte real de esta última ecuación es el momento lineal, mientras que la parte imaginaria representa la derivada del momento angular. Podemos entonces separar (3-1) en sus partes real e imaginaria. Entonces tenemos

$$P^k = -\frac{c^3}{12G}\dot{\psi}_{1R}^{0k} \qquad (3\text{-}3)$$

$$\dot{\psi}_{1I}^{0k} = \dot{J}^k \qquad (3\text{-}4)$$

Si el momento angular se conserva tendríamos que

$$\dot{J}^k = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

Para completar la expresión para el momento (3-3) procedemos en la siguiente sección a calcular ψ_1^{0k}.

4-Calculo de ψ_1^{0k}

En esta etapa podemos preguntarnos, cual es la noción que tenemos del centro de masa. Si usamos la ecuación de transformación que relaciona la componente dipolar del tensor de Weyl en coordenadas de Bondi y en coordenadas Newman-Unti (NU) [1][4].

$$\psi_1^{*0} = \psi_1^0 - 3L\psi_2^0 + 3L^2\psi_3^0 \qquad (4\text{-}1)$$

Sobre esta ecuación establecemos la noción para el centro de masa, considerando que en coordenadas NU el momento dipolar de masa es cero. Es decir el centro es aquel punto del espacio tiempo para el cual $\psi_1^{*0} = 0$; para las componentes con l=1.

Entonces, con esta noción de centro de masa, la ecuación (4-1) se puede escribir como

$$\psi_1^0 = 3L\psi_2^0 - 3L^2\psi_3^0 \qquad (4\text{-}2)$$

usando la función L para el caso axisimétrico como

$$L = \xi^k Y_{1k}^1 + \ldots \qquad (4\text{-}3)$$

Donde además aplicamos las ecuaciones (1-5) y (1-6). Realizamos todos los productos que aparecen con los armónicos esféricos tensoriales. Como estamos tratando con el caso con axisimetría descartamos todos aquellos términos para los cuales aparece $\in_{ijk}$. Entonces la ecuación con los términos para l=1 que obtenemos es relativamente sencilla

$$\psi_1^{0k} = -\frac{6\sqrt{2}}{c^2} GM\xi^k + \frac{18}{5}\xi^i \bar{\sigma}^{ik} \tag{4-4}$$

Por otro lado, podemos usar la ecuación de campo (1-1), y de ella obtener la expresión para el momento lineal según la relación (3-3); esta es

$$\dot{\psi}_1^{0i} = -\frac{12G}{c^3}P^i + \frac{6}{7}\left[\sigma^{lj}\dot{\bar{\sigma}}^{ilj} + \sigma^{ijk}\dot{\bar{\sigma}}^{jk}\right] + \left[\frac{216}{35}\sigma^{ijk}\dot{\bar{\sigma}}^{jk} - \frac{72}{5}\sigma^{lj}\dot{\bar{\sigma}}^{llj}\right] \tag{4-5}$$

Donde ahora reemplazamos el primer miembro por (4-4) y encontramos

$$P^k = Mv_R^k - \frac{3\sqrt{2}c^2}{10G}\left(\xi^i\bar{\sigma}^{ik}\right)_R^{\cdot} + \frac{\sqrt{2}c^2}{14G}\left[\sigma^{lj}\dot{\bar{\sigma}}^{ilj} + \sigma^{ijk}\dot{\bar{\sigma}}^{jk}\right]_R +$$

$$+\frac{\sqrt{2}c^2}{12G}\left[\frac{216}{35}\sigma^{ijk}\dot{\bar{\sigma}}^{jk} - \frac{72}{5}\sigma^{lj}\dot{\bar{\sigma}}^{llj}\right]_R \tag{4-6}$$

Donde el punto indica derivación respecto de u y el subíndice R refiere a la parte real.

Del mismo modo podemos trabajar con la relación (3-4); pero esta no resulta del todo satisfactoria físicamente, para la definición del momento angular y su conservación.

5. Definicion del Momento Angular

Para el momento angular adoptamos la definición del mismo usando la integral de Komar para un espacio tiempo axisimétrico, es decir

$$J = \frac{1}{16\pi} \lim_{S\to\infty} \int_S \nabla^a \xi_{(\phi)}{}^b . dS_{ab} \qquad (5\text{-}1)$$

Donde $\xi^{\alpha}_{(\phi)}$ es un vector rotacional de Killing que satisface la ecuación de Killing $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0$. Donde S es la esfera, sobre la que se definen los vectores $l^a; n^a; m^a; \overline{m}^a$. (Figura1).

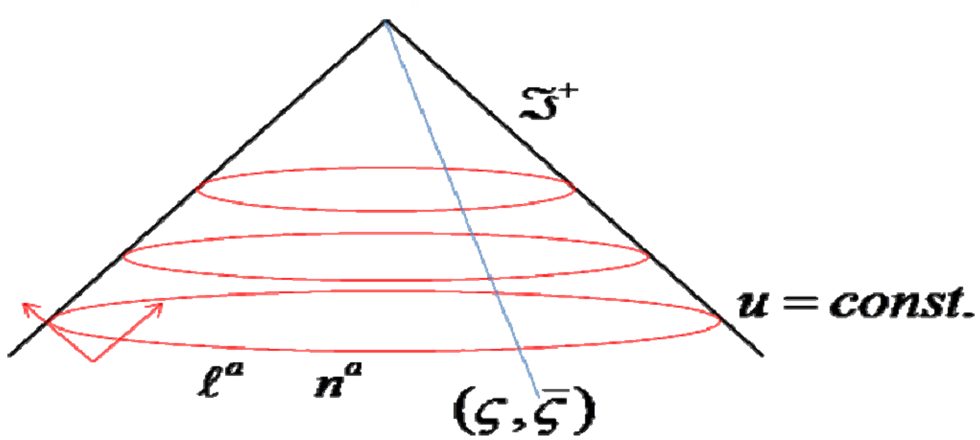

Figura 1.

Sobre el integrando podemos trabajar de la siguiente manera:

Usando la ecuación de Killing podemos ademas escribir que

$$\nabla^a \nabla_{(a}\xi_{b)} = 2R_b^c \xi_c \tag{5-2}$$

Si definimos ahora una nueva cantidad

$$H_{ab} = \in_{abcd} R_e^d \xi^e \tag{5-3}$$

Entonces usando la integral de Komar escribimos

$$\int_S \nabla^a \xi_{(\phi)}{}^b dS_{ab} = 2\int_\Sigma R_c^a \xi_{(\phi)}{}^c d\Sigma_a \tag{5-4}$$

Donde S es el borde de la superficie Σ. Aplicando el teorema de Stokes

$$\int_s \nabla_a v^a = \int_{\delta S} \in_{bcde} v^b \tag{5-5}$$

Donde $\in_{bcde}$ es el elemento de volumen. Entonces escribiendo $H_{ab}^* = \in_{ab}^{cd} H_{cd}$ la integral se puede escribir como

$$\int_S d\left(H_{ab}^*\right) d\Sigma^{ab} = 2\int_{\delta S} \in_{ab}^{cd} H_{cd}\, dx \tag{5-6}$$

O bien que

$$\int_{\delta\Sigma} H^{*}{}_{ab} dx^{ab} = 2\int_{\Sigma} \in_{bcde} R_a^b \xi^a d\Sigma^{cde} \qquad (5\text{-}7)$$

Volviendo entonces a la definición de momento angular dado por la integral de Komar para un espacio tiempo axisimétrico, y considerando dos superficies $\delta\Sigma^-$ y $\delta\Sigma^+$, por las cuales pasa la línea mundo, tendremos el cálculo del flujo de momento angular por ellas. Es decir

$$\Delta J = \int_{\delta\Sigma^+} H^{*}{}_{ab} dx^{ab} - \int_{\delta\Sigma^-} H^{*}{}_{ab} dx^{ab} = 2\int_{\Sigma} \in_{bcde} R_a^b \xi^a d\Sigma^{cde} \qquad (5\text{-}8)$$

Donde si el flujo de momento angular en la primera superficie es igual que en la segunda superficie

$$2\int_{\Sigma} \in_{bcde} R_a^b \xi^a d\Sigma^{cde} = 0 \qquad (5\text{-}9)$$

Donde es claro que $\Delta J = 0$. Indica la conservación del momento angular.

Si escribimos la relación entre el tensor de Ricci y el Tensor energía-momento, es decir

$$R_{ab} = 8\pi\left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T\right) \qquad (5\text{-}10)$$

Entonces el cambio en el momento angular es para nosotros

$$\Delta J = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \in_{bcde} T_a^b \xi^a d\Sigma^{cde} \qquad (5\text{-}11)$$

Donde vemos claramente la relación entre el cambio en el momento angular y el tensor tensión-energía-momento.

Adoptamos entonces una nueva definición para el momento angular, que en principio difiere de la que anteriormente trabajábamos.

Ahora usamos la definición del observable $O[N^a]$dado para un espacio tiempo axisimétrico no estacionario; usando la integral de Komar [5]; como la definición del momento angular

$$O[N^a] = \frac{1}{k}\int_S [-k_a m^a\left(\overline{\psi}_1^0 + \overline{\sigma}\hat{\partial}\sigma\right) - k_a \overline{m}^a\left(\psi_1^0 + \sigma\partial\overline{\sigma}\right)]dS = J^a \qquad (5\text{-}12)$$

Donde $k_a m^a$es imaginario puro.

Como vemos estamos adoptando una nueva definición del momento angular, como la parte imaginaria de $\psi_1^0 + \sigma\hat{\partial}\overline{\sigma}$. Esta definición es diferente de la mencionada anteriormente con la ecuación (3-2). Esta diferencia se hace aún más notable si tomamos la derivada con respecto de u y obtenemos la ecuación para el cambio en el momento angular. Si derivamos la anterior tenemos usando la ecuación de campo

$$\dot{\psi}_1^0 = -\partial\psi_2^0 + 2\sigma\partial\dot{\overline{\sigma}} \qquad (5\text{-}13)$$

Tenemos que

$$\dot{\psi}_1^0 = -\partial\Psi + \partial^3\overline{\sigma} + \partial\left(\sigma\dot{\overline{\sigma}}\right) + 2\sigma\partial\dot{\overline{\sigma}} \qquad (5\text{-}14)$$

De donde la expresión para el cambio en el momento angular para un espacio tiempo axisimétrico no estacionario sería

$$\dot{J}^{a} = \frac{1}{k}\int_{S} -k_{a}m^{a}[-\partial\Psi + \partial(\bar{\sigma}\dot{\sigma}) + 3\bar{\sigma}\partial\dot{\sigma} + \dot{\bar{\sigma}}\partial\sigma]dS - k_{a}\bar{m}^{a}[-\partial\Psi + \partial(\sigma\dot{\bar{\sigma}}) + 3\sigma\partial\dot{\bar{\sigma}} + \dot{\sigma}\partial\bar{\sigma}]dS \qquad (5\text{-}15)$$

Donde el producto de los vectores $k_{a}m^{a}$ es imaginario puro. De esta ecuación es claro que para un espacio tiempo axisimétrico estacionario, $\dot{J}^{k} = 0$.

Conclusiones

Las consideraciones hechas para el caso axisimétrico llevan a una notable simplificación de las ecuaciones, lo cual mejora su interpretación física en los términos de mas bajo orden. Para el caso axisimétrico encontramos, considerando el shear asintótico con términos σ_{2} y σ_{3}, la ecuación para la pérdida de masa y la no conservación del momento lineal.

Luego considerando una noción de la definición del centro de masa, proponemos una definición como partes real e imaginaria de $\dot{\psi}_{1}^{\,0}$ para todos los términos con l=1 del momento lineal y la ecuación de cambio del momento angular. En base a ello, encontramos para el caso axisimétrico una ecuación para el momento lineal.

En cambio proponemos una definición para el momento angular usando la integral de Komar para una espacio-tiempo axisimétrico, por considerar que esta es Físicamente más satisfactoria según la definición de un vector rotacional de Killing que contempla la condición de axisimetría, es decir la independencia de las ecuaciones del ángulo ϕ.

Por último escribimos la ecuación para el cambio en el momento angular. Se continúa trabajando para demostrar la conservación del momento angular para un espacio tiempo axisimétrico no estacionario.

Referencias

[1] **E. T. Newman and G. Silva-Ortigozza**. Twisting null geodesic congruences and the Einstein-Maxwell equations. Class. Quantum Grav. 23(2006) 91-113.

[2] **E. T. Newman and G. Silva-Ortigozza**. Tensorial Spin-s Harmonics. Gr-qc/0508028 v1. Agosto 2005

[3] **E. T. Newman and K. P. Tod**. Asymptotically Flat Space-Times. General Relativity and Gravitation. Vol. 2 .1980

[4] **C. Kozameh; E. Newman**. Electromagnetic Dipole Radiation Fields Shear-Free Congruences and Complex Center of Charge World Lines. Gr-qc/0504093 v1. Abril 2005

[5] **L. Szabados**; On a class of 2-surface observables in general relativity. Class. Quantum Grav. 23 (2006) 2291–2302.

[6] **Eric Poisson**; A Relativistic`s Toolkit. Department of Physicis. University of Gueolph. Cambrige University Press. 2004