



UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA
.....

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tesis doctoral

**ARBITRAJE Y CUBRIMIENTO. ENFOQUE NO
PROBABILÍSTICO**

Lic. Iván L. Degano

1 de Marzo de 2018

Directores:

Dr. Sebastián Ferrando

Dr. Alfredo L. González

*“A thing appears random only through
the incompleteness of our knowledge.”*

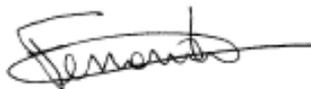
Baruch Spinoza

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional de Mar del Plata y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta universidad u otra. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales durante el periodo comprendido entre el 15/10/2013 y el 11/12/2017, bajo la dirección del Dr. Sebastián E. Ferrando (Ryerson University, Canadá) y la co-dirección del Dr. Alfredo L. González (UNMdP).

Esta tesis fue llevada a cabo con una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

Lic. Iván L. Degano
Doctorando



Dr. Sebastián E. Ferrando
Director

Dr. Alfredo L. González
Co-director

Agradecimientos

No es fácil el camino del doctorado, se necesita empeño, lucha y deseo, pero sobre todas las cosas apoyo como el que yo he recibido durante este tiempo. Por eso es que no quiero dejar de agradecer a aquellas personas que me han brindado su cariño.

A mis padres Laura y Luis, que siempre me aconsejaron y me mostraron el mejor camino a seguir. Por ser mi guía, por detenerme cuando debía y por empujarme cuando tenía miedo de seguir mis sueños. A mi amor Pame, por su ejemplo de superación incansable, por su comprensión y confianza, por su amor y amistad incondicional, porque sin su apoyo no hubiera sido posible la culminación de esta tesis. Porque dentro de sus problemas de doctorado siempre tuvo un espacio para mis problemas de doctorado, porque siempre tuvo un rato para hacerme feliz. A los amigos que me dio la matemática: Agus, Ale, Cata, Ceci y Naty. Gracias a ellos nunca faltó un mate para pasar las tardes de estudio, ni una palabra de apoyo cuando las cosas no salían.

Por último, a mis directores Alfredo y Sebastián mi gratitud y cariño por su infinita paciencia y profesionalidad. Porque tomaron la difícil tarea de iniciarme en esta aventura que es la investigación matemática, y me pusieron a disposición todas las herramientas para que esta tesis salga adelante. Porque Alfredo siempre estuvo a 3 pasos de mi oficina para debatir todos los problemas matemáticos (y los no matemáticos), y porque Sebastián me brindó la oportunidad de trabajar en Canadá, abriéndome incluso las puertas de su casa. Quiero agradecer también a los docentes del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata por formarme y brindarme su calidez.

Iván

ARBITRAJE Y CUBRIMIENTO. ENFOQUE NO PROBABILÍSTICO

Iván L. Degano

Resumen

La presente tesis estudia el intervalo de precios justos para un derivado financiero a partir de un conjunto general de trayectorias de precios de los activos que componen una cartera de inversión. Sobre este conjunto no se asume ninguna hipótesis probabilística ni topológica. El enfoque permite que las negociaciones se produzcan un número finito de veces, no necesariamente fijo ni igualmente espaciados en el tiempo. Se define a los mercados con estas características como mercados trayectoriales, permitiendo que una gran variedad de modelos no probabilísticos existentes sean vistos como casos particulares de los mismos. El trabajo provee resultados sobre ausencia de arbitraje, basados únicamente en las propiedades del conjunto de trayectorias, y estudia la invarianza de esta condición bajo transformaciones sobre el mercado. Se define el concepto de mercado 0-neutral y se relaciona con las condiciones del mercado conocidas.

Para un derivado dado, existe un intervalo de posibles precios justos bajo la hipótesis de mercado 0-neutral, que es más general que el requerimiento usual de no arbitraje. Las cotas de este intervalo quedan dadas por una optimización minimax global. Varias propiedades de estas cotas son presentadas. La tesis desarrolla un método recursivo para evaluarlas, el cual consiste en reducir la optimización global a optimizaciones minimax locales por medio de programación dinámica. El trabajo incluye varios ejemplos y varias salidas numéricas que ilustran su aplicabilidad. Como particularidad se muestra numéricamente el efecto que tiene la presencia de oportunidades de arbitraje en las cotas del intervalo de precios.

ARBITRAGE AND HEDGING. NON-PROBABILISTIC APPROACH

Iván L. Degano

Abstract

The present thesis studies the interval of fair prices for contingent claims defined on a general trajectory space representing prices of a risky asset traded in an investment portfolio. No prior probabilistic or topological assumptions are placed on the trajectory set. The approach allows trading at a finite number of occasions but not bounded in number nor necessarily equally spaced in time. Trajectory markets are introduced for which several non-probabilistic markets models existing in the literature are nested as particular cases. The thesis provides natural trajectory based conditions providing arbitrage-free trajectorial markets and studies transformations over the market for which the arbitrage-free condition is invariant. 0 -neutral markets are defined and related to arbitrage-free market conditions.

For a given option, there exists an interval bounding the set of possible fair prices under the 0 -neutral condition, the latter is a more general condition than the usual no-arbitrage requirement. The price bounds are defined by a global minmax optimization. Several properties of the interval bounds are obtained. The thesis develops a backward recursive method to evaluate the interval bounds. The global minmax optimization, defining the price interval, is reduced to a local minmax optimization via dynamic programming. Several examples are presented along with numerical output illustrating the relevance of the new approach. In particular, the effect of the presence of arbitrage on the interval bounds is illustrated.

Índice general

Prefacio	V
Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
Índice de Figuras	XIV
Introducción	XVII
1. Mercados Trayectoriales	1
1.1. Un Modelo para Varios Activos	1
1.2. Arbitraje y 0-neutralidad	7
1.3. Información del mercado	11
1.4. Condiciones Locales	15
1.5. Invarianza de las Condiciones Locales	23
2. Valuación de Derivados Financieros	33
2.1. Derivados Financieros	33
2.2. Cotas Minimax Globales	36
2.3. Cotas Minimax Condicionales	45
2.4. Caracterización de π^Z	47
3. Evaluación de Cotas Minimax	53
3.1. Cotas Minimax Dinámicas	53
3.1.1. Formulación Dinámica	60
3.2. Envolverte Convexa	65

3.3. Algoritmo Iterativo	74
3.3.1. Caso $d = 1$	76
3.3.2. Caso $d = 2$	78
4. Ejemplos: Mercados por Intervalos	83
4.1. Mercados por Intervalos	83
4.1.1. Mercados de Tiempo Fijo	91
4.1.2. Variación Cuadrática Trayectorial (VCT)	97
4.2. Mercados Finitos por Intervalos	98
4.3. Resultados Numéricos	100
4.3.1. Nodos de Arbitraje	102
4.3.2. Cubrimiento	105
4.3.3. Volatilidad Variable	106
A. Análisis Convexo	111
A.1. Conjuntos Convexos	111
A.2. Funciones Convexas	116
A.3. Convexidad y Optimización	120
Bibliografía	123
Índice Alfabético	129

Índice de figuras

4.1. Conjuntos de trayectorias con diferentes valores de variación cuadrática para $s_0 = 1$, $w_0 = 0$, $\delta = 0,0058$, $N_1 = 300$, $N_2 = 200$ y $p=3$	101
4.2. Convergencia de las cotas minimax como función de N_2 para diferentes valores de p	102
4.3. Cotas minimax como función de s_0 para diferentes valores de p	103
4.4. Cotas minimax como función de s_0 para $p = 1$ en presencia de nodos de arbitraje.	104
4.5. Cotas minimax como función de s_0 para $p = 3$ en presencia de nodos de arbitraje.	104
4.6. Valores de cubrimiento del derivado financiero para $V = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) + 0,01$ y $V = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) - 0,03$	106
4.7. Valores de cubrimiento del derivado para $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) - 0,01$ y $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) + 0,03$	107
4.8. Valores de cubrimiento del derivado para $V = \bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ y $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ con las estrategias óptimas.	107
4.9. Cotas minimax como función de $v_\theta = n_\theta \delta^2$ en el mercado \mathcal{M}_θ para un call europeo con $K = 1$ y una opción mariposa con $K_1 = 1$ y $K_2 = 1,1$	108
4.10. Cotas minimax como función de $Q_\theta = \{n_1 \delta^2, \dots, n_\theta \delta^2\}$ en el mercado \mathcal{M}_{Q_θ} para un call europeo con $K = 1$ y una opción mariposa con $K_1 = 1$ and $K_2 = 1,1$	109

Introducción

Las matemáticas en el mundo financiero aparecen, sobre todo, como una herramienta indispensable para valorar, analizar y entender el riesgo asociado a las fluctuaciones de cotización, o de valor de los instrumentos de los mercados financieros. Se trata de fluctuaciones debidas a las presiones que los distintos agentes del mercado ejercen sobre los precios de compra y venta, en función de sus intereses y expectativas y de la información de que disponen. En finanzas, el término riesgo se emplea de manera precisa para referirse a todo tipo de incertidumbre sobre el precio o el valor de un determinado activo o posición, o sobre cualquier otra característica que afecte a la operatividad del mercado.

El uso de las matemáticas en el mundo financiero ha adquirido una enorme importancia en los años recientes, sobre todo en la conexión con los sofisticados mercados de derivados y en la gestión del riesgo. Los derivados no son dinero, ni son inversiones en acciones, son inversiones en inversiones. Por derivado financiero se entiende a un contrato entre dos partes, un comprador y un vendedor, a partir del cual el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo en un tiempo futuro a un determinado precio. A finales del siglo XVIII, ya se negociaban en Nueva York derivados sobre instrumentos financieros, como acciones, y no sólo sobre materias primas tangibles. Pero los frecuentes incumplimientos de los contratos recomendaron la prohibición de su negociación. Desde 1973 funciona en Chicago un mercado organizado de derivados financieros. Hoy en día, hay muchos mercados con amplísimos volúmenes de negociación. Los instrumentos derivados son ahora indispensables para la gestión eficaz del riesgo financiero.

El pionero en introducir las matemáticas dentro de los mercados de derivados fue Louis Bachelier (1870-1946). En su tesis doctoral Bachelier (1900) construyó un modelo estocástico para precios de activos, donde incorporó informalmente el movimiento Browniano. Pero no fue hasta 1973, con las publicaciones de Black & Scholes (1973), y

Merton (1973) que se dio una nueva dimensión a la matemática financiera. Su principal idea fue la de contemplar la valoración y la cobertura como dos aspectos de la misma cuestión: el valor del derivado y de la cobertura es la cantidad de dinero mínima de la que es necesario disponer para, con una inversión inicial adecuada y una gestión dinámica juiciosa, generar a vencimiento, y pase lo que pase, los flujos requeridos por el derivado. Su enfoque usa la condición de no arbitraje, la cual establece que, si los flujos contingentes de un activo financiero son siempre superiores a los de otro, entonces el precio que el mercado está dispuesto a pagar por la opción sobre el primero será superior a la del segundo. Por este trabajo Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel de Economía en 1997.

Pero la efectividad de la ecuación de Black y Scholes depende del propio comportamiento del mercado. Si las suposiciones tras el modelo dejan de cumplirse, la ecuación no puede ser utilizada. Por un lado, el modelo depende de un parámetro que no es directamente observable llamado *volatibilidad*. Es natural entonces que el modelado de la incertidumbre se concentre en este parámetro. En particular, los llamados *modelos de volatibilidad incierta* han sido considerado por varios autores, como por ejemplo, Avellaneda *et al.* (1995) y Lyons (1995). Por otro lado el modelo supone que el mercado es completo, algo que es atípico en los mercados de hoy en día. Los mercados son en sí incompletos, lo que se debe principalmente a dos causas importantes:

- No hay suficientes activos en el mercado para cubrir la incertidumbre.
- Las estrategias de negociación son limitadas o no son ideales debido a la discretización, saltos o costos de transacción, etc.

En un mercado completo libre de arbitraje, independientemente del modelo que se elija, cualquier derivado financiero es alcanzable y puede ser evaluado por medio de la única medida de martingala que existe (ver Harrison & Pliska (1981)), obteniendo un único precio. En un mercado incompleto libre de arbitraje, en cambio, existe un intervalo de precios para cualquier derivado financiero. Tal intervalo queda determinado por las cotas de subcobrimiento y supercobrimiento introducidas originalmente en Karoui & Quenez (1995). En el caso de un derivado europeo, la cota superior coincide con el supremo sobre el conjunto de medidas de martingala equivalentes de la esperanza del derivado, mientras que la cota inferior queda determinada por el ínfimo de las esperanzas sobre el mismo conjunto.

La importancia de la construcción del modelo también radica en el tamaño del intervalo de precios, ya que sus cotas podrían degenerar en los valores absolutos dados por Merton (1973), los cuales son independientes del modelo elegido, como se puede ver en Eberlein & Jacod (1997) para tiempo continuo. En Carassus *et al.* (2007) y Carassus & Vargiolu (2010), los autores dan un método recursivo por medio de programación dinámica para calcular la cota de supercubrimiento para opciones europeas y americanas, en caso de mercados donde las negociaciones solo están permitidas un número fijo y finito de veces. Mediante el mismo, los autores mencionados demuestran que para modelos estocásticos donde el rango de valores del proceso de precios es acotado, el intervalo de precios no se trivializa. Otra alternativa para reducir el tamaño del intervalo es permitir negociar con derivados líquidos, con el objetivo de obtener mejores aproximaciones de un derivado no líquido. En Kahalé (2017) se da un método basado en programación convexa para calcular las cotas del intervalo y su correspondiente estrategia de cubrimiento para un derivado que puede darse en términos de otros derivados.

El problema de encontrar un valor para las opciones financieras es en realidad un problema de control óptimo bajo incertidumbre que tradicionalmente es tratado en entornos estocásticos, donde la evolución de los activos financieros es descripta, en el caso de modelos libre de arbitraje, por una martingala en espacios de probabilidad filtrados. Por citar algunas referencias, en Henclova (2005), Pennanen (2011) y Dahl (2016) el problema es tratado como una optimización estocástica. Pero en la mayoría de las ocasiones, la medida de probabilidad no se conoce. Por lo tanto, es natural preguntarse cuando puede desarrollarse una teoría de precios interesante sin asumir ninguna hipótesis probabilística. En espacios finitos, por ejemplo, los resultados básicos de cubrimiento y valoración de opciones pueden ser deducidos con simple álgebra (ver Cutland & Roux (2013)) o por medio de programación lineal (ver por ejemplo (Pliska, 1997, Capítulo 1), Ritchken (1985), Ritchken & Kuo (1988), King (2002) o Dahl (2013)). En el modelo binomial de Cox *et al.* (1979), simples ecuaciones lineales alcanzan para deducir las condiciones de no arbitraje, la medida de martingala equivalente, la estrategia de cubrimiento y también, el único precio del derivado. Hay algunos trabajos recientes que debilitan, o eliminan directamente las hipótesis estocásticas. Como ejemplo, mencionaremos las versiones robustas del Teorema Fundamental de Valoración de Activos (FTAP por sus siglas en inglés) que se han desarrollado en Acciaio *et al.* (2013), Riedel (2014), Burzoni *et al.* (2015), Burzoni *et al.* (2017) y Che-

ridito *et al.* (2017). Esta literatura se concentra principalmente en la representación dual de las cotas del intervalo.

Si no se conoce la medida de probabilidad, es posible acceder a otra información con menos detalle, por ejemplo, se puede conocer el conjunto de valores posibles para los activos, pero no su correspondiente distribución de probabilidad. Bajo estas circunstancias, proponemos plantear en esta tesis el problema de encontrar el precio de un derivado financiero bajo un enfoque minimax. Dentro de esta visión del problema, se asume que la peor situación posible, relativa a un conjunto dado, puede ocurrir para cualquiera de las decisiones que tome el inversor. Entonces el objetivo es encontrar la mejor de estas peores situaciones, o, en otras palabras, encontrar la mínima de las máximas pérdidas posibles. En este sentido, hubo algunos acercamientos específicos e independientes al tema. En Howe *et al.* (1994), Howe *et al.* (1996) y Howe & Rustem (1997) se utiliza una optimización minimax para un modelo de uno y dos pasos sobre un conjunto de trayectorias específico. Por otra parte, en Britten-Jones & Neuberger (1996) se plantea un enfoque minimax para un modelo que tiene como principal característica la variación cuadrática de los precios (también se puede ver una exposición sobre este tema en Rebonato (2004)). En Kolokoltsov (1998) y Roorda *et al.* (2005), se introducen los *mercados por intervalos* y, para esa clase de mercados y un solo activo riesgoso, dieron una caracterización del intervalo de precios para opciones europeas con una función de pago convexa y no decreciente. También se puede encontrar una exposición de estos trabajos en el libro Bernhard *et al.* (2013).

En esta tesis extenderemos el enfoque minimax al caso de una cartera con varios activos financieros. Desarrollaremos resultados efectivos que permitan evaluar el intervalo de precios para un derivado financiero en mercados incompletos a partir del conjunto de trayectorias de precios, sin pedir restricciones topológicas adicionales, lo que muestra la naturalidad del enfoque. Las cotas del intervalo en este contexto quedarán dadas por una optimización minimax, y coinciden con las cotas de subcobrimiento y supercobrimiento definidas en los entornos estocásticos.

Las versiones robustas del FTAP hacen énfasis en mostrar los resultados clásicos sin una medida de probabilidad. Principalmente caracterizan las cotas del intervalo por medio de sus representaciones duales asumiendo no arbitraje, estableciendo una conexión con medidas de martingala (Burzoni *et al.* (2017), Cox *et al.* (2016) y Riedel (2014)). Pero también es importante la tarea básica de caracterizar los conjuntos de trayectorias con hipótesis simples y generales que garanticen la ausencia de oportuni-

des de arbitraje en un mercado trayectorial. En otras palabras, es de interés establecer una relación entre la ausencia de arbitraje y una condición geométrica local sobre el camino que sigue la trayectoria. Esto es logrado en esta tesis, junto a otros resultados en el mismo sentido.

El modelo propuesto ofrece más generalidad a la hora de encontrar un precio para una opción financiera, ya que se puede asegurar la existencia del intervalo aún en presencia de ciertas oportunidades de arbitraje, esto es, aquellas situaciones en las que el inversor invierte sin correr el riesgo de perder dinero. La coexistencia de arbitraje y el intervalo de precios es una consecuencia del punto de vista pesimista del enfoque minimax y refleja una situación financiera básica. Los inversores involucrados en la transacción de la opción prefieren los beneficios seguros del contrato antes que las potenciales ganancias del arbitraje. El fenómeno anterior, lo reflejaremos con la noción de *mercado 0-neutral*, el cual fue presentado asociado a la definición de arbitraje en Britten-Jones & Neuberger (1996), y definido formalmente para el caso de un activo en Ferrando *et al.* (2014). Esta noción resulta ser más débil que la noción de arbitraje. Presentaremos varias propiedades de estos mercados y mostraremos numéricamente su efecto sobre las cotas de precios.

Muchos modelos asumen negociaciones continuas, lo que es por supuesto una idealización. Pero otros tantos, asumen una discretización fija del tiempo en donde se producen las negociaciones. En esta tesis, consideraremos una versión discreta de los momentos donde las negociaciones podrán ser llevadas a cabo, pero estos momentos no serán fijos sino que dependerán de la trayectoria de precios. Asumir estas condiciones hace que el momento de liquidación de la estrategia también dependa de la trayectoria. En este sentido, Cheridito (2003) y Bender *et al.* (2011) definen una clase de estrategias en un entorno probabilístico que llaman *estrategias casi simples* que cumplen con estas propiedades. Este enfoque dentro de un entorno determinístico fue estudiado en Ferrando *et al.* (2014) y en Degano *et al.* (2018) para el caso de un solo activo riesgoso, donde se justifica detalladamente el modelo. Con el objetivo de encontrar un algoritmo de cálculo para las cotas del intervalo de precios, asumiremos un número máximo de pasos permitidos, pero en Ferrando *et al.* (2014) se trabaja sobre una hipótesis más débil. Quedará para futuras investigaciones debilitar esta hipótesis sobre los mercados.

Aunque en Ferrando *et al.* (2014) se estudia una conexión entre el enfoque no probabilístico con el clásico enfoque estocástico, es importante remarcar sus diferencias. En realidad, los conjuntos de trayectorias están implícitos en los modelos estocásticos. Es

por ello que las definiciones locales que presentaremos sobre el conjunto de trayectorias se pueden traducir como el análogo de la definición de una martingala. En los modelos estocásticos estas condiciones no han jugado un rol preponderante. Nosotros logramos caracterizar el conjunto de trayectorias con hipótesis simples y generales que garantizan no arbitraje. Por otra parte, en un entorno probabilístico las cotas del intervalo de precios deben evaluarse por medio de ínfimos y supremos esenciales que, en general, son computacionalmente intratables. Nuestro enfoque y resultados no requieren tratar con conjuntos de medida cero y entonces las complicaciones de esa naturaleza son evitadas.

Presentaremos además resultados rigurosos que permiten evaluar las cotas del intervalo. Los resultados sugieren un algoritmo de cálculo iterativo, por medio de programación dinámica, en términos de optimizaciones minimax para un conjunto general de trayectorias. Por medio del análisis convexo, proponemos un procedimiento para resolver cada una de las optimizaciones del método iterativo. Este procedimiento es válido aún en el caso de infinitos puntos y reduce la optimización minimax por una simple maximización.

El algoritmo permite evaluar el intervalo de precios para derivados europeos dependientes de la trayectoria de precios de los activos, y cualquier conjunto de trayectorias. El enfoque que proponemos se puede adaptar a una gran cantidad de posibles modelos. En particular, los modelos construidos por Roorda *et al.* (2005) y Britten-Jones & Neuberger (1996) pueden ser visto como casos especiales de nuestro enfoque. En este sentido presentaremos un modelo que relaja la hipótesis de una variación cuadrática fija usada en Britten-Jones & Neuberger (1996), permitiendo trayectorias con distintas variaciones cuadráticas. Por último, estudiaremos ejemplos numéricos que ilustran la viabilidad del enfoque y alguna de sus características.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se encuentra el formalismo general de esta tesis, junto con la notación que se utilizará. El principal objetivo del capítulo es presentar los resultados más importantes sobre la teoría de arbitraje sin asumir ninguna hipótesis probabilística, ni topológica, ni de cardinalidad sobre el conjunto de trayectorias, siguiendo una comparación con los resultados que se obtienen en los clásicos modelos probabilísticos. Además se introduce la noción de mercado 0-neutral. En él también se estudia qué transformaciones sobre los conjuntos de precios mantienen las características del mercado.

En el Capítulo 2 se presenta la definición de derivados financieros, junto a algunos ejemplos. El capítulo define nociones tales como arbitraje relativo y precio justo, las

cuáles llevan a establecer de manera natural el intervalo de precios justos para un derivado en función de cotas minimax. El Teorema 2.1 da las condiciones para que tal intervalo exista. Además se introducen las cotas condicionales minimax con el objetivo de caracterizar completamente el intervalo de precios.

El Capítulo 3 establece, bajo condiciones apropiadas, como calcular las cotas minimax por medio de un procedimiento iterativo. Para ello se definen en primer lugar las cotas minimax dinámicas. También se describe como implementar este procedimiento iterativo por medio del análisis convexo. El capítulo 4 describe una adaptación de algunos modelos sencillos presentes en la literatura, tales como los mercados por intervalos y los mercados de variación cuadrática. Además, se muestran algunos resultados numéricos que se desprenden de la implementación del modelo. Por último, el Apéndice contiene resultados complementarios y técnicos del Análisis Convexo que se utilizan a lo largo de esta tesis.

Capítulo 1

Mercados Trayectoriales

En este capítulo estudiaremos la estructura matemática de un modelo dinámico de un mercado financiero. Consideraremos un número finito de activos cuyos precios al inicio de las transacciones son conocidos. La incertidumbre de los precios futuros la representaremos por un conjunto de sucesiones de números reales, que llamaremos trayectorias. Las estrategias de negociación serán reajustadas sucesivamente, teniendo en cuenta la información disponible en cada etapa. La eficiencia del mercado requiere que tales estrategias dinámicas no generen oportunidades de arbitraje. En la Sección 1.3 y 1.4 mostraremos algunos resultados que buscan caracterizar mercados libres de arbitraje a partir del conjunto de trayectorias. A su vez, introduciremos un concepto más general sobre el mercado, que llamaremos 0-neutral, y presentaremos resultados que lo caracterizan.

1.1. Un Modelo para Varios Activos

Consideraremos un mercado compuesto de $d + 1$ activos en un intervalo de tiempo $[0, T]$. El modelo será discreto en el sentido que indexaremos los momentos de negociación por números enteros. El precio del i -ésimo activo será modelado a través de una sucesión de números reales. Dado $s_0 = (s^0, s^1, s^2, \dots, s^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, vamos a denotar por S una sucesión de vectores en \mathbb{R}^{d+1} tal que

$$S_i = (S_i^0, S_i^1, S_i^2, \dots, S_i^d) \text{ con } S_0 = s_0.$$

Una estrategia de negociación es una sucesión de funciones sobre el conjunto de trayectorias en \mathbb{R}^{d+1} , la cual denotaremos por

$$\Phi = (H^0, H) = \{(H_i^0, H_i^1, \dots, H_i^d)\}_{i \geq 0}.$$

Cada coordenada H_i^j , $0 \leq j \leq d$ representa el valor de la estrategia en la etapa i para el j -ésimo activo. Tanto los valores de los activos como las cantidades invertidas pueden tomar valores en subconjuntos generales de números reales.

Las etapas de negociación podrán ser desencadenadas por eventos arbitrarios propios del mercado, sin la necesidad de estar asociados directamente al tiempo. Para lograr este mayor grado de generalidad agregaremos una nueva fuente de incertidumbre en las trayectorias, la cual denotaremos por $W = \{W_i\}$. En términos financieros, esta nueva variable puede representar cualquier valor observable de interés, como por ejemplo el volumen de transacciones, el tiempo, variación cuadrática de la trayectorias, etc. Como nuestro objetivo final es buscar el precio de derivados financieros, los cuales tienen un horizonte de tiempo finito, necesitaremos una fuente de información extra que indique cuando una trayectoria alcanza el tiempo final T . Utilizaremos entonces un número natural m para indicar la etapa en la que la trayectoria alcanza el tiempo T . Esta nueva variable juega un rol fundamental a la hora de calcular el intervalo de precio justos, aunque no interviene en las propiedades del mercado.

Definición 1.1 (Conjunto de trayectorias). Dado $s_0 \in \mathbb{R}^{d+1}$ y $w_0 \in \Omega_0$, un *conjunto de trayectorias* \mathcal{S} es un subconjunto de

$$\mathcal{S}_\infty(s_0, w_0) \equiv \{\mathbf{S} = \{(S_i, W_i, m)\}_{i \geq 0} : S_i \in \Sigma_i, W_i \in \Omega_i, m \in \Theta, (S_0, W_0) = (s_0, w_0)\}$$

donde $\Sigma = \{\Sigma_i\}$ es una familia de subconjuntos de \mathbb{R}^{d+1} , $\Omega = \{\Omega_i\}$ es una familia de conjuntos y $\Theta \subseteq \mathbb{N}$. A los elementos de \mathcal{S} los llamaremos *trayectorias*.

Es importante hacer notar que si $\tilde{\mathbf{S}} = \{(\tilde{S}_i, \tilde{W}_i^1, \tilde{m})\}$ y $\hat{\mathbf{S}} = \{(\hat{S}_i, \hat{W}_i, \hat{m})\}$ son dos trayectorias, $\tilde{\mathbf{S}}_i$ podría suceder en un tiempo diferente a $\hat{\mathbf{S}}_i$, aunque $\tilde{W}_i = \hat{W}_i$. Es decir, los índices estarán asociados a etapas de negociación pero no estarán directamente relacionados con el tiempo, solamente asumiremos que la etapa $i+1$ ocurre temporalmente después de la etapa i .

Definiremos $M : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{N}$ la proyección sobre la tercer coordenada de \mathbf{S} , es decir $M(\mathbf{S}) = m$. Los resultados y propiedades que aparecen en este capítulo solo involucran la primer coordenada S_i . Seguiremos utilizando de todas formas la Definición anterior para no confundir al lector.

Para construir un modelo de mercado adecuado vamos a pedir que toda estrategia sea no anticipativa. La no anticipatividad de las estrategias expresa el hecho de que las inversiones deben realizarse al principio de cada periodo, de manera que no puedan anticiparse a futuros cambios de precios.

Definición 1.2 (Conjunto de estrategias). Sea \mathcal{S} un conjunto de trayectorias, una estrategia Φ es una sucesión de (pares de) funciones $\Phi \equiv \{(H_i^0, H_i)\}_{i \geq 0}$ con $H_i^0 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ y $H_i : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que para todo $\mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \mathcal{S}$, tal que $\mathbf{S}'_i = \mathbf{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, con $k < \min\{M(\mathbf{S}), M(\mathbf{S}')\}$, se tiene que $\Phi_k(\mathbf{S}) = \Phi_k(\mathbf{S}')$.

El valor de $H_i^j(\mathbf{S})$ de una estrategia Φ corresponde a la cantidad de j -ésima acción que se tiene durante el $(i + 1)$ -ésimo periodo entre i e $i + 1$. Entonces $H_i^j(\mathbf{S})S_i^j$ es la cantidad invertida en la j -ésima acción en el periodo $i + 1$, mientras que $H_i^j(\mathbf{S})S_{i+1}^j$ es el valor obtenido al final del periodo. Entonces, el valor total de la estrategia Φ al comienzo del periodo $i + 1$ es

$$H_i^0(\mathbf{S})S_i^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_i = H_i^0(\mathbf{S})S_i^0 + \sum_{j=1}^d H_i^j(\mathbf{S})S_i^j,$$

y al final del periodo, el valor de la estrategia Φ cambiará a

$$H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} = H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + \sum_{j=1}^d H_i^j(\mathbf{S})S_{i+1}^j.$$

Continuando con esta dinámica, en la próxima instancia de negociación el inversor elegirá invertir Φ_{i+1} . En general, el valor de $H_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}$ puede ser diferente al valor de $H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}$, lo que significa que se agregó o se retiró alguna suma de dinero de la estrategia. Sin embargo, para muchas aplicaciones esta situación no está permitida. Por ejemplo, si el objetivo es buscar un precio “justo” para un cierto contrato financiero, este valor deberá ser el mínimo necesario para cubrir las obligaciones que genere el contrato, es decir, que cualquier inyección o retiro de dinero afectará esta propiedad.

Esto último nos lleva a definir el siguiente concepto.

Definición 1.3 (Estrategias autofinanciadas). Sea \mathcal{H} un conjunto de estrategias para un conjunto de trayectorias \mathcal{S} . Diremos que $\Phi \in \mathcal{H}$ es *autofinanciada* si para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ e $i \geq 0$,

$$H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} = H_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}. \quad (1.1)$$

La propiedad de autofinanciación significa que la estrategia es rebalanceada de tal manera que su valor es preservado. De esta propiedad se desprende que las ganancias y pérdidas acumuladas resultantes de las fluctuaciones de precios son las únicas fuentes de variación de la estrategia

$$\begin{aligned} H_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} & - (H_i^0(\mathbf{S})S_i^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_i) = \\ & = H_i^0(\mathbf{S})(S_{i+1}^0 - S_i^0) + H_i(\mathbf{S}) \cdot (S_{i+1} - S_i). \end{aligned}$$

Si sumamos la anterior ecuación desde $i = 0$ hasta la etapa k obtenemos que

$$H_k^0(\mathbf{S})S_k^0 + H_k(\mathbf{S}) \cdot S_k = H_0^0S_0^0 + H_0 \cdot S_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (H_i^0(\mathbf{S})\Delta_i S^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i S), \quad (1.2)$$

para $k \geq 0$, donde $\Delta_i S^0 = S_{i+1}^0 - S_i^0$ y $\Delta_i S = S_{i+1} - S_i$. El valor $H_0^0S_0^0 + H_0 \cdot S_0$ puede interpretarse como la inversión inicial para obtener el valor de Φ_0 .

Mencionaremos a continuación algunos ejemplos de estrategias que utilizaremos más adelante.

Ejemplo 1.1. 1. La estrategia nula $\Phi = 0$, tal que

$$0(\mathbf{S}) = \{(0, \mathbf{0})\}_{i \geq 0} \text{ para todo } \mathbf{S} \in \mathcal{S}$$

donde $\mathbf{0}$ es el vector nulo de \mathbb{R}^d .

2. Dados $h \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, definimos por estrategia constante $\Phi = \mathbf{h}$ a la función

$$\mathbf{h}(\mathbf{S}) = \{(h, \mathbf{h})\}_{i \geq 0} \text{ para toda } \mathbf{S} \in \mathcal{S}.$$

3. Sea $\Phi = \{(H_i^0, H_i)\}_{i \geq 0}$ una estrategia autofinanciada. Definimos por $-\Phi$ a la sucesión de funciones $\{(-H_i^0, -H_i)\}_{i \geq 0}$. Es fácil ver que $-\Phi$ es una estrategia. Veamos que es autofinanciada. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ e $i \geq 0$, entonces como Φ es autofinanciada

$$\begin{aligned} -H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 - H_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} & = -(H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}) \\ & = -(H_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}) \\ & = -H_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 - H_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $-\Phi$ es una estrategia autofinanciada.

4. Sean $\hat{\Phi} = \{(\hat{H}_i^0, \hat{H}_i)\}_{i \geq 0}$ y $\tilde{\Phi} = \{(\tilde{H}_i^0, \tilde{H}_i)\}_{i \geq 0}$ dos estrategias. Definimos $\Phi \equiv \hat{\Phi} + \tilde{\Phi}$ a la sucesión

$$\Phi = \{\hat{H}_i^0 + \tilde{H}_i^0, \hat{H}_i + \tilde{H}_i\}_{i \geq 0}.$$

Veamos que Φ es una estrategia. Sean $\mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \mathcal{S}$, tal que $\mathbf{S}'_i = \mathbf{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, con $k < \min\{M(\mathbf{S}), M(\mathbf{S}')\}$. Se sigue de que $\hat{\Phi}$ y $\tilde{\Phi}$ son estrategias, que

$$\Phi_k(\mathbf{S}) = \hat{\Phi}_k(\mathbf{S}) + \tilde{\Phi}_k(\mathbf{S}) = \hat{\Phi}_k(\mathbf{S}') + \tilde{\Phi}_k(\mathbf{S}') = \Phi_k(\mathbf{S}').$$

Entonces Φ es una estrategia. Supongamos ahora que $\hat{\Phi}$ y $\tilde{\Phi}$ son autofinanciadas, entonces, dado $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ e $i \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} H_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} &= (\hat{H}_i^0(\mathbf{S}) + \tilde{H}_i^0(\mathbf{S}))S_{i+1}^0 + (\hat{H}_i(\mathbf{S}) + \tilde{H}_i(\mathbf{S})) \cdot S_{i+1} = \\ &= \hat{H}_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + \hat{H}_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} + \tilde{H}_i^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + \tilde{H}_i(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} = \\ &= \hat{H}_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + \hat{H}_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} + \tilde{H}_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + \tilde{H}_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1} = \\ &= (\hat{H}_{i+1}^0(\mathbf{S}) + \tilde{H}_{i+1}^0(\mathbf{S}))S_{i+1}^0 + (\hat{H}_{i+1}(\mathbf{S}) + \tilde{H}_{i+1}(\mathbf{S})) \cdot S_{i+1} = \\ &= H_{i+1}^0(\mathbf{S})S_{i+1}^0 + H_{i+1}(\mathbf{S}) \cdot S_{i+1}. \end{aligned}$$

Para la teoría de finanzas, lo importante es el compartamiento de los precios de los activos respecto al precio de algún otro. Es conveniente entonces introducir la versión descontada de las sucesiones de precios. Vamos a construir una versión normalizada de los precios, dividiendo a los mismos por el precio de un activo adecuado, el cual se denomina *numéraire*. Por ejemplo, en muchos casos es de utilidad seleccionar el valor de una cuenta bancaria como numéraire.

Con este fin, asumiremos a partir de aquí que $S_i^0 > 0$ para todo $i \geq 0$. Esta hipótesis nos permitirá usar a S^0 como numéraire. Para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, construiremos una sucesión de precios relativos $X(\mathbf{S}) = \{(X(S_i), W_i, m)\}_{i \geq 0}$ donde $X : D \subseteq \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ es la función definida por

$$X(S_i) \equiv \left(\frac{S_i^1}{S_i^0}, \dots, \frac{S_i^d}{S_i^0} \right), \quad D \equiv \{S_i \in \mathbb{R}^{d+1} : S_i^0 > 0\}. \quad (1.3)$$

Ahora, $X^j(S_i)$ representa el valor del j -ésimo activo en unidades del numéraire.

Dado $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, denotaremos por $V_k^\Phi(\mathbf{S})$ el valor relativo de la cartera asociada a la estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ dado por

$$V_k^\Phi(\mathbf{S}) \equiv H_k^0(\mathbf{S}) + H_k(\mathbf{S}) \cdot X(S_k). \quad (1.4)$$

Claramente $V_k^\Phi(\mathbf{S}) = \frac{\Phi_k(\mathbf{S}) \cdot S_k}{S_k^0}$, entonces $V_k^\Phi(\mathbf{S})$ puede ser interpretado como el valor de la estrategia al comienzo de la etapa k expresado en unidades del numéraire. Además, notaremos por $G_k^\Phi(\mathbf{S})$ a las ganancias generadas hasta la etapa k asociadas a $\Phi \in \mathcal{H}$ para una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, es decir

$$G_k^\Phi(\mathbf{S}) \equiv \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

donde $\Delta_i^X S = X(S_{i+1}) - X(S_i)$. $G_k^\Phi(\mathbf{S})$ refleja, en términos del numéraire, las ganancias netas acumuladas por medio de la estrategia Φ al principio de la k -ésima etapa.

Observación 1.1. Notemos que, para cualquier estrategia Φ y cualquier trayectoria \mathbf{S} se cumple que $G_k^\Phi(\mathbf{S}) = -G_k^{-\Phi}(\mathbf{S})$.

Una estrategia autofinanciada para una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ también resultará autofinanciada para la sucesión $X(\mathbf{S})$.

Proposición 1.1. *Sea \mathcal{S} un espacio de trayectorias, y sea Φ una estrategia sobre \mathcal{S} . Entonces son equivalentes:*

1. Φ es autofinanciada.
2. $H_{i-1}^0(\mathbf{S}) + H_{i-1}(\mathbf{S}) \cdot X(S_i) = H_i^0(\mathbf{S}) + H_i(\mathbf{S}) \cdot X(S_i)$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ e $i \geq 0$.
3. $V_k^\Phi(\mathbf{S}) = V_0^\Phi + G_k^\Phi(\mathbf{S}) = H_0^0 + H_0 \cdot X(S_0) + \sum_{i=0}^{k-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S$ para todo $k \geq 0$.

Demostración. Notemos que la Proposición 5.7 de Föllmer & Schied (2011) es válida aún en casos donde no tengamos un mercado indexado por etapas de tiempo prefijadas. Por lo tanto la misma idea utilizada en ese resultado se aplica a nuestro contexto. \square

Observación 1.2. De la Proposición anterior, sabemos que la componente H^0 de una estrategia Φ autofinanciada satisface que

$$H_k^0(\mathbf{S}) - H_{k-1}^0(\mathbf{S}) = -(H_k(\mathbf{S}) - H_{k-1}(\mathbf{S})) \cdot X(S_k). \quad (1.6)$$

Dado que

$$H_0^0 = V_0^\Phi - H_0 \cdot X(S_0), \quad (1.7)$$

la sucesión H^0 queda completamente determinada por la inversión inicial V_0^Φ y H por medio de las ecuaciones anteriores.

Definición 1.4 (Mercado trayectorial). Dado $s_0 \in \mathbb{R}^{d+1}$, $w_0 \in \Omega_0$, un conjunto de trayectorias $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ y un conjunto de estrategias \mathcal{H} , diremos que $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ es un *mercado trayectorial* si satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, la coordenada $S_i^0 > 0$ para todo $i \geq 0$.
2. Toda $\Phi \in \mathcal{H}$ es autofinanciada y $\Phi = 0$ pertenece a \mathcal{H} .
3. Para cada $(\mathbf{S}, \Phi) \in \mathcal{M}$ existe $N_\Phi(\mathbf{S}) \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi_k(\mathbf{S}) = \Phi_{N_\Phi}(\mathbf{S}) = 0$ para todo $k \geq N_\Phi(\mathbf{S})$.

Diremos que el mercado es *semiacotado* si para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ existe $n_\Phi \in \mathbb{N}$ tal que $N_\Phi(\mathbf{S}) \leq n_\Phi$ para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y que es *n-acotado* si $N_\Phi(\mathbf{S}) \leq M(\mathbf{S}) \leq n$ para cada par $(\mathbf{S}, \Phi) \in \mathcal{M}$ con $n \in \mathbb{N}$.

La tercera propiedad de la Definición anterior expresa que el ajuste de la cartera asociada a la estrategia Φ para una trayectoria \mathbf{S} terminará en, o antes del, periodo $N_\Phi(\mathbf{S}) - 1$, lo que significa que se liquidó la estrategia en, o antes de, el periodo $N_\Phi(\mathbf{S})$. En tal caso la estrategia correspondiente será llamada *liquidada*. La definición de mercado *n-acotado* será de utilidad a la hora de trabajar con derivados financieros.

Observación 1.3. Observemos que la propiedad de mercado semiacotado está relacionada con la noción de que cada N_Φ sea inicialmente acotado, definido en (Ferrando *et al.*, 2014, Definición 17). Se ve fácilmente que si un mercado trayectorial es semiacotado entonces N_Φ es inicialmente acotado para todo $\Phi \in \mathcal{H}$.

1.2. Arbitraje y 0-neutralidad

Con el objetivo de que los mercados trayectoriales sean razonables desde un punto de vista económico, pediremos a los mismos que satisfagan algunos criterios. Por ejemplo, el modelo podría ser incoherente si el inversor fuera capaz de generar una ganancia en una transacción, sin correr riesgo alguno de perder dinero. Este es el caso de existencia de estrategias dominantes en el mercado.

Definición 1.5 (Estrategias Dominantes). Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, diremos que $\Phi \in \mathcal{H}$ es una *estrategia dominante* si $V_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) > V_0^\Phi$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

Notemos que una estrategia dominante no es razonable desde el punto de vista económico: un inversor que comienza con un capital inicial V_0^Φ no debería tener garantizada una manera de conseguir un capital mayor al capital inicial. Un mercado trayectorial que contenga estrategias dominantes no puede ser un modelo realista.

Debido a lo anterior, tiene sentido centrar nuestra atención en modelos que no contengan este tipo de estrategias. La siguiente Definición, al igual que la anterior, es una adaptación dinámica de la definida en Pliska (1997).

Definición 1.6 (Ley de precio único). Diremos que un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ cumple la *ley de precio único* si no existen dos estrategias $\tilde{\Phi}, \hat{\Phi} \in \mathcal{H}$ tal que $V_{N_{\tilde{\Phi}}}^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) = V_{N_{\hat{\Phi}}}^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S})$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ pero $V_0^{\tilde{\Phi}} > V_0^{\hat{\Phi}}$.

De la Definición anterior se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial tal que*

- *para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ se tiene que $-\Phi \in \mathcal{H}$, y*
- *para cualquiera dos estrategias $\hat{\Phi}, \tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ se tiene que $\hat{\Phi} + \tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$.*

Entonces, si \mathcal{M} no contiene estrategias dominantes, vale la ley de precio único.

Demostración. La demostración es una generalización de (Pliska, 1997, (1.12)). \square

En otras palabras, si la ley de precio único no se cumple, entonces existirá al menos una estrategia dominante. El enunciado recíproco no necesariamente es cierto debido a que se puede tener una estrategia dominante en un mercado que satisfaga la ley de precio único (ver (Pliska, 1997, Ejemplo 1.5)).

Consideremos nuevamente un mercado que no contenga estrategias dominantes. Es claro entonces que no puede contener estrategias que permitan generar un capital final mayor que el capital inicial. Pero este mercado podría contener estrategias que no permitan perder dinero, y que permitan una ganancia solo para alguna de las trayectorias posibles. En otras palabras, el inversor podría tener la posibilidad de generar una ganancia sin la necesidad de incurrir en un riesgo de pérdida. Tal oportunidad de inversión es llamada oportunidad de arbitraje.

Definición 1.7 (Estrategia de arbitraje). Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, $\Phi \in \mathcal{H}$ es una *estrategia de arbitraje* si:

- $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}, V_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) \geq V_0^\Phi.$

- $\exists \mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que $V_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}^*) > V_0^\Phi$.

Diremos que \mathcal{M} es *libre de arbitraje* si \mathcal{H} no contiene estrategias de arbitraje.

La existencia de tales oportunidades de arbitraje pueden deberse a ineficiencias del mercado, en el sentido de que ciertos instrumentos financieros no han sido valorados en una forma razonable. De las definiciones se sigue trivialmente la siguiente relación.

Proposición 1.3. *Si el mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ es libre de arbitraje, entonces no contiene estrategias dominantes.*

En esta tesis, propondremos otro criterio para los mercados, originalmente presentado en Britten-Jones & Neuberger (1996) asociado a la definición de arbitraje, y luego definido formalmente para el caso de un activo en Ferrando *et al.* (2014). Este criterio dice que la mayor de las mínimas ganancias posibles que puede obtenerse por medio de cualquiera de las estrategias disponible en el mercado es 0.

Definición 1.8 (0-Neutral). Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial. Diremos que \mathcal{M} es *0-neutral* si

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) = \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\sum_{i=0}^{N_\Phi(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right] = 0. \quad (1.8)$$

Si la mayor de las mínimas ganancias es cero, la definición de mercado 0 neutral está diciendo intuitivamente que para cada estrategia hay al menos una posibilidad de que el inversor pierda dinero, o en el mejor de los casos, no pierda nada.

El siguiente resultado es de suma importancia dentro de esta tesis.

Proposición 1.4. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado sin estrategias dominantes. Entonces \mathcal{M} es 0-neutral.*

Demostración. Vamos a demostrarlo por el contrarrecíproco. Notemos que si $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ es un mercado trayectorial, $0 \in \mathcal{H}$ y entonces siempre se cumple que

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) \geq 0.$$

Es decir que si \mathcal{M} no es 0-neutral, existe una estrategia Φ tal que

$$\inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) > 0.$$

Por lo tanto $G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) > 0$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Luego

$$V_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) = V_0^\Phi + G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) > V_0^\Phi$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Entonces Φ es una estrategia dominante. \square

Por otra parte, un mercado 0-neutral implica la ley de precio único.

Proposición 1.5. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial 0-neutral tal que para cualquiera dos estrategias $\hat{\Phi}, \tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ se tiene que $\hat{\Phi} - \tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$. Entonces \mathcal{M} cumple con la ley de precio único.*

Demostración. Vamos a demostrar el resultado por el contrarrecíproco. Supongamos que \mathcal{M} no cumple con la ley de precio único. Entonces existen dos estrategias $\tilde{\Phi}, \hat{\Phi} \in \mathcal{H}$ tal que $V_{N_{\tilde{\Phi}}}^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) = V_{N_{\hat{\Phi}}}^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S})$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $V_0^{\tilde{\Phi}} > V_0^{\hat{\Phi}}$. Entonces

$$V_{N_{\hat{\Phi}}}^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S}) - V_{N_{\tilde{\Phi}}}^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) = (V_0^{\hat{\Phi}} - V_0^{\tilde{\Phi}}) + (G_{N_{\hat{\Phi}}}^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S}) - G_{N_{\tilde{\Phi}}}^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S})) = 0.$$

Luego,

$$G_{N_{\hat{\Phi}}}^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S}) - G_{N_{\tilde{\Phi}}}^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) = V_0^{\tilde{\Phi}} - V_0^{\hat{\Phi}} > 0$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Sea $\Phi = \hat{\Phi} - \tilde{\Phi}$, por hipótesis $\Phi \in \mathcal{H}$, y

$$\begin{aligned} G_{N_{\hat{\Phi}}}^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S}) - G_{N_{\tilde{\Phi}}}^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) &= \sum_{i=0}^{N_{\hat{\Phi}}(\mathbf{S})-1} \hat{H}_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S - \sum_{i=0}^{N_{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S})-1} \tilde{H}_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \\ &= \sum_{i=0}^{N_{\Phi}(\mathbf{S})-1} (\hat{H}_i(\mathbf{S}) - \tilde{H}_i(\mathbf{S})) \cdot \Delta_i^X S \\ &= G_{N_{\Phi}}^{\Phi}(\mathbf{S}), \end{aligned}$$

donde $N_{\Phi}(\mathbf{S}) = \max\{N_{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}), N_{\hat{\Phi}}(\mathbf{S})\}$. Entonces

$$G_{N_{\Phi}}^{\Phi}(\mathbf{S}) = V_0^{\tilde{\Phi}} - V_0^{\hat{\Phi}} > 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S},$$

de donde se tiene que

$$\inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_{N_{\Phi}}^{\Phi}(\mathbf{S}) > 0.$$

Por lo tanto

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_{N_{\Phi}}^{\Phi}(\mathbf{S}) > 0,$$

y entonces \mathcal{M} no es 0-neutral. \square

En otras palabras, si la ley de precio único no se cumple, entonces el mercado no será 0-neutral. La vuelta, no siempre es verdadera, ya que la ley de precio único puede valer aún en mercados que no sean 0-neutral, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2. Consideremos un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{S} = \{\tilde{\mathbf{S}}; \widehat{\mathbf{S}}\}$, donde $(s_0, w_0) = ((1, 1), w_0)$ y

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = ((1, 2), \widetilde{W}_1), \widehat{\mathbf{S}}_1 = ((1, 3), \widehat{W}_1) \text{ y } N_\Phi(\tilde{\mathbf{S}}) = N_\Phi(\widehat{\mathbf{S}}) = 1 \quad \forall \Phi \in \mathcal{H}.$$

Vamos a suponer que \mathcal{H} contiene cualquier función no anticipativa y autofinanciada. Entonces para cada $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ existe un único $\Phi \in \mathcal{H}$ (y entonces un único precio inicial V_0) tal que

$$\begin{cases} x_1 = V_1^\Phi(\tilde{\mathbf{S}}) = V_0^\Phi + H_0(\tilde{\mathbf{S}}) \\ x_2 = V_1^\Phi(\widehat{\mathbf{S}}) = V_0^\Phi + 2H_0(\widehat{\mathbf{S}}). \end{cases}$$

Notemos que de la no anticipatividad de Φ , se tiene que $H_0(\tilde{\mathbf{S}}) = H_0(\widehat{\mathbf{S}})$. Entonces la ley de precio único vale. Sin embargo, si $(x_1, x_2) = (1, 2)$, entonces $H_0 = 1 > 0$ y

$$\inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_1^\Phi(\mathbf{S}) = 1 > 0 \Rightarrow \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} G_1^\Phi(\mathbf{S}) > 0.$$

Por lo tanto el mercado \mathcal{M} no es 0-neutral

En resumen, bajo las hipótesis adecuadas, tenemos la siguiente cadena de implicaciones para un mercado trayectorial:

$$\boxed{\text{Libre de Arbitraje} \Rightarrow \text{Sin estrategias dominantes} \Rightarrow \text{0-neutral} \Rightarrow \text{Precio único}}$$

1.3. Información del mercado

Antes de presentar algunos resultados sobre mercados libres de arbitraje y mercados 0-neutral, es necesario introducir un concepto que será de utilidad a la hora de estudiarlos. La idea es sumamente sencilla: vamos a tratar de obtener información del mercado, analizando la información del mismo a partir de una etapa k .

Más allá de que el conjunto \mathcal{S} represente la colección de todas las posibles trayectorias, en realidad, el mercado solo seguirá una, por ejemplo \mathbf{S} . En cualquier etapa $k < M(\mathbf{S})$, el inversor no conocerá la información completa de \mathbf{S} , sino solo la información parcial $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$. Con respecto a futuras etapas, lo único que conocen los inversores en la etapa k es que \mathbf{S} es un elemento del conjunto

$$\mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \equiv \{\mathbf{S}' \in \mathcal{S} : \mathbf{S}'_i = \mathbf{S}_i, 0 \leq i \leq k \text{ y } M(\mathbf{S}') > k\} \subseteq \mathcal{S}.$$

A medida que el tiempo avanza, habrá más información disponible sobre el mercado, entonces el inversor aumentará sus conocimientos sobre posibles futuros escenarios. Esto se expresa matemáticamente como

$$\mathcal{S}_{(\mathbf{S},k')} \subseteq \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$$

para $k' > k$. Al par (\mathbf{S}, k) lo llamaremos *nodo* y al conjunto $\mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ lo llamaremos *conjunto de trayectorias condicionado en el nodo (\mathbf{S}, k)* .

La idea de condicionar un conjunto de trayectorias se centra en el concepto de información. Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, y cualquier trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, el subconjunto $\mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ de \mathcal{S} depende solo del nodo (\mathbf{S}, k) . Es decir, para cada trayectoria $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ conocemos la información de la historia de sus valores hasta la etapa k , resultando ser la misma para cada una de esas trayectorias.

Habiendo definido los conjuntos de trayectorias condicionados, podemos considerar el submercado de \mathcal{M} , cuyas trayectorias son un subconjunto condicionado de \mathcal{S} y definir un análogo de 0-neutralidad para mercados condicionales.

Definición 1.9 (0-Neutral Condicional). Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial. Dado $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, diremos que \mathcal{M} es *condicionalmente 0-neutral* en (\mathbf{S}, k) si

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}} \left[\sum_{i=k}^{N_{\Phi}(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S' \right] = 0. \quad (1.9)$$

Si bien no tenemos una definición condicional para libre de arbitraje, podemos caracterizarlos a partir de lo que suceda a partir de una etapa. La siguiente Proposición muestra que si no existen oportunidades de arbitraje en cada una de las etapas, viéndolas como mercados de un paso, entonces el mercado será libre de arbitraje.

Proposición 1.6. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial semiacotado. Si para cada trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y cada $k \geq 0$ se tiene que

1. $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' \leq 0$ para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ o,
2. existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ tal que $H_k(\mathbf{S}^*) \cdot \Delta_k^X S^* < 0$,

para toda $\Phi \in \mathcal{H}$, entonces \mathcal{M} es libre de arbitraje.

Demostración. Supongamos que existe una estrategia de arbitraje $\Phi \in \mathcal{H}$ y que cada nodo (\mathbf{S}, k) cumple con la propiedad 1. o 2. Sea

$$k = \min \{ k' : V_{k'+1}^{\Phi}(\mathbf{S}) \geq V_0^{\Phi} \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S} \text{ y } \exists \mathbf{S}^* \in \mathcal{S}, \quad V_{k'+1}^{\Phi}(\mathbf{S}^*) > V_0^{\Phi} \}.$$

Sabemos que $k < \infty$, pues, por hipótesis, existe $n_\Phi \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \leq \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} N_\Phi(\mathbf{S}) \leq n_\Phi.$$

Luego, $V_k^\Phi(\mathbf{S}) \leq V_0^\Phi(\mathbf{S})$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Sea \mathbf{S}^* la trayectoria que cumple que $V_{k+1}^\Phi(\mathbf{S}^*) > V_0^\Phi(\mathbf{S}^*)$. Entonces, se sigue de la Proposición 1.1 que

$$H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' = V_{k+1}^\Phi(\mathbf{S}') - V_k^\Phi(\mathbf{S}') \geq 0 \quad \forall \mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}^*, k)}$$

y

$$H_k(\mathbf{S}^*) \cdot \Delta_k^X S^* = V_{k+1}^\Phi(\mathbf{S}^*) - V_k^\Phi(\mathbf{S}^*) > 0,$$

Lo que es un absurdo. Luego \mathcal{M} es libre de arbitraje. \square

Podemos probar la implicación inversa de la Proposición anterior, pero para ello vamos a necesitar asumir que un tipo especial de estrategias sean posibles de utilizar. Consideremos $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, vamos a definir a la función $\xi^{(\tilde{\mathbf{S}}, k)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ por

$$\xi_i^{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}(\mathbf{S}) = \begin{cases} \xi & \text{si } i = k \text{ y } \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}.$$

Dado V_0 , podemos obtener por medio de las ecuaciones (1.6) y (1.7) una sucesión de funciones $\{\xi_i^0\}_{i \geq 0}$ de tal manera que la función $\Xi^{(\mathbf{S}, k)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ dada por

$$\Xi^{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}(\mathbf{S}) = (\xi^0(\mathbf{S}), \xi^{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}(\mathbf{S}))$$

sea autofinanciada. Además, definiendo $N_{\Xi^{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}}(\mathbf{S}) = k+1$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, es fácil ver que $\Xi^{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}$ es no anticipativa. Denominaremos a este tipo de funciones como *estrategias restringidas*, en este caso al nodo $(\tilde{\mathbf{S}}, k)$.

Proposición 1.7. *Sea un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ tal que toda estrategia restringida pertenece a \mathcal{H} . Si existe $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, $k \geq 0$ y $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que*

- $\xi \cdot \Delta_k^X S' \geq 0$ para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, y
- existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $\xi \cdot \Delta_k^X S^* > 0$,

entonces el mercado tiene estrategias de arbitraje.

Demostración. Vamos a definir una función $\xi^{(\mathbf{S}, k)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ como

$$\xi_i^{(\mathbf{S}, k)}(\mathbf{S}') = \begin{cases} \xi & \text{si } i = k \text{ y } \mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad \text{para todo } \mathbf{S}' \in \mathcal{S}$$

Dado $V_0 = 0$, podemos obtener la estrategia restringida $\Xi^{(\mathbf{S},k)}$. Entonces, por hipótesis, $\Xi^{(\mathbf{S},k)}$ pertenece a \mathcal{H} . Luego, se sigue de la Proposición 1.1 que

$$V_{N_{\Xi^{(\mathbf{S},k)}}}^{\Xi^{(\mathbf{S},k)}}(\mathbf{S}') = \xi \cdot \Delta_k^X S' \geq 0,$$

para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}$ y existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$V_{N_{\Xi^{(\mathbf{S},k)}}}^{\Xi^{(\mathbf{S},k)}}(\mathbf{S}^*) = \xi \cdot \Delta_k^X S^* > 0.$$

Por lo tanto, $\Xi^{(\mathbf{S},k)}$ es una estrategia de arbitraje. \square

Para esta tesis los mercados 0-neutral resultarán de gran importancia. Es por ello, que también será de utilidad caracterizarlos.

Proposición 1.8 (Caracterización de Mercados 0-neutral). *Un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) si, y sólo si, para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{S}^\epsilon \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ tal que*

$$\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^\epsilon)-1} H_i(\mathbf{S}^\epsilon) \cdot \Delta_i^X S^\epsilon < \epsilon. \quad (1.10)$$

Demostración. Supongamos primero que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . De la definición se sigue que para cualquier $\epsilon > 0$

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} \left[\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}')-1} H_i(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \right] \leq 0 < \epsilon$$

para toda $\Phi \in \mathcal{H}$. Entonces para cada Φ existe $\mathbf{S}^\Phi \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^\Phi)-1} H_i(\mathbf{S}^\Phi) \cdot \Delta_i^X S^\Phi < \epsilon$$

para cualquier $\epsilon > 0$. Por lo tanto hemos probado la condición necesaria. Para la condición suficiente, sea $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ existe $\mathbf{S}^\epsilon \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^\epsilon)-1} H_i(\mathbf{S}^\epsilon) \cdot \Delta_i^X S^\epsilon < \epsilon.$$

Entonces para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} \left[\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}')-1} H_i(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \right] < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue elegido de manera arbitraria, se sigue que

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\sum_{i=k}^{N_{\Phi}(\mathbf{S}')-1} H_i(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \right] \leq 0$$

para toda $\Phi \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, como $0 \in \mathcal{H}$, concluimos que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . \square

1.4. Condiciones Locales

Las Proposiciones 1.7 y 1.8 sugieren mirar el mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ como una sucesión de submercados condicionales, y estudiar las condiciones de libre de arbitraje o 0-neutral a partir de cada uno de estos submercados. Consecuentemente vamos a definir condiciones sobre cada nodo (\mathbf{S}, k) en el mercado en términos de la convexidad de los precios. Vamos a denotar por $\Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ al conjunto

$$\Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \equiv \{\Delta_k^X S' : \mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}\} \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (1.11)$$

donde $\Delta_k^X S' = X(S'_{k+1}) - X(S'_k)$.

Las definiciones que siguen involucran la idea de clausura e interior relativo de la cápsula convexa. Recordemos que la cápsula convexa de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se define como el conjunto de todas las combinaciones convexas de los puntos de E , o, equivalentemente, el menor conjunto convexo que contiene a E y la notaremos por $\text{co } E$. A partir de aquí, utilizaremos la notación $\text{cl } E$ para notar la clausura topológica del conjunto E .

Por su parte, la idea del interior relativo es un poco diferente a la idea de interior que normalmente se define en cualquier curso de topología. El interior de un conjunto en \mathbb{R}^d es el conjunto de puntos que no están sobre su frontera. Es posible que un conjunto E en \mathbb{R}^d tenga dimensión m menor que d . En tal caso, el interior relativo de E hace referencia al interior de E visto como subconjunto de \mathbb{R}^m . Denotaremos al interior relativo de un conjunto E por $\text{ri } E$. En el Apéndice A se encuentran detallados los resultados sobre análisis convexo que utilizaremos en esta sección.

Dada una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y un número entero $k \geq 0$, llamaremos *locales* a las propiedades referidas a un nodo (\mathbf{S}, k) .

Definición 1.10 (Condiciones locales). Dado un conjunto de trayectorias \mathcal{S} , $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y un número entero $k \geq 0$.

- El nodo (\mathbf{S}, k) es llamado *libre de arbitraje* si $0 \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$. \mathcal{S} es llamado *localmente libre de arbitraje* si para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, el nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje.
- El nodo (\mathbf{S}, k) es llamado *0-neutral* si $0 \in \text{cl}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$. \mathcal{S} es llamado *localmente 0-neutral* si el nodo (\mathbf{S}, k) es 0-neutral para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$.

Un nodo que es 0-neutral pero que no es libre de arbitraje, se llamará *nodo de arbitraje*.

Notemos que un nodo libre de arbitraje siempre es 0-neutral. Las definiciones anteriores no son caprichosas, sino que responden a la extensión natural del caso $d = 1$, como veremos en el siguiente ejemplo.

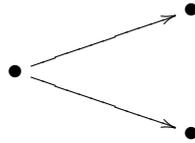
Ejemplo 1.3. Consideremos un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ con $d = 1$ y sea (\mathbf{S}, k) un nodo libre de arbitraje. Entonces

$$0 \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}) \subseteq \mathbb{R}.$$

Al ser un subconjunto de \mathbb{R} , $\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ resulta ser un intervalo. Luego, deben existir dos trayectorias $\mathbf{S}^{\text{do}} = (S^{\text{do}}, W^{\text{do}}, m^{\text{do}}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ y $\mathbf{S}^{\text{up}} = (S^{\text{up}}, W^{\text{up}}, m^{\text{up}}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $0 \in (\Delta_k^X S^{\text{do}}, \Delta_k^X S^{\text{up}})$, o, equivalentemente,

$$X(S_k) \in (X(S_{k+1}^{\text{do}}), X(S_{k+1}^{\text{up}})).$$

Gráficamente, el nodo (\mathbf{S}, k) lo podemos expresar de la siguiente forma,



indicando que en el paso $k + 1$, existe al menos un valor mayor y un valor menor que $X(S_k)$. Este tipo de nodos puede considerarse como la descripción de un juego justo, donde existe tanto la posibilidad de ganar como la posibilidad de perder.

Supongamos ahora que el nodo (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral. Entonces

$$0 \in \text{cl}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}) \subseteq \mathbb{R}.$$

Esta condición nos da dos escenarios posibles para el nodo (\mathbf{S}, k) . Por un lado, 0 puede pertenecer al interior relativo de $\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. En tal caso, obtenemos un nodo de iguales características al de un nodo libre de arbitraje. Por otro lado, 0 podría ser un punto de acumulación del conjunto $\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, ubicándose en su frontera. Entonces, como $\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ es un intervalo, tenemos alguna de las siguientes situaciones:

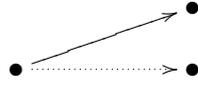
- $\Delta_k^X \hat{S} \geq 0$ para todo $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}$, lo que implica

$$X(\hat{S}_{k+1}) \geq X(S_k) \quad \forall \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)},$$

- $\Delta_k^X \hat{S} \leq 0$ para todo $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}$, lo que implica

$$X(\hat{S}_{k+1}) \leq X(S_k) \quad \forall \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)},$$

Esta situación se ve reflejada gráficamente de la siguiente forma para el primer caso



La aparición de la flecha punteada en el gráfico obedece a que no podemos asegurar que existe una trayectoria $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}$ tal que $X(\tilde{S}_{k+1}) = X(S_k)$. Tal situación se traduce en un juego no justo, en el que no existe la posibilidad de perder.

Nuestro objetivo entonces será obtener información del mercado a partir del conjunto de trayectorias. La siguiente Proposición muestra consecuencias que se desprenden de la Definición de nodo libre de arbitraje y nodo 0-neutral, que serán importantes en el resto de esta sección.

Proposición 1.9. *Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$.*

1. *Si (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje, entonces para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' = 0 \quad \forall S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)} \quad \text{ó} \quad \inf_{S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}} H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' < 0.$$

2. *Si (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral, entonces para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$\inf_{S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}} H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' \leq 0.$$

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{H}$. Para demostrar 1. vamos a ver que si (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje ocurre alguna de las siguientes dos situaciones

- $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' = 0$ para todo $S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}$, ó,
- existe $S^* \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^* < 0$.

Supongamos que la primera condición no se cumple. Si existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^* < 0$, entonces

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' < 0.$$

Si no, existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^* > 0$. Como $\Delta_k^X S^* \in \text{co } \Delta \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ y $0 \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)})$, se sigue de la Proposición A.4 que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$-\epsilon \Delta_k^X S^* \in \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}.$$

Luego se sigue del Teorema A.4 que existen $\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(d+1)} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que

$$-\epsilon \Delta_k^X S^* = \lambda_1 \Delta_k^X S^{(1)} + \dots + \lambda_{d+1} \Delta_k^X S^{(d+1)} \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Entonces

$$0 > -\epsilon (H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^*) = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i (H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^{(i)}).$$

Por lo tanto, debe existir algún $1 \leq j \leq d+1$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^{(j)} < 0$, y entonces

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' < 0.$$

Para mostrar 2., vamos a probar que si (\mathbf{S}, k) es un nodo 0 neutral, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\mathbf{S}^\epsilon \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^\epsilon < \epsilon$. Luego de la definición de ínfimo se sigue el resultado. Supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' \geq \epsilon$$

para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$. Sabemos de la hipótesis que $0 \in \text{cl}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)})$, entonces existe una sucesión $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $x_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$. Por el Teorema A.4, para cada x_j existen $\mathbf{S}^{(1,j)}, \dots, \mathbf{S}^{(d+1,j)} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que

$$x_j = \lambda_1^j \Delta_k^X S^{(1,j)} + \dots + \lambda_{d+1}^j \Delta_k^X S^{(d+1,j)} \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i^j = 1 \text{ y } \lambda_i^j \geq 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= H_k(\mathbf{S}) \cdot 0 = H_k(\mathbf{S}) \cdot \left(\lim_{j \rightarrow \infty} x_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} (H_k(\mathbf{S}) \cdot x_j) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i^j (H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^{(i,j)}) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i^j \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Lo que es un absurdo. Por lo tanto hemos probado 2. □

Observemos que de la Proposición anterior se sigue que si (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje, entonces puede existir alguna estrategia Φ que cumpla la condición $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S = 0$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Si $H_k(\mathbf{S}) \neq 0$, podemos encontrar alguna coordenada $H_k^j(\mathbf{S}) \neq 0$ y representar el j -ésimo activo como una combinación lineal de los restantes

$$X^j(S_{k+1}) - X^j(S_k) = -\frac{1}{H_k^j(\mathbf{S})} \sum_{i \neq j} H_k^i(\mathbf{S})(X^i(S_{k+1}) - X^i(S_k)).$$

En este sentido, el j -ésimo activo en ese nodo es “redundante” y puede ser omitido. La siguiente Definición puede encontrarse en Föllmer & Schied (2011) para el caso de un mercado de un paso.

Definición 1.11 (Mercado no redundante). Dado $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Llamaremos al nodo (\mathbf{S}, k) *no redundante* si para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{S} = 0$ para todo $\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, se cumple que $H_k(\mathbf{S}) = 0$. Diremos que el mercado \mathcal{M} es *no redundante* si todos sus nodos son no redundantes.

Las definiciones locales nos permiten asegurar condiciones globales sobre un mercado trayectorial. El siguiente Teorema caracteriza un mercado libre de arbitraje por medio de nodos libres de arbitraje.

Teorema 1.1 (Caracterización de Mercados Libres de Arbitraje). *Sea \mathcal{S} un espacio de trayectorias localmente libre de arbitraje (en el sentido de la Definición 1.10), y \mathcal{H} un conjunto de estrategias. Entonces el mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ es libre de arbitraje si \mathcal{M} es semiacotado. Además, si las estrategias restringidas pertenecen al conjunto \mathcal{H} entonces las condiciones son equivalentes.*

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{H}$. De la Proposición 1.9 tenemos que si \mathcal{S} es localmente libre de arbitraje, todo nodo (\mathbf{S}, k) cumplirá que

$$H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' = 0 \quad \forall S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \quad \text{ó} \quad \inf_{S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' < 0.$$

Si para todo nodo (\mathbf{S}, k) vale que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' = 0$ para todo $S' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ entonces

$$G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) = \sum_{i=0}^{N_\Phi(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S = 0$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Luego se sigue que

$$V_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) = V_0^\Phi + G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}) = V_0^\Phi$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, con lo que Φ no es una estrategia de arbitraje. Supongamos ahora que existe una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y un entero positivo k tal que en el nodo (\mathbf{S}, k) , $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S' \neq 0$ para cualquier $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Entonces existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $H(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^* < 0$. Sea k_1 el menor entero tal que el nodo (\mathbf{S}, k_1) cumple con lo anterior. Entonces existe $\hat{\mathbf{S}} \in (\mathbf{S}, k_1)$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k_1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} < 0.$$

Si para todo $k_1 < k \leq N_\Phi(\hat{\mathbf{S}})$, en el nodo $(\hat{\mathbf{S}}, k)$ vale $H_k(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X S' = 0$ para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k)}$, entonces

$$G_{N_\Phi}^\Phi(\hat{\mathbf{S}}) = \sum_{i=0}^{N_\Phi(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} < 0.$$

Si existe $k_1 < k \leq N_\Phi(\hat{\mathbf{S}})$ tal que $H_k(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X S^* < 0$ para algún $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k)}$, entonces, igual que antes, sea k_2 el entero más chico mayor que k_1 tal que el nodo $(\hat{\mathbf{S}}, k_2)$ cumple con lo anterior. Entonces existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k_2)}$ tal que $H_{k_2}(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_{k_2}^X \tilde{S} < 0$. Entonces

$$\sum_{i=0}^{k_2} H_i(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{S} < 0.$$

Si para todo $k_2 < k \leq N_\Phi(\tilde{\mathbf{S}})$, en el nodo $(\tilde{\mathbf{S}}, k)$ vale $H_k(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X S' = 0$ para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}$, entonces

$$G_{N_\Phi}^\Phi(\tilde{\mathbf{S}}) = \sum_{i=0}^{N_\Phi(\tilde{\mathbf{S}})-1} H_i(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{S} < 0.$$

Si existe $k_2 < k \leq N_\Phi(\tilde{\mathbf{S}})$ tal que $H(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X S^* < 0$ para algún $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}$, entonces podemos repetir el procedimiento. El proceso termina dado que por hipótesis existe $n_\Phi \in \mathbb{N}$ tal que $N_\Phi(\mathbf{S}) \leq n_\Phi$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$V_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}^*) = V_0^\Phi + G_{N_\Phi}^\Phi(\mathbf{S}^*) < V_0^\Phi,$$

de donde podemos concluir que Φ no es una estrategia de arbitraje. Por lo tanto \mathcal{M} es libre de arbitraje.

Consideremos ahora que \mathcal{M} es libre de arbitraje. Para demostrar la equivalencia, vamos a suponer que \mathcal{S} no es localmente libre de arbitraje y llegar a una contradicción. Si \mathcal{S} no es localmente libre de arbitraje, entonces existe alguna trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y un número natural $k \geq 0$ tal que $0 \notin \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$. Aplicando el Teorema de Separación A.3, existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que

- $\xi \cdot x \geq 0$ para todo $x \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)})$, y
- $\xi \cdot x^* > 0$ para algún $x^* \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)})$.

Luego, se sigue de la Proposición A.2 que para cada $x \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)})$

$$\alpha x + (1 - \alpha) \Delta_k^X S' \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)})$$

para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ y $\alpha \in (0, 1]$. Entonces

$$\xi \cdot (\alpha x + (1 - \alpha) \Delta_k^X S') = \alpha \xi \cdot x + (1 - \alpha) \xi \cdot \Delta_k^X S' \geq 0$$

para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ y $\alpha \in (0, 1]$. Por lo tanto $\xi \cdot \Delta_k^X S' \geq 0$ para todo $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$. Por otra parte, como $x^* \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)})$, existen $\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(d+1)} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ tal que

$$x^* = \lambda_1 \Delta_k^X S^{(1)} + \dots + \lambda_{(d+1)} \Delta_k^X S^{(d+1)} \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Entonces

$$\xi \cdot x^* = \lambda_1 \xi \cdot \Delta_k^X S^{(1)} + \dots + \lambda_{d+1} \xi \cdot \Delta_k^X S^{(d+1)} > 0.$$

Por lo tanto, $\xi \cdot \Delta_k^X S^{(j)} > 0$ para algún $j = 1, \dots, d+1$. Luego, de la Proposición 1.7, se sigue que \mathcal{M} contiene una estrategia de arbitraje, lo que es un absurdo. \square

Es importante ahora realizar un análisis similar para el caso de mercados trayectoriales localmente 0-neutral con el fin de buscar su relación con los mercados 0-neutral. El siguiente Teorema nos asegura que un mercado trayectorial será 0-neutral si es localmente 0-neutral.

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial semiacotado. Dados $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, supongamos que cada nodo (\mathbf{S}', k') con $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ y $k' \geq k$ es 0-neutral. Entonces \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . En particular, si \mathcal{M} es localmente 0-neutral, entonces \mathcal{M} es 0-neutral.*

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{H}$ y $\epsilon > 0$. Sabemos de la hipótesis que el nodo (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral, entonces se sigue de la Proposición 1.9 que existe $\mathbf{S}^{(1)} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S^{(1)} < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces si $N_\Phi(\mathbf{S}^{(1)}) = k+1$, se tiene

$$\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^{(1)})-1} H_i(\mathbf{S}^{(1)}) \cdot \Delta_i^X S^{(1)} < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

y de la Proposición 1.8 se sigue que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . Si $N_\Phi(\mathbf{S}^{(1)}) > k + 1$, por hipótesis el nodo $(\mathbf{S}^{(1)}, k + 1)$ es 0-neutral. Entonces, por la misma razón que antes existe $\mathbf{S}^{(2)} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}^{(1)}, k+1)}$ tal que $H_{k+1}(\mathbf{S}^{(1)}) \cdot \Delta_{k+1}^X S^{(2)} < \frac{\epsilon}{4}$. Entonces si $N_\Phi(\mathbf{S}^{(2)}) = k + 2$ se tiene que

$$\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^{(2)})-1} H_i(\mathbf{S}^{(2)}) \cdot \Delta_i^X S^{(2)} < \sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^{(2)})-1} \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon,$$

y de la Proposición 1.8 se sigue que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . Si $N_\Phi(\mathbf{S}^{(2)}) > k + 2$, podemos volver a repetir el proceso. Dado que por hipótesis existe $n_\Phi \in \mathbb{N}$ tal que $N_\Phi(\mathbf{S}) \leq n_\Phi$, existe $1 \leq k' \leq n_\Phi - k$ y $\mathbf{S}^{(k')} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}^{(k'-1)}, k'-1)}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^{(k')})-1} H_i(\mathbf{S}^{(k')}) \cdot \Delta_i^X S^{(k')} < \sum_{i=k}^{N_\Phi(\mathbf{S}^{(k')})-1} \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon.$$

Por lo tanto, como $\Phi \in \mathcal{H}$ fue elegida de manera arbitraria, se sigue de la Proposición 1.8 que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . \square

En este caso, la condición 0-neutral del mercado no alcanza para asegurar que el mercado sea localmente 0-neutral. Sin embargo, si podemos asegurar que existirá al menos un nodo 0-neutral.

Proposición 1.10. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial, y sean $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ tal que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . Si toda estrategia restringida pertenece al conjunto \mathcal{H} , entonces el nodo (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral.*

Demostración. Supongamos que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) y se cumple que $0 \notin \text{cl}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$. Como la clausura de un conjunto convexo resulta ser un conjunto convexo (Proposición A.3) y cerrado, podemos aplicar la segunda parte del Teorema A.3, de donde se tiene que existe un $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que $\inf \xi \cdot y > 0$ donde el ínfimo es sobre todos los $y \in \text{cl}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$. Por lo tanto

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \xi \cdot \Delta_k^X S' > 0 \text{ para toda } \mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}.$$

Vamos a definir una sucesión de funciones $\xi_i^{(\mathbf{S}, k)} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$ como

$$\xi_i^{(\mathbf{S}, k)}(\mathbf{S}') = \begin{cases} \xi & \text{si } i = k \text{ y } \mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \text{ para todo } \mathbf{S}' \in \mathcal{S}.$$

Dado $V_0 = 0$, podemos obtener la estrategia restringida $\Xi^{(\mathbf{S},k)}$. Por hipótesis, $\Xi^{(\mathbf{S},k)} \in \mathcal{H}$. Luego se tiene que

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} \left[\sum_{i=k}^{N_{\Xi^{(\mathbf{S},k)}}(\mathbf{S}')-1} \Xi_i^{(\mathbf{S},k)}(\mathbf{S}') \cdot \Delta_k^X S' \right] > 0,$$

lo que es un absurdo. Por lo tanto (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral. \square

1.5. Invarianza de las Condiciones Locales

Será de interés en lo que resta del capítulo determinar que tipo de transformaciones sobre un nodo dado no afectarán sus propiedades locales, de tal forma que nos permita estudiar cuando un mercado sea libre de arbitraje o 0-neutral. De esta manera, probaremos que las propiedades del mercado son independientes de la elección del numéraire.

Recordemos de la Definición 1.10, que las condiciones locales están basadas sobre propiedades del conjunto de incrementos $\Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$, donde (\mathbf{S}, k) es un nodo posible del mercado. Este conjunto queda totalmente determinado por los valores que toman las trayectorias en la etapa $k+1$ y el valor de S_k . Para interpretar esta situación, para cada nodo (\mathbf{S}, k) denotaremos por

$$\Sigma_k(\mathbf{S}) \equiv \{\hat{S}_{k+1} : \hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}. \quad (1.12)$$

al conjunto de precios alcanzables.

La siguiente Proposición muestra que las condiciones locales pueden ser reescritas en términos del conjunto $\Sigma_k(\mathbf{S})$.

Proposición 1.11. *Dado un conjunto de trayectorias \mathcal{S} , $\mathbf{S} = (S, W, m) \in \mathcal{S}$ y un número entero $k \geq 0$.*

1. *El nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje si, y sólo si,*

$$X(S_k) \in \text{ri}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))).$$

2. *El nodo (\mathbf{S}, k) es 0-neutral si, y sólo si,*

$$X(S_k) \in \text{cl}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))).$$

Demostración. Empezaremos mostrando 1. Sea (\mathbf{S}, k) un nodo libre de arbitraje, entonces $0 \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$. Consideremos $x \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, luego $x - X(S_k) \in \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Se sigue de la Proposición A.4 que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$0 - \epsilon(x - X(S_k) - 0) = -\epsilon(x - X(S_k)) \in \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}.$$

Entonces

$$X(S_k) - \epsilon(x - X(S_k)) \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Por lo tanto, como x fue elegido arbitrariamente, se sigue nuevamente de la Proposición A.4 que $X(S_k) \in \text{ri}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$. Supongamos ahora que $X(S_k) \in \text{ri}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$, y consideremos $\tilde{x} \in \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Entonces $\tilde{x} + X(S_k) \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$. De la Proposición A.4 se tiene que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$X(S_k) - \epsilon(\tilde{x} + X(S_k) - X(S_k)) = X(S_k) - \epsilon\tilde{x} \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Por lo tanto $-\epsilon\tilde{x} \in \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, y utilizando nuevamente la Proposición A.4 se concluye que el nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje.

Para mostrar 2., supongamos primero que (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral. Entonces existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $x_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\{x_i + X(S_k)\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})),$$

y $x_i + X(S_k) \rightarrow X(S_k)$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Por lo tanto $X(S_k) \in \text{cl}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$. Tomando el camino inverso en la demostración podemos probar la implicación recíproca. \square

Debido a que las propiedades locales solo involucran los valores de los incrementos $\Delta_k^X S$, es natural que la función que actúe sobre el conjunto $X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \subseteq \mathbb{R}^d$ sea la que determine las condiciones para que se preserven las configuraciones locales.

Comenzaremos el análisis para el caso de libre de arbitraje. Recordemos de la Definición A.3 que una función $\bar{f} : D \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ con D convexo preserve segmentos estrictamente si

$$\bar{f}(\{\bar{\alpha}x_1 + (1 - \bar{\alpha})x_2 : 0 < \bar{\alpha} < 1\}) = \{\bar{\beta}\bar{f}(x_1) + (1 - \bar{\beta})\bar{f}(x_2) : 0 < \bar{\beta} < 1\}$$

para todo $x_1, x_2 \in D$.

Lema 1.1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo y sea $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función que preserva segmentos estrictamente. Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Si (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje y $X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \subseteq D$, entonces

$$0 \in \text{ri}(\text{co}\{\bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k)\}) \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Demostración. Sea $y \in \text{co}\{\bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k)\}$. Entonces sabemos del Teorema A.4 que existen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{d+1} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ tal que

$$y = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i (\bar{f}(\hat{x}_i) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}})) \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i = 1, \quad \mu_i \geq 0.$$

Luego

$$y + \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i \bar{f}(\hat{x}_i).$$

Como \bar{f} preserva segmentos, se sigue que

$$\text{co}\{\bar{f}(\hat{x}_1), \dots, \bar{f}(\hat{x}_{d+1})\} \subseteq \bar{f}(\text{co}\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{d+1}\}).$$

Entonces existen escalares $\theta_1, \dots, \theta_{d+1}$ tal que

$$y + \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) = \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{d+1} \theta_i \hat{x}_i\right) \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0. \quad (1.13)$$

Vamos a definir como

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \theta_i \hat{x}_i,$$

entonces

$$x - x_{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{d+1} \theta_i (\hat{x}_i - x_{\mathbf{S}}) \in \text{co}\{\hat{x} - x_{\mathbf{S}} : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k)\} = \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}.$$

Como (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje, $0 \in \text{ri}(\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)})$, y entonces se sigue de la Proposición A.4 que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$-\epsilon(x - x_{\mathbf{S}}) \in \text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \Rightarrow x_{\mathbf{S}} - \epsilon(x - x_{\mathbf{S}}) \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Ahora, como \bar{f} preserva segmentos, se sigue de la Proposición A.5 que $\bar{f}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$ es convexo. Entonces existen $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{d+1} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ tal que

$$\bar{f}(x_{\mathbf{S}} - \epsilon(x - x_{\mathbf{S}})) = \sum_{i=1}^{d+1} \tilde{\mu}_i \bar{f}(\tilde{x}_i) \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \tilde{\mu}_i = 1, \quad \tilde{\mu}_i \geq 0.$$

Entonces

$$\bar{f}(x_{\mathbf{S}} - \epsilon(x - x_{\mathbf{S}})) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) \in \text{co} \{ \bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k) \}. \quad (1.14)$$

Por otra parte, sea $\alpha = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$, luego $0 < \alpha < 1$ y

$$x_{\mathbf{S}} = \alpha x + (1 - \alpha)(x_{\mathbf{S}} - \epsilon(x - x_{\mathbf{S}})),$$

Entonces, se sigue de la hipótesis y de (1.13) que

$$\begin{aligned} \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) &= \beta \bar{f}(x) + (1 - \beta) \bar{f}(x_{\mathbf{S}} - \epsilon(x - x_{\mathbf{S}})) \\ &= \beta (y + \bar{f}(x_{\mathbf{S}})) + (1 - \beta) \bar{f}(x_{\mathbf{S}} - \epsilon(x - x_{\mathbf{S}})) \end{aligned}$$

con $0 < \beta < 1$. Entonces podemos concluir a partir de (1.14) y lo anterior que

$$\frac{-\beta}{1 - \beta} y \in \text{co} \{ \bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k) \}.$$

Por lo tanto, como $y \in \text{co} \{ \bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k) \}$ fue elegido de manera arbitraria, tomando $\epsilon' = \frac{\beta}{1-\beta} > 0$, se sigue de la Proposición A.4 que

$$0 \in \text{ri}(\text{co} \{ \bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k) \}).$$

□

Antes de presentar uno de los resultados principales de esta sección, daremos el siguiente Lema que será de utilidad en lo que sigue.

Lema 1.2. *Sean X y X' las funciones perspectivas sobre \mathbb{R}^{d+1} y $\mathbb{R}^{d'+1}$ respectivamente definidas en (1.3). Sea $f : \text{dom } X \rightarrow \mathbb{R}^{d'+1}$ una función que preserva segmentos estrictamente con $f(0) = 0$ tal que $\text{Im } f \subseteq \text{dom } X'$. Entonces existe una función $\bar{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ que también preserva segmentos estrictamente que hace al siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \text{dom } X & \xrightarrow{f} & \text{dom } X' \\ \downarrow X & & \downarrow X' \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}^{d'} \end{array}$$

Demostración. Observemos que la función X es suryectiva, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^d$ existe $s \in \text{dom } X$ tal que $X(s) = x$. Vamos a definir entonces $\bar{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ por $\bar{f}(x) = X(f(s))$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Veamos que \bar{f} está bien definida, es decir, dados

cualquiera dos $\hat{s}, \tilde{s} \in \mathbb{R}^{d+1}$ tal que $X(\hat{s}) = X(\tilde{s})$, entonces $X(f(\hat{s})) = X(f(\tilde{s}))$. Como $X(\hat{s}) = X(\tilde{s})$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hat{s}^1}{\hat{s}^0}, \dots, \frac{\hat{s}^d}{\hat{s}^0} \right) = \left(\frac{\tilde{s}^1}{\tilde{s}^0}, \dots, \frac{\tilde{s}^d}{\tilde{s}^0} \right) &\Leftrightarrow \left(1, \frac{\hat{s}^1}{\hat{s}^0}, \dots, \frac{\hat{s}^d}{\hat{s}^0} \right) = \left(1, \frac{\tilde{s}^1}{\tilde{s}^0}, \dots, \frac{\tilde{s}^d}{\tilde{s}^0} \right) \\ &\Leftrightarrow \tilde{s}^0 (\hat{s}^0, \hat{s}^1, \dots, \hat{s}^d) = \hat{s}^0 (\tilde{s}^0, \tilde{s}^1, \dots, \tilde{s}^d) \\ &\Leftrightarrow \hat{s} = \frac{\hat{s}^0}{\tilde{s}^0} \tilde{s}. \end{aligned}$$

Sea $\alpha = \frac{\hat{s}^0}{\tilde{s}^0}$, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $0 < \alpha < 1$ y

$$\hat{s} = \alpha \tilde{s} + (1 - \alpha)0.$$

Luego, como f preserva segmentos estrictamente, se sigue que existe $0 < \beta < 1$ tal que

$$f(\hat{s}) = \beta f(\tilde{s}) + (1 - \beta)f(0) = \beta f(\tilde{s}),$$

ya que $f(0) = 0$. Entonces $X'(f(\hat{s})) = X'(f(\tilde{s}))$. Por lo tanto \bar{f} está bien definida. Veamos ahora que \bar{f} preserva segmentos estrictamente. Sea $x \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$x = \bar{\alpha} \hat{x} + (1 - \bar{\alpha}) \tilde{x} \text{ con } 0 < \bar{\alpha} < 1, \quad \hat{x}, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Entonces existe $\hat{s}, \tilde{s} \in \text{dom } X$ tal que $X(\hat{s}) = \hat{x}$ y $X(\tilde{s}) = \tilde{x}$. Entonces, como X preserva segmentos (Proposición A.7), existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$x = X(\alpha \hat{s} + (1 - \alpha) \tilde{s}).$$

Luego, como f y X' preservan segmentos estrictamente,

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= X'(f(\alpha \hat{s} + (1 - \alpha) \tilde{s})) = \bar{\beta} X'(f(\hat{s})) + (1 - \bar{\beta}) X'(f(\tilde{s})) = \\ &= \bar{\beta} \bar{f}(\hat{x}) + (1 - \bar{\beta}) \bar{f}(\tilde{x}), \end{aligned}$$

con $0 < \bar{\beta} < 1$. Entonces

$$\bar{f}(x) \in \{\bar{\beta} \bar{f}(\hat{x}) + (1 - \bar{\beta}) \bar{f}(\tilde{x}) : 0 < \bar{\beta} < 1\}.$$

La inclusión inversa se demuestra de manera similar. Por lo tanto, \bar{f} preserva segmentos estrictamente. \square

Nuestro objetivo es encontrar transformaciones sobre los mercados que preserven nodos libres de arbitraje. El siguiente Teorema da un caso útil de funciones que preservan este tipo de nodos, el cual nos permitirá obtener conclusiones sobre la independencia de mercados libres de arbitraje respecto de la elección del numéraire.

Teorema 1.3. Sean X y X' las funciones perspectivas sobre \mathbb{R}^{d+1} y \mathbb{R}^{d+1} respectivamente definidas en (1.3). Sea $f : \text{dom } X \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ una función que preserva segmentos estrictamente con $f(0) = 0$ tal que $\text{Im } f \subseteq \text{dom } X'$. Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Si (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje, entonces

$$0 \in \text{ri}(\text{co} \{X'(f(\hat{S}_{k+1})) - X'(f(S_k)) : \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}\}) \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Demostración. Sabemos del Lema 1.2 que existe una función $\bar{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ que también preserva segmentos estrictamente dada por $\bar{f}(x) = X'(f(s))$ donde $s \in \text{dom } X$ tal que $X(s) = x$. Por lo tanto, del Lema 1.1 se sigue que

$$0 \in \text{ri}(\text{co} \{\bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k)\}),$$

o, equivalentemente,

$$0 \in \text{ri}(\text{co} \{X'(f(\hat{S}_{k+1})) - X'(f(S_k)) : \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}\}).$$

□

Una de las transformaciones que más nos interesa en términos financieros es aquella que cambia el numéraire del mercado. Vamos a suponer que el primer activo S^1 es estrictamente positivo para toda trayectoria en \mathcal{S} , entonces la primer coordenada puede cumplir el papel de un numéraire alternativo para el mercado. Para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, denotaremos a la sucesión de precios relativos a S^1 por $Y(\mathbf{S}) = \{(Y(S_i), W_i, m)\}_{i \geq 0}$ donde $Y : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ es la función perspectiva sobre la segunda coordenada:

$$Y(S_i) \equiv \left(\frac{S_i^0}{S_i^1}, \frac{S_i^2}{S_i^1}, \dots, \frac{S_i^d}{S_i^1} \right) \quad D \equiv \{S_i \in \mathbb{R}^{d+1} : S_i^1 > 0\}. \quad (1.15)$$

Ahora, $Y^j(S_i)$ representa el valor del j -ésimo activo en unidades del nuevo numéraire.

Probaremos a continuación la siguiente Proposición que será de utilidad en los próximos resultados.

Proposición 1.12. Sea σ la permutación de \mathbb{R}^{d+1} que cambia la primera coordenada por la segunda y X la función perspectiva sobre \mathbb{R}^{d+1} definida en (1.3). Entonces, se tiene que $Y = X \circ \sigma$ sobre $D \equiv \{s \in \text{dom } X : s^1 > 0\}$. Más aún, σ preserva segmentos estrictamente.

Demostración. Sea $s \in D$, entonces $\sigma(s) \in \text{dom } X$ y

$$(X \circ \sigma)(s) = X(\sigma(s^0, s^1, \dots, s^d)) = X(s^1, s^0, \dots, s^d) = \left(\frac{s^0}{s^1}, \dots, \frac{s^d}{s^1} \right) = Y(s).$$

Además σ es una transformación lineal, entonces se sigue de la Proposición A.6 que preserva segmentos estrictamente. \square

Estamos en condiciones ahora de mostrar que la propiedad de libre de arbitraje para un mercado trayectorial \mathcal{M} es independiente de la elección del numéraire. Para ello, enunciaremos el siguiente Corolario.

Corolario 1.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial semiacotado tal que $S^1 > 0$ para toda trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y toda estrategia restringida pertenece a \mathcal{H} . Si \mathcal{M} es libre de arbitraje respecto del numéraire S^0 entonces \mathcal{M} también lo es respecto del numéraire S^1 .*

Demostración. De la Proposición 1.12 se tiene que $Y = X \circ \sigma$ sobre el conjunto $D \equiv \{s \in \text{dom } X : s^1 > 0\}$, donde σ es la permutación de la primera coordenada por la segunda. Además como \mathcal{M} es libre de arbitraje respecto del numéraire S^0 , se sigue del Teorema 1.1 que es localmente libre de arbitraje. Entonces todo nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje. Como σ cumple con las hipótesis del Teorema 1.3 podemos asegurar que

$$0 \in \text{ri}(\text{co } \Delta^Y \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}) \equiv \text{ri} \left(\text{co } \left\{ Y(\hat{S}_{k+1}) - Y(S_k) : \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \right\} \right),$$

para todo nodo (\mathbf{S}, k) , o en otras palabras, que todo nodo es libre de arbitraje respecto del numéraire S^1 . Luego se sigue del Teorema 1.1 que \mathcal{M} es libre de arbitraje con respecto al numéraire S^1 . \square

Por último vamos a mostrar que también existen funciones que preservan mercados 0-neutral. Vamos a realizar un análisis similar al que hicimos para el caso libre de arbitraje. Empezaremos con el siguiente Lema.

Lema 1.3. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo y sea $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función continua que preserva segmentos en el sentido de la Definición A.3. Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Si (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral y $\text{cl } X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \subseteq D$, entonces*

$$0 \in \text{cl} \left(\text{co } \left\{ \bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k) \right\} \right).$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $x_{\mathbf{S}} = X(S_k)$. Como \bar{f} es continua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \bar{D}$ con $\|x - x_{\mathbf{S}}\|_d \leq \delta$ se tiene que $\|\bar{f}(x) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}})\|_{d'} < \epsilon$, donde $\|\cdot\|_d$ es la norma euclídea de \mathbb{R}^d y $\|\cdot\|_{d'}$ es la norma euclídea de $\mathbb{R}^{d'}$. Por otra parte, como (\mathbf{S}, k)

es un nodo 0-neutral, se sigue de la Proposición 1.11 que $x_{\mathbf{S}} \in \text{cl}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$. Luego, existe $\hat{x} \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ tal que $\|\hat{x} - x_{\mathbf{S}}\|_d < \delta$, y entonces

$$\|\bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}})\|_{d'} < \epsilon.$$

Además, dado que \bar{f} preserva segmentos se tiene que

$$\bar{f}(\hat{x}) \in \text{co } \bar{f}(X(\Sigma_k(\mathbf{S}))).$$

Por lo tanto, como $\epsilon > 0$ fue elegido de manera arbitraria, $\bar{f}(x_{\mathbf{S}}) \in \text{cl}(\text{co } \bar{f}(X(\Sigma_k(\mathbf{S}))))$. Luego, existe una sucesión $\{\hat{y}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{co } \bar{f}(X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$ tal que $\hat{y}_i \rightarrow \bar{f}(x_{\mathbf{S}})$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Entonces

$$\{\hat{y}_i - \bar{f}(x_{\mathbf{S}})\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{co } \{\bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k)\},$$

y $\hat{y}_i - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Por lo tanto

$$0 \in \text{cl}(\text{co } \{\bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k)\}).$$

□

En esta ocasión, el objetivo es encontrar transformaciones sobre los mercados que preserven nodos 0-neutral. El siguiente Teorema da la clave de como construirlas.

Teorema 1.4. *Sean X y X' las funciones perspectivas sobre \mathbb{R}^{d+1} y $\mathbb{R}^{d'+1}$ respectivamente definidas en (1.3). Sea $f : \text{dom } X \rightarrow \mathbb{R}^{d'+1}$ una función continua que preserva segmentos estrictamente con $f(0) = 0$ tal que $\text{Im } f \subseteq \text{dom } X'$. Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Si (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral, entonces*

$$0 \in \text{cl}(\text{co } \{X'(f(\hat{S}_{k+1})) - X'(f(S_k)) : \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}\}) \subseteq \mathbb{R}^{d'}.$$

Demostración. Sabemos del Lema 1.2 que existe una función $\bar{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ que también preserva segmentos estrictamente dada por $\bar{f}(x) = X'(f(s))$ donde $s \in \text{dom } X$ tal que $X(s) = x$. Resta ver que \bar{f} es continua. Para ello vamos a mostrar primero que X' es continua. Sea $\epsilon > 0$ y $\bar{t} \in \text{dom } X'$, vamos a definir

$$\eta = \min \left\{ \frac{\bar{t}^0}{2}, \frac{\epsilon(\bar{t}^0)^2}{4\|\bar{t}\|_{d'+1}} \right\}.$$

Entonces para cada $t \in \text{dom } X'$ tal que $\|t - \bar{t}\|_{d'+1} < \eta$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|X'(t) - X'(\bar{t})\|_{d'} &= \left\| \frac{1}{t^0}(t^1, \dots, t^d) - \frac{1}{\bar{t}^0}(\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^d) \right\|_{d'} = \\
&= \left\| \frac{t^0(\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^d) - \bar{t}^0(t^1, \dots, t^d)}{t^0\bar{t}^0} \right\|_{d'} = \\
&= \left\| \frac{t^0(\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^d) - \bar{t}^0(t^1, \dots, t^d) + t^0(t^1, \dots, t^d) - \bar{t}^0(t^1, \dots, t^d)}{t^0\bar{t}^0} \right\|_{d'} \leq \\
&\leq \frac{t^0\|(\bar{t}^1, \dots, \bar{t}^d) - (t^1, \dots, t^d)\|_{d'} + |t^0 - \bar{t}^0|\|(t^1, \dots, t^d)\|_{d'}}{t^0\bar{t}^0} \leq \\
&\leq \frac{t^0\|t - \bar{t}\|_{d'+1} + |t^0 - \bar{t}^0|\|\bar{t}\|_{d'+1}}{t^0\bar{t}^0} < \\
&< 2 \left(\frac{t^0\|t - \bar{t}\|_{d'+1} + |t^0 - \bar{t}^0|\|\bar{t}\|_{d'+1}}{(\bar{t}^0)^2} \right) < 4 \left(\frac{\|t - \bar{t}\|_{d'+1}\|\bar{t}\|_{d'+1}}{(\bar{t}^0)^2} \right) < \\
&< \frac{4\eta\|\bar{t}\|_{d'+1}}{(\bar{t}^0)^2} < \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto X' es continua. Luego, como f es continua, tenemos que $X' \circ f$ es continua, de donde se sigue que \bar{f} es continua. Entonces, del Lema 1.3 se deduce que

$$0 \in \text{cl} \left(\text{co} \left\{ \bar{f}(\hat{x}) - \bar{f}(x_{\mathbf{S}}) : \hat{x} \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \text{ y } x_{\mathbf{S}} = X(S_k) \right\} \right),$$

o, equivalentemente,

$$0 \in \text{cl} \left(\text{co} \left\{ X'(f(\hat{S}_{k+1})) - X'(f(S_k)) : \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k) \right\} \right).$$

□

En la definición de mercado 0-neutral, queda explícita la dependencia de un mercado 0-neutral con la elección del numéraire. Consideremos al igual que en el Corolario 1.1 mercados trayectoriales tal que $S^1 > 0$ para toda trayectoria, lo que permitirá tomar a esa coordenada como un numéraire alternativo.

Corolario 1.2. *Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ tal que $S^1 > 0$ para toda trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Si (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral respecto del numéraire S^0 , entonces también lo es con respecto al numéraire S^1 . En particular, si \mathcal{M} es localmente 0-neutral, \mathcal{M} será 0-neutral para cualquier elección del numéraire.*

Demostración. De la Proposición 1.12 se tiene que $Y = X' \circ \sigma$ sobre el conjunto $D = \{s \in \text{dom } X : s^1 > 0\}$, donde σ es la permutación de la primer coordenada por la segunda. Como σ cumple con las hipótesis del Teorema 1.4, se tiene que

$$0 \in \text{cl} \left(\text{co} \left\{ Y(\hat{S}_{k+1}) - Y(S_k) : \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} \right\} \right)$$

y entonces (\mathbf{S}, k) es un nodo 0-neutral respecto al numéraire S^1 . Luego podemos concluir que si un mercado \mathcal{M} es localmente 0-neutral para el numéraire S^0 , entonces también lo será respecto al numéraire S^1 . Por lo tanto, se sigue del Teorema 1.2 que si \mathcal{M} es localmente 0-neutral para S^0 , \mathcal{M} será 0-neutral para cualquier otra elección del numéraire. \square

Capítulo 2

Valuación de Derivados Financieros

Un tema importante dentro de las matemáticas financieras es el análisis de derivados europeos, ciertos contratos financieros cuya función de pago en un tiempo final T depende del comportamiento de las acciones S^0, S^1, \dots, S^d y, en ciertos casos, también de otros factores. El objetivo principal de este capítulo es determinar un precio coherente para estos contratos, de tal manera que ninguna de las partes que intervienen puedan obtener un beneficio sin correr riesgo alguno.

2.1. Derivados Financieros

Este capítulo se centra en la valuación de derivados financieros, es por ello que en esta sección daremos una breve introducción a la idea de un derivado y el problema de establecerle un precio.

Un *derivado financiero* es un contrato financiero cuyo valor es determinado por medio de uno o más activos riesgosos. Esta definición abstracta se comprende mejor con el ejemplo de opciones call europeas, que es uno de los tipos de derivados más simples que se negocian en los mercados de valores.

Ejemplo 2.1. Un call europeo sobre un activo es un contrato financiero que habilita a su poseedor a comprar una acción a un precio fijo K (escrito de antemano en el contrato) en un tiempo futuro fijo T (también escrito en el contrato), por ejemplo, un mes.

El poseedor de la opción no está obligado a comprar la acción a ese precio: puede optar por no ejercer ese derecho. La elección de ejecutar la opción a tiempo T dependerá del valor de la acción en el mercado en ese momento, que es, por supuesto, desconocido en el presente. A tiempo T el precio S_T del activo se conocerá:

- Si $S_T > K$ entonces tiene sentido que el poseedor ejerza la opción, más allá de que el poseedor quiera la acción o no. Comprar una acción que vale S_T por un valor menor K , otorga una ganancia de $S_T - K$.
- Si $S_T \leq K$ entonces no tiene sentido ejercer la opción. Si el poseedor desea comprar la acción, puede hacerlo por igual o mejor precio comprándola directamente en el mercado por el valor S_T .

Al momento en que el call europeo es comprado o vendido, el precio futuro S_T es desconocido entonces no se puede predecir cual de las dos posibilidades anteriores ocurrirá. Sin embargo, es claro que la opción es algo que vale la pena poseer ya que es un contrato sin obligaciones para el poseedor: en el peor de los casos no valdrá nada de aquí a un mes, pero también podría tener un valor positivo en ese tiempo. Es claro que el valor de un call europeo depende del valor del activo, entonces es un derivado.

Una descripción matemática precisa del valor de la opción a tiempo T es la cantidad

$$\text{máx}\{0, S_T - K\}.$$

Como el inversor que adquiera esa opción obtiene un beneficio, debe pagar un precio por ella, el problema es determinar su valor. Al mismo tiempo, este valor debe permitirle al vendedor cubrirse de las obligaciones que la opción le generan.

Este ejemplo ilustra la cuestión principal estudiada en este capítulo, es decir, cuánto se debería pagar hoy por un derivado que ofrece una cantidad desconocida pero bien definida en el futuro. Para el vendedor de tal derivado la cuestión es a qué precio debe venderla hoy, cuando no sabe que pasará en el futuro. En lo que resta de la sección, describiremos en términos matemáticos los derivados financieros.

Consideremos entonces un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ y supongamos, además, que tenemos un derivado financiero, que en principio notaremos por Z . El derivado tiene un valor final a tiempo T denominado *payoff* o *función de pago*, que depende del comportamiento del precio de los activos S^0, S^1, \dots, S^d . El valor de los activos depende en sí mismos del escenario que seguirá el modelo, y entonces definiremos formalmente derivado financiero, o simplemente derivado, de la siguiente manera.

Definición 2.1 (Derivado financiero). Un *derivado financiero* es un activo cuya función de pago a tiempo T es $Z : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, el cual notaremos simplemente por Z .

Debido a que el derivado financiero depende de un tiempo final T , será necesario, de ahora en adelante, que las estrategias sean liquidadas antes del momento de expiración

de la opción. Recordemos nuestro enfoque captura la noción del tiempo dentro de la variable m de cada trayectoria. Entonces, dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, supondremos que

$$N_{\Phi}(\mathbf{S}) \leq M(\mathbf{S}) \quad (2.1)$$

para cada par $(\mathbf{S}, \Phi) \in \mathcal{M}$. Esta relación, debido al punto (3) de la Definición 1.4, hace que podamos reescribir las nociones de arbitraje y 0-neutral en términos de M .

A continuación daremos algunos ejemplos de derivados financieros.

Ejemplo 2.2. Consideremos un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ con $d = 1$ y $S^0 = 1$ para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

1. El poseedor de un call europeo tiene el derecho pero no la obligación de comprar una acción a tiempo T a un precio fijo K . Esto corresponde a un derivado financiero de la forma

$$Z^{\text{call}}(\mathbf{S}) = (S_{M(\mathbf{S})}^1 - K)^+.$$

De forma inversa, una opción put da el derecho pero no la obligación de vender un activo a tiempo T por un precio K . Esto corresponde al derivado

$$Z^{\text{put}}(\mathbf{S}) = (K - S_{M(\mathbf{S})}^1)^+.$$

2. La función de pago de una opción asiática depende del precio promedio de la acción. Por ejemplo, el valor de un call con precio de ejercicio K corresponde al derivado

$$Z_{\text{av}}^{\text{call}}(\mathbf{S}) = \left(\frac{1}{M(\mathbf{S})} \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})} S_i^1 - K \right)^+,$$

y el valor de un put a

$$Z_{\text{av}}^{\text{put}}(\mathbf{S}) = \left(K - \frac{1}{M(\mathbf{S})} \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})} S_i^1 \right)^+.$$

3. La función de pago de una opción barrera depende de cuando el precio de la acción alcanza un cierto nivel antes del tiempo final T . El ejemplo más simple es el de una opción digital con barrera B ,

$$Z^{\text{dig}}(\mathbf{S}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \max_{0 \leq i \leq M(\mathbf{S})} S_i^1 \geq B \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases},$$

la cual paga una unidad si el precio alcanza una barrera superior $B > S_0^1$.

4. Una opción lookback permite intercambiar la acción al máximo o mínimo precio que ocurrió durante la vida de la opción. Un call lookback, por ejemplo, tiene la función de pago

$$Z_{\text{lb}}^{\text{call}}(\mathbf{S}) = S_{M(\mathbf{S})}^1 - \min_{0 \leq i \leq M(\mathbf{S})} S_i^1,$$

mientras que el valor de un put está dado por

$$Z_{\text{lb}}^{\text{put}}(\mathbf{S}) = \max_{0 \leq i \leq M(\mathbf{S})} S_i^1 - S_{M(\mathbf{S})}^1.$$

2.2. Cotas Minimax Globales

La idea de esta sección es extender el concepto de arbitraje a situaciones en las que se contemple el uso de derivados financieros. En este sentido definiremos precisamente que significa que un precio sea “muy alto”, “muy bajo” o “justo”.

Sea π el precio hipotético en que es negociado el derivado Z a tiempo 0. El problema de encontrar un precio a Z es encontrar aquellos valores de π que son justos. Para darle formalismo a este concepto, recordemos de (1.5) que las ganancias generadas asociadas a una estrategia Φ para una trayectoria \mathbf{S} hasta la etapa $M(\mathbf{S})$ están dadas por

$$G_M^\Phi(\mathbf{S}) = \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S.$$

Definición 2.2 (Arbitraje relativo). Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial y Z un derivado financiero. Diremos que $\Phi \in \mathcal{H}$ es un *arbitraje relativo* a Z si

- para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$

$$V_0^\Phi + G_M^\Phi(\mathbf{S}) - \frac{Z(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} \geq 0, \quad (2.2)$$

- existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$,

$$V_0^\Phi + G_M^\Phi(\mathbf{S}^*) - \frac{Z(\mathbf{S}^*)}{S_{M(\mathbf{S}^*)}^0} > 0; \quad (2.3)$$

o,

- para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$

$$\frac{Z(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} + G_M^\Phi(\mathbf{S}) - V_0^\Phi \geq 0, \quad (2.4)$$

- existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$,

$$\frac{Z(\mathbf{S}^*)}{S_{M(\mathbf{S}^*)}^0} + G_M^\Phi(\mathbf{S}^*) - V_0^\Phi > 0. \quad (2.5)$$

Observación 2.1. De la Definición 1.7 se sigue que $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = 0$ es una estrategia de arbitraje si, y sólo si, es un arbitraje relativo con respecto al derivado $Z = 0$.

Un inversor racional nunca estará de acuerdo en vender el derivado Z a un precio π si este permite un arbitraje relativo a Z , porque esto significa que el comprador podría tener la posibilidad de generarse una ganancia sin correr ningún riesgo, comprando Z y utilizando una estrategia $\hat{\Phi} \in \mathcal{H}$ tal que $\pi = V_0^{\hat{\Phi}}$ y (2.4) y (2.5) son ciertas. De manera análoga, no comprará un derivado Z a un precio que permita un arbitraje relativo a Z , ya que podría permitirle al vendedor crearse una ganancia sin riesgo vendiendo Z y utilizando simultáneamente una estrategia $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ tal que $\pi = V_0^{\tilde{\Phi}}$ y (2.2) y (2.3) son ciertas.

Esto lleva a incluir también dentro del principio de libre de arbitraje a los derivados: en un modelo de mercado racional los precios de los derivados serán aquellos que prevengan arbitrajes relativos. En otras palabras, un derivados financiero será negociado a un “precio justo”, que definiremos a continuación.

Definición 2.3 (Precio justo). Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, un número real π^Z es llamado *precio justo* para un derivado Z si no existe $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi^Z$ que sea un arbitraje relativo a Z . El conjunto de todos los precios libres de arbitraje de Z los denotaremos por $\Pi(Z)$.

Un precio justo π^Z de un derivado Z es por definición un precio para el cual Z puede ser negociado a tiempo 0 sin introducir oportunidades de arbitraje dentro del mercado \mathcal{M} : si Z es vendido por π^Z , entonces ni el vendedor ni el comprador podrán armarse una estrategia de inversión que elimine todo el riesgo y otorgue una oportunidad de generar una ganancia positiva. Notemos que el precio justo π^Z está expresado en unidades del numéraire. La cantidad que corresponde a π^Z en términos de unidades monetarias antes del descuento es $\pi = S_0^0 \pi^Z$. Entonces π es un precio justo (no descontado) para el derivado Z .

Nuestro objetivo es encontrar y caracterizar el conjunto de precios libres de arbitraje para un derivado Z . Vamos a notar por

$$D^Z(\mathbf{S}) = \frac{Z(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} \quad (2.6)$$

al valor del derivado financiero Z para la trayectoria \mathbf{S} descontado cuando el numéraire es S^0 .

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial y Z un derivado financiero. Si π^Z es un precio justo para Z , entonces*

$$\sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})] \leq \pi^Z \text{ y } \pi^Z \leq \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Demostración. Consideremos π^Z un precio justo para el derivado Z . Entonces toda $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi^Z$ no es un arbitraje relativo con respecto a Z , es decir, alguna de las condiciones (2.2) o (2.3) no se cumplen y alguna de las condiciones (2.4) o (2.5) tampoco. Supongamos que existe $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi^Z$ tal que (2.2) no vale, entonces existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi^Z < D^Z(\mathbf{S}^*) - G_M^\Phi(\mathbf{S}^*).$$

Entonces

$$\pi^Z < \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Si existe $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi^Z$ tal que (2.3) no vale, entonces para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\pi^Z \leq D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S}).$$

Luego

$$\pi^Z \leq \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Por lo tanto para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ que no cumpla (2.2) o (2.3) se tiene que

$$\pi^Z \leq \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Entonces si π^Z es un precio justo se sigue que

$$\pi^Z \leq \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Supongamos ahora que existe $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi^Z$ tal que (2.4) no vale, entonces existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi^Z > D^Z(\mathbf{S}^*) - G_M^\Phi(\mathbf{S}^*).$$

Entonces

$$\pi^Z > \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Si existe $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi^Z$ tal que (2.5) no vale, entonces para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ se tiene que

$$\pi^Z \geq D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S}).$$

Luego

$$\pi^Z \geq \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Por lo tanto para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ que no cumpla (2.4) o (2.5) se tiene que

$$\pi^Z \geq \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

Entonces si π^Z es un precio justo se sigue que

$$\pi^Z \geq \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})].$$

□

La Proposición anterior define dos cantidades que serán muy importantes dentro de esta tesis.

Definición 2.4 (Cotas Minimax). Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ y un derivado financiero Z , definimos como *cotas minimax* a las cantidades

$$\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \equiv \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})] \quad (2.7)$$

$$\underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \equiv \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})]. \quad (2.8)$$

Observación 2.2. Podemos escribir a las cotas minimax en su versión extendida

$$\begin{aligned} \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) &= \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[D^Z(\mathbf{S}) - \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right] \\ \underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) &= \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[D^Z(\mathbf{S}) + \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right]. \end{aligned}$$

Notemos además que $D^{-Z}(\mathbf{S}) = -D^Z(\mathbf{S})$. Entonces es fácil ver que

$$\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = -\bar{V}(\mathbf{S}_0, -Z, \mathcal{M}).$$

Observación 2.3. Las cotas minimax globales resultan coincidir con las cotas de supercubrimiento y subcubrimiento clásicas:

$$\begin{aligned} \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) &= \inf [V_0^\Phi : V_M^\Phi(\mathbf{S}) \geq D^Z(\mathbf{S}) \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}] \\ \underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) &= \sup [V_0^\Phi : V_M^\Phi(\mathbf{S}) \leq D^Z(\mathbf{S}) \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}]. \end{aligned}$$

Mostraremos a continuación la igualdad para el caso de la cota minimax superior. La cota inferior se demuestra de forma análoga. Sea V_0^Φ tal que $V_M^\Phi(\mathbf{S}) \geq Z(\mathbf{S})$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Entonces se sigue de la Proposición 1.1 que

$$D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S}) \leq V_0^\Phi$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, de donde

$$\sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})] \leq V_0^\Phi.$$

Por lo tanto

$$\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq \inf [V_0^\Phi : V_M^\Phi(\mathbf{S}) \geq D^Z(\mathbf{S}) \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}].$$

Para mostrar la otra desigualdad, supongamos que $\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) > -\infty$ y consideremos $\epsilon > 0$. Entonces existe $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S})] < \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) + \epsilon,$$

luego

$$D^Z(\mathbf{S}) < \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) + \epsilon + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S})$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Por lo tanto,

$$\inf [V_0^\Phi : V_M^\Phi(\mathbf{S}) \geq D^Z(\mathbf{S}) \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}] \leq \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue elegido arbitrariamente, se sigue la desigualdad buscada.

La Proposición anterior da información sobre la existencia de precios justos ya que nos dice que si π^Z es un precio justo para Z , entonces

$$\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) \leq \pi^Z \text{ y } \pi^Z \leq \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}).$$

Más aún, nos permite concluir que si $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) < \underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$, el conjunto de precios justos para Z será vacío, con lo cual no existirán tales precios.

En los siguientes resultados probaremos la implicación inversa, es decir, si por medio del comportamiento de las cotas minimax podemos asegurar la existencia de precios justos. La siguiente Proposición asegura la existencia de precios justos siempre que $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) < \bar{V}_0(S_0, Z, \mathcal{M})$.

Proposición 2.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial y Z un derivado. Si las cotas minimax cumplen que $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) < \bar{V}_0(S_0, Z, \mathcal{M})$, entonces todo $\pi \in (\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}))$ es un precio justo.*

Demostración. Sea $\pi \in (\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}))$. Entonces

$$\pi < \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})] < \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})]$$

para toda $\Phi \in \mathcal{H}$. Luego, existe $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi < D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - G_M^\Phi(\hat{\mathbf{S}}).$$

Entonces (2.2) no se cumple para ninguna $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi$. Por otro lado

$$\pi > \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})] > \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) + G_M^\Phi(\mathbf{S})]$$

para toda $\Phi \in \mathcal{H}$. Luego, existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi > D^Z(\tilde{\mathbf{S}}) + G_M^\Phi(\tilde{\mathbf{S}}).$$

Entonces (2.4) no se cumple para ninguna $\Phi \in \mathcal{H}$ con $V_0^\Phi = \pi$. Por lo tanto π es un precio justo para el derivado Z . \square

Las Proposiciones 2.1 y 2.2 invitan a pensar bajo que condiciones existe al menos un precio justo para un derivado Z , o, en otras palabras, cuando $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) < \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$. Para ello demostraremos antes un resultado auxiliar.

Lema 2.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial tal que \mathcal{H} es cerrado bajo la suma de sus elementos, y sean Z_1 y Z_2 dos derivados financieros. Entonces se tiene que*

$$\overline{V}(\mathbf{S}_0, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) \leq \overline{V}(\mathbf{S}_0, Z_1, \mathcal{M}) + \overline{V}(\mathbf{S}_0, Z_2, \mathcal{M}).$$

Demostración. Sean $\tilde{\Phi}$ y $\hat{\Phi}$ dos elementos genéricos de \mathcal{H} . Sea $\Phi = \tilde{\Phi} + \hat{\Phi}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{V}(\mathbf{S}_0, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) &\leq \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^{Z_1+Z_2}(\mathbf{S}) - G_M^\Phi(\mathbf{S})] \\ &= \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\frac{Z_1(\mathbf{S}) + Z_2(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} - \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} (\tilde{H}_i(\mathbf{S}) + \hat{H}_i(\mathbf{S})) \cdot \Delta_i^X S \right] \\ &= \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\frac{Z_1(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} - \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} \tilde{H}_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S + \frac{Z_2(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} - \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} \hat{H}_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right] \\ &\leq \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^{Z_1}(\mathbf{S}) - G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S})] + \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^{Z_2}(\mathbf{S}) - G_M^{\hat{\Phi}}(\mathbf{S})]. \end{aligned}$$

Como $\tilde{\Phi}$ y $\hat{\Phi}$ fueron elegidas de forma arbitraria podemos tomar ínfimo sobre \mathcal{H} en ambos sumandos, de donde se obtiene el resultado. \square

Teorema 2.1. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial tal que \mathcal{H} es cerrado bajo la suma de sus elementos y sea Z un derivado financiero. Si \mathcal{M} es 0-neutral entonces se tiene que

$$\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}).$$

Demostración. Como \mathcal{M} es 0-neutral entonces

$$\bar{V}(\mathbf{S}_0, 0, \mathcal{M}) = \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [-G_M^\Phi(\mathbf{S})] = - \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [G_M^\Phi(\mathbf{S})] = 0.$$

Luego, del Lema 2.1 se sigue que

$$0 = \bar{V}(\mathbf{S}_0, 0, \mathcal{M}) = \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z + (-Z), \mathcal{M}) \leq \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) + \bar{V}(\mathbf{S}_0, -Z, \mathcal{M}).$$

Por lo tanto, se sigue de la Observación 2.2 que

$$\underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = -\bar{V}(\mathbf{S}_0, -Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}).$$

□

De aquí en adelante supondremos que el conjunto de estrategias \mathcal{H} es cerrado bajo la suma de sus elementos al menos que se aclare lo contrario. Vamos a definir entonces el intervalo de precios.

Definición 2.5. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial 0-neutral, y un derivado Z . Llamaremos al intervalo $[\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})]$ *intervalo de precios justos* para Z relativo a \mathcal{M} .

Observemos que aunque \mathcal{M} sea un mercado 0-neutral, no es suficiente para asegurar que $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ o $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ sea un precio justo. Vamos a probar a continuación que bajo ciertas hipótesis el mercado tendrá un único precio justo que coincidirá con el valor de las cotas minimax. Para ello necesitamos definir antes la noción de derivado alcanzable.

Definición 2.6 (Derivado alcanzable). Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial. Un derivado Z es *alcanzable* si existe una estrategia $\Phi^Z = (H^0, H^Z) \in \mathcal{H}$ tal que

$$Z(\mathbf{S}) = H_M^0(\mathbf{S})S_{M(\mathbf{S})}^0 + H_M^Z(\mathbf{S}) \cdot S_{M(\mathbf{S})}$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. A tal estrategia Φ^Z la llamaremos *estrategia replicadora* de Z .

De la Definición anterior y de la Proposición 1.1 se sigue inmediatamente que un derivado Z es alcanzable si, y sólo si, existe una estrategia $\Phi^Z = (H^0, H^Z) \in \mathcal{H}$ tal que el correspondiente derivado descontado es de la forma

$$D^Z(\mathbf{S}) = V_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) = V_0^{\Phi^Z} + G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) \quad (2.9)$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

Proposición 2.3. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial y Z un derivado. Asumamos que \mathcal{M} es 0-neutral y que para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ se tiene que $-\Phi \in \mathcal{H}$. Entonces si Z es alcanzable con estrategia replicadora Φ^Z ,*

$$\underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = V_0^{\Phi^Z}.$$

Más aún, si \mathcal{M} es libre de arbitraje, entonces $\pi = V_0^{\Phi^Z}$ es un precio justo.

Demostración. Por hipótesis,

$$D^Z(\mathbf{S}) = V_0^{\Phi^Z} + G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) \text{ para todo } \mathbf{S} \in \mathcal{S}.$$

Entonces, como $-G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) = G_M^{-\Phi^Z}(\mathbf{S})$ (ver Observación 1.1),

$$\sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[D^Z(\mathbf{S}) - G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) \right] = V_0^{\Phi^Z} = \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[D^Z(\mathbf{S}) + G_M^{-\Phi^Z}(\mathbf{S}) \right],$$

de donde se tiene que

$$\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq V_0^{\Phi^Z} \leq \underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M})$$

pues $-\Phi \in \mathcal{H}$ para cada $\Phi \in \mathcal{H}$. A su vez, por el Teorema 2.1, $\underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M})$, por lo tanto

$$\underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq V_0^{\Phi^Z} \leq \underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M})$$

lo que implica que

$$\underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = \bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = V_0^{\Phi^Z}.$$

Consideremos ahora que \mathcal{M} es libre de arbitraje y asumamos que $\pi = V_0^{\Phi^Z}$ no es un precio justo. Entonces existe $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ tal que cumple (2.2) y (2.3), o cumple (2.4) y (2.5). Si cumple las primeras dos, como $\pi = V_0^{\Phi^Z} = D^Z(\mathbf{S}) - G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S})$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, se sigue que

$$\pi + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) - D^Z(\mathbf{S}) = D^Z(\mathbf{S}) - G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) - D^Z(\mathbf{S}) = G_M^{\tilde{\Phi} - \Phi^Z}(\mathbf{S}) \geq 0$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, y que existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}^*) - D^Z(\mathbf{S}^*) = D^Z(\mathbf{S}^*) - G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}^*) + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}^*) - D^Z(\mathbf{S}^*) = G_M^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}(\mathbf{S}^*) > 0.$$

Luego

$$V_M^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}(\mathbf{S}) = V_0^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z} + G_M^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}(\mathbf{S}) \geq V_0^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$V_M^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}(\mathbf{S}^*) = V_0^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z} + G_M^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}(\mathbf{S}^*) \geq V_0^{\tilde{\Phi}-\Phi^Z}.$$

Por lo tanto, $\tilde{\Phi} - \Phi^Z \in \mathcal{H}$ es una estrategia de arbitraje, lo que es un absurdo. De la misma forma, si $\tilde{\Phi}$ cumple con las condiciones (2.4) y (2.5), se tiene que

$$D^Z(\mathbf{S}) + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) - \pi = G_M^{\Phi^Z-\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}) \geq 0$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, y que existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$\pi + G_M^{\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}^*) - D^Z(\mathbf{S}^*) = G_M^{\Phi^Z-\tilde{\Phi}}(\mathbf{S}^*) > 0.$$

Luego $\Phi^Z - \tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ es una estrategia de arbitraje, lo que también es un absurdo. Por lo tanto, $\pi = V_0^{\tilde{\Phi}}$ es un precio justo. \square

Observación 2.4. De la Proposición anterior se sigue que si Z es un derivado alcanzable en un mercado 0-neutral \mathcal{M} la inversión inicial que es necesaria para replicar Z es

$$H_0^0 S_0^0 + H_0 \cdot S_0 = S_0^0 \underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = S_0^0 \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}).$$

A modo de resumen, hemos probado que cualquier precio justo π^Z de un derivado Z debe encontrarse entre los números $\underline{V}_0(S, Z, \mathcal{M})$ y $\overline{V}_0(S, Z, \mathcal{M})$ (Proposición 2.1). Recíprocamente, vimos que si $\pi \in (\underline{V}_0(S, Z, \mathcal{M}), \overline{V}_0(S, Z, \mathcal{M}))$ es un precio justo para Z (Proposición 2.2). También mostramos que esos números resultan ser el único precio justo en el caso de que Z sea alcanzable (Proposición 2.3). Para caracterizar completamente el conjunto precios justos para Z restaría estudiar si $\underline{V}_0(S, Z, \mathcal{M})$ y $\overline{V}_0(S, Z, \mathcal{M})$ son precios justos en el caso de que Z no sea alcanzable. Mostraremos que no lo son, pero dejaremos su análisis para la Sección 2.4, debido a que para probarlo necesitaremos de nuevas herramientas.

2.3. Cotas Minimax Condicionales

Anteriormente vimos varios resultados válidos para un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$. A continuación vamos a generalizar algunos de ellos al caso de mercados condicionales. Empezaremos definiendo dos funcionales sobre el conjunto de trayectorias, que corresponden al análogo de las cotas minimax.

Definición 2.7 (Cotas Condicionales Minimax). Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, Z un derivado y (\mathbf{S}, k) un nodo, definimos como *cotas condicionales minimax* a las cantidades

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \begin{cases} \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\hat{\mathbf{S}}, k)} \left[D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] & \text{si } k < M(\mathbf{S}), \\ D^Z(\mathbf{S}) & \text{si } k = M(\mathbf{S}), \\ 0 & \text{si } k > M(\mathbf{S}). \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \begin{cases} \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\hat{\mathbf{S}}, k)} \left[D^Z(\hat{\mathbf{S}}) + \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] & \text{si } k < M(\mathbf{S}), \\ D^Z(\mathbf{S}) & \text{si } k = M(\mathbf{S}), \\ 0 & \text{si } k > M(\mathbf{S}). \end{cases} \quad (2.11)$$

Notemos, al igual que para las cotas globales, que si $k < M(\mathbf{S})$ entonces

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\bar{V}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}),$$

y, además, que $\bar{V}_0(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \equiv \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ y $\underline{V}_0(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \equiv \underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$.

Observación 2.5. Observemos que podemos reescribir la condición de condicionalmente 0-neutral en términos de las cotas condicionales. Supongamos que el mercado \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en un nodo (\mathbf{S}, k) , entonces

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\sum_{i=k}^{M(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right] = 0,$$

y

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = - \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\sum_{i=k}^{M(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right] = 0.$$

Los siguientes resultados son la extensión a mercados condicionales del Lema 2.1 y del Teorema 2.1.

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial, y sean Z_1 y Z_2 dos derivados financieros. Entonces, para $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ se tiene que*

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z_1, \mathcal{M}) + \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z_2, \mathcal{M}).$$

Demostración. La prueba se sigue de manera análoga a la demostración del Lema 2.1. \square

Teorema 2.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial y sea Z un derivado financiero. Si para $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) , entonces*

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Demostración. Como \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) entonces $\bar{V}_k(\mathbf{S}, 0, \mathcal{M}) = 0$. Luego, del Lema 2.2 se sigue que

$$0 = \bar{V}_k(\mathbf{S}, 0, \mathcal{M}) = \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z + (-Z), \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \bar{V}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}).$$

Por lo tanto

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\bar{V}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

\square

Por último, las cotas condicionales también coinciden cuando tenemos un derivado alcanzable.

Proposición 2.4. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial, $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, $k \geq 0$ y Z un derivado. Asumamos que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) y que para cada $\Phi \in \mathcal{H}$, $-\Phi \in \mathcal{H}$. Entonces si Z es alcanzable con estrategia replicadora Φ^Z ,*

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = V_k^{\Phi^Z}.$$

Demostración. Por hipótesis,

$$D^Z(\mathbf{S}) = V_0^{\Phi^Z} + G_M^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) = V_0^{\Phi^Z} + \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i^Z(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Entonces,

$$D^Z(\mathbf{S}) - \sum_{i=k}^{M(\mathbf{S})-1} H_i^Z(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S = V_0^{\Phi^Z} + \sum_{i=0}^{k-1} H_i^Z(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S = V_k^{\Phi^Z}(\mathbf{S}),$$

Luego,

$$\sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[D^Z(\mathbf{S}) - \sum_{i=k}^{M(\mathbf{S})-1} H_i^Z(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S \right] = V_k^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) = \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[D^Z(\mathbf{S}) + \sum_{i=k}^{M(\mathbf{S})-1} -H_i^Z(\mathbf{S}) \right],$$

de donde se tiene que

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq V_k^{\Phi^Z}(\mathbf{S}) \leq \underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$$

pues $-\Phi \in \mathcal{H}$ para cada $\Phi \in \mathcal{H}$. A su vez, por el Teorema 2.2, $\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$, lo que implica que

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = V_k^{\Phi^Z}.$$

□

2.4. Caracterización de π^Z

Ahora que ya tenemos a disposición la definición de cotas condicionales, vamos a terminar de caracterizar la estructura del conjunto de precios justos de un derivado financiero Z . En la Sección 2.2 mostramos que bajo ciertas condiciones cada precio justo debe pertenecer al intervalo $[\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})]$ (Proposición 2.1). También vimos que los valores $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ y $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ coinciden si Z es alcanzable (Proposición 2.3). En esta sección mostraremos que la implicación inversa también es cierta, es decir, Z es alcanzable si y sólo si $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$. Para ello, primero definiremos algunas nociones que serán de utilidad.

Consideremos un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ y una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, vamos a notar al conjunto de todas las imágenes de \mathbf{S} por \mathcal{H} con

$$\text{rg } \mathcal{H}(\mathbf{S}) \equiv \{H(\mathbf{S}) : \Phi = (H^0, H) \in \mathcal{H}\}. \quad (2.12)$$

Además, para cada nodo (\mathbf{S}, k) vamos a definir el conjunto

$$I_k(\mathbf{S}) \equiv \{H_k(\mathbf{S}) : \Phi = (H^0, H) \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (2.13)$$

que corresponde al conjunto que contiene todas las imágenes de \mathbf{S} por \mathcal{H} en la k -ésima etapa.

Observación 2.6. Observemos que si $\tilde{\mathbf{S}}$ y $\hat{\mathbf{S}}$ son dos trayectorias distintas de \mathcal{S} tal que $\tilde{\mathbf{S}}_i = \hat{\mathbf{S}}_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, con $k < \min\{M(\tilde{\mathbf{S}}), M(\hat{\mathbf{S}})\}$, entonces se tiene de la definición de estrategia (Definición 1.2) que $H_k(\tilde{\mathbf{S}}) = H_k(\hat{\mathbf{S}})$ para toda $\Phi = (H^0, H) \in \mathcal{H}$. Por lo tanto

$$I_k(\tilde{\mathbf{S}}) = I_k(\hat{\mathbf{S}}).$$

También notemos que si $k \geq M(\mathbf{S})$, entonces $I_k(\mathbf{S}) = \{0\}$.

Vamos a necesitar, no solo en este apartado, sino a lo largo de esta tesis una propiedad adicional sobre el conjunto de estrategias. La naturaleza del problema que estamos estudiando necesita que la elección de $H_k(\mathbf{S})$ se decida en la k -ésima etapa independientemente de la elección que se haya hecho en las etapas anteriores, y que la estrategia formada por estas sucesivas elecciones pertenezca al conjunto \mathcal{H} . Es decir, para cada sucesión $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $u_i \in I_i(\mathbf{S})$, debe existir una estrategia $\Phi = (H^0, H) \in \mathcal{H}$ tal que $H_i(\mathbf{S}) = u_i$. Bajo estas consideraciones, definiremos la siguiente clase de estrategias.

Definición 2.8 (Conjuntos de estrategias full). Dado un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$, diremos que \mathcal{H} es *full*, si

$$\text{rg } \mathcal{H}(\mathbf{S}) = \prod_{i=0}^{\infty} I_i(\mathbf{S})$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

Observemos que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ la inclusión,

$$\text{rg } \mathcal{H}(\mathbf{S}) \subseteq \prod_{i=0}^{\infty} I_i(\mathbf{S})$$

siempre es verdadera, no así la inclusión inversa. De todos modos, cualquier conjunto de estrategias \mathcal{H} puede ser extendido a un conjunto $\overline{\mathcal{H}}$ que es full, como explicaremos a continuación.

Para cada elección de $u \in \prod_{i=0}^{\infty} I_i(\mathbf{S})$, existe una sucesión $\{\Phi^i = (H^{(i,0)}, H^i)\}_{i=0}^{\infty}$ de elementos de \mathcal{H} tal que

$$u_i = H_i^i(\mathbf{S}), \quad \forall i \geq 0.$$

Si definimos $\Phi = (H^0, H)$ con $H = \{H_i^i\}_{i \geq 0}$, $H_0^0 = H_0^{(0,0)}$ y H_i^0 determinado por (1.6), Φ resultará ser una estrategia autofinanciada debido a la Proposición 1.1.

La siguiente Proposición será de utilidad.

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado libre de arbitraje y no redundante (en el sentido de la Definición 1.11), con \mathcal{H} full. Supongamos además que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, el conjunto $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$. Entonces*

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \geq 0, \quad (2.14)$$

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \leq 0, \quad (2.15)$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$.

Demostración. Nos concentraremos en demostrar (2.14), ya que (2.15) se prueba de forma similar. Probaremos el resultado por inducción hacia atrás sobre el índice k . Consideremos entonces $k = n - 1$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) > k$. Asumiremos sin pérdida de generalidad que $\bar{V}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) < +\infty$. Sea

$$\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (\bar{V}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}), +\infty)$$

una sucesión tal que $v_i \rightarrow \bar{V}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ cuando $i \rightarrow +\infty$. Como $v_i > \bar{V}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$, para cada $i \geq 0$ existe $\Phi^{(i)} = (H^{(0,i)}, H^{(i)}) \in \mathcal{H}$ tal que

$$v_i > \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\bar{V}_n(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_{n-1}^{(i)}(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} \right] \geq \bar{V}_n(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_{n-1}^{(i)}(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S}$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, n-1)}$. Entonces

$$v_i + H_{n-1}^{(i)}(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} - \bar{V}_n(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) = v_i + H_{n-1}^{(i)}(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) > 0$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, n-1)}$. Notaremos por $\xi_i \equiv H_{n-1}^{(i)}(\mathbf{S})$. Supongamos que $\liminf_i \|\xi_i\|_d < \infty$, entonces existe una subsucesión $\{\xi_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a algún $\xi \in \mathbb{R}^d$. Entonces

$$\bar{V}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \xi \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(v_{i_j} + \xi_{i_j} \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \right) \geq 0.$$

Luego, como $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$, existe $\Phi \in \mathcal{H}$ tal que $H_{n-1}(\mathbf{S}) = \xi$. Supongamos ahora que $\liminf_i \|\xi_i\|_d = \infty$. Entonces existe una subsucesión $\{\xi_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que la sucesión $\left\{ \frac{\xi_{i_j}}{\|\xi_{i_j}\|_d} \right\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a algún $\eta \in \mathbb{R}^d$ con $\|\eta\|_d = 1$. Luego

$$\eta \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\|\xi_{i_j}\|_d} \left(v_{i_j} + \xi_{i_j} \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \right) \geq 0$$

para toda $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, n-1)}$. Como \mathcal{M} es libre de arbitraje, el nodo $(\mathbf{S}, n-1)$ es libre de arbitraje (Teorema 1.1). Entonces se sigue de lo anterior y de la Proposición 1.9 que

$$\eta \cdot \Delta_{n-1}^X \hat{S} = 0$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, n-1)}$. Luego, como el mercado es no redundante, $\eta = 0$. Pero esto es una contradicción, ya que $\|\eta\|_d = 1$. Por lo tanto, (2.14) es válido para $k = n-1$.

Supongamos ahora que (2.14) es válido para $k+1$, y veamos que también es cierto para k . Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ tal que $M(\mathbf{S}) > k$. De la misma forma que antes, podemos probar que para toda $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \xi \cdot \Delta_k^X \hat{S} - \bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) \geq 0$$

para toda $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Además, si $M(\hat{\mathbf{S}}) = k+1$, entonces $\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) = D^Z(\hat{\mathbf{S}})$. Por lo tanto, dado que $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$, existe $\Phi \in \mathcal{H}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) = \xi$ y (2.14) es válido. Por otro lado, si $M(\hat{\mathbf{S}}) > k+1$, por hipótesis inductiva, para cada $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ existe $\Phi^{\hat{\mathbf{S}}}$ tal que

$$\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + \sum_{i=k+1}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \geq 0,$$

para toda $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k+1)}$. Como \mathcal{H} es full, existe una estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ tal que $H_k(\mathbf{S}) = \xi$ y $H_i(\tilde{\mathbf{S}}) = H_i^{\hat{\mathbf{S}}}(\tilde{\mathbf{S}})$ donde $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k+1)}$ para todo $i \geq k+1$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) &\geq \\ &\geq \bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + \sum_{i=k+1}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \geq 0 \end{aligned}$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Por lo tanto hemos probado (2.14). \square

Si uno puede mostrar que Z puede ser replicado por alguna estrategia $\Phi^Z \in \mathcal{H}$, entonces el problema de determinar un precio para Z tiene una solución sencilla: el precio de Z es único e igual a $V_0^{\Phi^Z}$. El siguiente Teorema también muestra que los derivados alcanzables son los únicos que admiten un único precio justo.

Teorema 2.3. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y Z un derivado financiero. Asumamos que \mathcal{M} es libre de arbitraje y que para cada $\Phi \in \mathcal{H}$ se tiene que $-\Phi \in \mathcal{H}$.*

1. Si Z es alcanzable, entonces el conjunto de precios justos para Z consiste de un solo elemento dado por

$$V_0 = \underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = \overline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}).$$

2. Si Z no es alcanzable y además \mathcal{M} cumple las hipótesis de la Proposición 2.5, entonces

$$\Pi(Z) = (\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}))$$

donde $\Pi(Z)$ es el conjunto de precios justos para Z .

Demostración. La primera afirmación se sigue de la Proposición 2.3. Para probar la parte 2., notemos que $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) \leq \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ debido al Teorema 2.1 y por las Proposiciones 2.1 y 2.2,

$$(\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})) \subseteq \Pi(Z) \subseteq [\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}), \overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})].$$

Entonces solo resta excluir la posibilidad de que los puntos de frontera sean precios justos. Sabemos a partir de la Proposición 2.5 que existe $\Phi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) + G_M^\Phi(\hat{\mathbf{S}}) - D^Z(\hat{\mathbf{S}}) \geq 0$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$. Por hipótesis Z no es alcanzable, entonces se sigue que existe $\mathbf{S}^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$\overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) + G_M^\Phi(\mathbf{S}^*) - D^Z(\mathbf{S}^*) > 0.$$

Por lo tanto $\overline{V}_0(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ no es un precio justo. La prueba para $\underline{V}_0(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ sale de forma similar. Por lo tanto, hemos probado el resultado. \square

Capítulo 3

Evaluación de Cotas Minimax

En general, intentar calcular directamente el problema de optimización que aparece en la definición de las cotas minimax es una tarea complicada. Además, la formulación del problema no da ninguna pista de cómo construir una estrategia Φ que permita cubrirse del riesgo. Sin embargo, es posible dar una solución computacional a este problema usando un método de optimización conocido como Programación Dinámica.

El problema financiero que estamos modelando involucra situaciones en que las decisiones se toman por etapas. El resultado de cada decisión no puede ser predecido, pero puede ser anticipado antes de que se tome la siguiente decisión. Nuestro objetivo en este capítulo es describir y justificar un algoritmo secuencial que permita calcular las cotas $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ y $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$. La idea es para cada escenario posible, evaluar todas las posibles estrategias con el fin de elegir aquella que sea óptima para las etapas siguientes.

3.1. Cotas Minimax Dinámicas

La definición de las cotas minimax (2.7) y (2.8) permiten determinar el precio justo de un derivado financiero, pero no son útiles para su cálculo, ya que involucran una optimización sobre todo el conjunto de trayectorias y sobre todo el conjunto de estrategias, los cuales pueden ser exageradamente grandes. Entonces, si queremos resolver el problema, vamos a tener que cambiarlo por uno más sencillo.

Con el fin de mantener un paralelismo con la teoría de programación dinámica para problemas que involucren optimizaciones minimax (Bertsekas (2000)), vamos a centrar nuestra atención en hallar una manera secuencial de resolver la cota (2.7). Notemos que

debido a la Observación 2.2 si obtenemos una formulación dinámica para $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$, también la tendremos para $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$.

Formularemos el problema para el caso de mercados acotados, de esta manera podremos adaptar el cálculo del intervalo de precios en un problema de programación dinámica. Nuestro modelo tiene entonces dos características principales:

- un sistema dinámico discretizado por las etapas $k = 0, 1, \dots, n$, donde $M(\mathbf{S}) \leq n$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$,
- una función de ganancias

$$G^\Phi(\mathbf{S}) = \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_i^X S,$$

que es aditiva a través de las etapas, en el sentido de que la ganancia $H_k(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X \hat{S}$ generada en un nodo (\mathbf{S}, k) para una trayectoria $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ y una estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ se va acumulando a medida que transcurren las etapas.

Bajo estos términos, $D^Z(\mathbf{S}) - G^\Phi(\mathbf{S})$ es la función que representa las pérdidas totales del inversor que vende el derivado Z , para cada estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ y cada trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, donde $D^Z(\mathbf{S})$ es el valor terminal del derivado descontado que ocurre al final del proceso. Nuestro objetivo entonces es hallar $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$, es decir, dado un mercado trayectorial acotado $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ y un derivado Z , encontrar una estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ que minimice la máxima pérdida dada por

$$\sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} [D^Z(\mathbf{S}) - G^\Phi(\mathbf{S})].$$

Este enfoque minimax suele considerarse como una regla conservativa y pesimista.

La siguiente definición inductiva sienta las bases para calcular $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ por medio de programación dinámica.

Definición 3.1 (Cotas minmax dinámicas). Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y sea Z un derivado. Para $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $0 \leq k \leq n$ definimos como k -ésima *cota minimax dinámica superior* al valor

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \begin{cases} \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} [\bar{U}_{k+1}(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S'] & \text{si } k < M(\mathbf{S}), \\ D^Z(\mathbf{S}) & \text{si } k = M(\mathbf{S}), \\ 0 & \text{si } k > M(\mathbf{S}). \end{cases} \quad (3.1)$$

También definiremos como *k*-ésima cota dinámica minimax inferior al valor $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\bar{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M})$.

Observación 3.1. Dado que $\underline{U}_0(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ y $\bar{U}_0(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ solo dependen de (S_0, W_0) , adoptaremos la notación $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$ y $\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$, respectivamente.

La introducción de las cotas dinámicas puede ser explicada usando un principio de optimalidad. En particular, supongamos que nos encontramos en un nodo (\mathbf{S}, k) y consideramos el subproblema de hallar el valor de (2.10). Si $\Phi \in \mathcal{H}$ es la estrategia óptima que realiza $\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$, entonces Φ también debe ser la estrategia que realice $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$. La cota dinámica (3.1) expresa intuitivamente claro el hecho que dado un nodo (\mathbf{S}, k) se deberá elegir una estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ tal que H_k minimice el máximo sobre todas las trayectorias $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ de la suma del costo propio de la etapa, más el costo óptimo del subproblema que comienza en la etapa $k+1$. Vamos a probar en esta sección que, bajo ciertas condiciones, $\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$ coincide con el valor de $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$.

Una de las desigualdades siempre es válida, sin necesidad de asumir ninguna hipótesis adicional.

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y sea Z un derivado financiero. Para $0 \leq k < n$, la inecuación*

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}), \quad (3.2)$$

se mantiene verdadera para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ tal que $M(\mathbf{S}) > k$.

Demostración. Lo demostraremos por inducción hacia atrás sobre el índice k . Consideremos primero $k = n - 1$. Si $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) > n - 1$, toda $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ satisface $M(\mathbf{S}') = n$. Entonces, se sigue de (2.7) y de la Definición 3.1 que

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} [D^Z(\mathbf{S}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S'] = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Asumamos ahora que (3.2) es cierto para k y consideremos cualquier nodo $(\mathbf{S}, k - 1)$ con $M(\mathbf{S}) > k - 1$. Sea $\Phi \in \mathcal{H}$ fija, entonces para toda $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k-1)}$ con $M(\mathbf{S}') = k$ tenemos

$$\begin{aligned} \bar{U}_k(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) - H_{k-1}(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{k-1}^X S' &= D^Z(\mathbf{S}') - \sum_{i=k-1}^{n-1} H_i(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k-1)}} \left[D^Z(\mathbf{S}') - \sum_{i=k-1}^{n-1} H_i(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

ya que $H_i(\mathbf{S}') = 0$ para todo $i \geq k$. Supongamos ahora $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ con $M(\mathbf{S}') > k$. Entonces, se sigue de la hipótesis inductiva,

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) = \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S}'' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}',k)}} \left[D^Z(\mathbf{S}'') - \sum_{i=k}^{n-1} H_i(\mathbf{S}'') \cdot \Delta_i^X S'' \right].$$

Por lo tanto, para $\Phi^* \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} & \bar{U}_k(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) - H_{k-1}^*(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{k-1}^X S' \leq \\ & \leq \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S}'' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}',k)}} \left[D^Z(\mathbf{S}'') - \sum_{i=k}^{n-1} H_i(\mathbf{S}'') \cdot \Delta_i^X S'' \right] - H_{k-1}^*(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{k-1}^X S' \leq \\ & \leq \sup_{\mathbf{S}'' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}',k)}} \left[D^Z(\mathbf{S}'') - \sum_{i=k}^{n-1} H_i^*(\mathbf{S}'') \cdot \Delta_i^X S'' \right] - H_{k-1}^*(\mathbf{S}') \cdot \Delta_{k-1}^X S' \leq \\ & \leq \sup_{\mathbf{S}'' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}',k)}} \left[D^Z(\mathbf{S}'') - \sum_{i=k-1}^{n-1} H_i^*(\mathbf{S}'') \cdot \Delta_i^X S'' \right] \leq \\ & \leq \sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k-1)}} \left[D^Z(\mathbf{S}') - \sum_{i=k-1}^{n-1} H_i^*(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La última desigualdad es válida pues $\mathcal{S}_{(\mathbf{S}',k)} \subseteq \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k-1)}$. Por último, de (3.3) y (3.4) se sigue que

$$\sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} \left[\bar{U}_k(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) - H_{k-1}^*(\mathbf{S}) \cdot \Delta_{k-1}^X S' \right] \leq \sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} \left[D^Z(\mathbf{S}') - \sum_{i=k-1}^{n-1} H_i^*(\mathbf{S}') \cdot \Delta_i^X S' \right]$$

y como $\Phi^* \in \mathcal{H}$ fue elegido de forma arbitraria, se sigue (3.2). \square

Del Teorema se desprende inmediatamente el siguiente Corolario.

Corolario 3.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y sea Z un derivado financiero. Para $0 \leq k < n$, la inecuación*

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}), \quad (3.5)$$

se mantiene verdadera para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ tal que $M(\mathbf{S}) > k$.

Demostración. Utilizando el Teorema 3.1 para el derivado $-Z$, y multiplicando por -1 ambos lados de la desigualdad, se sigue de la Definición 3.1 y de la Observación 2.2 inmediatamente el resultado. \square

A continuación veremos que las cotas dinámicas mantienen muchas de las propiedades que valen para las cotas condicionales. El primer resultado representa el análogo dinámico de la condición 0-neutral, el cual será de utilidad a la hora de demostrar que las cotas dinámicas se comportan de la manera esperada, es decir, $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$.

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y $Z \geq 0$ un derivado financiero. Si \mathcal{S} es localmente 0-neutral, entonces para cualquier $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $0 \leq k \leq n$ se tiene que*

1. $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \geq 0$.
2. $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = 0$.

Demostración. Para demostrar 1. haremos inducción hacia atrás sobre k . Para $k = n$, de la definición de las cotas dinámicas tenemos alguna de las siguientes posibilidades para cualquier $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$:

- Si $M(\mathbf{S}) = n$ entonces

$$\bar{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = D^Z(\mathbf{S}) = \frac{Z(\mathbf{S})}{S_n^0} \geq 0$$

pues $Z(\mathbf{S}) \geq 0$ y $S_n^0 > 0$.

- Si $M(\mathbf{S}) < n$, entonces $\bar{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = 0$.

Supongamos ahora que $\bar{U}_{k+1}(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) \geq 0$ para algún $0 \leq k \leq n - 1$ y cualquier $\mathbf{S}' \in \mathcal{S}$. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, si $M(\mathbf{S}) \leq k$ entonces, como antes, tenemos que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \frac{Z(\mathbf{S})}{S_k^0} \geq 0 \text{ o } \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = 0.$$

Por otra parte, si $k < M(\mathbf{S})$, dado que $\mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ es un nodo 0-neutral, se sigue de la Proposición 1.9 que para toda $\Phi \in \mathcal{H}$

$$\sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} [-H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S'] \geq 0.$$

Entonces de la hipótesis inductiva se tiene que

$$\sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} [\bar{U}_{k+1}(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S'] \geq \sup_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} [-H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S'] \geq 0$$

para toda $\Phi \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \geq 0$.

Para 2. vamos a asumir primero que $M(\mathbf{S}) < k$, entonces de la Definición

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = 0.$$

Por otra parte, si $M(\mathbf{S}) = k$ tenemos que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = D^Z(\mathbf{S}) = \frac{Z(\mathbf{S})}{S_k^0} = 0.$$

Por último para $M(\mathbf{S}) > k$ se sigue del Teorema 3.1 y del ítem anterior que

$$0 \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) \leq \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}).$$

Además, como \mathcal{S} es localmente 0-neutral, se tiene del Teorema 1.2 que \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) . Entonces $\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = 0$, y, por lo tanto, $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z = 0, \mathcal{M}) = 0$. \square

Continuando con la analogía de propiedades entre las cotas globales y las cotas dinámicas, vamos a mostrar el análogo del Teorema 2.1. Para ello probaremos primero la subaditividad de las cotas dinámicas.

Lema 3.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado tal que \mathcal{H} es cerrado bajo la suma de sus elementos. Si Z_1 y Z_2 son dos derivados financieros, entonces*

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1, \mathcal{M}) + \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_2, \mathcal{M}) \quad (3.6)$$

para toda trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

Demostración. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Probaremos el resultado por inducción hacia atrás. Consideremos primero el caso $k = n$, entonces si $M(\mathbf{S}) < n$,

$$0 = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1, \mathcal{M}) + \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_2, \mathcal{M}) = 0 + 0 = 0.$$

Ahora, si $k = M(\mathbf{S})$, se tiene que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) = \frac{Z_1(\mathbf{S}) + Z_2(\mathbf{S})}{S_k^0} = \frac{Z_1(\mathbf{S})}{S_k^0} + \frac{Z_2(\mathbf{S})}{S_k^0} = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1, \mathcal{M}) + \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_2, \mathcal{M}).$$

Asumamos entonces que (3.6) es válido para algún $0 \leq k \leq n-1$ y cualquier $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$.

Si $k \geq M(\mathbf{S})$ entonces se prueba igual que antes que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1, \mathcal{M}) + \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_2, \mathcal{M}).$$

Sean Φ^1 y Φ^2 dos elementos de \mathcal{H} , entonces $\Phi^1 + \Phi^2 \in \mathcal{H}$. Por lo tanto si $k < M(\mathbf{S})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) &\leq \sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[\bar{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) - (H_k^1(\mathbf{S}) + H_k^2(\mathbf{S})) \cdot \Delta_k^X \tilde{S} \right] \leq \\ &\leq \sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[\bar{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z_1, \mathcal{M}) - H_k^1(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \tilde{S} + \bar{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z_2, \mathcal{M}) - H_k^2(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \tilde{S} \right] \leq \\ &\sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[\bar{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z_1, \mathcal{M}) - H_k^1(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \tilde{S} \right] + \sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[\bar{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z_2, \mathcal{M}) - H_k^2(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \tilde{S} \right] \end{aligned}$$

Luego, como Φ^1 y Φ^2 son elementos arbitrarios de \mathcal{H} , se sigue que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1 + Z_2, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_1, \mathcal{M}) + \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z_2, \mathcal{M}).$$

□

Teorema 3.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y sea Z un derivado financiero. Si \mathcal{S} es localmente 0-neutral, entonces*

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}). \quad (3.7)$$

para cualquier $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.

Demostración. Sean $Z_1 = Z$ y $Z_2 = -Z$. Del Lema 3.1 y de la Proposición 3.1 se sigue que

$$0 = \bar{U}_k(\mathbf{S}, 0, \mathcal{M}) = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z + (-Z), \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \bar{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}).$$

Entonces

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\bar{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

□

El siguiente Corolario muestra que las cotas dinámicas coinciden en el caso de que Z sea un derivado alcanzable, de la misma forma que sucede con las cotas minmax (Proposición 2.3). Además, resultan ser iguales a las cotas minimax.

Corolario 3.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado tal que \mathcal{S} es localmente 0-neutral. Sea (\mathbf{S}, k) un nodo del mercado y Z un derivado financiero alcanzable mediante la estrategia $\Phi^Z \in \mathcal{H}$ y $-\Phi^Z \in \mathcal{H}$. Entonces*

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Demostración. De los Teoremas 3.1 y 3.2, se sigue que

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \overline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \overline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Luego, de la Proposición 2.3 concluimos que

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \overline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \overline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

□

3.1.1. Formulaci3n Dinámica

Como mencionamos antes, estamos interesados en obtener la igualdad de la inecuaci3n (3.2) tambi3n cuando Z no es alcanzable. Para lograr este objetivo ser3 necesario introducir algunas cuestiones t3cnicas relacionadas con la formulaci3n del problema, y la validez del algoritmo dinámico.

Recordemos que una vez que el inversor adopta una estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$, a partir de que se observa un estado (\mathbf{S}, k) (se lleg3 a una etapa k por una trayectoria \mathbf{S}), se producen la siguiente sucesi3n de hechos:

1. El inversor observa \mathbf{S}_k y aplica $H_k(\mathbf{S})$.
2. Se llega a la pr3xima etapa, donde ocurre $(\hat{\mathbf{S}}, k + 1)$, con $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$.
3. Se tiene la p3rdida/ganancia $H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{S}$ y se acumula junto a la de las etapas anteriores.
4. En el caso que $M(\hat{\mathbf{S}}) = k + 1$, el valor descontado del derivado $D^Z(\mathbf{S})$ se acumula al valor anterior y el proceso termina. En caso contrario, se repite la sucesi3n de eventos anteriores para la pr3xima etapa.

Para cada etapa, debemos formular el proceso anterior en los t3rminos matemáticos adecuados. Una de las mejores ventajas que tiene programaci3n dinámica es que su aplicabilidad no depende, en general, de la naturaleza del problema. Los resultados clásicos sugieren que las variables de control son elegidas en cada etapa de forma independiente de un conjunto dado que depende del estado en que se encuentre el sistema. Entonces vamos a necesitar que la elecci3n de $H_k(\mathbf{S})$ se decida en la k -ésima etapa independientemente de la elecci3n que se haya hecho en las etapas anteriores, y que la estrategia formada por estas sucesivas elecciones pertenezca al conjunto \mathcal{H} .

Es decir, libraremos al inversor de elegir una estrategia a tiempo 0 y seguir dicha estrategia estrictamente, y le permitiremos que decida que estrategia usar en cada nodo según su conveniencia. De esta forma, la decisión en un nodo (\mathbf{S}, k) no depende de las decisiones anteriores, o sea, no depende de $H_{k-1}, H_{k-2}, \dots, H_0$. Pero, en contrapartida, depende del nodo, y el nodo guarda información sobre el pasado. Por lo tanto, la elección de $H_k(\mathbf{S})$ sigue dependiendo de la información del pasado.

Notemos que la propiedad full sobre el conjunto de estrategias (Definición 2.8) contempla este grado de libertad. Un conjunto de estrategias full está dado por el producto cartesiano de los conjuntos que contienen todas las imágenes de \mathbf{S} por \mathcal{H} en cada etapa. Esto implica que no es necesario fijar la estrategia a seguir en el inicio del proceso, sino que permitirá elegir una estrategia diferente en cada paso, ya que la estrategia resultante será de todos modos una estrategia del conjunto.

Mostraremos a continuación que la igualdad en (3.2) vale para un mercado acotado con un conjunto de estrategias full.

Teorema 3.3. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado, con \mathcal{H} full y sea Z un derivado. Supongamos, además, que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) > k$, $\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) > -\infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, entonces*

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}). \quad (3.8)$$

Además, si $\underline{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < +\infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, entonces

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}). \quad (3.9)$$

Demostración. Debido al Teorema 3.1 solo necesitamos probar

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}). \quad (3.10)$$

Demostraremos este resultado por inducción hacia atrás. Sea $k = n - 1$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ tal que $M(\mathbf{S}) > n - 1$, entonces de las Definiciones 2.7 y 3.1 se tiene que

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf_{H \in \mathcal{H}} \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right] = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Supongamos ahora que (3.10) es válido para $k+1$ y cualquier $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ con $M(\hat{\mathbf{S}}) > k+1$. Veamos que también es cierto para k . Sea $\Phi \in \mathcal{H}$ y $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $M(\hat{\mathbf{S}}) > k+1$. Entonces por hipótesis inductiva

$$\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) = \inf_{\Phi' \in \mathcal{H}} \sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k+1)}} \left[D^Z(\tilde{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k+1}^{M(\tilde{\mathbf{S}})-1} H'_i(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{\mathbf{S}} \right] \leq \bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}).$$

Como $\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) > -\infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\Phi^\varepsilon \in \mathcal{H}$, tal que

$$\sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k+1)}} \left[D^Z(\tilde{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k+1}^{M(\tilde{\mathbf{S}})-1} H_i^\varepsilon(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{\mathbf{S}} \right] < \bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + \varepsilon \leq \bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}}, k+1)}} \left[D^Z(\tilde{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k+1}^{M(\tilde{\mathbf{S}})-1} H_i^\varepsilon(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{\mathbf{S}} \right] - H_k(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} < \\ < \bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_k(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} + \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como \mathcal{H} es full, existe $\tilde{\Phi} = (\tilde{H}^0, \tilde{H}) \in \mathcal{H}$ tal que $\tilde{H}_k = H_k$ y $\tilde{H}_i = H_i^\varepsilon$. Se sigue entonces de (3.11) que

$$D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} \tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{\mathbf{S}} < \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right] + \varepsilon. \quad (3.12)$$

Sea ahora $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ con $M(\hat{\mathbf{S}}) = k + 1$, entonces

$$\bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} = D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} \tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{\mathbf{S}}.$$

Por lo tanto

$$D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} \tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{\mathbf{S}} < \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right] + \varepsilon. \quad (3.13)$$

Por último, como $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ fue elegido de manera arbitraria, se sigue de las ecuaciones (3.12) y (3.13) que

$$\begin{aligned} \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{\mathbf{S}} \right] < \\ < \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right] + \varepsilon, \end{aligned}$$

y entonces, dado que $\Phi \in \mathcal{H}$ también fue seleccionada de forma arbitraria

$$\begin{aligned} \bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) < \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - H_k(\mathbf{S}) \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right] + \varepsilon < \\ < \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como la desigualdad anterior vale para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces probamos finalmente (3.10). Además, si $\underline{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < +\infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$, entonces $\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, -Z, \mathcal{M}) > -\infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$. Luego, se sigue de lo anterior que

$$\bar{V}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) = \bar{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}).$$

Por lo tanto,

$$\underline{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

□

La hipótesis $\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) > -\infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ es fundamental. Una de las posibilidades para que se cumpla, por ejemplo, es que exista una estrategia $\Phi^\dagger = (H^{0\dagger}, H^\dagger) \in \mathcal{H}$ tal que realice el ínfimo, es decir

$$\bar{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) = \sup_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}},k+1)}} \left[D^Z(\tilde{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k+1}^{M(\tilde{\mathbf{S}})-1} H_i^\dagger(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{S} \right].$$

De forma análoga, la hipótesis $\underline{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < +\infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ es cierta si existe $\Phi^\downarrow = (H^{0\downarrow}, H^\downarrow) \in \mathcal{H}$ tal que realice el supremo, es decir

$$\underline{V}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) = \inf_{\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\hat{\mathbf{S}},k+1)}} \left[D^Z(\tilde{\mathbf{S}}) + \sum_{i=k+1}^{M(\tilde{\mathbf{S}})-1} H_i^\downarrow(\tilde{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \tilde{S} \right].$$

Otra posibilidad es que el derivado sea acotado por funciones afines.

Corolario 3.3. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial localmente 0-neutral n -acotado, con \mathcal{H} full, tal que toda estrategia constante es un elemento de \mathcal{H} . Consideremos Z un derivado financiero tal que*

$$Z(\mathbf{S}) \geq a \cdot S_{M(\mathbf{S})} + \alpha S_{M(\mathbf{S})}^0, \quad (3.14)$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, con $a \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}). \quad (3.15)$$

Si, además,

$$Z(\mathbf{S}) \leq b \cdot S_{M(\mathbf{S})} + \beta S_{M(\mathbf{S})}^0, \quad (3.16)$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, para algún $b \in \mathbb{R}^d$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}). \quad (3.17)$$

Demostración. Se sigue de (3.14) que

$$D^Z(\mathbf{S}) \geq a \cdot X(S_{M(\mathbf{S})}) + \alpha.$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Entonces para cada nodo (\mathbf{S}, k) y $\tilde{\Phi} \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[D^Z(\hat{\mathbf{S}}) - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} \tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] \geq \\ & \geq \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[a \cdot X(\hat{S}_{M(\mathbf{S})}) + \alpha - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} \tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] = \\ & = \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[a \cdot X(S_k) + \alpha + \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} a \cdot \Delta_i^X \hat{S} - \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} \tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] = \\ & = a \cdot X(S_k) + \alpha + \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[- \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} (\tilde{H}_i(\hat{\mathbf{S}}) - a) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] \geq \\ & \geq a \cdot X(S_k) + \alpha + \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[- \sum_{i=k}^{M(\hat{\mathbf{S}})-1} H_i(\hat{\mathbf{S}}) \cdot \Delta_i^X \hat{S} \right] = a \cdot X(S_k) + \alpha, \end{aligned}$$

pues \mathcal{M} es condicionalmente 0-neutral en (\mathbf{S}, k) (Teorema 1.2). Como $\tilde{\Phi}$ fue elegida arbitrariamente se sigue que $\bar{V}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) > -\infty$ para todo nodo (\mathbf{S}, k) . Por lo tanto del Teorema 3.3 se sigue (3.15). Supongamos ahora que (3.16) es cierta. Entonces

$$-Z(\mathbf{S}) \geq -b \cdot S_{M(\mathbf{S})} - \beta S_{M(\mathbf{S})}^0.$$

Luego se sigue de lo anterior que $\bar{V}(S_0, -Z, \mathcal{M}) = \bar{U}(S_0, -Z, \mathcal{M})$, de donde se sigue (3.17). \square

La hipótesis de acotación del derivado enunciadas en el Corolario anterior no son tan restrictivas en general. Por ejemplo, cualquiera de los derivados que presentamos en el ejemplo 2.2 tienen la propiedad de ser derivados positivos, y por ende, cumplen con la condición (3.14). Llamaremos a esta clase de derivados como derivados minimax.

Definición 3.2 (Derivado Minimax). Sean $a, b \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dado $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y Z un derivado financiero sobre \mathcal{S} . Diremos que Z es un *derivado minimax inferior* si

$$Z(\mathbf{S}) \geq a \cdot S_{M(\mathbf{S})} + \alpha S_{M(\mathbf{S})}^0, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}.$$

De manera similar, diremos que Z es un *derivado minimax superior* si

$$Z(\mathbf{S}) \leq b \cdot S_{M(\mathbf{S})} + \beta S_{M(\mathbf{S})}^0, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}.$$

Si Z es un derivado minimax inferior y superior a la vez, simplemente lo llamaremos *derivado minimax*.

3.2. Envolverte Convexa

Los últimos resultados de la sección anterior sugieren un algoritmo iterativo para resolver el problema minimax que aparece en las cotas (2.7) y (2.8) para un mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ con \mathcal{H} un conjunto de estrategias full. Además nos dicen un poco más: por medio de este mismo algoritmo podemos construir una estrategia óptima que resuelva el problema global, calculando en cada nodo (\mathbf{S}, k) la cota dinámica correspondiente. Desafortunadamente, se conocen pocos casos de soluciones cerradas para estos problemas. Una solución computacional requiere de un esfuerzo muy grande, ya que en cada nodo (\mathbf{S}, k) , para cada estrategia $\Phi \in \mathcal{H}$ se debe calcular un máximo sobre todas las trayectorias $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ y luego elegir el más pequeño de esos máximos.

De todas formas, el Teorema de Weierstrass (Teorema A.11) nos da algunas pistas de cuando podremos encontrar valores finitos para las cotas dinámicas. Dado un nodo (\mathbf{S}, k) tal que $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$, podemos definir la función $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$G(u) = \sup_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - u \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right].$$

Esta función resulta ser convexa y semicontinua inferior ya que es el supremo de funciones afines (Teorema A.6). Encontrar el valor de la cota dinámica $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ se traduce entonces en buscar el mínimo de la función G . Si, por ejemplo, G es coerciva (Ver Definición A.12), se sigue del Teorema de Weierstrass que el conjunto de mínimos de G es no vacío y compacto. Por lo tanto, debe existir un $R > 0$ tal que buscar mínimos en $I_k(\mathbf{S})$ es lo mismo que buscarlos en el conjunto $\{u \in \mathbb{R}^d : \|u\|_d < R\}$. En Ferrando *et al.* (2014) mostramos que para el caso $d = 1$, la función G es coerciva bajo la hipótesis de que el nodo (\mathbf{S}, k) sea libre de arbitraje.

En esta sección presentaremos un método para calcular las cotas dinámicas $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ utilizando otras herramientas provenientes del análisis convexo. En lo que sigue trabajaremos sobre mercados trayectoriales con conjuntos de estrategias full. Debido a como está desarrollada la teoría de convexidad vamos a obtener resultados

para la cota dinámica inferior $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$. Recordemos que teniendo la cota inferior podemos obtener la cota superior por medio de la relación

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\bar{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}).$$

El hecho de asumir conjuntos de estrategias full nos permite trabajar con una versión simplificada de la cota inferior, es decir, dado $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) > k$, la cota dinámica inferior toma la forma

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \sup_{u \in I_k(\mathbf{S})} \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{\mathbf{S}} \right], \quad (3.18)$$

donde

$$I_k(\mathbf{S}) = \{H_k(\mathbf{S}) : \Phi = (H^0, H) \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

El objetivo de esta sección será encontrar un procedimiento alternativo para calcular el valor de (3.18).

Notemos primero que la cota (3.18) podría tomar valores infinitos. Una manera sencilla de evitar esta situación es trabajar con derivados minimax.

Proposición 3.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado tal que $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$.*

1. *Si Z es un derivado minimax inferior, entonces*

$$a \cdot X(S_k) + \alpha \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}), \quad (3.19)$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) \geq k$.

2. *Si Z es un derivado minimax superior, entonces*

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq b \cdot X(S_k) + \beta, \quad (3.20)$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) \geq k$.

Demostración. Probaremos 1. por inducción hacia atrás. Notemos primero que si Z es un derivado minimax inferior, entonces

$$D^Z(\mathbf{S}) \geq a \cdot X(S_n) + \alpha.$$

Si $k = n$, sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) = n$, entonces

$$\underline{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = D^Z(\mathbf{S}) \geq a \cdot X(S_n) + \alpha.$$

Supongamos ahora que (3.19) es verdadera para $k + 1$, y veamos que también es cierta para k . Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) \geq k$. Por un lado, si $M(\mathbf{S}) = k$ se tiene que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = D^Z(\mathbf{S}) \geq a \cdot X(S_k) + \alpha.$$

Por otro, si $M(\mathbf{S}) > k$, se sigue de la hipótesis inductiva que

$$\begin{aligned} \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) &= \sup_{u \in I_k(\mathbf{S})} \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] \geq \\ &\geq \sup_{u \in I_k(\mathbf{S})} \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] \geq \\ &\geq \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha - a \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] = \\ &= a \cdot X(S_k) + \alpha. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a \cdot X(S_k) + \alpha \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}),$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) \geq k$.

Para mostrar 2., asumamos que Z es un derivado minimax superior, entonces

$$-Z(\mathbf{S}) \geq -b \cdot S_{M(\mathbf{S})} - \beta S_{M(\mathbf{S})}^0.$$

Luego, se sigue de 1. que

$$-b \cdot X(S_k) - \beta \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}).$$

Por lo tanto, se tiene de la Definición 3.1 que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\underline{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) \geq b \cdot X(S_k) + \beta.$$

□

Antes de presentar los resultados, necesitamos definir una función auxiliar que será de mucha ayuda. Dado $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ vamos a definir para cada $x \in \mathbb{R}^d$ el conjunto

$$\mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}(x) = \{\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, m) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)} : X(\hat{S}_{k+1}) = x\} \subseteq \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)},$$

y la función $g_{(\mathbf{S}, k)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$g_{(\mathbf{S}, k)}(x) = \begin{cases} \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}(x)} \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) & \text{si } x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \\ +\infty & \text{si } x \notin X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \end{cases}, \quad (3.21)$$

donde $\Sigma_k(\mathbf{S})$ es el conjunto definido por (1.12). Observemos que si $\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < \infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$, se sigue inmediatamente de la definición de $g_{(\mathbf{S},k)}$ que

$$\{x \in \mathbb{R}^d : g_{(\mathbf{S},k)}(x) < \infty\} = X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Debido al Teorema 3.2 y a la Proposición 3.2, esta situación puede darse, por ejemplo, cuando \mathcal{M} es un mercado localmente 0-neutral y Z es un derivado minimax superior, ya que

$$\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < +\infty.$$

La Proposición que sigue será de utilidad.

Proposición 3.3. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y Z un derivado financiero. Supongamos que para algún $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ existen $a \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M})$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$. Entonces

$$a \cdot x + \alpha \leq g_{(\mathbf{S},k)}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Supongamos que (\mathbf{S}, k) es un nodo del mercado \mathcal{M} tal que existen $a \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M})$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$. Sea $x \in \mathbb{R}^d$, si $x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ se sigue que

$$g_{(\mathbf{S},k)}(x) = \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}(x)} \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) \geq a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha = a \cdot x + \alpha.$$

Por otra parte, si $x \notin X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$,

$$+\infty = g_{(\mathbf{S},k)}(x) > a \cdot x + \alpha.$$

Por lo tanto, se sigue el resultado. \square

En la siguiente Proposición utilizaremos la noción de conjugada o función dual de una función (Definición A.10).

Proposición 3.4. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y Z un derivado financiero. Consideremos $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ tal que $k < M(\mathbf{S})$ e $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$, entonces

$$g_{(\mathbf{S},k)}^{**}(x_{\mathbf{S}}) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}),$$

donde $x_{\mathbf{S}} = X(S_k)$.

Demostración. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Calculemos primero la biconjugada de la función $g_{(\mathbf{S},k)}$. De la Definición A.10 se sigue que

$$g_{(\mathbf{S},k)}^*(u) = \sup_{\hat{x} \in \mathbb{R}^d} [u \cdot \hat{x} - g_{(\mathbf{S},k)}(\hat{x})],$$

para todo $u \in \mathbb{R}^d$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} g_{(\mathbf{S},k)}^{**}(x) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^d} [u \cdot x - g_{(\mathbf{S},k)}^*(u)] = \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \left[u \cdot x - \sup_{\hat{x} \in \mathbb{R}^d} [u \cdot \hat{x} - g_{(\mathbf{S},k)}(\hat{x})] \right] \\ &= \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{\hat{x} \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{S},k)}(\hat{x}) - u \cdot (\hat{x} - x)] = \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{\hat{x} \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{S},k)}(\hat{x}) + u \cdot (\hat{x} - x)]. \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue debido a que si $u \in \mathbb{R}^d$, entonces $-u \in \mathbb{R}^d$. Veamos ahora que $g_{(\mathbf{S},k)}^{**}(x_{\mathbf{S}}) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$. Asumamos que $x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, entonces

$$g_{(\mathbf{S},k)}(x) \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}), \quad \forall \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}(x).$$

Además, $x = X(\hat{S}_{k+1})$ para todo $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}(x)$. Luego, para cada $u \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$g_{(\mathbf{S},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{S}}) \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot (X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k)).$$

Por lo tanto,

$$\inf_{x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))} [g_{(\mathbf{S},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{S}})] \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot (X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k)),$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$, de donde

$$\inf_{x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))} [g_{(\mathbf{S},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{S}})] \leq \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} [\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S}].$$

Por otra parte, dado que $X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \subseteq \mathbb{R}^d$, se sigue que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{S},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{S}})] \leq \inf_{x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))} [g_{(\mathbf{S},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{S}})],$$

y entonces

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{s}})] \leq \inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right]$$

para toda $u \in \mathbb{R}^d$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} g_{(\mathbf{s},k)}^{**}(x_{\mathbf{s}}) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{s}})] \leq \\ &\leq \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] \leq \\ &\leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para demostrar la otra desigualdad, consideremos $x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ arbitrario y el conjunto $\mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}(x) \subseteq \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$. Entonces para cada $u \in \mathbb{R}^d$ tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] &\leq \inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}(x)} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] = \\ &= \inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}(x)} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) \right] + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} = \\ &= g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{s}}), \end{aligned}$$

pues $\Delta_k^X \hat{S} = X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k) = x - x_{\mathbf{s}}$ para todo $\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}(\hat{x})$. Como $x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ fue elegido arbitrariamente, se sigue que

$$\inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] \leq \inf_{x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))} [g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{s}})].$$

Por otro lado, como $g_{(\mathbf{s},k)}(x) = \infty$ para cada $x \notin X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, se tiene que

$$\inf_{x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))} [g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{s}})] = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (\hat{x} - x_{\mathbf{s}})].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) &= \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{\hat{S} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{S}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot \Delta_k^X \hat{S} \right] \\ &\leq \sup_{u \in \mathbb{R}^d} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} [g_{(\mathbf{s},k)}(x) + u \cdot (x - x_{\mathbf{s}})] = g_{(\mathbf{s},k)}^{**}(x_{\mathbf{s}}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Entonces de (3.22) y (3.23) se sigue la igualdad buscada. \square

Como la función $g_{(\mathbf{s},k)}$ es una función definida sobre \mathbb{R}^d que toma valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tenemos a disposición toda la teoría del análisis convexo para poder obtener resultados que ayuden al cálculo de las cotas minimax. El hecho de que la doble conjugada de $g_{(\mathbf{s},k)}$ coincida con la cota dinámica nos da la siguiente simplificación, que involucra la envolvente convexa (Definición A.8) y la envolvente semicontinua inferior (Definición A.9) de $g_{(\mathbf{s},k)}$.

Teorema 3.4. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y Z un derivado financiero. Consideremos una trayectoria $\mathbf{S} = (S, W, m) \in \mathcal{S}$ y un entero $k \geq 0$ tal que $m > k$ con las siguientes propiedades,

- (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje con $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$,
- existen $a \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < +\infty$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$.

Entonces

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_{(\mathbf{S}, k)}(x_i) : x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})), \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i = X(S_k), \lambda \in \Lambda_{d+1} \right\} \quad (3.24)$$

donde $\Lambda_{d+1} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}$.

Demostración. Consideremos $\mathbf{S} = (S, W, m) \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ cumpliendo las hipótesis del enunciado. Se sigue entonces de la Proposición 3.3 que

$$g_{(\mathbf{S}, k)}(x) \geq a \cdot x + \alpha$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Luego, del inciso (3) del Teorema A.10 junto con la Proposición anterior tenemos que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = g_{(\mathbf{S}, k)}^{**}(x_{\mathbf{S}}) = \overline{g}_{(\mathbf{S}, k)}^c(x_{\mathbf{S}}),$$

donde $x_{\mathbf{S}} = X(S_k)$ y $\overline{g}_{(\mathbf{S}, k)}^c$ es la envolvente semicontinua inferior de la envolvente convexa de $g_{(\mathbf{S}, k)}$. Por otra parte, como $\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < \infty$ para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ se tiene de el Lema A.1 que

$$\{x \in \mathbb{R}^d : g_{(\mathbf{S}, k)}^c(x) < \infty\} = \text{co} \{x \in \mathbb{R}^d : g_{(\mathbf{S}, k)}(x) < \infty\} = \text{co} X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Entonces, como (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje, sabemos de la Proposición 1.11 que $x_{\mathbf{S}} \in \text{ri}(\text{co} X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$, y entonces se sigue del Teorema A.9 que $\overline{g}_{(\mathbf{S}, k)}^c(x_{\mathbf{S}}) = g_{(\mathbf{S}, k)}^c(x_{\mathbf{S}})$. Además se tiene a partir de la Proposición A.9 que $g_{(\mathbf{S}, k)}^c > -\infty$, por lo tanto, del Teorema A.8 obtenemos que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_{(\mathbf{S}, k)}(x_i) : \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i = X(S_k), \lambda \in \Lambda_{d+1} \right\},$$

donde $\Lambda_{d+1} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}$. Luego, como $g_{(\mathbf{S},k)}(\hat{x}) = \infty$ si $\hat{x} \notin X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, se tiene que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_{(\mathbf{S},k)}(x_i) : x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})), \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i = X(S_k), \lambda \in \Lambda_{d+1} \right\}.$$

□

Notemos que para que valga el Teorema anterior en un nodo (\mathbf{S}, k) del mercado son necesarias hipótesis sobre el valor de $\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M})$ para cualquier trayectoria $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$. Es útil entonces preguntarse si existe alguna hipótesis sobre el mercado o el derivado financiero que las aseguren. El siguiente Corolario da una respuesta a este planteo.

Corolario 3.4. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado libre de arbitraje tal que $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$. Si Z es un derivado financiero minimax entonces*

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_{(\mathbf{S},k)}(x_i) : x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})), \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i = X(S_k), \lambda \in \Lambda_{d+1} \right\}$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$, donde $\Lambda_{d+1} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}$.

Demostración. Notemos que si el mercado \mathcal{M} es libre de arbitraje, entonces se sigue del Teorema 1.1 que todo nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje. Además, se tiene de la Proposición 3.2 junto al Teorema 3.2, que existen $a, b \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot X(S_k) + \alpha \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq b \cdot X(S_k) + \beta < +\infty,$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) \geq k$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.4 se tiene el resultado. □

El valor de cada cota dinámica en un nodo (\mathbf{S}, k) está sumamente condicionada por la condición local del nodo en cuestión. El siguiente resultado muestra que si (\mathbf{S}, k) es un nodo de arbitraje en el sentido de la Definición 1.10, podemos achicar el conjunto (3.24) en donde buscar las soluciones para las cotas dinámicas.

Teorema 3.5. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial n -acotado y Z un derivado financiero. Consideremos una trayectoria $\mathbf{S} = (S, W, m) \in \mathcal{S}$ y un entero $k \geq 0$ tal que $m > k$ con las siguientes propiedades,*

- (\mathbf{S}, k) es un nodo de arbitraje con $I_k(\mathbf{S}) = \mathbb{R}^d$,
- existen $a \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \cdot X(\hat{S}_{k+1}) + \alpha \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) < +\infty$$

para todo $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$,

- la función $g_{(\mathbf{S}, k)}^c$ es semicontinua inferior.

Entonces si $X(S_k) \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ existe $b \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_{(\mathbf{S}, k)}(x_i) : \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i = X(S_k), x_i \in \mathbb{H}_b, \lambda \in \Lambda_{d+1} \right\}, \quad (3.25)$$

donde $\Lambda_{d+1} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}$ y

$$\mathbb{H}_b = \{x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) : b \cdot x = b \cdot x_{\mathbf{S}}\} \subseteq \mathbb{R}^d. \quad (3.26)$$

En particular, si 0 es un punto extremo de $\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, en el sentido de la Definición A.5, entonces

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \underline{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) : \tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}(x_{\mathbf{S}}) \right\}.$$

Además, si $X(S_k) \notin \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ entonces $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = +\infty$.

Demostración. Consideremos $\mathbf{S} = (S, W, m) \in \mathcal{S}$ y $k \geq 0$ cumpliendo las hipótesis del enunciado. Se sigue entonces de la Proposición 3.3 que

$$g_{(\mathbf{S}, k)}(x) \geq a \cdot x + \alpha$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Luego como $g_{(\mathbf{S}, k)}^c$ es semicontinua inferior, del inciso (3) del Teorema A.10 junto con la Proposición 3.4, tenemos que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = g_{(\mathbf{S}, k)}^{**}(x_{\mathbf{S}}) = g_{(\mathbf{S}, k)}^c(x_{\mathbf{S}}),$$

donde $x_{\mathbf{S}} = X(S_k)$. Además se tiene a partir de la Proposición A.9 que $g_{(\mathbf{S}, k)}^c > -\infty$, por lo tanto, del Teorema A.8 obtenemos que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i g_{(\mathbf{S}, k)}(x_i) : x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})), \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i = X(S_k), \lambda \in \Lambda_{d+1} \right\},$$

donde $\Lambda_{d+1} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{d+1}) : \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1\}$. Entonces si $x_{\mathbf{S}} \notin \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ se sigue que $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = +\infty$. Supongamos, por el contrario, que $x_{\mathbf{S}} \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$. De la Definición 1.10 y la Proposición 1.11 se tiene que si (\mathbf{S}, k) es un nodo de arbitraje, entonces $x_{\mathbf{S}} \notin \text{ri}(\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})))$. Por lo tanto, del Teorema de Separación A.1 aplicado a $E_1 = \{x_{\mathbf{S}}\}$ y $E_2 = \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, existe $b \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$b \cdot x \geq b \cdot x_{\mathbf{S}} \quad \forall x \in \text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Consideremos entonces el conjunto \mathbb{H}_b definido por (3.26) y supongamos que

$$x_{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i \text{ con } \lambda \in \Lambda_{d+1}, \quad x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})).$$

Entonces $x_i \in \mathbb{H}_b$ para todo $i = 1, \dots, d+1$, pues sino,

$$b \cdot x_{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i (b \cdot x_i) > b \cdot x_{\mathbf{S}},$$

lo que es un absurdo. Por lo tanto se sigue (3.25). De la misma forma, si 0 es un punto extremo de $\text{co } \Delta^X \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, se tiene que $x_{\mathbf{S}}$ es un punto extremo de $\text{co } X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, y entonces no se puede escribir como combinación convexa de ningún punto, salvo de él mismo. Por lo tanto, se tiene de (3.25) que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = g_{(\mathbf{S}, k)}(x_{\mathbf{S}}) = \inf \left\{ \underline{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) : \tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}(x_{\mathbf{S}}) \right\}.$$

□

Como vemos la teoría de convexidad nos ayuda a comprender el problema de optimización, lo que nos va a permitir desarrollar un algoritmo de cálculo eficaz, como presentaremos en la siguiente Sección.

3.3. Algoritmo Iterativo

En lo que va del capítulo, hemos presentado varios resultados con el objetivo de resolver el problema de conseguir un precio justo para un derivado financiero en un marco determinístico. Si bien por si solos los resultados no son de demasiada ayuda, vamos a presentar un algoritmo de cálculo para las cotas minimax (2.7) y (2.8) basado en todos ellos. Además, el algoritmo permite obtener el valor local $H_k(\mathbf{S})$ de la estrategia óptima, lo que reduce la complejidad que presenta la variación de $\Phi \in \mathcal{H}$. El objetivo

de esta sección, es explicar detalladamente cada paso de este algoritmo. La eficiencia del mismo no fue objeto de estudio en esta tesis.

Antes de comenzar, es importante enumerar de forma clara todas las hipótesis que vamos a necesitar. Vamos a considerar un conjunto de trayectorias \mathcal{S} , un conjunto de estrategias full \mathcal{H} cerrado bajo la suma de sus elementos que contenga a las estrategias constantes y un derivado financiero minimax Z . Vamos a suponer que el mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ es n -acotado y localmente 0-neutral. Esta última hipótesis hace que el problema quede bien planteado: si el mercado es localmente 0-neutral, entonces sabemos del Teorema 1.2 que el mercado es 0-neutral y, por lo tanto, del Teorema 2.1 que existe un intervalo de precios para Z . Entonces debemos encontrar los valores

$$\begin{aligned}\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) &\equiv \inf_{\Phi \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\frac{Z(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} - \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S \right] \\ \underline{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) &\equiv \sup_{\Phi \in \mathcal{H}} \inf_{\mathbf{S} \in \mathcal{S}} \left[\frac{Z(\mathbf{S})}{S_{M(\mathbf{S})}^0} + \sum_{i=0}^{n-1} H_i(\mathbf{S}) \cdot \Delta_k^X S \right].\end{aligned}$$

Dada la relación $\bar{V}(\mathbf{S}_0, Z, \mathcal{M}) = -\underline{V}(\mathbf{S}_0, -Z, \mathcal{M})$, alcanzará con calcular una de ellas. Debido al desarrollo que presentamos en la Sección anterior, trabajaremos principalmente con la cota inferior. Dado que \mathcal{H} es un conjunto de estrategias full y que Z es un derivado minimax, podemos asegurar mediante el Corolario 3.3 que

$$\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}).$$

Esto nos lleva al algoritmo dinámico que mencionamos, utilizando la definición de las cotas dinámicas (Definición 3.1). Vamos a proceder de la siguiente forma:

1. Para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ calcularemos el valor de $\underline{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ que solo depende de Z y $M(\mathbf{S})$
2. Una vez calculado cada $\underline{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$, vamos a poder calcular el valor de $\underline{U}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.
3. Seguiremos con este procedimiento recursivo hasta llegar a $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$, que solo involucra conocer los valores de $\underline{U}_1(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$.
4. Una vez que tenemos el valor de $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$, calculamos $\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$.

Con estos pasos logramos el objetivo de calcular $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ y $\overline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$.

Lo que presenta mayor complejidad es calcular en cada paso los valores de $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ para todo $0 \leq k < n$. Es por ello que los resultados obtenidos en la Sección 3.2 cobran mayor importancia. Por ejemplo, podríamos pedirle al mercado \mathcal{M} una hipótesis más fuerte, como que sea libre de arbitraje, luego el Teorema 3.4 vale, y obtenemos una forma más sencilla de calcular las cotas dinámicas.

A continuación veremos la utilidad del Teorema 3.4 a la hora de proponer un algoritmo de cálculo para la cota dinámica $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ en algún nodo que cumpla con las hipótesis necesarias.

3.3.1. Caso $d = 1$

En este apartado vamos a considerar el caso particular de un mercado trayectorial n -acotado $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ con $d = 1$. Para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, y $0 < k < M(\mathbf{S})$ daremos un procedimiento geométrico, utilizando los resultados previos, con el objetivo de calcular las cotas dinámicas.

Consideremos momentáneamente una trayectoria arbitraria pero fija $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ y un número $u \in \mathbb{R}$, y sea para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\ell(x) = \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u(X(\hat{S}_{k+1}) - x).$$

ℓ no es otra cosa que una recta en el plano, que contiene al punto

$$(X(\hat{S}_{k+1}), \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M})) \in \mathbb{R}^2$$

con pendiente u . Entonces,

$$\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u(X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k))$$

es la intersección de ℓ con la recta vertical $x = X_k(S)$. Por lo tanto, para cada $u \in I_{\mathbf{S}}^k$ fijo, permitiéndonos algún abuso del lenguaje,

$$\inf_{\mathbf{S}' \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}', Z, \mathcal{M}) + u(X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k)) \right]$$

será la recta que interseque “más abajo” a la recta $x = X(S_k)$. Entonces $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ se convierte en el máximo valor de esas mínimas intersecciones.

Visualizar el problema geoméricamente es de gran ayuda para plantear algoritmos de cálculo eficientes. Asumamos que las hipótesis del Teorema 3.4 se cumplen. En tal

caso, ya vimos que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $0 \leq k \leq M(\mathbf{S})$ podemos caracterizar la cota dinámica inferior de la forma:

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 g_{(\mathbf{s},k)}(x_1) + \lambda_2 g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) : \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = X(S_k) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \\ \lambda_i \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (3.27)$$

Este valor resulta ser la intersección de una de las caras de la cápsula convexa de los puntos $(x, g_{(\mathbf{s},k)}(x)) \in \mathbb{R}^2$ con $x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, con la recta $x = X(S_k)$.

Trabajando un poco sobre las condiciones de (3.27), se obtiene que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, de donde,

$$\begin{aligned} X(S_k) &= \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = \\ X(S_k) &= x_2 - \lambda_1(x_2 - x_1) = \\ \lambda_1 &= \frac{x_2 - X(S_k)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

para cada $x_2 \neq x_1$. Reemplazando ahora en (3.27) obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 g_{(\mathbf{s},k)}(x_1) + \lambda_2 g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) &= \frac{x_2 - X(S_k)}{x_2 - x_1} g_{(\mathbf{s},k)}(x_1) + \left(1 - \frac{x_2 - X(S_k)}{x_2 - x_1}\right) g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) \\ &= g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) - \left(\frac{x_2 - X(S_k)}{x_2 - x_1}\right) (g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) - g_{(\mathbf{s},k)}(x_1)) \\ &= g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) - \left(\frac{g_{(\mathbf{s},k)}(x_2) - g_{(\mathbf{s},k)}(x_1)}{x_2 - x_1}\right) (x_2 - X(S_k)). \end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $x_1, x_2 \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, existen $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ y $\tilde{\mathbf{S}} = (\tilde{S}, \tilde{W}, \tilde{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $x_1 = X(\hat{S}_{k+1})$ y $x_2 = X(\tilde{S}_{k+1})$, y entonces

$$\lambda_1 X(\hat{S}_{k+1}) + \lambda_2 X(\tilde{S}_{k+1}) = X(S_k).$$

Luego $X(S_k)$ se encuentra en el segmento comprendido entre $X(\hat{S}_{k+1})$ y $X(\tilde{S}_{k+1})$. Este segmento se encuentra en \mathbb{R} , por lo tanto es un intervalo. Entonces podemos asumir que $X(\hat{S}_{k+1})$ es un valor menor o igual a $X(S_k)$, y $X(\tilde{S}_{k+1})$ es un valor mayor a $X(S_k)$. Por lo tanto, si definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S}) &= \left\{ \tilde{S}_{k+1} : \tilde{\mathbf{S}} = (\tilde{S}, \tilde{W}, \tilde{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)} \text{ y } X(\tilde{S}_{k+1}) > X(S_k) \right\}, \\ \Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S}) &= \left\{ \hat{S}_{k+1} : \hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)} \text{ y } X(\tilde{S}_{k+1}) \leq X(S_k) \right\}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

podemos transformar el problema de optimización (3.27) en

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{up}}) - u(x^{\text{up}}, x^{\text{do}})(x^{\text{up}} - x_{\mathbf{S}}) : \begin{array}{l} x^{\text{up}} \in X(\Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})) \\ x^{\text{do}} \in X(\Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})) \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

donde $x_{\mathbf{S}} = X(S_k)$ y

$$u(x^{\text{up}}, x^{\text{do}}) = \frac{g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{up}}) - g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{do}})}{x^{\text{up}} - x^{\text{do}}}. \quad (3.30)$$

Este valor resulta ser la pendiente de la recta del plano que contiene a los puntos $(x^{\text{up}}, g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{up}}))$ y $(x^{\text{do}}, g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{do}}))$, y, entonces, el valor de $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ es la menor intersección de las rectas de la forma (3.29) con la recta vertical $x = X(S_k)$.

Por lo tanto, mostramos que el problema de encontrar el máximo valor para cada pendiente u de las mínimas intersecciones de la recta ℓ con $x = X(S_k)$, es equivalente a encontrar la mínima intersección de las rectas que contienen un punto a la izquierda y otro a la derecha de la recta vertical $x = X(S_k)$. Además, como (3.24) resulta ser la envolvente convexa de la función $g_{(\mathbf{s},k)}$, entonces a partir de la caracterización del Lema A.1, también resulta ser el lado inferior de la cápsula convexa de los puntos del epígrafe de $g_{(\mathbf{s},k)}$ que interseca a la recta $x = X(S_k)$.

Observación 3.2. 1. Los conjuntos definidos en (3.28) también podrían haberse definido de una manera alternativa intercambiando la desigualdad estricta, es decir,

$$\begin{aligned} \Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S}) &= \left\{ \tilde{S}_{k+1} : \tilde{\mathbf{S}} = (\tilde{S}, \tilde{W}, \tilde{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)} \text{ y } X(\tilde{S}_{k+1}) \geq X(S_k) \right\}, \\ \Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S}) &= \left\{ \hat{S}_{k+1} : \hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}, \hat{W}, \hat{m}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)} \text{ y } X(\hat{S}_{k+1}) < X(S_k) \right\}, \end{aligned}$$

2. Notemos que para cualquier $x^{\text{up}} \in X(\Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S}))$ y $x^{\text{do}} \in X(\Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S}))$ vale la siguiente igualdad

$$g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{up}}) - u(x^{\text{up}}, x^{\text{do}})(x^{\text{up}} - x_{\mathbf{S}}) = g_{(\mathbf{s},k)}(x^{\text{do}}) - u(x^{\text{up}}, x^{\text{do}})(x^{\text{do}} - x_{\mathbf{S}}).$$

Para cada nodo (\mathbf{S}, k) , los conjuntos $\Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ y $\Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$ serán distintos de vacío si, por ejemplo, el nodo (\mathbf{S}, k) es 0-neutral y existe una trayectoria $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $X(\tilde{S}_{k+1}) = X(S_k)$ o (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje.

3.3.2. Caso $d = 2$

Vamos a considerar ahora el caso particular de un mercado trayectorial n -acotado $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ con $d = 2$. Al igual que antes daremos una interpretación geométrica de

la situación. Sea $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}$ una trayectoria arbitraria pero fija y un vector $u \in \mathbb{R}^2$, definimos para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$q(x) = \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot (X(\hat{S}_{k+1}) - x).$$

q es un plano en el espacio, con vector normal u , y contiene al punto

$$(X(\hat{S}_{k+1}), \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M})) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces,

$$\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot (X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k))$$

es la intersección de q con la recta vertical $x^1 = X^1(S_k)$ y $x^2 = X^2(S_k)$. Por lo tanto, para cada $u \in \mathbb{R}^2$ fijo, permitiéndonos algún abuso del lenguaje,

$$\inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S},k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u \cdot (X(\hat{S}_{k+1}) - X(S_k)) \right]$$

será el plano que interseque “más abajo” a la recta $x^1 = X^1(S_k)$ y $x^2 = X^2(S_k)$. Entonces $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ se convierte en el máximo valor de esas mínimas intersecciones. Para este caso obtendremos a partir del Teorema 3.4, una situación análoga al caso $d = 1$: el valor $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ resulta ser la intersección de una de las caras de la cápsula convexa de los puntos $(x, g_{(\mathbf{S},k)}(x)) \in \mathbb{R}^3$ con $x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$, con la recta $x = X(S_k)$.

Resolver el problema de encontrar la intersección de una recta con una cara de la cápsula convexa de un conjunto de puntos no es tarea sencilla. Asumamos que las hipótesis del Teorema 3.4 se cumplen, entonces para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $0 \leq k \leq M(\mathbf{S})$ podemos caracterizar la cota dinámica inferior de la forma:

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i = X(S_k) \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_{(\mathbf{S},k)}(x_i) : \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \\ x_i \in X(\Sigma_k(\mathbf{S})) \\ \lambda_i \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (3.31)$$

Asumiremos que $X(\Sigma_k)$ contiene una cantidad finita de puntos y que (\mathbf{S}, k) es un nodo libre de arbitraje. Propondremos para resolver esta situación el algoritmo presentado en Koptelov & Konashkova (2013), el cual tiene la ventaja de que no necesita construir la cápsula convexa de los puntos de $X(\Sigma_k(\mathbf{S}))$ para encontrar la intersección de la misma con una recta dada.

La idea principal es disminuir en una serie de pasos la dimensión del problema. Esto se logra separando el conjunto de puntos en dos. Se construye un plano que contenga a la recta $x^1 = X^1(S_k)$ y $x^2 = X^2(S_k)$ de tal forma que queden puntos a ambos lados del plano. Por cada par de puntos separados por el plano, se traza una recta que los una. De esa manera se obtiene un nuevo conjunto de puntos contenidos en dicho plano, dado por la intersección de esas rectas con el plano dado. A su vez, estos nuevos puntos quedarán separados por la recta original. Nuevamente, por cada par de puntos separados por la recta, se traza una recta que los una. Así obtenemos un conjunto de puntos en la recta, dado por la intersección de esas rectas con la recta original. Entonces el valor de (3.31) estará dado por el menor valor de ese conjunto.

Vamos a definir por

$$\mathcal{X} = \{(x, g_{(\mathbf{s},k)}(x)) : x \in X(\Sigma_k(\mathbf{S}))\} \subset \mathbb{R}^3.$$

A continuación daremos el algoritmo en detalle.

1. Consideremos la recta de \mathbb{R}^3 dada por $x^1 = X^1(S_k)$ y $x^2 = X^2(S_k)$.
2. Vamos a separar los puntos en dos conjuntos,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{2^-} &= \{(x, g_{(\mathbf{s},k)}(x)) \in \mathcal{X} : x^2 < X^2(S_k)\} \subset \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{X}^{2^+} &= \{(x, g_{(\mathbf{s},k)}(x)) \in \mathcal{X} : x^2 \geq X^2(S_k)\} \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Como el nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje, entonces los conjuntos \mathcal{X}^{2^-} y \mathcal{X}^{2^+} son no vacíos.

3. Conectaremos ahora cada punto $(x^-, g_{(\mathbf{s},k)}(x^-)) \in \mathcal{X}^{2^-}$ y $(x^+, g_{(\mathbf{s},k)}(x^+)) \in \mathcal{X}^{2^+}$ para hallar los puntos del conjunto $\mathcal{X}^{2^=}$ $\subset \mathbb{R}^3$, el cual contiene los puntos intersección entre estas rectas y el plano $x^2 = X^2(S_k)$.
4. A continuación, separaremos los puntos del nuevo conjunto $\mathcal{X}^{2^=}$ en otros dos conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{2^=,1^-} &= \{(p^1, p^2, p^3) \in \mathcal{X}^{2^=} : p^1 < X^1(S_k)\} \subset \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{X}^{2^=,1^+} &= \{(p^1, p^2, p^3) \in \mathcal{X}^{2^=} : p^1 \geq X^1(S_k)\} \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Nuevamente, los conjuntos $\mathcal{X}^{2^=,1^-}$ y $\mathcal{X}^{2^=,1^+}$ serán distintos de vacío, pues el nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje.

5. Por último, conectaremos cada punto $p^- \in \mathcal{X}^{2^=,1^-}$ y $p^+ \in \mathcal{X}^{2^=,1^+}$ para hallar los puntos del conjunto $\mathcal{X}^{2^=,1^=} \subset \mathbb{R}^3$, el cual contiene los puntos intersección entre estas rectas y la recta $x^1 = X^1(S_k)$ y $x^2 = X^2(S_k)$.
6. Con el nuevo conjunto $\mathcal{X}^{2^=,1^=}$ construido, buscamos

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \min\{p^3 : (p^1, p^2, p^3) \in \mathcal{X}^{2^=,1^=}\}.$$

En conclusión, este algoritmo puede ser utilizado para construir programas computacionales eficientes para calcular el intervalo de precios de un derivado financiero para el caso en que se trabaje con una cartera financiera compuesta por solo tres activos.

Capítulo 4

Ejemplos: Mercados por Intervalos

Se podría pensar que una pequeña cantidad de modelos encuadran dentro del formalismo que presentamos en esta tesis, pero por el contrario, el enfoque permite construir una gran variedad de conjuntos de trayectorias por medio de la información histórica que se obtiene del mercado. Por citar un ejemplo, los conjuntos de trayectorias podrían ser contruidos a partir de trayectorias muestrales de martingalas de tiempo continuo (ver Ferrando *et al.* (2014)).

En este capítulo daremos algunos ejemplos de mercados trayectoriales definidos en términos de alguna fuente adicional de incertidumbre, la cual tenemos codificada en la variable W de cada trayectoria. Desarrollaremos una clase general de mercados, basados en los mercados por intervalos introducidos originalmente en Roorda *et al.* (2005), dentro de los cuales podemos encontrar tanto ejemplos conocidos como el clásico modelo binomial y trinomial, así como también un modelo basado en la variación cuadrática de las trayectorias. Además mostraremos numéricamente algunos de los resultados que hemos desarrollado en esta tesis.

4.1. Mercados por Intervalos

Los ejemplos que presentaremos en este capítulo están basados en alguna variable observable que representa algún dato de interés para el inversor. A partir de ella, vamos a definir conjuntos de trayectorias, estableciendo relaciones con los posibles valores del stock. En algunos casos, las relaciones se obtienen inmediatamente de la naturaleza discreta de las transacciones financieras.

Durante este capítulo trabajaremos con mercados trayectoriales compuestos por un

bono libre de riesgo (cuenta bancaria) y un activo riesgoso (stock). Es decir, consideraremos $d = 1$, y asumiremos que la variable S^0 representará un bono libre de riesgo con tasa de interés igual a cero, lo que nos permite tomar, sin pérdida de generalidad $S_i^0 = 1$ para todo $i \geq 0$, y por lo tanto, $X(S_i) = S_i^1$ para toda trayectoria $\mathbf{S} = (S, W, m)$. Haremos un abuso de notación en este apartado, y simplemente notaremos por S a S^1 . La variable W será aquella que codifique la información observable. Por simplicidad, tomaremos a W como una variable unidimensional.

No hay un resultado esencial en esta tesis donde se requiera que $S_i > 0$, pero imponiendo esta restricción, podremos establecer conexiones de manera más sencilla con los modelos usuales. La siguiente Definición es una generalización de los mercados presentados en Roorda *et al.* (2005). Asumiremos que $w_0 = 0$, $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}$ y $\Omega_i \subset (0, \infty)$.

Definición 4.1. Diremos que un conjunto de trayectorias $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_\infty(s_0)$ es un *conjunto de trayectorias por intervalos* si para todo número real $c > 0$ y $0 < d < 1 < u$, y un subconjunto $Q \subseteq \cup_{i=0}^\infty \Omega_i$, cada trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ verifica que:

1. $d \leq \frac{S_{i+1}}{S_i} \leq u$ para todo $i \geq 0$,
2. $0 < W_{i+1} - W_i \leq c$ para todo $0 \leq i < M(\mathbf{S})$,
3. $W_{M(\mathbf{S})} \in Q$.

Para un conjunto de trayectorias por intervalos \mathcal{S} y un conjunto de estrategias \mathcal{H} , llamaremos al mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un *mercado trayectorial por intervalos*.

Dado \mathcal{S} un conjunto de trayectorias por intervalos, recordemos que si tenemos dos trayectorias $\hat{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_\infty(s_0)$ tal que $\hat{S}_i = \tilde{S}_i$ y $\hat{W}_i = \tilde{W}_i$ para todo $i \geq 0$ no implica necesariamente que $M(\hat{\mathbf{S}}) = M(\tilde{\mathbf{S}})$. Entonces, podría suceder que $\hat{W}_{M(\hat{\mathbf{S}})} \in Q$ y $\tilde{W}_{M(\tilde{\mathbf{S}})} \notin Q$ y, por lo tanto, $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ and $\tilde{\mathbf{S}} \notin \mathcal{S}$. Notemos también que un conjunto de trayectorias por intervalos no necesita ser, en general, el conjunto de todas las trayectorias \mathbf{S} satisfaciendo las condiciones enumeradas en la Definición 4.1.

Observación 4.1. Sea $d = e^{-\alpha}$ y $u = e^\alpha$ para algún $\alpha > 0$. Entonces, la condición 1. en la Definición anterior puede ser reemplazada por

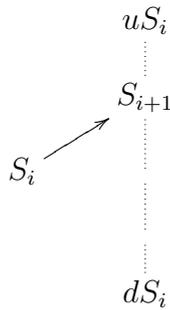
$$\left| \log \left(\frac{S_{i+1}}{S_i} \right) \right| \leq \alpha.$$

Abordaremos este caso más adelante.

Los ejemplos específicos de mercados por intervalos que daremos impondrán más restricciones sobre los conjuntos de trayectorias. Una vez que se establezcan estas restricciones, los conjuntos de trayectorias quedarán definidos de una manera combinatoria, es decir, permitiendo que el conjunto \mathcal{S} contenga todas las posibles trayectorias \mathbf{S} que satisfagan las condiciones. Esta manera de definir el conjunto de trayectorias hará sencillo chequear si las propiedades locales se cumplen.

Por ejemplo, sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial por intervalos tal que \mathcal{S} contiene todas las trayectorias que cumplan las condiciones de la Definición 4.1. Claramente, entonces, existe la posibilidad de elegir para cada nodo (\mathbf{S}, k) trayectorias $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2 \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $S_k < S_{k+1}^1 < uS_k$ y $dS_k < S_{k+1}^2 < S_k$ respectivamente. Por lo tanto, cualquier nodo será libre de arbitraje (ver Ejemplo 1.3) y, en ese caso, el mercado resultará ser localmente libre de arbitraje (ver Definición 1.10).

La figura de abajo ilustra un paso típico de una trayectoria en un mercado por intervalos.



Una de las cuestiones a estudiar en este tipo de mercados es el comportamiento de las cotas respecto a los valores del conjunto Q . Notemos que en la Definición 4.1 la incorporación de Q restringe los posibles valores de m en cada trayectoria. Vamos a mostrar que las cotas dinámicas se comportan monótonicamente respecto a los valores contenidos en Q . Primero necesitamos introducir la siguiente definición.

Definición 4.2 (Derivado convexo y cóncavo). Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial por intervalos y Z un derivado financiero tal que $Z(\mathbf{S}) = z(S_{M(\mathbf{S})})$ para alguna función $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Diremos que Z es *convexo* si z es convexa.
- Diremos que Z es *cóncavo* si z es cóncava.

Dentro de la clase de derivados convexos, podemos encontrar, por ejemplo, las opciones call y put europeas. El siguiente resultado será de utilidad.

Proposición 4.1. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial por intervalos, n -acotado y libre de arbitraje.

1. Si Z es un derivado financiero cóncavo, entonces

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq z(S_k)$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $0 \leq k \leq M(\mathbf{S})$.

2. Si Z es un derivado financiero convexo, entonces

$$z(S_k) \leq \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y $0 \leq k \leq M(\mathbf{S})$.

Demostración. Vamos a demostrar 1. por inducción hacia atrás. Sea $k = n$ y sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ tal que $M(\mathbf{S}) = n$. Entonces

$$\underline{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = z(S_n).$$

Supongamos que para $0 \leq k < n$ se tiene que $\underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq z(S_{k+1})$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $k+1 \leq M(\mathbf{S}) \leq n$. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ y supongamos que $M(\mathbf{S}) = k$, entonces

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = z(S_k).$$

Supongamos ahora que $M(\mathbf{S}) > k$. Como \mathcal{M} es libre de arbitraje, entonces sabemos del Teorema 1.1 que el nodo (\mathbf{S}, k) es libre de arbitraje. Por lo tanto existen trayectorias $\mathbf{S}^{\text{up}} = (S^{\text{up}}, W^{\text{up}}, m^{\text{up}}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ y $\mathbf{S}^{\text{do}} = (S^{\text{do}}, W^{\text{do}}, m^{\text{do}}) \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $S_{k+1}^{\text{do}} < S_k < S_{k+1}^{\text{up}}$ (ver Ejemplo 1.3). Sea $u \in I_k(\mathbf{S})$ tal que $u \leq -u(S_{k+1}^{\text{up}}, S_{k+1}^{\text{do}})$ donde $u(S_{k+1}^{\text{up}}, S_{k+1}^{\text{do}})$ está dado por (3.30). Entonces se sigue de la hipótesis inductiva que

$$\begin{aligned} & \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, i)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u(\hat{S}_{k+1} - S_k) \right] \leq \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^{\text{up}}, Z, \mathcal{M}) + u(S_{k+1}^{\text{up}} - S_k) \leq \\ & \leq \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^{\text{up}}, Z, \mathcal{M}) - u(S_{k+1}^{\text{up}}, S_{k+1}^{\text{do}})(S_{k+1}^{\text{up}} - S_k) \leq \\ & \leq z(S_{k+1}^{\text{up}}) - \left(\frac{z(S_{k+1}^{\text{up}}) - z(S_{k+1}^{\text{do}})}{S_{k+1}^{\text{up}} - S_{k+1}^{\text{do}}} \right) (S_{k+1}^{\text{up}} - S_k) \leq z(S_k) \end{aligned}$$

pues z es una función cóncava. Si ahora consideramos $u \in I_k(\mathbf{S})$ tal que $u \leq -u(S_{k+1}^{\text{up}}, S_{k+1}^{\text{do}})$, se sigue de la hipótesis inductiva que

$$\begin{aligned} & \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u(\hat{S}_{k+1} - S_k) \right] \leq \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^{\text{do}}, Z, \mathcal{M}) + u(S_{k+1}^{\text{do}} - S_k) \leq \\ & \leq \underline{U}_{i+1}(\mathbf{S}^{\text{do}}, Z, \mathcal{M}) - u(S_{k+1}^{\text{up}}, S_{k+1}^{\text{do}})(S_{k+1}^{\text{do}} - S_k) \leq \\ & \leq z(S_{k+1}^{\text{do}}) - \left(\frac{z(S_{k+1}^{\text{up}}) - z(S_{k+1}^{\text{do}})}{S_{k+1}^{\text{up}} - S_{k+1}^{\text{do}}} \right) (S_{k+1}^{\text{do}} - S_k) \leq z(S_k) \end{aligned}$$

pues z es una función cóncava. Por lo tanto

$$\inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u(\hat{S}_{k+1} - S_k) \right] \leq z(S_k) \quad \forall u \in I_k(\mathbf{S}).$$

Entonces

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq z(S_k)$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $k \leq M(\mathbf{S}) \leq n$.

Para demostrar 2., consideremos Z un derivado convexo. Entonces $-Z$ es un derivado cóncavo. De 1. se sigue que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) \leq -z(S_k)$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $k \leq M(\mathbf{S}) \leq n$. Luego se sigue de la Definición 3.1 que

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = -\underline{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) \geq z(S_k)$$

para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $k \leq M(\mathbf{S}) \leq n$. □

El Teorema que sigue muestra la relación que existe entre las cotas dinámicas de dos mercados trayectoriales, los cuales en principio cuentan con las mismas trayectorias, aunque ellas difieren en la cantidad máxima de pasos que se les permiten.

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ y $\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{S}} \times \mathcal{H}$ dos mercados trayectoriales por intervalos libres de arbitraje n -acotado y \tilde{n} -acotado respectivamente, con $n \leq \tilde{n}$. Supongamos que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$ y $M(\mathbf{S}) \leq M(\tilde{\mathbf{S}})$.*

1. *Si Z es un derivado financiero cóncavo, entonces*

$$\underline{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \tag{4.1}$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

2. *Si Z es un derivado financiero convexo, entonces*

$$\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) \leq \bar{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) \tag{4.2}$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

Demostración. Probaremos 1. por inducción hacia atrás. Sea $k = n$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) = n$. Por hipótesis existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$ y $M(\tilde{\mathbf{S}}) \geq M(\mathbf{S})$. Entonces se sigue de la Proposición anterior que

$$\underline{U}_n(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) \leq z(\tilde{S}_n) = z(S_n) = \underline{U}_n(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Supongamos ahora que (4.1) es válido para $k + 1$ con $0 \leq k \leq n - 1$ y sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ con $M(\mathbf{S}) \geq k$. Nuevamente tenemos de la hipótesis que existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$ y $M(\mathbf{S}) \leq M(\tilde{\mathbf{S}})$. Consideremos primero el caso $k = M(\mathbf{S})$. Se sigue entonces de la Proposición anterior que

$$\underline{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) \leq z(\tilde{S}_k) = z(S_k) = \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}).$$

Supongamos ahora que $k < M(\mathbf{S})$. Como \mathcal{H} es el mismo conjunto de estrategias para ambos mercados, se tiene de la Observación 2.6 que $I_k(\mathbf{S}) = I_k(\tilde{\mathbf{S}})$. Sea entonces $u \in I_k(\mathbf{S})$ y $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$, luego existe $\bar{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ tal que $\hat{S}_i = \bar{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\hat{\mathbf{S}})$ y $M(\hat{\mathbf{S}}) \leq M(\bar{\mathbf{S}})$. Además $\bar{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}$. Entonces por hipótesis inductiva

$$\underline{U}_{k+1}(\bar{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) + u(\bar{S}_{k+1} - S_k) \leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) + u(\hat{S}_{k+1} - S_k).$$

Luego

$$\begin{aligned} \inf_{\bar{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\bar{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) + u\Delta_k \bar{S} \right] &\leq \inf_{\tilde{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}: \tilde{S}_{k+1} = \hat{S}_{k+1}} \left[\underline{U}_{k+1}(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) + u\Delta_k \tilde{S} \right] \\ &\leq \underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - u\Delta_k \hat{S}. \end{aligned}$$

Como la elección de $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ fue arbitraria, se sigue que

$$\inf_{\bar{\mathbf{S}} \in \tilde{\mathcal{S}}_{(\tilde{\mathbf{S}}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\bar{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) - u(\bar{S}_{k+1} - S_k) \right] \leq \inf_{\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}} \left[\underline{U}_{k+1}(\hat{\mathbf{S}}, Z, \mathcal{M}) - u(\hat{S}_{k+1} - S_k) \right].$$

Por lo tanto, como $I_k(\mathbf{S}) = I_k(\tilde{\mathbf{S}})$,

$$\underline{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

Para mostrar 2. consideremos un derivado Z convexo. Entonces $-Z$ es cóncavo, y por 1.

$$\underline{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, -Z, \tilde{\mathcal{M}}) \leq \underline{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M})$$

para todo $0 \leq k \leq n$. Por lo tanto de la Definición 3.1 se tiene que

$$\bar{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, Z, \tilde{\mathcal{M}}) = -\underline{U}_k(\tilde{\mathbf{S}}, -Z, \tilde{\mathcal{M}}) \geq -\underline{U}_k(\mathbf{S}, -Z, \mathcal{M}) = \bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$$

para todo $0 \leq k \leq n$. □

El siguiente Corolario muestra la monotonía de las cotas dinámicas respecto a los valores de Q .

Corolario 4.1. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial por intervalos libre de arbitraje con $Q = \{v_1, \dots, v_l\}$. Consideremos para cada $j = 1, \dots, l$ el mercado por intervalos $\mathcal{M}_{v_j} = \mathcal{S}_{v_j} \times \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{S}_{v_j} = \{\mathbf{S} \in \mathcal{S} : W_{M(\mathbf{S})} = v_j\}$. Supongamos que para cada j y $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_{v_j}$ existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{v_{j+1}}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$.*

1. Si Z es un derivado cóncavo, entonces

$$\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_{j+1}}) \leq \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_j}). \quad (4.3)$$

2. Si Z es un derivado convexo, entonces

$$\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_j}) \leq \bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_{j+1}}). \quad (4.4)$$

Demostración. Fijemos j y sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_{v_j}$, entonces $W_{M(\mathbf{S})} = v_j$. Por hipótesis existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$ y $W_{M(\tilde{\mathbf{S}})} = v_{j+1}$. Luego \mathcal{M}_{v_j} y $\mathcal{M}_{v_{j+1}}$ cumplen con las hipótesis del Teorema 4.1. Por lo tanto, si Z es cóncavo,

$$\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_{j+1}}) \leq \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_j})$$

Por otra parte, si Z es convexo entonces $-Z$ es cóncavo. Por lo tanto, se concluye de lo anterior que

$$\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_j}) = -\underline{U}(S_0, -Z, \mathcal{M}_{v_j}) \leq -\underline{U}(S_0, -Z, \mathcal{M}_{v_{j+1}}) = \bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_{j+1}}).$$

□

Por último, tenemos el siguiente resultado para las cotas dinámicas de un mercado por intervalos con un conjunto Q finito.

Corolario 4.2. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial por intervalos libre de arbitraje con $Q = \{v_1, \dots, v_l\}$. Consideremos $\mathcal{M}_{v_l} = \mathcal{S}_{v_l} \times \mathcal{H}$ el mercado trayectorial por intervalos tal que $\mathcal{S}_{v_l} = \{\mathbf{S} \in \mathcal{S} : W_{M(\mathbf{S})} = v_l\}$ y supongamos que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{v_l}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$.*

1. Si Z es un derivado cóncavo, entonces se tiene que

$$\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_l}). \quad (4.5)$$

2. Si Z es un derivado convexo, entonces se tiene que

$$\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_l}). \quad (4.6)$$

Demostración. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, entonces $W_{M(\mathbf{S})} = v_j$ para algún $j = 1, \dots, l$. Por hipótesis existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{v_l}$ tal que $S_i = \tilde{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq M(\mathbf{S})$ y $W_{M(\tilde{\mathbf{S}})} = v_l$. Luego, $M(\mathbf{S}) \leq M(\tilde{\mathbf{S}})$ y, entonces, \mathcal{M}_{v_l} y \mathcal{M} cumplen con la hipótesis del Teorema 4.1. Por lo tanto, si Z es cóncavo,

$$\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_l}) \leq \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$$

Además, como $\mathcal{S}_{v_l} \subseteq \mathcal{S}$, entonces

$$\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) \leq \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_l}).$$

Por lo tanto

$$\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_l}).$$

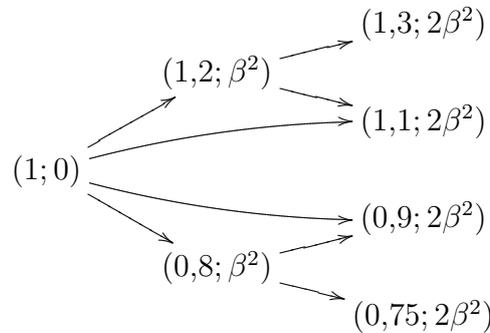
Por otra parte, si Z es convexo entonces $-Z$ es cóncavo. Luego de lo anterior

$$\bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = -\underline{U}(S_0, -Z, \mathcal{M}) = -\underline{U}(S_0, -Z, \mathcal{M}_{v_l}) = \bar{U}(S_0, Z, \mathcal{M}_{v_l}).$$

□

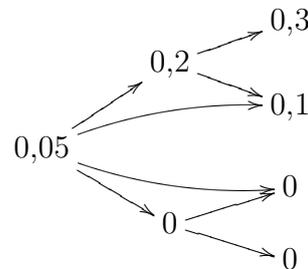
Uno esperaría que bajo alguna condición la cota inferior de un mercado con varios valores en Q coincida con el valor de la mínima cota del mercado asociado al mínimo valor de Q . El siguiente ejemplo muestra que si Z es un derivado convexo no es cierto que el valor de $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M})$ viene dado por el mínimo valor de Q .

Ejemplo 4.1. Consideremos las trayectorias dadas por el siguiente grafo

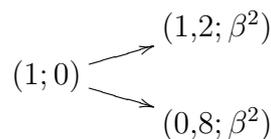


Cada número en el grafo representa el valor de (S, W) , y cada flecha el lugar hacia donde puede seguir la trayectoria. Vamos a considerar que este mercado tiene $Q = \{\beta^2, 2\beta^2\}$

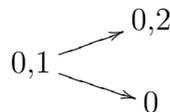
para algún $\beta \in \mathbb{R}$ y calcularemos la mínima cota inferior para un call europeo con $K = 1$ siguiendo el algoritmo que desarrollamos en la Sección 3.3.



Cada número representa ahora el valor de la cota dinámica inferior en ese nodo. Luego $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = 0,05$. Ahora vamos a considerar el mercado que contiene solo las trayectorias del mercado anterior con $Q = \{\beta^2\}$. Es decir



Para este caso, las cotas dinámicas vienen dadas por



Entonces $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = 0,1$. Podemos concluir que la cota inferior del mercado con $Q = \{\beta^2, 2\beta^2\}$ no coincide con la cota del mercado con $Q = \{\beta^2\}$.

Las siguientes secciones dan dos ejemplos concretos de mercados por intervalos y algunas de sus propiedades. En principio, no asumiremos que el mercado contenga todas las trayectorias que cumplan las condiciones de la Definición 4.1 a menos que se aclare lo contrario.

4.1.1. Mercados de Tiempo Fijo

Consideremos una partición fija del tiempo \mathcal{P} , esto es, para el intervalo de tiempo en donde se desarrolla el derivado financiero $[0, T]$, vamos a considerar $\mathcal{P} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ los únicos tiempos para los cuales la cartera del inversor puede ser rebalanceada. Sea entonces $\Omega_i = \{t_i\}$, lo que implica que $W_i = t_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Dado que el derivado financiero expirará a tiempo $t_n = T$, necesitaremos imponer

$\Theta = \{n\}$. Por lo tanto, una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ bajo las restricciones anteriores tiene la forma $\mathbf{S} = \{(S_i, t_i, n)\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Observación 4.2. Para cualquier conjunto de estrategias \mathcal{H} , el mercado trayectorial $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ con $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ bajo las condiciones anteriores es un mercado n -acotado. Notemos que en el formalismo general las trayectorias son sucesiones infinitas de números reales, pero como \mathcal{M} es n -acotado, será innecesario definir los valores \mathbf{S}_i para $i > n$.

La condición $M(\mathbf{S}) = n$ para todo $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ implica que $W_{M(\mathbf{S})} = t_n = T$. Entonces, con el objetivo de definir un subconjunto de $\mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ en los términos de la Definición 4.1, el conjunto Q solo deberá contener al elemento T , es decir, $Q = \{T\}$. Además, definiremos

$$c = \max\{t_{i+1} - t_i : 0 \leq i \leq n - 1\},$$

y, entonces, la condición 2. de la Definición 4.1 vale. Por último, dados $0 < d < 1 < u$, denotaremos por $\mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$ un subconjunto de $\mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ satisfaciendo las condiciones de la Definición 4.1 para u, d y el conjunto $Q = \{T\}$. Para cualquier conjunto de estrategias \mathcal{H} , llamaremos al mercado asociado $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P}) \times \mathcal{H}$ un *mercado trayectorial de tiempo fijo*.

Notemos que si para cualquier nodo (\mathbf{S}, k) los conjuntos $\Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ y $\Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$ definidos en (3.28) son distintos de vacío, entonces \mathcal{M} es localmente 0-neutral, independientemente de los valores intermedios entre d y u , y entonces, \mathcal{M} es 0-neutral debido al Teorema 1.2. Por lo tanto, del Teorema 2.1, podemos definir el intervalo de precios $[\underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}), \bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M})]$ para cualquier derivado Z y las cotas del intervalo pueden ser evaluadas con los métodos que desarrollamos en los capítulos anteriores en el caso, por ejemplo, que Z sea un derivado minimax.

La siguiente Proposición muestra que, en un mercado de tiempo fijo, las cotas dinámicas para un derivado convexo también resultan ser convexas. Este resultado fue probado originalmente en Roorda *et al.* (2005), nosotros proponemos una prueba alternativa usando el Teorema 3.4.

Proposición 4.2. *Sea $0 < d < 1 < u$. Consideremos un mercado trayectorial de tiempo fijo libre de arbitraje $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P}) \times \mathcal{H}$ y sea Z un derivado financiero minimax.*

1. *Supongamos que Z es convexo y que para cada nodo (\mathbf{S}, k) los conjuntos $\Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ y $\Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$ definidos en (3.28) son distintos de vacío. Asumamos además que existe*

$\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $\tilde{S}_{k+1} = S_k$. Entonces $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ es una función convexa dada por

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = z(S_k).$$

2. Supongamos que Z es cóncavo y para cada $0 \leq k \leq n-1$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$ existe $\mathbf{S}^u, \mathbf{S}^d \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s},k)}$ tal que $S_{k+1}^u = uS_k$ y $S_{k+1}^d = dS_k$. Entonces $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ es una función cóncava dada por

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \frac{1-d}{u-d} \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^u, Z, \mathcal{M}) + \frac{u-1}{u-d} \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^d, Z, \mathcal{M}). \quad (4.7)$$

Demostración. Mostraremos primero 1. Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$ y $s = S_{n-1}$. Como Z es convexo, se sigue para cada $s^{\text{up}} \in \Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ y $s^{\text{do}} \in \Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$ que

$$\begin{aligned} z(s) &= z\left(s^{\text{up}} \left(1 - \frac{s^{\text{up}} - s}{s^{\text{up}} - s^{\text{do}}}\right) + s^{\text{do}} \left(\frac{s^{\text{up}} - s}{s^{\text{up}} - s^{\text{do}}}\right)\right) \\ &\leq z(s^{\text{up}}) \left(1 - \frac{s^{\text{up}} - s}{s^{\text{up}} - s^{\text{do}}}\right) + z(s^{\text{do}}) \left(\frac{s^{\text{up}} - s}{s^{\text{up}} - s^{\text{do}}}\right) \\ &\leq g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^{\text{up}}) \left(1 - \frac{s^{\text{up}} - s}{s^{\text{up}} - s^{\text{do}}}\right) + g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^{\text{do}}) \left(\frac{s^{\text{up}} - s}{s^{\text{up}} - s^{\text{do}}}\right) \\ &\leq g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^{\text{up}}) - u(s^{\text{up}}, s^{\text{do}})(s^{\text{up}} - s). \end{aligned}$$

En particular

$$g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^{\text{up}}) - u(s^{\text{up}}, s)(s^{\text{up}} - s) = g_{(\mathbf{s},n-1)}(s) = z(s).$$

Por lo tanto, se sigue de (3.29) que $\underline{U}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = z(S_{n-1})$. Más aún, $\underline{U}_{n-1}(\cdot, Z, \mathcal{M})$ es convexa. Finalmente por inducción hacia atrás se obtiene el resultado.

Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$ y sea $s^u = S_n^u$ y $s^d = S_n^d$. Como $s^u \geq s^{\text{up}}$ para cualquier $s^{\text{up}} \in \Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ y Z es cóncavo,

$$\begin{aligned} g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^u) - u(s^u, s^d)(s^u - s^{\text{up}}) &= z(s^u) \left(1 - \frac{s^u - s^{\text{up}}}{s^u - s^d}\right) + z(s^d) \left(\frac{s^u - s^{\text{up}}}{s^u - s^d}\right) \\ &\leq z\left(s^u \left(1 - \frac{s^u - s^{\text{up}}}{s^u - s^d}\right) + s^d \left(\frac{s^u - s^{\text{up}}}{s^u - s^d}\right)\right) \\ &\leq z(s^{\text{up}}) = g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^{\text{up}}). \end{aligned}$$

Similarmente, como $s^u \geq s^{\text{do}}$ para cualquier $s^{\text{do}} \in \Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$ y Z es cóncavo, se sigue que

$$\begin{aligned} g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^u) - u(s^u, s^d)(s^u - s^{\text{do}}) &= z(s^u) \left(1 - \frac{s^u - s^{\text{do}}}{s^u - s^d}\right) + z(s^d) \left(\frac{s^u - s^{\text{do}}}{s^u - s^d}\right) \\ &\leq z\left(s^u \left(1 - \frac{s^u - s^{\text{do}}}{s^u - s^d}\right) + s^d \left(\frac{s^u - s^{\text{do}}}{s^u - s^d}\right)\right) \\ &\leq z(s^{\text{do}}) = g_{(\mathbf{s},n-1)}(s^{\text{do}}). \end{aligned}$$

Entonces, como $0 \leq \frac{s^u - s}{s^u - s^d} \leq 1$, se tiene de lo anterior que

$$g_{(\mathbf{S}, n-1)}(s^u) - u(s^u, s^d)(s^u - s) \leq g_{(\mathbf{S}, n-1)}(s^{\text{up}}) - u(s^{\text{up}}, s^{\text{do}})(s^{\text{up}} - s),$$

para todo $s^{\text{up}} \in \Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ y $s^{\text{do}} \in \Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$. Por lo tanto, se sigue de (3.29) que

$$\underline{U}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = g_{(\mathbf{S}, n-1)}(s^u) - u(s^u, s^d)(s^u - s) = \frac{1-d}{u-d} z(uS_{n-1}) + \frac{u-1}{u-d} z(dS_{n-1}).$$

Como la propiedad de concavidad se preserva tomando combinaciones lineales positivas, se prueba que $\underline{U}_{n-1}(\cdot, Z, \mathcal{M})$ es cóncava y solo depende del valor de S_{n-1} . Haciendo inducción hacia atrás se concluye la prueba. \square

El clásico mercado binomial, introducido originalmente en Cox *et al.* (1979), es una situación particular de mercados trayectoriales de tiempo fijo. En cualquier nodo de este modelo, el valor de S_{k+1} solo puede ser uS_k o dS_k para cada $0 \leq k < n$. Los modelos binomiales son importantes porque pueden ser usados para aproximar modelos de tiempo continuo haciendo tender el paso de tiempo a 0. La siguiente Proposición muestra que la cota minimax para un modelo binomial coincide con el precio de Cox-Ross-Rubinstein para cualquier derivado financiero. Notemos que en el modelo binomial cualquier derivado es alcanzable (Cutland & Roux, 2013, Teorema 6.8), entonces por el Teorema 2.3 tendremos un único precio justo.

Proposición 4.3. *Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P}) \times \mathcal{H}$ un mercado binomial con parámetros u y d , donde $0 < d < 1 < u$. Sea Z un derivado financiero minimax tal que $Z(\mathbf{S}) = z(S_n)$ para alguna función $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $\bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$, y coinciden con el precio de Cox-Ross-Rubinstein:*

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1-d}{u-d} \right)^j \left(\frac{u-1}{u-d} \right)^{n-j} z(S_0 u^{j+1} d^{n-j}).$$

Demostración. Probaremos por inducción hacia atrás sobre el índice k que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1-d}{u-d} \right)^j \left(\frac{u-1}{u-d} \right)^{n-j} z(S_k u^{j+1} d^{n-j}), \quad (4.8)$$

para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$. Sea $k = n - 1$, entonces se sigue de (3.29) que para cada $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$,

$$\underline{U}_{n-1}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \frac{1-d}{u-d} z(uS_{n-1}) + \frac{u-1}{u-d} z(dS_{n-1}).$$

que es (4.8). Supongamos ahora que (4.8) vale para $k + 1$ y veamos que también es cierto para k . Sea $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, se sigue de (3.29) que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \frac{1-d}{u-d} \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^u, Z, \mathcal{M}) + \frac{u-1}{u-d} \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^d, Z, \mathcal{M}),$$

donde $\mathbf{S}^u, \mathbf{S}^d \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tales que $S_{k+1}^u = uS_k$ y $S_{k+1}^d = dS_k$. Entonces, por hipótesis inductiva,

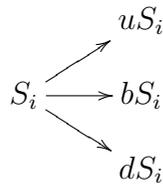
$$\begin{aligned} \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^u, Z, \mathcal{M}) &= \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1-d}{u-d} \right)^j \left(\frac{u-1}{u-d} \right)^{n-j} Z(S_{k+1}^u u^{j+1} d^{n-j}) \\ \underline{U}_{k+1}(\mathbf{S}^d, Z, \mathcal{M}) &= \sum_{i=k+1}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1-d}{u-d} \right)^j \left(\frac{u-1}{u-d} \right)^{n-j} Z(S_{k+1}^d u^{j+1} d^{n-j}). \end{aligned}$$

Por último, reemplazando y haciendo un cambio de variables, obtenemos que

$$\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M}) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1-d}{u-d} \right)^j \left(\frac{u-1}{u-d} \right)^{n-j} Z(S_k u^{j+1} d^{n-j}).$$

Por lo tanto hemos probado (4.8). Luego, si tomamos $k = 0$, obtenemos que $\underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ coincide con el precio de Cox-Ross-Rubinstein. \square

El mercado trinomial fue originalmente introducido en Boyle (1988) y ofrece más flexibilidad que los modelos binomiales. Los precios de los activos pueden aumentar, bajar o también pueden tomar un valor intermedio entre uS_i y dS_i en cada nodo, como se muestra en el siguiente diagrama.



Como se aprecia, $0 < d < b < u$, pero no es necesario que $b = 1$. Estos modelos de mercados son incompletos y, entonces, las técnicas de determinar el valor de un derivado por medio de una estrategia replicadora ya no funcionan. Nosotros podemos, sin embargo, encontrar cotas para este valor. El siguiente Teorema caracteriza las cotas minimax $\bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ y $\underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ para mercados incompletos de tiempo fijo $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P}) \times \mathcal{H}$. Vamos a mostrar que las cotas quedan totalmente determinadas para el caso de un derivado convexo. Este resultado también puede encontrarse en Kolokoltsov (1998) y Roorda *et al.* (2005).

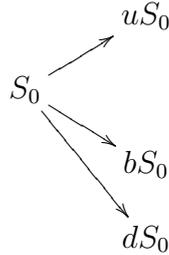
Teorema 4.2. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S}(S_0, u, d, \mathcal{P}) \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial de tiempo fijo con $0 < d < 1 < u$ y Z un derivado minimax convexo.

1. Si para todo $0 \leq k \leq n - 1$ y $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$ existe $\mathbf{S}^u, \mathbf{S}^d \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)$ tal que $S_{k+1}^u = uS_k$ y $S_{k+1}^d = dS_k$, entonces $\bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M})$ viene dado por el precio de Cox-Ross-Rubinstein para el modelo binomial con parámetros d y u .
2. Si para toda $\mathbf{S} \in \mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$ y $0 \leq k < n$ se tiene que $\Sigma_k^{do}(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ y $\Sigma_k^{up}(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ y existe $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}(\mathbf{S}, k)$ tal que $\tilde{S}_{k+1} = S_k$, entonces $\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = z(S_0)$.

Demostración. La prueba de (1) puede verse en (Roorda *et al.*, 2005, Teorema 1). Para (2), se sigue de la Proposición 4.2 que $\underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) = Z$ ya que Z es convexo. \square

El Teorema asume que la trayectoria constante pertenece a $\mathcal{S}(s_0, d, u, \mathcal{P})$. Si esta condición no se satisface, entonces la parte 2. del Teorema anterior no se cumple como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Consideremos $\mathcal{M} = \mathcal{S}(S_0, u, d, \mathcal{P}) \times \mathcal{H}$ un mercado trayectorial de tiempo fijo trinomial con $0 < d < b < 1 < u$ y $n = 1$, como se muestra en el siguiente diagrama,



Sea Z un derivado convexo. Entonces

$$\frac{1-b}{u-b}z(uS_0) + \frac{u-1}{u-b}z(bS_0) \leq \frac{1-d}{u-d}z(uS_0) + \frac{u-1}{u-d}z(dS_0).$$

Luego de (3.29) se sigue que

$$\underline{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \underline{U}(S_0, Z, \mathcal{M}) = \frac{1-b}{u-b}z(uS_i) + \frac{u-1}{u-b}z(bS_i).$$

Además se ve fácilmente que $\underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ tiende a $\bar{V}(s_0, z, \mathcal{M})$ cuando b tiende a d .

4.1.2. Variación Cuadrática Trayectorial (VCT)

Incorporaremos ahora otro ejemplo de mercado trayectorial en donde cambiaremos el significado de la variable observable W , de tal manera que quede dependiendo de los valores del activo. Consideraremos que la coordenada S modela la función $e^{x(t)}$ donde $x(t)$ es la función de precios del activo y W representará la variación cuadrática muestral de las trayectorias, es decir,

$$W_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\log S_{i+1} - \log S_i)^2. \quad (4.9)$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$ vamos a definir los conjuntos,

$$\Sigma_i = \{e^x, x \in \mathbb{R}_+\} \text{ y } \Omega_i = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} (\log S_{i+1} - \log S_i)^2, S_i \in \Sigma_i \right\}.$$

Consideremos también que $m \in \Theta \equiv \mathbb{N}$. Por lo tanto una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ tiene la forma $\mathbf{S} = \{(S_i, W_i, m)\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde W_i es dado por (4.9).

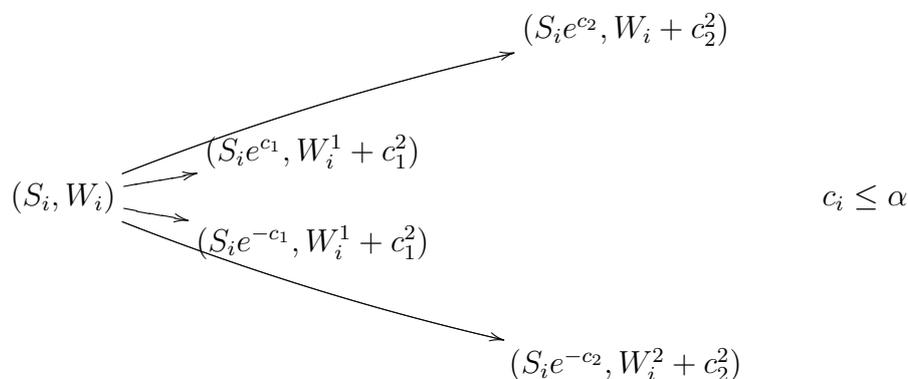
Las restricciones generales que definen los mercados por intervalos en la Definición 4.1 pueden, en este caso, ser interpretadas como restricciones sobre la variación cuadrática consumida y sobre el valor absoluto de la variación de precios, ambos entre instancias de negociación consecutivas. Sea $\alpha > 0$, como indicamos en la Observación 4.1, podemos restringir las trayectorias con la siguiente condición

$$\left| \log \frac{S_{i+1}}{S_i} \right| \leq \alpha. \quad (4.10)$$

La condición $W_{M(\mathbf{S})} \in Q$ la podemos traducir en términos financieros como aquellas trayectorias cuya variación cuadrática muestral en el intervalo $[0, T]$ pertenece al conjunto Q dado de antemano. Además, tomando $c \equiv \alpha^2$, la restricción $W_{i+1} - W_i \leq c$ en la Definición 4.1 se cumple.

Denotaremos por $\mathcal{S}(s_0, \alpha, Q)$ al subconjunto de $\mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ satisfaciendo las condiciones de 4.1 para $d = e^{-\alpha}$, $u = e^\alpha$, $c = \alpha^2$ y el conjunto Q . Para cualquier conjunto de estrategias \mathcal{H} llamaremos al mercado trayectorial asociado $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q) \times \mathcal{H}$ como *mercado de variación cuadrática trayectorial* o, simplemente, mercado VCT. Un

nodo típico de este tipo de mercados es como el siguiente,



El conjunto de trayectorias introducido en Britten-Jones & Neuberger (1996) puede ser visto como un caso especial de mercados VCT tomando $Q = \{v_0\}$.

En la siguiente sección estudiaremos como evaluar el intervalo de precios para versiones finitas de mercados por intervalos, en especial para mercados VCT. Consideraremos un conjunto finito Q , que no necesariamente contiene un único elemento.

4.2. Mercados Finitos por Intervalos

En esta sección presentaremos una discretización apropiada para los mercados trajectoriales por intervalos que definimos en la sección anterior. De esta forma podremos calcular las cotas minimax para los ejemplos que enumeramos más arriba.

Una discretización natural para implementar los mercados por intervalos definidos en la Sección 4.1 se obtiene introduciendo números reales $\delta, \beta > 0$ y números naturales $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$. Asumiremos que la coordena S de las trayectorias está asociada a la función de precios $e^{x(t)}$, es decir

$$e^{x(t_i)} \rightarrow S_i.$$

El uso de la función exponencial facilita la conexión con los modelos de mercados estocásticos.

Pediremos que S_i y W_i pertenezcan a los conjuntos

$$\begin{aligned} \Sigma_i \equiv \Sigma(\delta, N_1) &= \{s_0 e^{k\delta}, k \in \{-N_1, -N_1 + 1, \dots, N_1\}\} \\ \Omega_i \equiv \Omega(\beta, N_2) &= \{j\beta^2, j \in \{0, \dots, N_2\}\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Los parámetros δ y β proveen una discretización natural del conjunto de trayectorias.

Observación 4.3. Si la variable W está directamente relacionada con la variable S , como es el caso de los mercados VCT, es natural tener un único parámetro δ para discretizar Σ_i y Ω_i . Por otro lado, si los conjuntos Ω_i ya son discretos, no hay necesidad de implementar una discretización. Este es el caso, por ejemplo, de un mercado de tiempo fijo donde Ω_i solo tiene un elemento.

Notemos que cualquier trayectoria $\mathbf{S} = \{(S_i, W_i, m)\}_{i \in \mathbb{N}}$ en un mercado por intervalos cumple que $w_0 < W_1 < \dots < W_m$. Por lo tanto, si existe $k \leq m$ tal que $W_k = N_2 \beta^2$, entonces k debe ser igual a m . Es decir, una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ con Σ_i y Ω_i definido por (4.11) necesariamente tiene $M(\mathbf{S}) \leq N_2$. Por lo tanto, la coordenada m debe pertenecer al conjunto

$$\Theta = \{1, \dots, N_2\}, \quad (4.12)$$

y entonces se sigue de la Definición 1.4 que los mercados correspondientes son N_2 -acotados.

Con el objetivo de definir un subconjunto de $\mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ que satisfaga las propiedades enumeradas en la Definición 4.1, vamos a definir la colección $\Lambda = \{n_1, \dots, n_\theta\} \subseteq \Theta$ de números enteros positivos, y el conjunto $Q_\Lambda = \{n_1 \beta^2, \dots, n_\theta \beta^2\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $n_\theta = N_2$. Para cualquier par de enteros positivos p y q , denotaremos por $\mathcal{S}(s_0, \delta, \beta, p, q, N_1, \Lambda)$ al subconjunto de $\mathcal{S}_\infty(s_0, w_0)$ con Σ , Ω y Θ definidos por (4.11) y (4.12) satisfaciendo las condiciones de la Definición 4.1 (en los términos de la Observación 4.1) para $\alpha = p\delta$, $c = q\beta^2$ y Q_Λ . Llamaremos a este conjunto por *conjunto de trayectorias finito* y como *mercado finito* al mercado asociado

$$\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, \delta, \beta, p, q, N_1, \Lambda) \times \mathcal{H}$$

donde \mathcal{H} es un conjunto de estrategias. Es claro que un conjunto de trayectorias finito tendrá cardinalidad finita.

Los parámetros N_1 y N_2 juegan un rol central en el comportamiento local de los mercados finitos. Asumamos que la trayectoria $\mathbf{S} = \{(S_i, W_i, N_2)\}_{i \in \mathbb{N}}$ pertenece al conjunto de trayectorias finito $\mathcal{S}(s_0, \delta, \beta, p, q, N_1, \Lambda)$. Teniendo en cuenta la restricción

$$p\delta = \alpha \geq |\log S_{i+1} - \log S_i| = |k_{i+1} - k_i| \delta,$$

el mayor valor que S_{N_2} puede alcanzar corresponde al valor $S_{N_2} = s_0 e^{N_2 p \delta}$. Entonces, con el objetivo de permitir este tipo de trayectorias, debemos tomar $N_1 \leq p N_2$. En el caso que $N_1 \leq (N_2 - 1)p$, podrían existir trayectorias con nodos de arbitraje, en el sentido de la Definición 1.10.

Ejemplo 4.3. Consideremos la trayectoria \mathbf{S} definida por

$$\mathbf{S}_i = \begin{cases} (s_0 e^{ip\delta}, i\beta^2, N_2) & \text{si } i \leq \frac{N_1}{p} \\ (s_0 e^{N_1\delta}, i\beta^2, N_2) & \text{si } i > \frac{N_1}{p}. \end{cases}$$

pertenciente a $\mathcal{S}(s_0, \delta, \beta p, q, N_1, \Lambda)$ con $N_1 = (N_2 - 1)p$. Esta trayectoria satisface que $\frac{N_1}{p} = N_2 - 1 < N_2$, con lo cual, todavía queda un paso más disponible. Entonces, para cualquier trayectoria $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, N_2 - 1)}$ se sigue que

$$\hat{S}_{N_2} \leq \hat{S}_{N_2 - 1} = S_{N_2 - 1} = s_0 e^{N_1\delta}.$$

Por lo tanto $(\mathbf{S}, N_2 - 1)$ es un nodo de arbitraje.

La Figura 4.1 muestra trayectorias aleatorias en un conjunto de trayectorias finito $\mathcal{S}(s_0, \delta, \beta, p, q, N_1, \Lambda)$ con $s_0 = 1$, $w_0 = 0$, $\beta = \delta = 0,0058$, $p = 3$, $q = 9$, $\Lambda = \{100, 200\}$, $N_1 = 300$ y $N_2 = 200$. Se muestran en ella 100 trayectorias aleatorias en cada imagen. La primera corresponde a trayectorias con $W_{M(\mathbf{S})} = 0,0034 = 100 \delta^2$, entonces deben tener $M \leq 100$. La segunda imagen corresponde a trayectorias con $W_{M(\mathbf{S})} = 0,0067 = 200 \delta^2$, con lo cual deben tener $M \leq 200$. Las trayectorias se muestran en diferentes gráficos por conveniencia, pero pertenecen al mismo conjunto de trayectorias $\mathcal{S}(s_0, \delta, \beta, p, q, N_1, \Lambda)$.

4.3. Resultados Numéricos

En esta sección implementaremos numéricamente los ejemplos presentados en la Sección anterior para ilustrar algunas características de interés del enfoque desarrollado en esta tesis. Calcularemos las cotas minimax para un derivado Z usando los mercados finitos de la Sección 4.2. Las salidas ilustran los intervalos de precios para opciones call (Ejemplo 2.1) con respecto al máximo número de pasos y diferentes medidas de saltos p y su variación en la presencia de nodos de arbitraje. Por último, algunas aproximaciones de cubrimiento y el efecto de volatilidad variable serán también reflejadas.

Consideremos entonces un call europeo con precio de ejercicio igual a \$1 y un activo que no paga dividendos, con precio inicial \$1 y volatilidad $\sigma = 20\%$. El precio de Black & Scholes para estas hipótesis es \$0.0326 cuando $s_0 = K = 1$. Vamos a definir

$$v_0 = \sigma^2 \cdot T = 0,04 \cdot \frac{2}{12} = 0,0067.$$

Construiremos un conjunto de trayectorias de variación cuadrática muestral tomando $Q = \{v_0\}$ y definiendo W_i por (4.9).

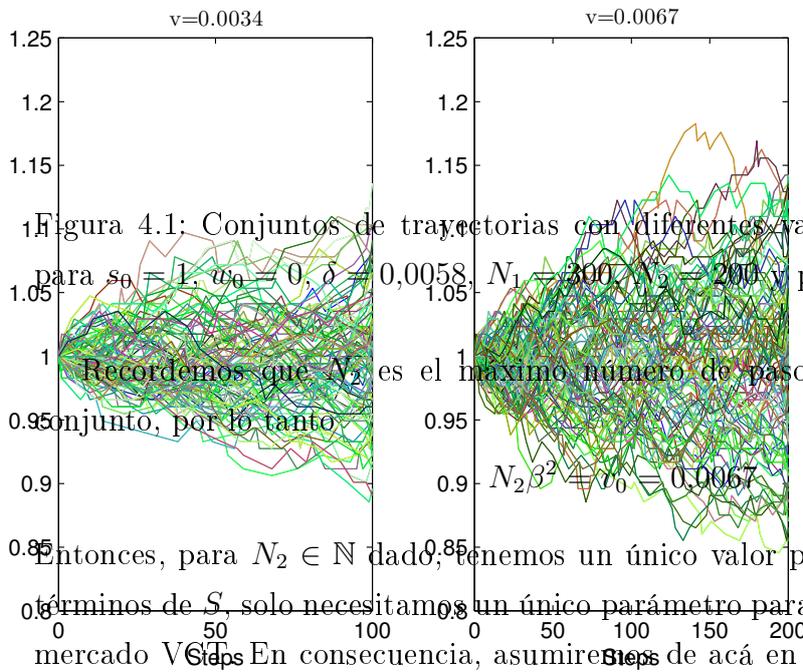


Figura 4.1: Conjuntos de trayectorias con diferentes valores de variación cuadrática para $s_0 = 1$, $w_0 = 0$, $\delta = 0,0058$, $N_1 = 200$, $N_2 = 200$ y $p=3$.

Recordemos que N_2 es el máximo número de pasos para una trayectoria en el conjunto, por lo tanto, entonces, para $N_2 \in \mathbb{N}$ dado, tenemos un único valor para β . Como W se definió en términos de S , solo necesitamos un único parámetro para construir la versión finita del mercado \mathcal{M} . En consecuencia, asumiremos de acá en adelante que $\delta = \beta$ y $q = p^2$.

Por lo tanto, para $p \in \mathbb{N}$, $\Lambda = \{N_2\}$ y $N_1 = pN_2$, consideraremos el conjunto de trayectorias finito $\mathcal{S}(s_0, \alpha, Q)$, donde $\alpha = p\delta$ y $Q = \{N_2\delta^2\}$. Asumiremos que tal conjunto contiene todas las trayectorias $\mathbf{S} = (S, W, m)$ pertenecientes a los conjuntos (4.11) que satisfacen las condiciones (4.10).

Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q) \times \mathcal{H}$ el mercado asociado, con \mathcal{H} un conjunto de estrategias full. La Figura 4.2 muestra la convergencia de $\bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ y $\underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ al precio de Black y Scholes al crecer N_2 cuando $p = 2, 3, 5$ con N_2 tomando valores desde 5 a 200. Cuando la unidad de salto p es mayor que 1, claramente, el intervalo de precios es más estrecho cuando N_2 aumenta y el precio de Black y Scholes pertenece al intervalo. También podemos ver que el intervalo se ensancha cuando p aumenta. Esto se debe a

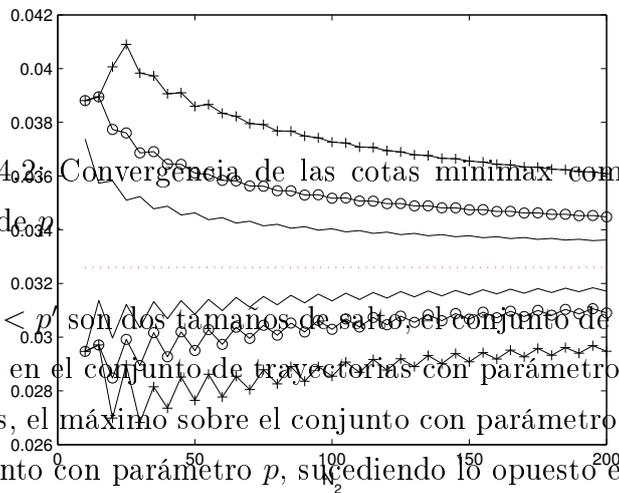


Figura 4.2. Convergencia de las cotas minimax como función de N_2 para diferentes valores de p .

que si $p < p'$ son dos tamaños de salto, el conjunto de trayectorias con parámetro p está incluido en el conjunto de trayectorias con parámetro p' . Entonces, cuando calculamos las cotas, el máximo sobre el conjunto con parámetro p' es mayor que el máximo sobre el conjunto con parámetro p , sucediendo lo opuesto en el caso del mínimo.

Fijemos ahora $N_2 = 100$ y calculemos el intervalo de precios para diferentes niveles iniciales del activo. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q) \times \mathcal{H}$ el mercado asociado donde \mathcal{H} es un conjunto de estrategias full. La Figura 4.3 muestra $\bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ y $\underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ para diferentes unidades de salto $p = 1, 3, 5, 7$. Podemos ver que el precio aumenta cuando s_0 disminuye. Notemos también que las cotas minimax son muy estrechas para valores altos de s_0 . Por lo tanto, podemos concluir que los saltos tienen menos efecto sobre los valores de las cotas minimax para valores iniciales altos del activo.

4.3.1. Nodos de Arbitraje

Es interesante mostrar el efecto que tienen los nodos de arbitraje (en el sentido de la Definición 1.10) sobre las cotas minimax de un mercado trayectorial. Consideraremos para ello el conjunto de trayectorias finito VCT $\mathcal{S}(s_0, \alpha, Q)$ con los mismos parámetros que antes, pero ahora la coordenada W no estará definida por (4.9). Es decir, W_i no depende en principio de los valores de S_i .

Modificaremos este conjunto de trayectorias progresivamente con el objetivo de

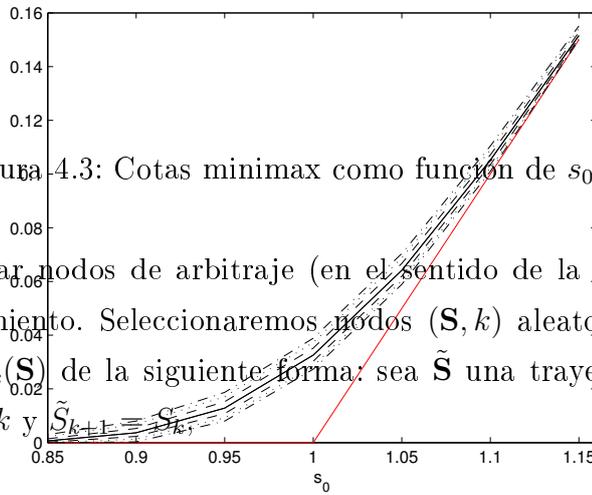


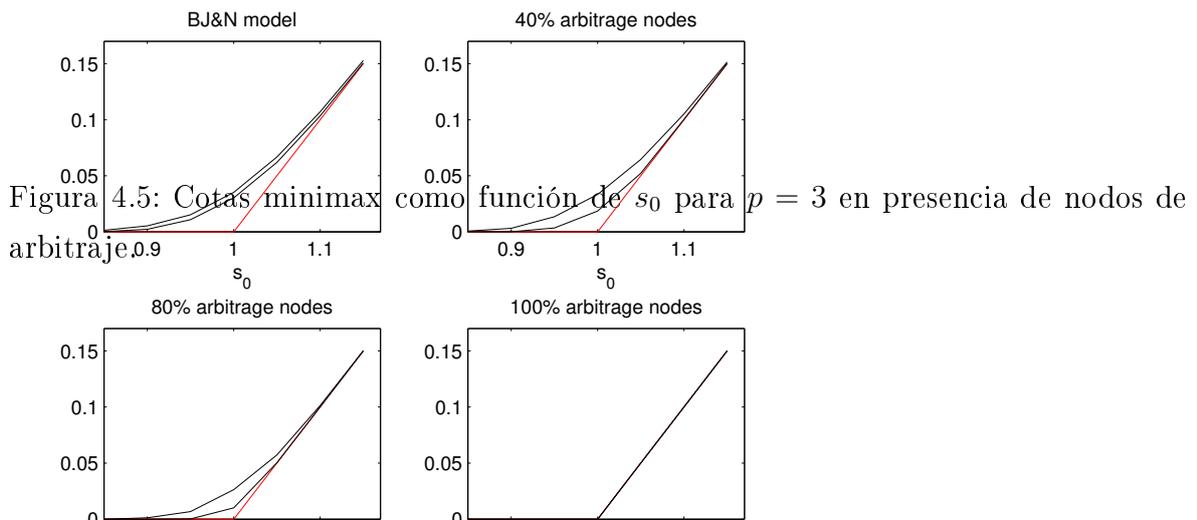
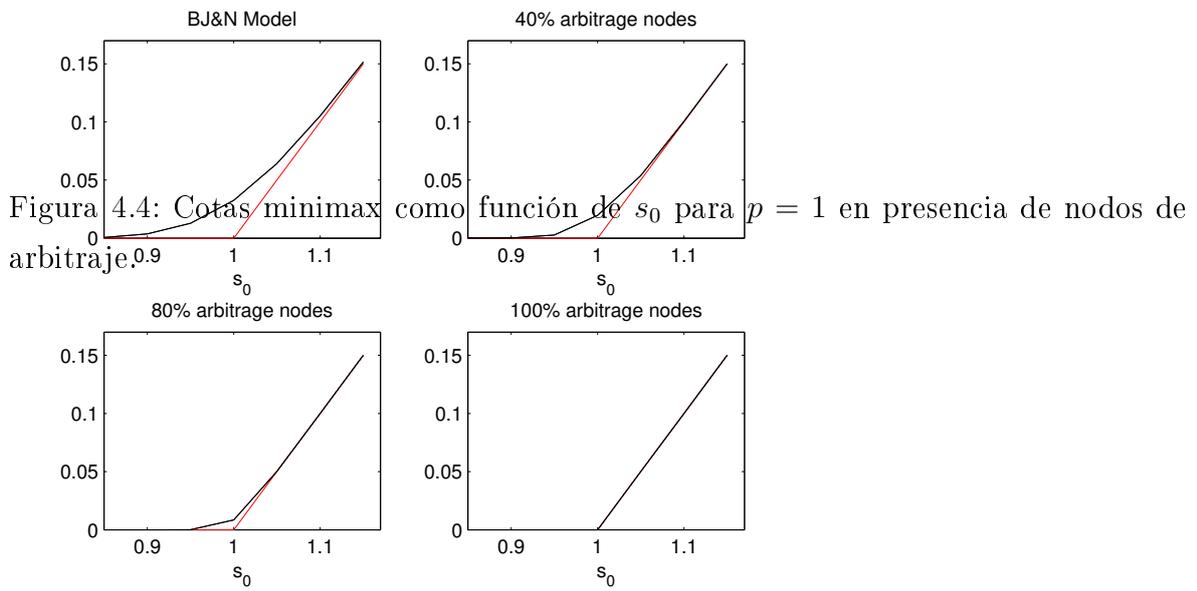
Figura 4.3: Cotas minimax como función de s_0 para diferentes valores de p .

incorporar nodos de arbitraje (en el sentido de la Definición 1.10) según el siguiente procedimiento. Seleccionaremos nodos (\mathbf{S}, k) aleatoriamente, y cambiaremos el conjunto $\Sigma_k(\mathbf{S})$ de la siguiente forma: sea $\tilde{\mathbf{S}}$ una trayectoria tal que $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S}_i$ para todo $0 \leq i \leq k$ y

- si $S_k > S_0$, eliminaremos del mercado toda aquella trayectoria $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $\hat{S}_{k+1} \in \Sigma_k^{\text{up}}(\mathbf{S})$ e incorporaremos la trayectoria $\tilde{\mathbf{S}}$.
- si $S_k < S_0$, eliminaremos del mercado toda aquella trayectoria $\hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{S}, k)}$ tal que $\hat{S}_{k+1} \in \Sigma_k^{\text{do}}(\mathbf{S})$ e incorporaremos la trayectoria $\tilde{\mathbf{S}}$.

Este procedimiento define un nuevo conjunto de trayectorias que denotaremos por $\mathcal{S}_{\text{arb}}(s_0, \alpha, Q)$, donde arb hace referencia a *arbitraje*, que resultará localmente 0-neutral. Esta última condición permite calcular las cotas de precios. Observemos que el conjunto de trayectorias modificadas tiene trayectorias con $S_{k+1} = S_k$ para algún k siendo (\mathbf{S}, k) un nodo de arbitraje.

La Figura 4.4 muestra las cotas minimax como función de s_0 para el mercado $\mathcal{M} = \mathcal{S} \times \mathcal{H}$ y el mercado modificado $\mathcal{M}_{\text{arb}} = \mathcal{S}_{\text{arb}} \times \mathcal{H}$ con $p = 1$, adicionando diferentes porcentajes de nodos de arbitraje. Notemos que en este caso las cotas minimax coinciden. Del mismo modo, la Figura 4.5 muestra las cotas minimax como función de s_0 para $p = 3$.



4.3.2. Cubrimiento

El algoritmo presentado nos permite calcular no solo el valor de las cotas dinámicas, sino también una estrategia óptima Φ , la cual proporciona información sobre las inversiones a lo largo de cada posible trayectoria en \mathcal{S} . En cada nodo (\mathbf{S}, k) , las cotas minimax dinámicas $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ y $\underline{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$ pueden calcularse, quedando determinado en cada caso un valor óptimo u_k^* . Por lo tanto, podemos definir una función $\Phi^\uparrow = (H^0, H^\uparrow)$ sobre \mathcal{S} dada por:

$$H_k^\uparrow(\hat{\mathbf{S}}) = u_k^* \text{ si } \hat{\mathbf{S}} \in \mathcal{S}_{(\mathbf{s}, k)},$$

donde u_k^* es un valor óptimo determinado por la cota minimax superior $\bar{U}_k(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$. Para cualquier valor $V_0^{\Phi^\uparrow}$, se tiene de (1.6) y (1.7) que Φ^\uparrow es una estrategia autofinanciada.

Es interesante estudiar como Φ^\uparrow aproxima Z , como función de una trayectoria $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$, para un valor inicial de la cartera V . En una posición corta los valores de cubrimiento están dados por

$$V + \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i^\uparrow(\mathbf{S}) \Delta_i S \quad (4.13)$$

con $V \in \mathbb{R}$ el valor inicial de la cartera.

La Figura 4.6 muestra los valores de cubrimiento (4.13) con $V = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) + 0,01$ y $V = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) - 0,03$, para trayectorias aleatorias con $s_0 = 1$, $p = 3$ y $N_2 = 100$ con respecto a un call europeo Z para el modelo $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q) \times \mathcal{H}$ estudiado al principio de la Sección. Podemos ver que los valores de (4.13) cubren por arriba el valor del derivado en el primer caso. Para el caso $X = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) - 0,03$, los valores aproximan estrechamente a los valores del derivado.

En una posición larga, los valores de cubrimiento están dados por

$$V - \sum_{i=0}^{M(\mathbf{S})-1} H_i^\downarrow(\mathbf{S}) \Delta_i S, \quad (4.14)$$

con $V \in \mathbb{R}$ el valor inicial de la cartera de inversión. La estrategia Φ^\downarrow se define de una manera similar que Φ^\uparrow , pero en este caso usando los valores óptimos que nos dan las cotas dinámicas minimax inferiores $\underline{U}(\mathbf{S}, Z, \mathcal{M})$.

La Figura 4.7 muestra los valores de la ecuación (4.14) con $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) - 0,01$ y $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) + 0,03$, para trayectorias aleatorias con respecto a un call europeo

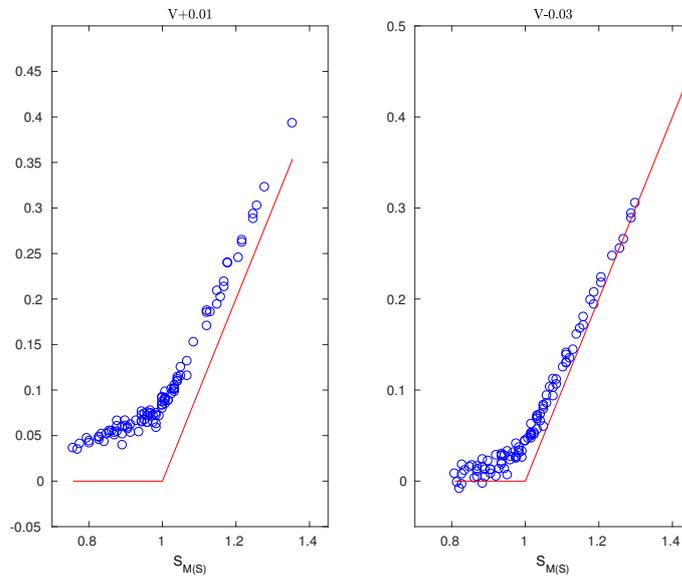


Figura 4.6: Valores de cubrimiento del derivado financiero para $V = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) + 0,01$ y $V = \bar{V}(S_0, Z, \mathcal{M}) - 0,03$.

Z . En este caso podemos ver que los valores de (4.14) se encuentran por debajo del valor del derivado para $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) - 0,01$. Para $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) + 0,03$, se aproxima mejor al derivado.

Por último, es de interés mostrar la situación de los valores de cubrimiento del derivado cuando se considera $V = \bar{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ junto a la estrategia Φ^\dagger y $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ junto a la estrategia Φ^\downarrow . La Figura 4.8 refleja esta situación para $\mathcal{M} = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q) \times \mathcal{H}$ con $s_0 = 1$, $N_2 = 100$ y $p = 3$.

4.3.3. Volatilidad Variable

Este último apartado está dedicado a estudiar el comportamiento de las cotas minimax para diferentes configuraciones de un mercado finito \mathcal{M} respecto de la selección del conjunto Λ . En un mercado finito VCT, Λ contiene la información de los posibles valores de variación cuadrática que se les permitirá a las trayectorias del mercado.

Consideraremos primero mercados donde Λ contiene un solo elemento $\{n_\theta\}$ con $1 \leq \theta \leq l$ y $n_\theta < n_{\theta+1}$. Denotaremos a los mercados correspondientes por $\mathcal{M}_\theta = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q_\theta) \times \mathcal{H}$, $1 \leq \theta \leq l$, donde $Q_\theta = \{n_\theta \delta^2\}$. Las Figuras 4.9 y 4.10 muestran las cotas minimax como función de los valores de la variación cuadrática para dos tipos diferentes de derivados. Se define a la opción *mariposa* con precio de ejecución $K_1 < K_2$

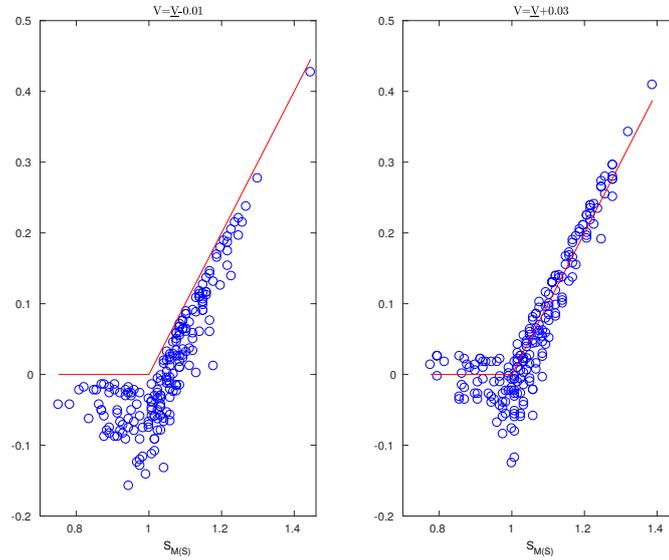


Figura 4.7: Valores de cubrimiento del derivado para $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) - 0,01$ y $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M}) + 0,03$.

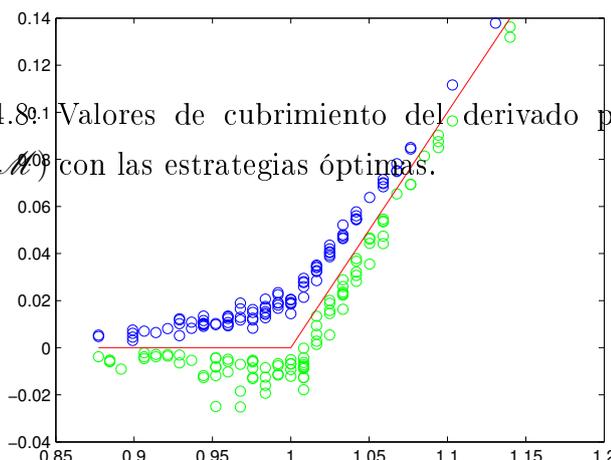


Figura 4.8: Valores de cubrimiento del derivado para $V = \overline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ y $V = \underline{V}(s_0, Z, \mathcal{M})$ con las estrategias óptimas.

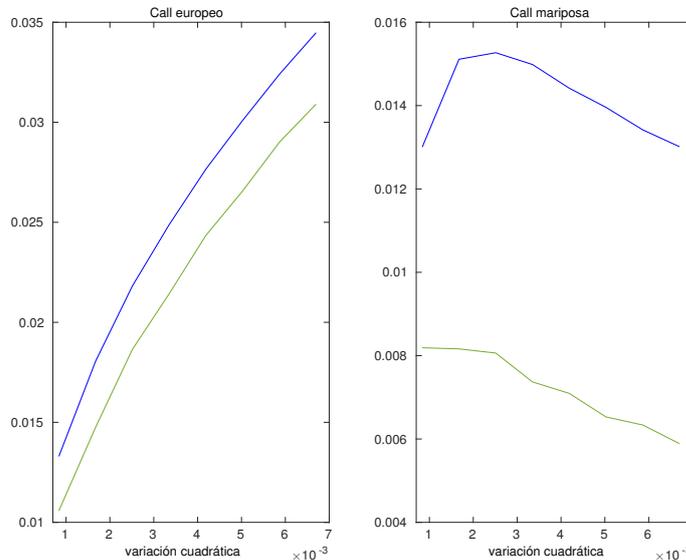


Figura 4.9: Cotas minimax como función de $v_\theta = n_\theta \delta^2$ en el mercado \mathcal{M}_θ para un call europeo con $K = 1$ y una opción mariposa con $K_1 = 1$ y $K_2 = 1,1$.

como

$$Z^{\text{but}}(\mathbf{S}) = \begin{cases} (S_{M(\mathbf{S})} - K_1)^+ & \text{si } S_{M(\mathbf{S})} \leq \frac{K_1 + K_2}{2} \\ (K_2 - S_{M(\mathbf{S})})^+ & \text{si } S_{M(\mathbf{S})} > \frac{K_1 + K_2}{2} \end{cases}.$$

Tomaremos en esta oportunidad $s_0 = 1$, $\alpha = 3 \cdot \sqrt{0,0067/200}$, $N_1 = N_2$ y n_θ tomando valores entre 25 y 200. Construiremos ocho mercados finitos VCT $\mathcal{M}_\theta = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q_\theta) \times \mathcal{H}$ donde $Q_\theta = \{n_\theta \delta^2\}$.

Observemos que las cotas se incrementan de forma monótona respecto a la variación cuadrática para el caso de un call europeo en concordancia con el Corolario 4.1, pero en el caso de una opción mariposa el comportamiento ya no es monótono. Notemos que el call europeo es un derivado convexo, mientras que la opción mariposa no lo es.

Es importante mostrar, además, el efecto de incorporar valores de variación cuadrática al conjunto Q . Con este fin, construiremos mercados finitos VCT $\mathcal{M}_{Q_\theta} = \mathcal{S}(s_0, \alpha, Q_\theta) \times \mathcal{H}$ donde, en este caso, $Q_\theta = \{n_1 \delta^2, \dots, n_\theta \delta^2\}$. La Figura 4.10 muestra las cotas minimax como función de los conjuntos Q_θ para un call europeo y una opción mariposa.

Notemos que, en la Figura 4.9, para un call europeo, el gráfico de la cota superior coincide con el gráfico de la cota inferior. Esto significa que la cota superior solo depende del máximo valor del conjunto Q en concordancia con el Corolario 4.2. En cambio, la

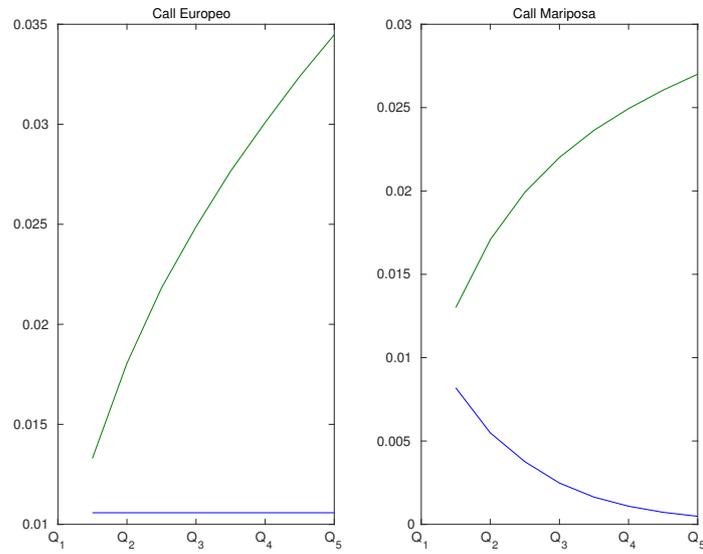


Figura 4.10: Cotas minimax como función de $Q_\theta = \{n_1\delta^2, \dots, n_\theta\delta^2\}$ en el mercado \mathcal{M}_{Q_θ} para un call europeo con $K = 1$ y una opción mariposa con $K_1 = 1$ and $K_2 = 1,1$.

cota inferior es constante para todo Q_θ . Entonces podemos concluir que la cota inferior solo depende del valor mínimo del conjunto Q . En el caso de la opción mariposa, la cota superior aumenta en forma monótona mientras que la cota inferior decrece respecto a Q_θ , pero no podemos obtener conclusiones sobre su dependencia de los valores de Q .

Apéndice A

Análisis Convexo

Daremos en este capítulo una breve introducción al análisis convexo. Dividiremos el capítulo en tres secciones. En la Sección A.1 daremos algunos de los teoremas más importantes, como el teorema de separación (algunas veces llamado Teorema de Hahn-Banach, que es la versión infinito dimensional del mismo) y el Teorema de Caratheodory. En la Sección A.2 presentaremos algunas propiedades de las funciones convexas, tales como las nociones de dualidad. Por último, en la Sección A.3 introduciremos un resultado de optimalidad.

El libro de referencia en el que basamos este capítulo es Dacorogna (2007), el cual recopila varios resultados de Rockafellar (1970). Además también se puede consultar Boyd & Vandenberghe (2004), Bertsekas *et al.* (2003) y Horst & Tuy (1996). Adoptaremos en este apéndice la siguiente notación:

- Para un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, el E y E^C representarán respectivamente la clausura y el complemento de E .
- \cdot representará el producto interno de \mathbb{R}^d y, al menos que se diga lo contrario $\|\cdot\|$ denotará la norma euclídea de \mathbb{R}^d .
- La bola de centro $x \in \mathbb{R}^d$ y radio $r > 0$ será denotada por

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < r\}.$$

A.1. Conjuntos Convexos

Para empezar recordemos las siguientes definiciones básicas.

Definición A.1. 1. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se dice *convexo* si para cada $x, y \in E$ y cada $t \in [0, 1]$

$$tx + (1 - t)y \in E.$$

2. Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ se dice *afín* si para cada $x, y \in E$ y cada $t \in \mathbb{R}$

$$tx + (1 - t)y \in E$$

3. La *cápsula afín* de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ es el menor conjunto afín que contiene a E . La denotaremos por $\text{aff } E$.

4. Un *hiperplano* $A \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de la forma

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot a = \alpha\}$$

$$a \in \mathbb{R}^d, a \neq 0 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}.$$

La siguiente Proposición es elemental.

Proposición A.1. 1. La intersección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.

2. La intersección arbitraria de conjuntos afines es afín.

La noción de interior relativo es un concepto muy importante en análisis convexo.

Definición A.2. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo. El *interior relativo* de E , que denotaremos por $\text{ri } E$, es el interior del conjunto relativo a su cápsula afín, es decir,

$$\text{ri } E = \{x \in E : B(x, r) \cap \text{aff } E \subseteq E \text{ para algún } r > 0\}.$$

La siguiente propiedad relaciona las nociones de clausura y relativo interior.

Proposición A.2 ((Rockafellar, 1970, Teorema 6.1)). Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo no vacío. Entonces para cada $x \in \text{ri } E$ se tiene que

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \text{ri } E$$

para cada $y \in \text{cl } E$ y para todo $\alpha \in (0, 1]$.

La Proposición que sigue describe una de las propiedades más importantes de la clausura y el relativo interior sobre conjuntos convexos.

Proposición A.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo. Entonces el E y $\text{ri } E$ son convexos.*

La siguiente caracterización del interior relativo para conjuntos convexos es de utilidad.

Proposición A.4 ((Rockafellar, 1970, Corolario 6.4.1)). *Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo. Entonces el interior relativo de E es el conjunto de todos los puntos $x \in E$ tal que para todo $y \in E$ existe algún $\epsilon > 0$ con*

$$x - \epsilon(y - x) \in E.$$

En los siguientes resultados describiremos algunas operaciones que preservan convexidad. Estas operaciones son de ayuda para determinar o establecer cuando un conjunto es convexo. Para $x, y \in \mathbb{R}^d$ vamos a definir el segmento cerrado $[x, y]$ y el segmento abierto (x, y) por

$$[x, y] \equiv \{tx + (1 - t)y : 0 \leq t \leq 1\} \text{ y } (x, y) \equiv \{tx + (1 - t)y : 0 < t < 1\}.$$

Dada una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$, vamos a presentar dos propiedades de preservación de conjuntos convexos por f introducidas en Páles (2012). Diremos que f *preserva convexidad* si $f(E)$ es convexo para todo subconjunto convexo $E \subseteq \mathbb{R}^d$. De manera análoga, diremos que f^{-1} *preserva convexidad* o f *preserva convexidad inversamente* si $f^{-1}(E')$ es convexo cuando E' es un subconjunto convexo de $f(\mathbb{R}^d)$. Los siguientes resultados son inmediatos.

Proposición A.5. *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$,*

1. *f preserva convexidad si y sólo si $[f(x), f(y)] \subseteq f([x, y])$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.*
2. *f preserva convexidad inversamente si y sólo si $f([x, y]) \subseteq [f(x), f(y)]$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$.*

Notemos que se sigue de la Proposición anterior que una función que preserve convexos y, a la vez, preserve inversamente cumple que $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$, lo que motiva la siguiente Definición.

Definición A.3. Diremos que una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ *preserva segmentos* si $[f(x), f(y)] = f([x, y])$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Si $(f(x), f(y)) = f((x, y))$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ diremos que f *preserva segmentos estrictamente*.

Entonces, f preserva segmentos si y sólo si f preserva convexos y preserva convexos inversamente. Claramente, si f preserva segmentos estrictamente, entonces preserva segmentos, la implicación inversa, sin embargo, no siempre es cierta.

Las candidatas obvias a ser funciones que preservan segmentos estrictamente son las funciones afines. Recordemos que una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ es afín si es la suma de una función lineal más una constante, es decir, $f(x) = Ax + b$, donde $A \in \mathbb{R}^{d \times d'}$ y $b \in \mathbb{R}^{d'}$.

Proposición A.6. *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ una función afín. Entonces f preserva segmentos estrictamente.*

Dos ejemplos sencillos de transformación afín son la función de escala y las traslaciones. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^d$, entonces los conjuntos αE y $E + a$ son convexos, donde

$$\alpha E = \{\alpha x : x \in E\}, \quad E + a = \{x + a : x \in E\}.$$

Existe otra clase de funciones más generales que las afines, que también preservan segmentos estrictamente. Consideremos la función $P : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ con $\text{dom } P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \times \mathbb{R}^d$ definida por

$$P(x) = \frac{1}{x^0}(x^1, x^2, \dots, x^d). \quad (\text{A.1})$$

Esta función denominada *función perspectiva*, cambia de escala o normaliza vectores, dejando, en este caso, la primera coordenada igual a 1, la cual descarta. Esta función también preserva segmentos estrictamente (ver (Boyd & Vandenberghe, 2004, Sección 2.3.3)).

Proposición A.7. *Sea $P : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ la función perspectiva dada por (A.1), entonces P preserva segmentos estrictamente.*

Observación A.1. Podemos armar funciones perspectiva que normalicen con respecto a cualquier otra coordenada. En tal caso la Proposición anterior se mantiene verdadera.

Por último, definiremos las funciones lineales-fraccionales, que son aquellas que son composición de la función perspectiva con una función afín. Supongamos que $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ es una función afín, entonces la función $f = P \circ g$ es llamada *lineal-fraccional* (o *proyectiva*).

Proposición A.8. *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ una función lineal fraccional, entonces f preserva segmentos estrictamente.*

La noción de separación es una de las nociones más importantes en la teoría de convexidad y sus aplicaciones. Se basa en el hecho de que un hiperplano en \mathbb{R}^d divide \mathbb{R}^d en dos, en el sentido que el complemento del hiperplano es la unión de dos conjuntos convexos abiertos disjuntos (semiespacios). El principal Teorema de Separación es el que sigue.

Teorema A.1 ((Rockafellar, 1970, Teorema 11.3)). *Sean E_1 y E_2 dos conjuntos convexos no vacíos en \mathbb{R}^d . Si $\text{ri } E_1$ y $\text{ri } E_2$ no tienen puntos en común, entonces existe un vector $b \in \mathbb{R}^d$ tal que*

- $b \cdot x \leq b \cdot y$ para todo $x \in E_1$ e $y \in E_2$.
- Existe $x^* \in E_1$ e $y^* \in E_2$ tal que $b \cdot x^* < b \cdot y^*$.

El siguiente Teorema muestra cuando podemos separar dos conjuntos fuertemente.

Teorema A.2 ((Rockafellar, 1970, Teorema 11.4)). *Sean E_1 y E_2 dos conjuntos convexos no vacíos en \mathbb{R}^d . Si*

$$\inf\{\|x_1 - x_2\|_d : x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} > 0,$$

entonces existe un vector $b \in \mathbb{R}^d$ tal que $b \cdot x < b \cdot y$ para todo $x \in E_1$ e $y \in E_2$.

Presentaremos a continuación el Teorema de Separación que utilizamos para probar el Teorema 1.1, el cual es una aplicación directa de los Teoremas anteriores.

Teorema A.3. *Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto convexo no vacío tal que $0 \notin E$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}^d$ tal que $a \cdot x \geq 0$ para todo $x \in E$ y $a \cdot x_0 > 0$ para al menos un $x_0 \in E$. Más aún, si $\inf_{x \in E} \|x\|_d > 0$, entonces podemos encontrar $a \in \mathbb{R}^d$ tal que $\inf_{x \in E} |a \cdot x| > 0$.*

A continuación definiremos la cápsula convexa de un conjunto.

Definición A.4. La *cápsula convexa* de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, que denotaremos por $\text{co } E$, es el conjunto convexo más chico que contiene a E .

Una de las más importantes caracterizaciones de la cápsula convexa es el Teorema de Carathéodory.

Teorema A.4 (Teorema de Carathéodory). Sea $E \subset \mathbb{R}^d$. Entonces

$$\text{co } E = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i : x_i \in E, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dado E un conjunto convexo, existen varios conjuntos de puntos $F \subseteq E$ tal que $E = \text{co } F$. Para cualquiera de estos conjuntos, los puntos de E se pueden expresar como combinación convexa de los puntos de F por medio del Teorema de Carathéodory. Por supuesto, el conjunto F más chico es la representación más significativa de los puntos de E .

Definición A.5. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo. Diremos que $x \in E$ es un *punto extremo* de E si

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha a + (1 - \alpha)b \\ 0 < \alpha < 1, a, b \in E \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = x.$$

Denotaremos el conjunto de puntos extremos de E por E_{ext} .

Notemos que el conjunto de puntos extremos puede ser vacío. Este es el caso, por ejemplo, de un conjunto convexo abierto. La importancia de los puntos extremos se explica en el siguiente Teorema. Este resultado es conocido en general como Teorema de Krein-Milman, que es el caso infinito dimensional del Teorema de Minkowsky.

Teorema A.5 (Teorema de Minkowsky). Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto y sea E_{ext} el conjunto de puntos extremos de $\text{co } E$. Entonces

$$\text{co } E = \text{co } E_{\text{ext}}.$$

A.2. Funciones Convexas

Mientras tratemos con funciones convexas, es conveniente permitirle a las funciones tomar valor infinito, es decir, consideraremos funciones de \mathbb{R}^d en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Comenzaremos con la definición de función convexa.

Definición A.6. Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se dice *convexa* si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

para cada $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $t \in [0, 1]$.

Vamos a recordar algunas definiciones y notaciones.

Definición A.7. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1. f es *semicontinua inferior* si

$$\liminf_{x_j \rightarrow x} f(x_j) \geq f(x).$$

2. El *dominio* de f está definido por

$$\text{dom } f \equiv \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < \infty\}.$$

3. El *epígrafe* de f está definido por

$$\text{epi } f \equiv \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

4. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el *conjunto de nivel* α de f como

$$C_\alpha \equiv \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq \alpha\}.$$

Teorema A.6. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1. Las siguientes tres condiciones son equivalentes.

- a) f es *semicontinua inferior*,
- b) $\text{epi } f$ es *cerrado*,
- c) C_α es *cerrado* para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Las siguientes dos condiciones son equivalentes.

- a) f es *convexa*,
- b) $\text{epi } f$ es *convexo*.

Además, si f es *convexa*, entonces C_α es *convexa* para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f_\nu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\nu \in \mathbb{I}$, una familia arbitraria de funciones convexas.
Entonces

$$f = \sup_{\nu \in \mathbb{I}} f_\nu$$

es una función convexa.

4. Sea $f_\nu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\nu \in \mathbb{I}$, una familia arbitraria de funciones semicontinuas inferiores. Entonces

$$f = \sup_{\nu \in \mathbb{I}} f_\nu$$

es una función semicontinua inferior.

Centraremos ahora nuestra atención en la continuidad de las funciones convexas.

Teorema A.7. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa tal que $f \neq +\infty$. Entonces f es continua en el interior del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < \infty\}$.

Otra noción importante dentro del análisis convexo es la de envolvente convexa de una función

Definición A.8. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. La *envolvente convexa* de f , que denotaremos por f^c , es la mayor función convexa menor que f , o equivalentemente

$$f^c(x) = \sup\{g(x) : g \leq f \text{ y } g \text{ convexa}\}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^d$.

El siguiente resultado da una interpretación de la envolvente convexa de una función f .

Lema A.1. Para cualquier función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se tiene que

$$f^c(x) = \inf\{\alpha : (x, \alpha) \in \text{co}(\text{epi } f)\}.$$

Además se tiene que $\text{co}(\text{epi } f) \subseteq \text{epi } f^c$ y

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f^c < +\infty\} = \text{co}\{x \in \mathbb{R}^d : f < +\infty\}.$$

Observemos que la envolvente convexa es una función continua en el interior de su dominio por ser justamente una función convexa (Teorema A.7). Además, bajo ciertas condiciones hereda alguna de las propiedades de la función original.

Proposición A.9. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Supongamos que existe $a \in \mathbb{R}^d$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq a \cdot x + \alpha$, entonces $f^c > -\infty$.
2. Supongamos que f es semicontinua inferior y alguna de las siguientes dos condiciones se cumple:

a) $\text{dom } f$ es compacto,

b) $\text{dom } f$ es cerrado y convexo,

entonces f^c es semicontinua inferior.

Una consecuencia inmediata del Teorema de Caratheodory (Teorema A.4) es la siguiente caracterización de la envolvente convexa.

Teorema A.8. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ y, para cada $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f^c(x) = \sup\{g(x) : g \leq f \text{ y } g \text{ convexa}\}.$$

Supongamos que $f^c > -\infty$. Entonces

$$f^c(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i f(x_i) : \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i x_i = x, \alpha_i \geq 0 \text{ con } \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Otro concepto de importancia es el siguiente.

Definición A.9. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La *envolvente semicontinua inferior* de f , que denotaremos por \bar{f} , es la mayor función semicontinua inferior menor que f , o equivalentemente

$$\bar{f}(x) = \sup\{g(x) : g \leq f \text{ y } g \text{ semicontinua inferior}\}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^d$.

El resultado más importante involucrando el concepto de envolvente semicontinua inferior es el siguiente.

Teorema A.9 ((Rockafellar, 1970, Teorema 7.4)). Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Entonces \bar{f} es una función convexa. Además, \bar{f} coincide con f en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < \infty\}$.

Introduciremos ahora la noción de dualidad. Esta noción juega un rol central en análisis convexo.

Definición A.10. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $f \neq \infty$.

1. La función $f^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{x \cdot x^* - f(x)\}$$

es llamada *conjugada*, o *dual* de f .

2. La función $f^{**} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^d} \{x \cdot x^* - f^*(x^*)\}$$

es llamada *biconjugada*, o *bidual* de f .

La función conjugada es la máxima diferencia entre la función lineal $x \cdot x^*$ y $f(x)$. Por último daremos algunas propiedades importantes de estas funciones.

Teorema A.10. *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Entonces:*

1. f^* es convexa y semicontinua inferior
2. Si f es convexa y semicontinua inferior, entonces $f^* \neq \infty$.
3. La siguiente inecuación es cierta

$$f^{**} \leq f^c \leq f.$$

Más aún, si $f > -\infty$, entonces $f^{**} = \overline{f^c}$. En particular, si f es convexa y semicontinua inferior, se tiene que $f^{**} = f$.

4. La identidad $f^{***} = f^*$ es siempre verdadera.

A.3. Convexidad y Optimización

El problema de encontrar el mínimo de una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es un tema central en esta tesis.

Definición A.11 (Mínimo Global). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ con $f \neq +\infty$. Diremos que un punto $x^* \in \mathbb{R}^d$ es un *mínimo* de f sobre \mathbb{R}^d si

$$f(x^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^d} f(x).$$

Además diremos que f alcanza un mínimo en x^* .

Una pregunta básica en optimización es cuándo existe un punto mínimo. Una de las respuestas a esta pregunta la da el Teorema de Weierstrass. Antes necesitamos introducir una clase de funciones.

Definición A.12 (Función Coerciva). Diremos que una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es *coerciva* si para cada sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ con $\|x_k\| \rightarrow +\infty$ se tiene que $f(x_k) \rightarrow +\infty$.

Notemos que como consecuencia de la Definición todos los conjuntos de nivel de una función coerciva son acotados. El siguiente resultado se puede encontrar en (Bertsekas *et al.*, 2003, Proposición 2.1.1)

Teorema A.11 (Teorema de Weierstrass). *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función semicontinua inferior y asumamos que alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

- *el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < +\infty\}$ es acotado,*
- *existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto de nivel C_α de f es acotado,*
- *f es coerciva.*

Entonces el conjunto de mínimos de f es no vacío y compacto.

Bibliografía

- ACCIAIO, B., BEIGLBÖCK, M., PENKNER, F. & SCHACHERMAYER, W. (2013). A model-free version of the fundamental theorem of asset pricing and the super-replication theorem. *Mathematical Finance* **26**(2), 233–251.
- AVELLANEDA, M., LEVY, A. & PARÁS, A. (1995). Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance* **2**(2), 73–88.
- BACHELLIER, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Ph.D. thesis, Annales scientifiques de l'É.N.S.
- BENDER, C., SOTTINEN, T. & VALKEILA, E. (2011). Fractional processes as models in stochastic finance. In: *Advanced Mathematical Methods for Finance*. Springer Berlin Heidelberg, pp. 75–103.
- BERNHARD, P., ENGWERDA, J. C., ROORDA, B., SCHUMACHER, J., KOLOKOLTSOV, V., SAINT-PIERRE, P. & AUBIN, J.-P. (2013). *The Interval Market Model in Mathematical Finance*. Springer New York.
- BERTSEKAS, D., NEDIĆ, A. & OZDAGLAR, A. (2003). *Convex Analysis and Optimization*. Athena Scientific optimization and computation series. Athena Scientific.
- BERTSEKAS, D. P. (2000). *Dynamic Programming and Optimal Control*. Athena Scientific, 2nd ed.
- BLACK, F. & SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81**(3), 637–654.
- BOYD, S. & VANDENBERGHE, L. (2004). *Convex Optimization*. New York, NY, USA: Cambridge University Press.

- BOYLE, P. P. (1988). A lattice framework for option pricing with two state variables. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **23**(1), 1.
- BRITTEN-JONES, M. & NEUBERGER, A. (1996). Arbitrage pricing with incomplete markets. *Applied Mathematical Finance* **3**(4), 347–363.
- BURZONI, M., FRITTELLI, M. & MAGGIS, M. (2015). Universal arbitrage aggregator in discrete-time markets under uncertainty. *Finance and Stochastics* **20**(1), 1–50.
- BURZONI, M., FRITTELLI, M. & MAGGIS, M. (2017). Model-free superhedging duality. *The Annals of Applied Probability* **27**(3), 1452–1477.
- CARASSUS, L., GOBET, E. & TEMAM, E. (2007). A Class of Financial Products and Models Where Super-replication Prices are Explicit. In: *Stochastic Processes And Applications To Mathematical Finance*, World Scientific Book Chapters, chap. 4. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 67–84.
- CARASSUS, L. & VARGIOLU, T. (2010). Super-replication price for asset prices having bounded increments in discrete time. Working paper or preprint.
- CHERIDITO, P. (2003). Arbitrage in fractional brownian motion models. *Finance and Stochastics* **7**(4), 533–553.
- CHERIDITO, P., KUPPER, M. & TANGPI, L. (2017). Duality formulas for robust pricing and hedging in discrete time. *SIAM Journal on Financial Mathematics* **8**(1), 738–765.
- COX, A. M. G., HOU, Z. & OBLÓJ, J. (2016). Robust pricing and hedging under trading restrictions and the emergence of local martingale models. *Finance and Stochastics* **20**(3), 669–704.
- COX, J. C., ROSS, S. A. & RUBINSTEIN, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics* **7**(3), 229–263.
- CUTLAND, N. J. & ROUX, A. (2013). *Derivative Pricing in Discrete Time*. Springer London.
- DACOROGNA, B. (2007). *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Springer New York.

- DAHL, K. R. (2013). Pricing of claims in discrete time with partial information. *Applied Mathematics & Optimization* **68**(2), 145–155.
- DAHL, K. R. (2016). A convex duality approach for pricing contingent claims under partial information and short selling constraints. *Stochastic Analysis and Applications* **35**(2), 317–333.
- DEGANO, I., FERRANDO, S. & GONZALEZ, A. (2018). Trajectory based models. Evaluation of minmax pricing bounds. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications and Algorithms* **25**(2), 97–128.
- EBERLEIN, E. & JACOD, J. (1997). On the range of options prices. *Finance and Stochastics* **1**(2), 131–140.
- FERRANDO, S., GONZALEZ, A., DEGANO, I. & RAHSEPAR, M. (2014). Trajectory based market models. arbitrage and pricing intervals. In: *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*. Springer International Publishing, pp. 99–103.
- FÖLLMER, H. & SCHIED, A. (2011). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter Textbook Series. De Gruyter.
- HARRISON, J. & PLISKA, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications* **11**(3), 215–260.
- HENCLOVA, A. (2005). *Notes on free lunch in the limit and pricing by conjugate duality theory*. Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Institut für Mathematik.
- HORST, R. & TUY, H. (1996). *Global Optimization*. Springer Berlin Heidelberg.
- HOWE, M. & RUSTEM, B. (1997). A robust hedging algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**(6), 1065–1092.
- HOWE, M., RUSTEM, B. & SELBY, M. (1996). Multi-period minimax hedging strategies. *European Journal of Operational Research* **93**(1), 185–204.
- HOWE, M. A., RUSTEM, B. & SELBY, M. J. P. (1994). Minimax hedging strategy. *Computational Economics* **7**(4), 245–275.

- KAHALÉ, N. (2017). Superreplication of financial derivatives via convex programming. *Management Science* **63**(7), 2323–2339.
- KAROUI, N. E. & QUENEZ, M.-C. (1995). Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM Journal on Control and Optimization* **33**(1), 29–66.
- KING, A. J. (2002). Duality and martingales: a stochastic programming perspective on contingent claims. *Mathematical Programming* **91**(3), 543–562.
- KOLOKOLTSOV, V. N. (1998). Nonexpansive maps and option pricing theory. *Kybernetika* **34**(6), 713–724.
- KOPTELOV, R. P. & KONASHKOVA, A. M. (2013). Intersection of a line and a convex hull of points cloud. *Applied Mathematical Sciences* **7**, 5139–5149.
- LYONS, T. J. (1995). Uncertain volatility and the risk-free synthesis of derivatives. *Applied Mathematical Finance* **2**(2), 117–133.
- MERTON, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* **4**(1), 141.
- PÁLES, Z. (2012). Characterization of segment and convexity preserving maps. *ArXiv e-prints* .
- PENNANEN, T. (2011). Convex duality in stochastic optimization and mathematical finance. *Mathematics of Operations Research* **36**(2), 340–362.
- PLISKA, S. (1997). *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*. Wiley.
- REBONATO, R. (2004). *Volatility and Correlation*. John Wiley & Sons Ltd.
- RIEDEL, F. (2014). Financial economics without probabilistic prior assumptions. *Decisions in Economics and Finance* **38**(1), 75–91.
- RITCHKEN, P. H. (1985). On option pricing bounds. *The Journal of Finance* **40**(4), 1219–1233.
- RITCHKEN, P. H. & KUO, S. (1988). Option bounds with finite revision opportunities. *The Journal of Finance* **43**(2), 301–308.

ROCKAFELLAR, R. (1970). *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press.

ROORDA, B., ENGWERDA, J. & SCHUMACHER, J. (2005). Performance of hedging strategies in interval models. *Kybernetika* **41**(5), 575–592.

Índice alfabético

- cápsula
 - afín, 108
 - convexa, 15, 111
- cartera
 - valor relativo, 5
- conjunto
 - afín, 108
 - convexo, 108
- conjunto de
 - estrategias
 - full, 47
 - nivel, 113
 - puntos extremos, 112
 - trayectorias, 2
 - condicionado, 12
 - finito, 95
 - localmente 0-neutral, 16
 - localmente libre de arbitraje, 16
 - por intervalos, 80
- cotas minimax, 39
 - condicionales, 44
 - dinámicas, 52
- derivado financiero, 33, 34
 - alcanzable, 42
 - cóncavo, 81
- call
 - asiático, 35
 - barrera, 35
 - européo, 33, 35
 - lookback, 36
- convexo, 81
- minimax, 62
 - inferior, 62
 - superior, 62
- put
 - asiático, 35
 - européo, 35
- dominio, 113
- envolvente
 - convexa, 68, 114
 - semicontinua inferior, 68, 115
- epígrafe, 113
- estrategia, 3
 - autofinanciada, 3
 - constante, 4
 - de arbitraje, 8
 - relativo, 36
 - dominante, 7
 - liquidada, 7
 - nula, 4
 - replicadora, 42
 - restringida, 13
- función
 - afín, 110
 - biconjugada, 116

- bidual, 116
 - cambio de numéraire, 28
 - coerciva, 116
 - conjugada, 66, 115
 - convexa, 112
 - de escala, 110
 - de ganancias, 6
 - de pago, 34
 - dual, 66, 115
 - lineal-fraccional, 110
 - perspectiva, 110
 - preserva segmentos, 109
 - estrictamente, 109
 - semicontinua inferior, 113
- hiperplano, 108
- interior relativo, 15, 108
- ley de precio único, 8
- mínimo, 116
- mercado trayectorial, 7
 - 0-neutral, 9
 - condicional, 12
 - n -acotado, 7
 - binomial, 90
 - de tiempo fijo, 88
 - de variación cuadrática, 93
 - finito, 95
 - libre de arbitraje, 9
 - no redundante, 19
 - por intervalos, 80
 - semiacotado, 7
 - trinomial, 91
- nodo, 12
- 0-neutral, 16
 - de arbitraje, 16
 - libre de arbitraje, 16
 - no redundante, 19
- numéraire, 5
- payoff, 34
- precio justo, 37
 - intervalo de, 41
- punto extremo, 112
- segmento
 - abierto, 109
 - cerrado, 109
- teorema de
 - Carathéodory, 111
 - Mikowsky, 112
 - separación, 111
 - Weirestrass, 63, 117
- traslación, 110
- trayectoria, 2
 - relativa, 5
- variación cuadrática, 93