UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA DEL LITORAL

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de **Doctor en Matemática** en el campo del **Análisis Matemático**.

Difusión fraccionaria diádica. Límite central y aproximación de la identidad

Autor

Federico Morana

Institución donde se realizó la investigación:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral
CONICET – UNL

Director de Tesis: Hugo Aimar

Codirectora de Tesis: Ivana Gómez

Jurado compuesto por

Julián Fernández Bonder

Ernesto Mordecki

Rubén Spies

Santa Fe - Argentina

2017

Resumen

En esta tesis se aborda la investigación del carácter central o de atractores de los núcleos de difusión fraccionaria diádica obtenidos por Actis y Aimar, en el sentido probabilístico en que el núcleo de Weierstrass, núcleo de difusión clásico asociado al Laplaciano, lo es para adecuados promedios de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. La herramienta fundamental utilizada para tal propósito es el análisis de Fourier del contexto, provisto por la teoría de wavelets de Haar. Producto de esta búsqueda se obtuvo también un teorema de alternativas que desvela la posibilidad de tres caminos: centralidad, concentración y disipación. Se estudian en detalle los dos primeros casos que determinan teoremas del límite central y aproximaciones de la identidad.

Por otra parte, se exploran aproximaciones de la identidad por familias de núcleos de convolución de Cauchy-Poisson en $\mathbb{R}^n$ y de Lévy en $\mathbb{R}$. Luego, en un enfoque más abstracto, se estudia la relación entre las propiedades de estabilidad y de Harnack con la concentración y aproximación de la identidad en familias de núcleos de Markov de colas pesadas. Se alcanzan resultados en los espacios euclídeos clásicos y extensiones a espacios de tipo homogéneo generales.

Índice general

Introducción General

El problema básico de difusión en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, con distribución inicial de temperaturas $u_0(x)$,

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

tiene la solución que provee el núcleo de Weierstrass $W_t(x)$ por convolución con el dato inicial u_0. Precisando

$$u(x,t) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} W_t(x-y) u_0(y)\, dy.$$

El núcleo W_t está dado por

$$W_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

que también es el límite central de la teoría de probabilidad para promedios de sucesiones de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media nula y varianza 2t.

En los trabajos [2] y [3] se encara y resuelve el análogo del problema (P) en espacios métricos con medida cuando el Laplaciano se sustituye por un operador de diferenciación fraccionaria asociado a una familia diádica en el espacio. Aunque ahora el operador que asigna a u_0 la solución u deja de ser de convolución, es todavía un operador integral con un núcleo $W_{dy}(x,y;t)$ que puede explicitarse en términos de las wavelets de Haar. Los resultados de esta tesis son consecuencias de la búsqueda de centralidad para W_{dy} en el mismo sentido que W_t lo es para las sumas promediadas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de varianza finita.

Dos resultados centrales de la Teoría de Probabilidad que tienen estrechas relaciones con el Análisis Armónico y de Fourier son las Leyes de Grandes Números y el Teorema del Límite Central. En su formulación más simple la ley de los grandes números expresa el valor esperado de los promedios: $m = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, con X_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con esperanza m y segundos momentos finitos.

Como la distribución de sumas de variables aleatorias independientes está dada por la convolución de las distribuciones individuales, suponiendo que cada X_i se distribuye con densidad g, tenemos que si $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ entonces $P(\{S_n > \lambda\}) = \int_\lambda^\infty (g * \cdots * g)(x)dx = \int_\lambda^\infty g^{(n)}(x)dx$. Por consiguiente, $P(\{\frac{1}{n}S_n > \lambda\}) = \int_{n\lambda}^\infty g^{(n)}(x)dx = \int_\lambda^\infty ng^{(n)}(nx)dx$. La sucesión de núcleos $g_n^{(n)}(x) := ng^{(n)}(nx)$ combina una competencia entre el ensanchamiento de soportes que produce la convolución y su compresión que produce la molificación. Puesto que ambas operaciones preservan la masa, cuando las compresiones dominan sobre las dilataciones los soportes esenciales se concentran alrededor de la esperanza común de la variable aleatoria y así tenemos, visto desde el análisis armónico, una aproximación a la identidad, al menos en sentido débil.

El segundo grupo de teoremas límites se refiere al de los límites centrales. Entre todos, el más clásico es el de De Moivre–Laplace y, al igual que muchas de sus generalizaciones, tiene por atractor central a la gaussiana. Cuando la varianza se relaciona con la variable temporal en un proceso de difusión, entonces el atractor es el que provee la solución fundamental de la ecuación del calor. Generalizaciones a procesos de Lévy con colas pesadas se prueban en [44] y [49]. La finitud de la varianza es precisamente la hipótesis que implica que la gaussiana es el atractor de las distribuciones de las sumas promediadas $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ cuando las variables aleatorias son independientes y están idénticamente distribuidas con media nula. En la prueba del teorema del límite central el análisis de Fourier juega un papel fundamental, en particular, la transformada de Fourier clásica de $\mathbb{R}^n$ tiene la propiedad de convertir convoluciones en productos y molificaciones en dilataciones de la variable de la transformada. Luego, la función de densidad de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, dada por $g_{\sqrt{n}}^{(n)}(x) = \sqrt{n}g^{(n)}(\sqrt{n}x)$, tiene transformada $\widehat{g_{\sqrt{n}}^{(n)}}(\xi) = \left(\widehat{g}(\frac{\xi}{\sqrt{n}})\right)^n$. Por intermedio de la fórmula de Taylor se obtiene que el límite de la expresión anterior cuando n tiende a infinito es $e^{-\xi^2/2}$, que es la conocida transformada de Fourier de la densidad gaussiana. Es precisamente el análisis de Fourier generalizado el que también provee el ingrediente principal en nuestro desarrollo. En vez de funciones trigonométricas, usamos funciones de Haar que son justamente las autofunciones de los operadores de derivación fraccionaria de [2].

El sustituto natural para la convolución, que está asociada a la distribución de la suma de variables aleatorias independientes, es el de los núcleos de Markov. Por otra parte, el control geométrico ejercido por la distancia diádica naturaliza la hipótesis de partida de considerar núcleos de Markov que dependen de la distancia diádica en el espacio abstracto. Los procesos de iteración y molificación que construiremos y la hipótesis de estabilidad que sustituye a la de varianza finita del caso clásico conducen a un teorema de alternativa triple natural. Este teorema prueba que bajo la hipótesis de convergencia sólo tres opciones son posibles: disipación, concentración y centralidad del núcleo W_{dy}. En esta tesis nos ocupamos de estudiar con cierto detalle estas convergencias. La concentración conduce a la aproximación de la identidad y la centralidad a la convergencia en $L^p(X,\mu)$ a la solución $u(x,t)$ de aquellas iteraciones y molificaciones de los núcleos de Markov iniciales actuando sobre el dato inicial u_0.

Después, estudiamos un problema de aproximación puntual a la identidad por familias de núcleos con varianza infinita pero con estabilidad y colas pesadas además de una propiedad de Harnack. Estos resultados también se extienden naturalmente a espacios de tipo homogéneo.

La tesis está organizada en dos partes. En la Parte I, que consta de los primeros 7 capítulos, se desarrollan los resultados relativos a los teoremas límite en contextos diádicos. La Parte II contiene los resultados de aproximaciones a la identidad bajo hipótesis de estabilidad y Harnack, comprendidos en los capítulos del 8 al 11.

Parte I

Límites Centrales y Aproximación de la Identidad asociados a difusiones fraccionarias diádicas

Introducción de la Parte I

La primera parte de la tesis se dedica a construir los aproximantes naturales al núcleo de difusión fraccionario diádico en contextos de complejidad creciente. En primer lugar se trabaja en $\mathbb{R}^+$ con su estructura diádica usual, donde la exposición resulta más simple en sus aspectos de notación y las ideas pueden introducirse de manera más sencilla. Luego, se extienden los resultados a cuadrantes de espacios con estructuras diádicas regulares y homogéneas. Finalmente se aborda el problema en el caso más complejo de los espacios de tipo homogéneo. En todos los casos, con base en la diagonalización a través de un sistema de Haar del contexto, deviene de manera natural un teorema de alternativa en el que las instancias interesantes de convergencia son la concentración y la centralidad de la difusión. Por ello es que consideramos en conjunto los límites centrales con las aproximaciones de la identidad, que reflejan más bien análogos de leyes de grandes números.

En el Capítulo 1 revisamos los sistemas diádicos y las bases de Haar asociadas en contextos euclídeos. Pero también introducimos los sistemas diádicos de Christ y las bases de Haar correspondientes en espacios de tipo homogéneo, que nos servirán para abordar los problemas generales en los Capítulos 7 y 11. En el Capítulo 2 recogemos brevemente, y a modo de introducción preliminar, varios aspectos relacionados con difusiones fraccionarias, los procesos de Lévy, estabilidad de variables aleatorias y teoremas del límite central. En el Capítulo 3 introducimos y caracterizamos desde varios puntos de vista, en particular el espectral, los núcleos de Markov diádicos en $\mathbb{R}^+$. En el Capítulo 4 se aborda la propiedad de estabilidad para estos núcleos y se introducen los algoritmos de iteración y molificación. Dos de los resultados principales en el contexto geométrico de $\mathbb{R}^+$ se encuentran en el Capítulo 5: el teorema que provee la alternativa en la convergencia y un teorema del límite central. El caso de concentración se aborda en el Capítulo 6. En el Capítulo 7 se extienden los resultados a otros espacios regulares u homogéneos, como es el caso de cuadrantes euclídeos n-dimensionales con la métrica usual o con métricas parabólicas, y también los fractales autosimilares como el conjunto de Cantor o el triángulo de Sierpinski. Luego, se investigan los problemas en la geometría más general de los espacios de tipo homogéneo.

Esta división en varios capítulos cortos, entendemos, nos permite exponer mejor la linea global del desarrollo de la Tesis.

Capítulo 1

Descomposiciones diádicas y bases de Haar

El presente capítulo contiene una reseña básica sobre las descomposiciones diádicas de espacios métricos, que generalizan al caso usual en $\mathbb{R}$, y el análisis multi-resolución derivado que da lugar a la definición de bases ortonormales de Haar en el espacio de funciones L^2, que a la vez resultan bases incondicionales de los espacios L^p para $1 < p < \infty$. En la Sección 1.1 se define familia diádica de acuerdo a sus propiedades genéricas y se describe el caso usual en $\mathbb{R}^+$. En la Sección 1.2 se introducen los espacios de tipo homogéneo y los espacios Ahlfors regulares, mientras que en la Sección 1.3 se presenta la construcción de Christ de familias diádicas en espacios de tipo homogéneo y algunas de sus propiedades destacadas. En la Sección 1.4 se describen la estructura multi-resolución inducida por las familias de Christ y las bases de Haar asociadas. Por último, dedicamos la Sección 1.5 a presentar varios ejemplos de espacios de tipo homogéneo.

1.1. Familias de conjuntos diádicos

Se llama *partición* de un conjunto a una familia de subconjuntos disjuntos cuya unión es el conjunto inicial. Se dice que una partición es más fina que otra si cada conjunto de la primera está contenido en uno de la segunda y que una sucesión de particiones de un conjunto es anidada si cada partición es más fina que la anterior. En un espacio o conjunto, llamamos *familia diádica* a la unión de las particiones de una sucesión anidada con la propiedad que cada conjunto perteneciente a una partición dada sea unión de una cantidad acotada, por una constante global, de conjuntos de la partición consecutiva. Decimos que cada partición de una familia diádica determina un nivel, en el cual los conjuntos suelen tener características comunes, en general haciendo referencia al tamaño, como ser la cantidad de elementos, el diámetro o la medida. Estas familias pueden definirse en contextos generales, pero revisten particular interés en espacios métricos, donde el diámetro determina el tamaño de los conjuntos, ya que en muchos casos nos permiten desarrollar un análisis multi-resolución (AMR) del espacio y la construcción de bases de ondículas, como la dada por el sistema de Haar.

Veamos, de modo ilustrativo, el ejemplo clásico de la familia diádica usual en la semirrecta real no negativa $\mathbb{R}^+$ con la distancia euclídea. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se considera la partición regular de $\mathbb{R}^+$ formada por intervalos semiabiertos de longitud 2^{-j}, situados de manera consecutiva a partir del origen:

$$\mathscr{D}_j = \left\{ I_k^j = \left[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right) : k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Notemos que los intervalos de $\mathscr{D}_{j+1}$ se obtienen de dividir a la mitad a los intervalos de $\mathscr{D}_j$, dado que $I_k^j = I_{2k}^{j+1} \cup I_{2k+1}^{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y todo $k \in \mathbb{N}_0$. Es decir, a mayor índice j las particiones son más finas, tienen mayor resolución, con las longitudes de los intervalos de $\mathscr{D}_j$ tendiendo a cero a medida que j crece. El conjunto

$$\mathscr{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathscr{D}_j$$

constituye la familia diádica usual en $\mathbb{R}^+$. Con el orden parcial determinado por la inclusión de conjuntos resulta un árbol dirigido infinito. Haciendo una analogía con el árbol genealógico, se suele utilizar la terminología de ancestros y descendientes: diremos que los elementos de cada nivel j pertenecen a la misma "generación", los intervalos de nivel $j+1$ contenidos en I_k^j son los "hijos" de I_k^j, y así sucesivamente. El término "familia" resulta en este sentido también apropiado.

Al considerar la familia diádica usual en la recta real $\mathbb{R}$, dada por la unión de los intervalos en $\mathscr{D}$ con los intervalos de extremos con valores opuestos a estos, queda determinado un grafo disconexo formado por dos árboles dirigidos disjuntos, es decir, un bosque. A la unión de los elementos de cada árbol se lo llama *cuadrante* respecto a la familia diádica. En este caso, un cuadrante es la semirrecta real negativa y el otro cuadrante es la semirrecta real no negativa. En el caso de $\mathbb{R}^+$, la familia diádica usual determina un único cuadrante igual al espacio total.

En el contexto general de los espacios métricos (X, d) nos interesa definir familias de tipo diádico $\mathscr{D}$ que permitan realizar un análisis multi-resolución para la posterior construcción de sistemas de ondículas (wavelets) en espacios funcionales. Una característica necesaria para esto es que tanto la cantidad de particiones que forman la familia diádica como la cantidad de elementos de cada partición sean a lo sumo numerables. En este sentido consideraremos, como modelo general, las familias diádicas con las siguientes características:

(I) Sobre los elementos: los elementos de $\mathscr{D}$, que llamamos "cubos", son abiertos o Borelianos.

(II) Sobre las particiones: Vamos a considerar particiones indexadas por $\mathbb{Z}$, cada una con una cantidad a lo sumo numerable de elementos. Específicamente, $\mathscr{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}_j$ donde $\mathscr{D}_j = \{Q_k^j \colon k \in K(j)\}$ y $K(j)$ es $\mathbb{N}_0$ o una sección inicial de $\mathbb{N}_0$ de la forma $K(j) = \{1, 2, \ldots, K_j\}$. Cuando la unión de los elementos de cada nivel sea disjunta e igual al espacio X, diremos que cada nivel es una partición *exacta* y así también que la familia diádica $\mathscr{D}$ es *exacta*. En general, el concepto de partición puede ser relajado, en el sentido que no necesariamente la unión de sus elementos cubra todo X, pero sí que el complemento de dicha unión no contenga ningún abierto, o ninguna bola, o sea nunca-denso, entre otras posibilidades. También puede contemplarse que la intersección entre conjuntos de una misma partición sea no vacía, aunque "pequeña".

(III) Anidación: para todo $j \in \mathbb{Z}$ y todo $k \in K(j)$ existe un único $l \in K(j-1)$ tal que $Q_k^j \subset Q_l^{j-1}$. También puede relajarse esta condición en el mismo sentido del punto anterior.

(IV) Exentricidad: existen constantes ρ, a y b, con $0 < \rho < 1$ y $0 < a \leq b$, de manera que cada cubo $Q \in \mathscr{D}_j$ contiene una bola de radio $a\rho^j$ y está contenido en una bola de radio $b\rho^j$, para todo $j \in \mathbb{Z}$.

La definición de una familia diádica con las propiedades (I)–(IV) resulta factible cuando el espacio cuenta con la propiedad de que los conjuntos acotados sean totalmente acotados, como en el caso de los espacios de tipo homogéneo, que introducimos en la siguiente sección.

1.2. Espacios de tipo homogéneo

Los resultados más importantes de toda la teoría son los clásicos de Macías y Segovia [50] y de Coifman y Weiss [32], y los más modernos de construcción de medidas duplicantes en espacios métricos que tienen dimensión de Assouad finita ([61], [13]).

Sea X un conjunto. Una **casi-métrica** en X es una función $d(x,y)$ definida en $X \times X$ con las siguientes propiedades:

(i) *(positividad)* $d \geqslant 0$;
(ii) *(confiabilidad)* $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
(iii) *(simetría)* $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$; y
(iv) *(desigualdad triangular)* existe una constante K tal que para todo x, y, z en X, $d(x,y) \leqslant K\,(d(x,z) + d(z,y))$.

El par (X,d) se denomina **espacio casi-métrico**. Si $K = 1$ entonces d es una **métrica** o **distancia** en el conjunto X, y (X,d) es un **espacio métrico**. Una métrica d es una *ultra-métrica* si satisface una desigualdad triangular fuerte dada por $d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\}$ para todo $x, y, z \in X$.

Una casi-métrica d determina una estructura uniforme (ver el Capítulo 6 de [43]) en $X \times X$, la cual induce de manera natural una topología τ en X en la que las bolas $B_d(x,r) = \{y \in X \colon d(x,y) < r\}$, $r > 0$, forman una base de entornos de cada $x \in X$. Es posible, sin embargo, que no todas las bolas sean abiertos de la topología. Macías y Segovia probaron en [50] que existe una casi-métrica equivalente con la propiedad que las correspondientes bolas son abiertos en τ. Recordemos que dos casi-métricas d y d' son equivalentes, que escribimos $d \sim d'$, si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que para todo x e y en X, $C_1 d(x,y) \leqslant d'(x,y) \leqslant C_2 d(x,y)$. Casi-métricas equivalentes determinan la misma uniformidad. La prueba de Macías y Segovia se basa en que cuando la uniformidad proviene de una casi-métrica entonces tiene una base numerable y por lo tanto es metrizable, al igual que la topología asociada, es decir, existe una métrica que la determina. Más aún, d es equivalente a una potencia ($\geqslant 1$) de una métrica. Observemos que cuando las bolas son abiertos de la topología constituyen una base de la misma. Ver [43], [50], [5].

Cuando no haya confusión respecto a la casi-métrica considerada escribiremos $B(x,r)$ para referirnos a las bolas.

Definición 1.1. Una medida (positiva) μ definida en un espacio casi-métrico (X,d) satisface la propiedad de **duplicación** (es duplicante) respecto a la casi-métrica d si las

d-bolas son medibles y existe una constante A tal que para todo $x \in X$ y todo $r > 0$,

$$0 < \mu(B(x, 2r)) \leqslant A\mu(B(x, r)) < \infty.$$

La constante A se denomina constante de duplicación.

Observemos que si μ es una medida duplicante en un espacio casi-métrico (X, d) entonces los abiertos son medibles.

Definición 1.2. Un **espacio de tipo homogéneo** (e.t.h.) es una terna (X, d, μ) formada por un conjunto X, una casi-métrica d definida en X y una medida μ duplicante respecto a d.

En sentido opuesto a la duplicación, una propiedad que expresa una cota inferior para la tasa de crecimiento de la medida de bolas concéntricas al aumentar su radio es la llamada **duplicación inversa** (reverse doubling): existen constantes $c > 1$ y $\gamma > 1$ tales que $\mu(cB) \geqslant \gamma\mu(B)$ para toda bola B (donde cB es la bola concéntrica con B y de radio c veces mayor). Es inmediato comprobar que un espacio casi-métrico dotado de una medida que satisface la propiedad de duplicación inversa es no acotado y no tiene átomos (llamamos **átomo** a todo conjunto puntual medible de medida positiva). Por otro lado, existen e.t.h. no acotados y no atómicos que no satisfacen la duplicación inversa. En el caso de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$, toda medida de Borel que verifica la propiedad de duplicación satisface también la duplicación inversa, pero la implicación opuesta es falsa. Más generalmente, una característica geométrica del espacio de no vacuidad de coronas nos permite obtener la duplicación inversa como consecuencia de la duplicación, de acuerdo al siguiente resultado (ver [5]).

Lema 1.1. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Si existe $b > 1$ tal que $B(x, b^{k+1}) \setminus B(x, b^k) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in X$, entonces la medida μ satisface la propiedad de duplicación inversa.*

Los espacios normales -definidos más adelante- no acotados y no atómicos verifican las condiciones del Lema 1.1 y como consecuencia satisfacen la propiedad de duplicación inversa.

A continuación enunciamos dos características generales de los espacios de tipo homogéneo, la primera de ellas probada en [50] y la segunda en [5].

Proposición 1.2.

1. *El conjunto de átomos de un e.t.h. es a lo sumo numerable y coincide con el conjunto de puntos aislados.*
2. *Un e.t.h. tiene medida infinita si y sólo si es no acotado.*

Un espacio casi-métrico (X, d) con una medida positiva μ definida en una σ-álgebra que contenga a las bolas es **normal** si existen constantes positivas a, b, c_1 y c_2 tales que

1. para todo $x \in X$, $B(x,r) = \{x\}$ si $0 < r \leqslant a\mu(\{x\})$ y $B(x,r) = X$ si $r \geqslant b\mu(X)$;
2. para todo $x \in X$ y todo r tal que $a\mu(\{x\}) < r < b\mu(X)$,

$$c_1 r \leqslant \mu\left(B(x,r)\right) \leqslant c_2 r. \tag{1}$$

Proposición 1.3. *Todo espacio normal es de tipo homogéneo.*

Demostración. Claramente la normalidad implica que la medida de las bolas es positiva y finita. Sea $x \in X$. Pueden darse los siguientes casos: si $a\mu(\{x\}) < r < 2r < b\mu(X)$ entonces $\mu\big(B(x,2r)\big) \leqslant 2c_2 r \leqslant 2\frac{c_2}{c_1}c_1 r \leqslant \left(2\frac{c_2}{c_1}\right)\mu\big(B(x,r)\big)$; si $0 < r < 2r \leqslant a\mu(\{x\})$ entonces $\mu(\{x\}) = \mu\big(B(x,2r)\big) = \mu\big(B(x,r)\big)$; si $\mu(X) \leqslant r < 2r$ entonces $\mu(X) = \mu\big(B(x,2r)\big) = \mu\big(B(x,r)\big)$; si $0 < r \leqslant a\mu(\{x\}) < b\mu(X) \leqslant 2r$ entonces $\mu\big(B(x,2r)\big) = \mu(X) \leqslant \frac{2r}{b} \leqslant \frac{2}{b}a\mu(\{x\}) = \frac{2a}{b}\mu\big(B(x,r)\big)$; si $0 < r \leqslant a\mu(\{x\}) < 2r < b\mu(X)$ entonces $\mu\big(B(x,2r)\big) \leqslant 2c_2 r \leqslant 2c_2 a\mu(\{x\}) = 2c_2 a\mu\big(B(x,r)\big)$; y si $a\mu(\{x\}) < r < b\mu(X) \leqslant 2r$ entonces $\mu\big(B(x,2r)\big) = \mu(X) \leqslant \frac{2r}{b} \leqslant \frac{2c_1 r}{c_1 b} \leqslant \frac{2}{c_1 b}\mu\big(B(x,r)\big)$. Por lo tanto, mediante la elección de una constante adecuada, tenemos que μ es una medida duplicante respecto a la casi métrica. □

La propiedad de normalidad luce bastante restrictiva, de hecho pocos de los ejemplos usuales la cumplen. En particular, los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue no son normales, excepto en el caso $n = 1$. Sin embargo, siempre es posible normalizar un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) mediante un cambio de casi-métrica. En [50], Macías y Segovia definen, a partir de d, la casi-métrica $\delta(x,y) = \inf\{\mu(B)\colon B \text{ es una } d\text{-bola que contiene a } x \text{ y a } y\}$ si $x \neq y$ y $\delta(x,y) = 0$ si $x = y$, y demuestran que el espacio (X, δ, μ) resulta normal y que d y δ inducen la misma topología en X.

Definimos a continuación los espacios de Ahlfors regulares, que aparecen como una generalización de los espacios normales.

DEFINICIÓN 1.3. Un espacio casi-métrico con medida (X, d, μ) es **Ahlfors α-regular** si las bolas son medibles y existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1 r^\alpha \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant c_2 r^\alpha, \tag{2}$$

para todo $x \in X$ y para todo $0 < r \leqslant diam(X)$.

Notemos que los espacios Ahlfors 1-regulares y los espacios normales no son exactamente los mismos, ya que la condición (2) es para radios positivos sin la restricción de ser mayores que $\mu(\{x\})$. Con esto, los espacios de Ahlfors son no atómicos. Los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue son el ejemplo clásico de espacios Ahlfors n-regulares.

El siguiente resultado muestra que en espacios normales no atómicos y no acotados también las coronas de tipo diádico de ancho adecuado miden como el radio de las bolas que las definen.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea (X, δ, μ) un espacio normal no atómico y no acotado. Sean $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tales que $c_1 r \leq \mu\big(B(x,r)\big) \leq c_2 r$ para todo $x \in X$ y todo $r > 0$. Denotamos a las coronas por $A(x,r,R) := B(x,R) \setminus B(x,r)$, para $x \in X$ y $0 < r < R$. Sea $M > \frac{c_2}{c_1}$. Entonces, existen constantes positivas y finitas α y β tales que*

$$\alpha r \leq \mu\Big(A(x,r,rM)\Big) \leq \beta r$$

para todo $x \in X$ y todo $r > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Como $M > \frac{c_2}{c_1} \geq 1$, de la aditividad de μ tenemos entonces que

$$\mu\big(B(x,rM) \setminus B(x,r)\big) = \mu\big(B(x,rM)\big) - \mu\big(B(x,r)\big)$$
$$\begin{cases} \leq & c_2 rM - c_1 r = (c_2 M - c_1) r \\ \geq & c_1 rM - c_2 r = (c_1 M - c_2) r. \end{cases}$$

Es decir, $\mu\big(B(x,rM) \setminus B(x,r)\big) \simeq r$, con constantes que dependen sólo de M y de la geometría del espacio. $\square$

LEMA 1.5. *Sea (X, δ, μ) un espacio normal no atómico y no acotado. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Entonces, las siguientes estimaciones se satisfacen uniformemente en $x \in X$ y $r > 0$:*

$$\int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{\delta^{1-\varepsilon}(x,y)} \simeq r^{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\int_{B^c(x,r)} \frac{d\mu(y)}{\delta^{1+\varepsilon}(x,y)} \simeq r^{-\varepsilon}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\varepsilon = 1$ entonces (3) se satisface por la normalidad del espacio. Sea $M > \dfrac{c_2}{c_1} \geq 1$. Notemos que para $x, y \in X$, con $x \neq y$, y $r > 0$ dados existe un único $j \in \mathbb{Z}$ tal que $rM^{-j-1} \leq \delta(x,y) < rM^{-j}$. Cuando $0 < \varepsilon < 1$ esto equivale a

$$r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)} < \delta^{\varepsilon-1}(x,y) \leq M^{1-\varepsilon}r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)}.$$

Por otra parte, si $\varepsilon > 1$ entonces $rM^{-j-1} \leq \delta(x,y) < rM^{-j}$ equivale a

$$M^{1-\varepsilon}r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)} \leq \delta^{\varepsilon-1}(x,y) < r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)}.$$

En otros términos, si $rM^{-j-1} \leq \delta(x,y) < rM^{-j}$ entonces $\delta^{\varepsilon-1}(x,y) \simeq r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)}$, para todo $\varepsilon > 0$. Luego, usando la estimación de la medida de coronas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \frac{d\mu(y)}{\delta^{1-\varepsilon}(x,y)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{rM^{-j-1} \leq \delta(x,y) < rM^{-j}} \frac{d\mu(y)}{\delta^{1-\varepsilon}(x,y)} \\
&\simeq \sum_{j=0}^{\infty} r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)} \int_{rM^{-j-1} \leq \delta(x,y) < rM^{-j}} d\mu(y) \\
&\simeq \sum_{j=0}^{\infty} r^{\varepsilon-1}M^{j(1-\varepsilon)} rM^{-j} \\
&= r^{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} M^{-j\varepsilon} \\
&\simeq r^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Operando de manera análoga, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{B^c(x,r)} \frac{d\mu(y)}{\delta^{1+\varepsilon}(x,y)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{rM^{j} \leq \delta(x,y) < rM^{j+1}} \frac{d\mu(y)}{\delta^{1+\varepsilon}(x,y)} \\
&\simeq \sum_{j=0}^{\infty} r^{-1-\varepsilon}(M^{j})^{-1-\varepsilon} rM^{j}
\end{aligned}$$

$$= r^{-\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} M^{-j\varepsilon}$$
$$\simeq r^{-\varepsilon}.$$

$\square$

1.3. Cubos de Christ

La existencia de familias diádicas definidas en espacios de tipo homogéneo completos fue demostrada por Michael Christ en [29]. Más tarde, en [9], se añadieron modificaciones a la construcción de Christ para obtener particiones exactas. Estas familias de cubos diádicos cuentan con propiedades útiles y permiten obtener un análisis multirresolución y bases de los espacios L^p que resultarán adecuados para nuestros desarrollos teóricos.

Lema 1.6 (Christ). *Existe un orden parcial $\preccurlyeq$ (es descendiente de) en el árbol $\mathscr{A} = \{(j,k) : j \in \mathbb{Z}, k \in K(j)\}$, donde $K(j)$ es $\mathbb{N}$ o una sección inicial de $\mathbb{N}$ y los índices están asociados a los conjuntos ρ^j-dispersos maximales $\mathscr{N}_j = \{x_k^j : k \in K(j)\}$ en X, con $0 < \rho < 1$, tal que*

(a) $(j,k) \preccurlyeq (i,l)$ *implica* $j \geqslant i$;

(b) $\forall (j,k) \in \mathscr{A}, \forall i \leqslant j$, *existe un único* $l \in K(i) : (j,k) \preccurlyeq (i,l)$;

(c) *si* $(j,k) \preccurlyeq (j-1,l)$ *entonces* $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \rho^{j-1}$;

(d) *si* $d(x_k^j, x_l^{j-1}) < \rho^{j-1}/2$ *entonces* $(j,k) \preccurlyeq (j-1,l)$.

Teorema 1.7 (Christ).

Existen una familia de abiertos $\mathscr{D} = \{Q_k^j \colon j \in \mathbb{Z}, k \in K(j)\}$, constantes $0 < \rho < 1$ y $0 < a \leq c < \infty$, y puntos $x_k^j \in Q_k^j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y todo $k \in K(j)$, tales que

(1) $\mu\left(X \setminus \bigcup_{k \in K(j)} Q_k^j\right) = 0$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$;

(2) *si* $i \leqslant j$ *entonces para* $l \in K(i)$ *y* $k \in K(j)$, *o bien* $Q_l^i \supset Q_k^j$ *o* $Q_l^i \cap Q_k^j = \emptyset$;

(3) *para todo* $j \in \mathbb{Z}$, $k \in K(j)$ *e* $i < j$ *existe un único* $l \in K(i)$ *tal que* $Q_k^j \subset Q_l^i$;

(4) *para todo* $j \in \mathbb{Z}$ *y* $k \in K(j)$, $B(x_k^j, a\rho^j) \subset Q_k^j \subset B(x_k^j, c\rho^j)$.

Observación 1.1. Los cubos diádicos del teorema están definidos, a partir del lema precedente, por $Q_k^j := \bigcup_{(i,l) \preccurlyeq (j,k)} B(x_l^i, a\rho^i)$, para cada $j \in \mathbb{Z}$ y cada $k \in K(j)$ y una constante positiva a determinada.

La versión exacta de la familia diádica de Christ $\mathscr{D}$ se obtiene modificando la construcción realizada por Christ, con lo cual la propiedad *(1)* en el Teorema 1.7 se reemplaza por $X \setminus \bigcup_{k\in K(j)} Q_k^j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Se verifican las siguientes propiedades.

Proposición 1.8.

(A) *Sea* $\mathscr{O}(Q_k^j) := \{Q_l^{j+1} \colon Q_l^{j+1} \subset Q_k^j\}$ *el conjunto de hijos de* Q_k^j *(descendientes de* Q_k^j *de nivel* $j+1$*) . Entonces* $1 \leqslant \sharp(\mathscr{O}(Q_k^j)) \leqslant N$ *para todos* $j \in \mathbb{Z}, k \in K(j)$*, donde* N *es una constante que depende sólo de la geometría del espacio, es decir, depende de* A*,* c *y* ρ *pero no de* j *y* k*.*

(B) (X,d) *es acotado si y sólo si existe* $j_0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $X = Q_1^{j_0}$*.*

(C) $x_0 \in X$ *es un átomo si y sólo si existe* $(j,k) \in \mathscr{A}$ *tal que* $\{x_0\} = Q_k^j$*.*

(D) *Los cubos de Christ son una familia uniforme de sub-espacios de tipo homogéneo de* X*, es decir, existe una constante de duplicación común para todo* $(j,k) \in \mathscr{A}$*.*

(E) *Para cada* $Q \in \mathscr{D}$*, se define el* cuadrante *al que pertenece* Q *como* $\mathscr{C}(Q) := \bigcup_{Q' \in \mathscr{D}, Q' \supset Q} Q'$*. Los cuadrantes satisfacen las siguientes propiedades:*

- *los cuadrantes son sub-espacios de tipo homogéneo de* X*, uniformemente con la misma constante que los cubos;*
- *si dos cuadrantes se cortan son iguales;*
- *existe una constante* $M = M(A,\rho,c)$ *tal que* $\sharp\{\mathscr{C}(Q) \colon Q \in \mathscr{D}\} \leqslant M$*;*
- X *es no acotado si y sólo si todos los cuadrantes tienen medida infinita.*

(F) *Todo abierto acotado de* (X,d) *es unión disjunta de una subfamilia de cubos de* $\mathscr{D}$ *y un conjunto de medida cero, es decir, existe un boreliano* Z *de medida nula tal que para todo conjunto* E *abierto y acotado existe una familia de cubos disjuntos* $\mathscr{F}_E \subset \mathscr{D}$ *tal que* $E \setminus Z = \bigcup_{Q \in \mathscr{F}_E} Q$*.*

Enunciamos y probamos a continuación otra propiedad que nos será de utilidad.

Lema 1.9. *Sea* $\mathscr{D}$ *una familia de cubos diádicos definida en un e.t.h.* (X,d,μ)*. Entonces existe una constante finita* $\tau > 1$ *tal que si* $Q_1, Q_2 \in \mathscr{O}(Q)$ *se tiene que*

$$\frac{1}{\tau}\mu(Q_2) \leq \mu(Q_1) \leq \tau\mu(Q_2).$$

Es decir, la medida de cubos hermanos es comparable.

Demostración. Sean $Q = Q_k^j$, $Q_1 = Q_l^{j+1}$ y $Q_2 = Q_m^{j+1}$ tales que $Q_1, Q_2 \in \mathscr{O}(Q)$. Si $y \in Q$ entonces

$$\begin{aligned} d(y, x_l^{j+1}) &\leq K\big[d(y, x_k^j) + d(x_k^j, x_l^{j+1})\big] \\ &< K(c\rho^j + c\rho^j) \\ &= \left(\frac{2Kc}{\rho}\right)\rho^{j+1}. \end{aligned}$$

Es decir, $Q_k^j \subset B(x_l^{j+1}, u\rho^{j+1})$, con $u = 2Kc/\rho$. Sea l el menor número natural tal que $u \leq 2^l a$. Luego,

$$\frac{\mu(Q_2)}{\mu(Q_1)} \leq \frac{\mu(Q_k^j)}{\mu(Q_l^{j+1})} \leq \frac{\mu(B(x_l^{j+1}, u\rho^{j+1}))}{\mu(B(x_l^{j+1}, a\rho^{j+1}))} \leq \frac{\mu(B(x_l^{j+1}, 2^l a\rho^{j+1}))}{\mu(B(x_l^{j+1}, a\rho^{j+1}))} \leq A^l =: \tau.$$

□

Un sistema diádico en (X, d, μ) induce una métrica (que es además una ultramétrica) en cada uno de sus cuadrantes. En efecto,

$$\delta(x, y) := \text{ínf}\,\{\mu(Q) \colon x, y \in Q, Q \in \mathscr{D}\}$$

para $x \neq y$ y $\delta(x, x) := 0$, satisface la propiedad triangular fuerte

$$\delta(x, z) \leq \text{máx}\,\{\delta(x, y), \delta(y, z)\}$$

y le dá a cada cuadrante una estructura de espacio normal.

1.4. Análisis multi-resolución y bases de Haar inducidos por una familia diádica

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y $\mathscr{D} = \{Q_k^j \colon j \in \mathbb{Z}, k \in K(j)\}$ una familia de cubos diádicos. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, denotemos por V_j al subespacio cerrado de $L^2(X, \mu)$ dado por

$$V_j = \left\{f \in L^2 \colon f \text{ es constante en cada cubo } Q \in \mathscr{D}_j\right\}.$$

Como se demuestra en [9], la sucesión $\{V_j \colon j \in \mathbb{Z}\}$ posee las siguientes propiedades, análogas a las de las estructuras multi-resolución en espacios euclídeos,

(*i*) $V_j \subset V_{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$;

(*ii*) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2$;

(*iii*) (a) si $\mu(X) = \infty$ entonces $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,

(b) si $\mu(X) < \infty$ entonces $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{\text{funciones constantes en } X\}$;

(*iv*) $\left\{\frac{\chi_Q}{\sqrt{\mu(Q)}} : Q \in \mathscr{D}_j\right\}$ es base ortonormal de V_j, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

Esta estructura permite construir sistemas de Haar a partir de los espacios $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$. Daremos a continuación un bosquejo de una construcción posible.

Sea $\widetilde{\mathscr{D}} = \{Q \in \mathscr{D} : \sharp(\mathscr{O}(Q)) > 1\}$, esto es, el conjunto de cubos diádicos con más de un hijo. Para cada $Q \in \widetilde{\mathscr{D}}$ definimos $\widetilde{\mathscr{O}}(Q) = \mathscr{O}(Q) \setminus \{Q_1\}$, donde Q_1 es un hijo de Q elegido arbitrariamente. El espacio vectorial $\mathscr{V}(Q)$ de las funciones que se anulan fuera de $Q \in \widetilde{\mathscr{D}}$ y son constantes en cada $Q' \in \mathscr{O}(Q)$ tiene por base algebraica a $\{\chi_Q\} \bigcup \{\chi_{Q'} : Q' \in \widetilde{\mathscr{O}}(Q)\}$. Mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, obtenemos una base ortonormal de $\mathscr{V}(Q)$ dada por

$$\mathscr{B}(Q) = \left\{\frac{\chi_Q}{\sqrt{\mu(Q)}}\right\} \bigcup \left\{h_l : l = 1, \dots, \sharp(\mathscr{O}(Q)) - 1\right\}.$$

Las funciones $\mathscr{H}(Q) := \{h_l : l = 1, \dots, \sharp(\mathscr{O}(Q)) - 1\}$ se denominan funciones de Haar asociadas a $Q \in \widetilde{\mathscr{D}}$. Cuando $\mathscr{O}(Q) = \{Q\}$ tenemos que $\mathscr{H}(Q) = \emptyset$. De esta manera, cada $h \in \mathscr{H}(Q)$ satisface las siguientes propiedades

(*i*) $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subset Q$;

(*ii*) h es constante en cada $Q' \in \mathscr{O}(Q)$;

(*iii*) $\int h \, d\mu = 0$.

A continuación, para cada $j \in \mathbb{Z}$, definimos W_j como la clausura en L^2 del span lineal del conjunto $\mathscr{H}_j := \bigcup_{Q\in\mathscr{D}_j} \mathscr{H}(Q)$. Claramente, W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1}, es decir, $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. En consecuencia, se tiene que

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = L^2 \quad \text{si} \quad \mu(X) = \infty,$$

y

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \left\{f \in L^2 : \int f d\mu = 0\right\} \quad \text{si} \quad \mu(X) < \infty.$$

La familia

$$\mathscr{H} := \bigcup_{Q\in\mathscr{D}} \mathscr{H}(Q)$$

se llama el **sistema de Haar** inducido en (X, d, μ) por la familia diádica $\mathscr{D}$. A los elementos de $\mathscr{H}$ se los suele denominar *ondículas* o *wavelets*. Por construcción, $\mathscr{H}$ es base ortonormal de L^2 y entonces, cuando $\mu(X)=\infty$, para toda $f\in L^2$ se tiene que

$$f=\sum_{h\in\mathscr{H}}\langle f,h\rangle\, h$$

en el sentido de L^2, y luego

$$\|f\|_2^2=\sum_{h\in\mathscr{H}}|\langle f,h\rangle|^2.$$

Por otra parte, cuando $\mu(X)<\infty$ se tiene que

$$f=\frac{1}{\mu(X)}\int_X f\,d\mu+\sum_{h\in\mathscr{H}}\langle f,h\rangle\, h$$

y

$$\|f\|_2^2=\frac{1}{\mu(X)}\left(\int_X f\,d\mu\right)^2+\sum_{h\in\mathscr{H}}|\langle f,h\rangle|^2.$$

Una propiedad notable de las wavelets de Haar, que las diferencia del análisis de Fourier trigonométrico elemental, es que también caracterizan a los espacios funcionales $L^p(X,\mu)$ cuando $1<p<\infty$. Para precisar esto daremos la definición de base incondicional en espacios de Banach. Se dice que una sucesión de vectores $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,\dots\}$ de un espacio de Banach B separable es una *base de Schauder* de B si para todo $f\in B$ existe una única sucesión de escalares $\{c_1,c_2,\dots\}$ tal que $f=\sum_{n=1}^{\infty}c_nb_n$ en el sentido de la norma de B. Una base de Schauder es *incondicional* si las series anteriores convergen al mismo vector para cualquier permutación de los sumandos. El siguiente resultado se halla en [60] en el caso euclídeo y en [9] en el caso general.

Teorema 1.10. *Para cada $1<p<\infty$ se tiene que*

(1) $\mathscr{H}$ es una base incondicional de $L^p(X,\mu)$;

(2) existen constantes C_1 y C_2 de manera que

$$C_1\|f\|_p\le\left\|\left(\sum_{h\in\mathscr{H}}|\langle f,h\rangle|^2|h|^2\right)^{1/2}\right\|_p\le C_2\|f\|_p$$

para toda función medible f.

1.5. Algunos ejemplos

Un primer ejemplo de espacio de tipo homogéneo son los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue, que en particular son estrictamente homogéneos y Ahlfors n-regulares. Diversos ejemplos se obtienen a partir de estos cambiando la distancia y/o la medida, o también considerando subconjuntos. Mencionamos a continuación algunos de ellos. Más ejemplos clásicos pueden consultarse en [**33**].

Ejemplo 1 (Distancias parabólicas). Veamos el caso de $\mathbb{R}^2$. Para $\lambda \geq 1$ y $s > 0$ se define la aplicación lineal T_s de matriz $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^\lambda \end{pmatrix}$. Fijando $x = (x_1, x_2) \neq 0$, la función de s dada por $T_s x = (s x_1, s^\lambda x_2)$ es lineal y biyectiva, con inversa $T_{\frac{1}{s}} x$. Sea $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ la norma p usual y la aplicación

$$\rho(x) = \rho_{p,\lambda}(x) = \text{ínf} \left\{ s > 0 \colon \; \|T_s x\|_p < 1 \right\}.$$

Se define la *distancia parabólica* de parámetros p y λ por

$$d_{p,\lambda}(x,y) = \rho_{p,\lambda}(x-y).$$

Así, $d_{p,\lambda}$ es una métrica invariante por traslaciones en $\mathbb{R}^2$, y determina la topología usual. Notemos que $\rho_{p,1}(x) = \|x\|_p$, y $d_{2,1}$ es la distancia euclídea. Por otra parte, si $\lambda > 1$ entonces $d_{p,\lambda}$ no es equivalente en ningún caso a la métrica euclídea, aunque sí equivalen $d_{p_1,\lambda}$ y $d_{p_2,\lambda}$ para $\lambda \geq 1$ fijo. Toda bola $B_{p,\lambda}(x,r)$ es abierta. Con la medida de Lebesgue μ, el espacio $\left(\mathbb{R}^2, d_{p,\lambda}, \mu\right)$ es un espacio de tipo homogéneo de Ahlfors con regularidad $1+\lambda$.

Ejemplo 2 (Pesos de Muckenhoupt). En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ se define la clase A_2 de los pesos $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ tales que para alguna constante $C > 0$ satisfacen la desigualdad

$$\left(\int_B w\right)\left(\int_B w^{-1}\right) \leq C\,|B|^2$$

para toda bola B. En general, para $1 < p < \infty$, se define la clase de pesos $A_p(\mathbb{R}^n)$ de todos los pesos w que satisfacen la desigualdad

$$\left(\int_B w\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C\,|B|^p$$

para toda bola B, donde C es una constante positiva uniforme. La clase $A_p(\mathbb{R}^n)$ contiene, por ejemplo, a los pesos de la forma $w(x) = |x|^\alpha$ para cualquier α tal que $-n < \alpha < n(p-1)$. Para $w \in A_\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{p>1} A_p(\mathbb{R}^n)$ la medida wdx verifica la propiedad de duplicación 1.1 respecto a la métrica euclídea (u otra equivalente), con lo cual el espacio $\left(\mathbb{R}^n, |x-y|, wdx\right)$ es de tipo homogéneo.

Ejemplo 3. Sea $w(x) = x^{-1/2}$ el peso de $A_2(\mathbb{R}^+)$. Notemos que, si bien se satisface la propiedad de duplicación, el espacio $\left(\mathbb{R}^+, |x-y|, x^{-1/2}dx\right)$ se comporta de manera heterogénea en la relación entre métrica y medida, con lo cual no cuenta con ninguna regularidad Ahlfors. En efecto, para $r > 0$ y $x \geq r$ tenemos que

$$w(B(x,r)) = \int_{x-r}^{x+r} y^{-1/2}dy = 2y^{1/2}\Big|_{x-r}^{x+r} = 2\left(\sqrt{x+r} - \sqrt{x-r}\right)$$

con lo cual $w(B(x,r)) \to +\infty$ cuando $x \to \infty$ y por otro lado $w(B(x,r)) \to w(B(r,r)) = 2\sqrt{2}r^{1/2}$ cuando $x \to r^+$.

Otros ejemplos clásicos de espacios de tipo homogéneo son los fractales autosimilares, definidos como subconjuntos de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y dotados de la medida de Hausdorff. Algunos casos de renombre son los conjuntos de Cantor en $\mathbb{R}$, el copo de nieve de Koch y la alfombra y el triángulo de Sierpinski en el plano, o el tetraedro de Sierpinski en tres dimensiones. Todos ellos tienen medida finita, pero pueden extenderse a un cuadrante (o más de uno) conservando sus propiedades, de manera que su medida se torna infinita. También existen generalizaciones de estos casos a más dimensiones, y multiplicidad de otros ejemplos. Veamos un caso con más detalle.

Ejemplo 4 (El triángulo de Sierpinski). Existen variados métodos para obtener el triángulo de Sierpinski, mencionamos aquí una construcción iterativa (inductiva) elemental. A partir de un triángulo T_0 (relleno) en el plano, el primer paso consiste en remover el triángulo abierto (sin su frontera) determinado por los puntos medios de los lados de T_0. La figura resultante, que denotamos T_1, es la unión de tres triángulos $T_{1,1}, T_{1,2}$ y $T_{1,3}$ semejantes a T_0 y con un cuarto de su volumen. Realizando el mismo procedimiento en cada uno de los triángulos $T_{1,1}, T_{1,2}$ y $T_{1,3}$ obtenemos T_2, formada por la unión de nueve triángulos semejantes a T_0, con una dieciseisava parte de su volumen. Inductivamente se obtiene la sucesión $\{T_n\}$. Se define el *triángulo de Sierpinski* T basado en T_0 por

$T = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$. La autosimilaridad se desprende de la observación de que cada conjunto $T \cap T_{n,k}$, para $1 \leq k \leq 3^n$, es una copia reducida de T. Es decir, $T \cap T_{n,k}$ es un triángulo de Sierpinski basado en $T_{n,k}$. La dimensión de Hausdorff de T es $\log 3/\log 2$. La terna (T, d, m), con d la métrica usual de $\mathbb{R}^2$ relativa a T y m la medida de Hausdorff, constituye un espacio de tipo homogéneo normal y no atómico.

Ejemplo 5 (El cuadrante de Sierpinski). Definimos el cuadrante de Sierpinski como una extensión de medida infinita de un triángulo de Sierpinski en el plano. Realizamos la extensión a un cuadrante de forma iterativa, partiendo de un triángulo de Sierpinski T de vértices A, B y C. Luego, se define el triángulo de Sierpinski T^1 como la unión de T con dos traslaciones de T, una en la dirección del segmento AB y otra en la dirección de AC de manera que las traslaciones del vértice A coincidan con los vértices B y C de T respectivamente. Repitiendo el procedimiento a partir de T^1 obtenemos T^2, e iterando se obtiene la cadena $\{T^n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Definimos el *cuadrante de Sierpinski* por $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^n$.

Observemos que los fractales de autosimilaridad exacta (como los mencionados) permiten definir naturalmente una estructura de árbol regular junto con una distancia diádica asociadas. Otros fractales con autosimilaridad no exacta y/o con estructura más compleja (menos regular) constituyen asimismo espacios de tipo homogéneo y es posible (con la construcción de Christ, por ejemplo) definir estructuras diádicas pero asociadas a árboles no regulares. Son ejemplos de esto último los conjuntos de Mandelbrot y de Julia, así como los caminos Brownianos y también los contornos de los continentes o el brócoli romanesco.

También se inscriben dentro de la teoría de los espacios de tipo homogéneo las variedades Riemannianas y diversos espacios discretos, como $\mathbb{Z}$ con la medida de contar. Así también, configuran nuevos espacios de tipo homogéneo ciertas "combinaciones" de espacios de tipo homogéneo de distinto tipo y dimensión. Es decir, la teoría general de espacios de tipo homogéneo admite la posibilidad de que estos tengan propiedades bastante dispares en distintos sectores, siempre que se conserve el control ejercido por la propiedad de duplicación.

Capítulo 2

Procesos estables y Difusión Fraccionaria

Este capítulo reúne, a modo introductorio, algunos de los varios enfoques a la relación entre difusiones fraccionarias, procesos de Lévy y teoremas centrales. En particular, introducimos brevemente la estabilidad, como un sustituto natural de la finitud de la varianza, destacando en su papel clave en la conexión entre los conceptos anteriores. Asimismo, describimos someramente las difusiones fraccionarias diádicas y la forma del núcleo de Weierstrass generalizado que es el objeto central de nuestro análisis.

2.1. Observaciones sobre la prueba clásica del Teorema del Límite Central. Alternativa

Los resultados principales de esta tesis se basan en la sustitución del análisis clásico de Fourier por el análisis en las bases de wavelets de Haar. A continuación repasamos cómo el método de Fourier, o de las funciones características, determina una alternativa en el caso de convolución que nosotros obtendremos después en el contexto diádico no convolutivo por medio del análisis de Haar.

Sea $\{X_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con esperanza nula y varianza finita. Supongamos, por simplicidad, que la distribución común está dada por una densidad $g(x)$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$, denotamos S_n a las sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y P_β^n a los promedios $P_\beta^n = \frac{1}{n^\beta} S_n$. La independencia de las variables aleatorias garantiza que la distribución de S_n está determinada por la densidad $g^n = g * \cdots * g$ que se obtiene al convolucionar g consigo misma n-veces. Por consiguiente, la distribución de P_β^n está dada por

$$P\left\{P_\beta^n \geq \lambda\right\} = P\left\{S_n \geq n^\beta \lambda\right\} = \int_{n^\beta \lambda}^{\infty} g^n(x)dx = \int_{\lambda}^{\infty} n^\beta (g^n)(n^\beta x)dx,$$

es decir, por la densidad $\rho_n(x) = n^\beta (g^n)(n^\beta x)$. Con el objeto de estudiar el comportamiento de esta sucesión de densidades para $n \to \infty$ calculamos, como es usual (ver, por ejemplo, [52]), la función característica de P_β^n, que es la transformada de Fourier de ρ_n,

$$\widehat{\rho_n}(\xi) = \widehat{g^n}\left(\frac{\xi}{n^\beta}\right) = \left[\widehat{g}\left(\frac{\xi}{n^\beta}\right)\right]^n.$$

Como $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} xg(x)\,dx = 0$ y $\int_{\mathbb{R}} x^2 g(x)\,dx = 1$, por las propiedades de la transformada de Fourier y usando el polinomio de Taylor para $\widehat{g}$, tenemos, con $o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right) n^{2\beta} \to 0$ para $n \to \infty$, que

$$\widehat{\rho_n}(\xi) = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{n^\beta}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right]^n.$$

Tomando logaritmos,

$$L_n(\xi) = \log \widehat{\rho_n}(\xi) = n \log\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{n^\beta}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right) = n\left(-\frac{\xi^2}{2n^{2\beta}} + \tilde{o}\left(\frac{1}{n^{2\beta}}\right)\right).$$

Sólo una alternativa triple, en relación con los valores de β, es posible. En efecto,

(I) Si $\beta = \frac{1}{2}$, $L_n(\xi) \to -\xi^2$ cuando $n \to \infty$;

(II) Si $\beta > \frac{1}{2}$, $L_n(\xi) \to 0$ cuando $n \to \infty$;

(III) Si $\beta < \frac{1}{2}$, $L_n(\xi) \to -\infty$ cuando $n \to \infty$.

Que se traducen en

(I') $\beta = \frac{1}{2}$, $\rho_n(\xi) \to e^{-\xi^2}$ cuando $n \to \infty$;

(II') $\beta > \frac{1}{2}$, $\rho_n(\xi) \to \delta_0$ cuando $n \to \infty$;

(III') $\beta < \frac{1}{2}$, $\rho_n(\xi) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Esto produce convergencia al límite central, concentración y aproximación a la identidad, o disipación que no conserva la probabilidad.

2.2. Estabilidad de Variables Aleatorias y Teorema del Límite Central Generalizado

Una variable aleatoria X definida en un espacio de probabilidad (Ω, P) es **estable** si para cualquier elección de números reales A y B existen constantes $C > 0$ y $D \in \mathbb{R}$ tales que $AX_1 + BX_2$ se distribuye como $CX + D$ para toda elección de variables aleatorias X_1 y X_2 independientes y equidistribuidas con X. Esta definición determina clases muy especiales de variables aleatorias y procesos estocásticos. Supongamos que X se distribuye con una densidad $g(x)$, de manera que g también será la densidad de X_1 y X_2. Por la independencia de X_1 y X_2 tendremos que la densidad de $AX_1 + BX_2$ será $g_A * g_B$, donde

$g_A(x) = \frac{1}{A}g(\frac{x}{A})$ y $g_B(x) = \frac{1}{B}g(\frac{x}{B})$. Para $CX + D$ la densidad será $\frac{1}{C}g(\frac{x-D}{C})$. La igualdad entre las distribuciones de $AX_1 + BX_2$ y $CX + D$ requerirá la igualdad de sus funciones características, es decir,

$$\phi_g(A\xi)\phi_g(B\xi) = e^{i\xi D}\phi_g(C\xi)$$

para $\xi \in \mathbb{R}$.

Una familia distinguida de densidades que satisfacen esta identidad está dada por $\mathscr{L} = \{g_\alpha \colon 0 < \alpha \leq 2\}$, con

$$\phi_{g_\alpha}(\xi) = e^{-|\xi|^\alpha}.$$

En este caso, tomando $D = 0$ y $C = (A^\alpha + B^\alpha)^{1/\alpha}$ tendremos que $AX_1 + BX_2 \sim CX + D$. Ésta es la relación pitagórica cuando $\alpha = 2$, que corresponde a la densidad Gaussiana. Cuando $\alpha = 1$, la densidad es la de Cauchy–Poisson $g(x) = \dfrac{c}{1 + |x|^2}$.

Por otra parte, para $0 < \alpha \leq 1$ la característica $e^{-|\xi|^\alpha}$ es continua pero no diferenciable en cero. Por consiguiente, ni siquiera el primer momento de g_α es finito. Cuando $1 < \alpha < 2$ la función $e^{-|\xi|^\alpha}$ es suave pero no de clase $\mathscr{C}^2$ y por lo tanto tampoco en este caso tendrá g_α varianza finita. El único caso en $\mathscr{L}$ en el que la varianza es finita es el caso $\alpha = 2$, es decir, el caso Gaussiano. En los otros casos $(0 < \alpha < 2)$ el concepto de estabilidad como comportamiento en el infinito que introduciremos después, será un sustituto cuantitativo de la varianza. El más simple es el de $\alpha = 1$, que registra en su comportamiento en el infinito el parámetro α. En efecto, para $n = 1$, $\alpha = 1$ y $g_1(x) = \frac{c}{1+x^2}$ se tiene que

$$|x|^{n+\alpha}\, g_1(x) \longrightarrow c$$

cuando $|x| \to \infty$, donde $c > 0$.

En la teoría de probabilidad clásica, la definición precedente de distribución estable surge a partir del estudio de teoremas del límite central generalizados. Precisamente, consideremos el problema general del límite central en dimensión 1. Sea $\{X_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la suma parcial de las primeras n variables aleatorias y

$$Y_n = \frac{S_n - b_n}{\sigma_n} \tag{5}$$

las sumas parciales reescaladas, donde $\{b_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión arbitraria de números reales y $\{\sigma_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión arbitraria de reales positivos. El problema consiste en identificar los casos en los cuales la sucesión $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge en distribución a alguna variable aleatoria X particular, es decir

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq x) = P(X \leq x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como caso especial, si las variables X_k tienen media m y varianza σ^2 y definimos $b_n = nm$ y $\sigma_n = \sqrt{n}\sigma$, entonces $\{Y_n\}$ converge a la distribución normal estándar $N(0,1)$, por el teorema del límite central clásico de De Moivre–Laplace.

La estabilidad es una propiedad de las distribuciones de probabilidad. Otra formulación, equivalente a la anterior, expresa que una distribución μ es estable si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existen constantes $c_n > 0$ y $d_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \tag{6}$$

para cualquier sucesión de variables aleatorias $X, X_1, X_2, \ldots$ mutuamente independientes y con distribución común μ, y μ no concentra la masa en un punto. La distribución μ es *estrictamente estable* si $d_n = 0$ para todo n. Decimos entonces que una variable aleatoria X es *estable* si su distribución lo es.

El siguiente teorema revela la relación clave entre los conceptos anteriores (ver [**48**], [**41**]).

Teorema 2.1. *Una variable aleatoria X se alcanza como límite de sumas reescaladas Y_n de la forma (5) si y sólo si su distribución de probabilidad es estable.*

De hecho, se prueba (ver [**38**]) que las constantes c_n en (6) son de la forma $n^{1/\alpha}$ con $0 < \alpha \leq 2$. El parámetro α juega un rol fundamental en la teoría y se denomina *índice de estabilidad* o *exponente característico* de la distribución μ. Con esto puede verse que toda distribución μ estable de índice α (o α-estable) se alcanza como distribución límite de sumas reescaladas Y_n de la forma (5) con $\sigma_n = \sigma n^{1/\alpha}$ para alguna constante positiva σ; en particular, esto ocurre cuando la distribución común de las variables aleatorias X_n que definen a Y_n es μ, y en este caso $\sigma = 1$.

Notemos que la ecuación (6) puede expresarse de manera equivalente en términos de la función característica ϕ_μ de la distribución μ por

$$\phi_\mu(\xi)^n = e^{i\xi d_n}\phi_\mu(c_n\xi).$$

Más aún, el siguiente teorema debido a Khintchine y Lévy en [44] brinda una caracterización precisa de las distribuciones estables en términos de su función característica.

TEOREMA 2.2. *Una variable aleatoria X valuada en $\mathbb{R}$ es estable si y sólo si existen constantes $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ y $m \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\phi_X(\xi) = \exp\left\{im\xi - \sigma^\alpha |\xi|^\alpha \left[1 + i\beta\frac{\xi}{|\xi|}\omega(\xi,\alpha)\right]\right\}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$, donde

$$\omega(\xi,\alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}\alpha) & si \quad \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\log(|\xi|) & si \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

De esta forma, las únicas distribuciones estables con varianza finita son las de índice de estabilidad $\alpha = 2$, es decir, las normales. De hecho, las distribuciones α-estables con $0 < \alpha < 2$ tienen momentos de orden γ finitos para $0 < \gamma < \alpha$ e infinitos para $\gamma \geq \alpha$.

Toda distribución estable μ tiene función de densidad g_μ que puede expresarse en general como una serie. En algunos casos notables existen formas cerradas para las densidades:

- La distribución Normal: $\alpha = 2$, $\mu \sim N(m, 2\sigma^2)$;
- La distribución de Cauchy: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $g_\mu(x) = \dfrac{\sigma}{\pi[(x-m)^2] + \sigma^2}$;
- La distribución de Lévy: $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$,

$$g_\mu(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-m)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\sigma}{2(x-m)}\right] \quad \text{para } x > m.$$

Notemos que en el caso que una variable aleatoria estable X sea simétrica entonces su función característica tendrá la forma $\phi_X(\xi) = e^{-\sigma^\alpha|\xi|^\alpha}$, para $0 < \alpha \leq 2$, y se dice que X es simétrica α-estable y se denota $X \sim S\alpha S$. La fórmula de las densidades $S\alpha S$ se puede expresar en términos de las funciones de Bessel y las presentamos con algún detalle en el Capítulo 9.

Una característica esencial de las distribuciones estables es el orden de decaimiento de las colas. El caso $\alpha = 2$ es el único en el cual las distribuciones de las colas tienen decaimiento de orden exponencial. En cambio, si la variable aleatoria X es estable con índice $0 < \alpha < 2$ el decaimiento de las colas es de orden polinomial, dado por

$$\lim_{y\to+\infty} y^\alpha P(X > y) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha,$$

$$\lim_{y\to-\infty} y^\alpha P(X < y) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha,$$

donde C_α es una constante mayor a 1. Cuando $X \sim S\alpha S$ con $0 < \alpha < 2$ se conoce además el comportamiento asintótico de las densidades en el infinito, de orden también polinomial, de acuerdo al siguiente resultado de Blumenthal y Getoor en [22].

TEOREMA 2.3. *Sea $X \sim S\alpha S$ con parámetros $0 < \alpha < 2$ y $\sigma > 0$, es decir, con función característica de la forma $\phi_X(\xi) = e^{-\sigma^\alpha|\xi|^\alpha}$. Si g es su función de densidad entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{1+\alpha} g(x) = \sigma^\alpha c$$

donde c es una constante positiva que depende sólo de α.

2.3. Procesos de Lévy estables y simétricos

Un proceso estocástico es una función de $t \in [0,\infty)$ valuada en las variables aleatorias en un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Se dice que un proceso estocástico $X(t)$ es de incrementos independientes si las variables aleatorias $\{X(t_{2k}) - X(t_{2k-1})\colon k = 1,\ldots,K\}$ son independientes para cualquier elección de instantes $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_{2K}$. Se dice que el proceso es estacionario si la distribución de $X(t+h) - X(t)$ es la misma que la de $X(h) - X(0) = X(h)$ (suponiendo que $X(0) = 0$) para todo $t > 0$.

Si $0 < \alpha \le 2$, un proceso de incrementos independientes y estacionario tal que la función característica de las variables aleatorias $X(t+h) - X(t)$ está dada por $e^{-ch|\xi|^\alpha}$ se llama un **proceso de Lévy simétrico y estable de índice $\boldsymbol{\alpha}$**. Más precisamente,

$$\mathcal{E}\left(e^{i(X(t+h)-X(t))\xi}\right) = e^{-ch|\xi|^\alpha}.$$

La existencia de tales procesos aleatorios puede hallarse en varios libros de probabilidad y procesos estocásticos, citamos por ejemplo [62] o [20].

El caso $\alpha = 2$ corresponde al proceso de Wiener, ya que $e^{-ch|\xi|^2}$ es la transformada de Fourier de la Gaussiana con varianza $\sqrt{2ch}$. Para el caso $\alpha = 1$ la distribución básica del proceso en dimensión 1 es la de Cauchy, dada por la densidad $g(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$.

La evolución del proceso que, escrito de manera sencilla a través de la transformada de Fourier, se define por

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-ct|\xi|^\alpha}\widehat{f}(\xi)$$

satisface

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -c\,|\xi|^\alpha\,\widehat{u}(\xi,t) \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

Escrito de otro modo, el problema anterior en el dominio antitransformado es

$$(PDF)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -c(-\Delta)^{\alpha/2}u(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde

$$(-\Delta)^{\alpha/2}v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{n+\alpha}}\,dy$$

y la integral debe ser entendida en el sentido de valor principal si $\alpha\in[1,2]$ y la función v es suave. En consecuencia, cuando el dato de borde f se encuentra en un espacio adecuado, como ciertos subespacios del espacio de Schwartz (ver [1]), el análisis de Fourier nos proporciona la solución de (PDF) como la convolución del dato con el núcleo W_t^α correspondiente a la densidad de la distribución estable de función característica $e^{-ct|\xi|^\alpha}$. Es decir,

$$u(x,t) = W_t^\alpha * f(x)$$

con

$$W_t^\alpha(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-ct|\cdot|^\alpha}\right](x).$$

Aquí $\mathcal{F}^{-1}$ simboliza la transformada de Fourier inversa.

En la primera parte de esta tesis consideramos los núcleos de tipo Weierstrass que resuelven un problema parecido a (PDF) en el contexto diádico y probamos que ellos son límites centrales para ciertos procesos de iteración–molificación.

2.4. Potencias fraccionarias del laplaciano como operadores de tipo "Dirichlet to Neumann"

La definición del operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$, para $0<s<1$, puede realizarse por varios caminos a partir de la definición del operador de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ y sus propiedades. Una primera definición natural está dada desde el análisis de Fourier, la cual induce luego a una expresión por medio de una convolución con un núcleo "super" singular y nos permite detectar el carácter no local del operador. Una perspectiva distinta, cuya generalización para $s \neq \frac{1}{2}$ fue obtenida recientemente por Caffarelli y Silvestre en [26], permite ver al laplaciano fraccionario como un operador que lleva una condición de borde de tipo Dirichlet en una condición de tipo Neumann para un problema elíptico degenerado en el semiespacio superior de una dimensión mayor. Repasaremos brevemente las primeras dos definiciones y daremos una descripción más completa del último enfoque, precisando los dominios de definición y propiedades básicas.

Para $0 < s < 1$, se define el laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$ como el operador cuya transformada de Fourier verifica

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^s\varphi\right)(\xi) = |\xi|^{2s}\,\widehat{\varphi}(\xi), \tag{7}$$

para toda φ en el espacio de funciones suaves de decaimiento rápido de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Al antitransformar, se obtiene la fórmula como valor principal

$$(-\Delta)^s\varphi(x) = c_{n,s}\,\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,dy, \tag{8}$$

donde $c_{n,s}$ es una constante de normalización que depende sólo de la dimensión n y de s. Observemos que, como $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$, cuando $0 < s < 1/2$ no es necesario tomar valor principal en la fórmula anterior. Esta formulación integro-diferencial es la que permite definir de manera natural operadores de diferenciación fraccionaria en espacios métricos más generales, como generalización del laplaciano fraccionario.

Abordemos a continuación la definición del operador $(-\Delta)^s$ desde el punto de vista, más amplio, de las distribuciones, siguiendo las lineas trazadas en [56] y luego desarrolladas con más detalle en [19]. Para esto, notemos en primer lugar que la aplicación de $(-\Delta)^s$ a una función $\varphi \in \mathcal{S}$ no devuelve una función de $\mathcal{S}$, ya que la acción del multiplicador $|\xi|^{2s}$ en la fórmula de la transformada de Fourier (7) introduce una singularidad en el origen que se traduce en la pérdida del decaimiento rápido de $(-\Delta)^s\varphi$, aunque sí continúa siendo $\mathscr{C}^\infty$. Sea $\mathcal{M}_s$ el espacio de las funciones $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $(1+|x|^{n+2s})D^\gamma f(x)$ está acotada para todo $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Consideramos en $\mathcal{M}_s$ la topología inducida por la familia de seminormas $\rho_m(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\gamma|\le m}\left|(1+|x|^{n+2s})D^\gamma f(x)\right|$, lo cual le dá una estructura de espacio de Frechet.

Proposición 2.4.

(a) El operador $(-\Delta)^s$ *mapea* $\mathcal{S}$ *en* $\mathcal{M}_s$*, continuamente.*

(b) $(-\Delta)^s$ *conmuta con derivaciones, es decir,* $(-\Delta)^s D^\gamma \varphi = D^\gamma (-\Delta)^s \varphi$ *para todo multiíndice* $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$*.*

Es posible luego extender la definición del operador $(-\Delta)^s$ al espacio $\mathcal{M}'_s$ por dualidad. Es decir, dado $T \in \mathcal{M}'_s$ entonces $(-\Delta)^s T$ determina una distribución en $\mathcal{S}'$ dada por

$$\langle (-\Delta)^s T, \varphi \rangle = \langle T, (-\Delta)^s \varphi \rangle$$

para $\varphi \in \mathcal{S}$. Notemos que cuando $T \in \mathcal{S}$ la igualdad se verifica, con lo cual esta definición es coherente con las anteriores. No obstante, suele ser de interés considerar dominios de definición de $(-\Delta)^s$ dados por subespacios funcionales de $\mathcal{M}'_s$ de mayor extensión que $\mathcal{S}$, en particular, el espacio L^1 con peso

$$\mathcal{L}_s := L^1_{loc} \cap \mathcal{M}'_s = \left\{ f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1 + |x|^{n+2s}} \, dx < \infty \right\}.$$

En estas condiciones puede verse que, bajo una hipótesis adicional de regularidad sobre f, $(-\Delta)^s f$ es una función.

Proposición 2.5. *Sea* f *una función en* $\mathcal{L}_s$ *con regularidad* $C^{2s+\varepsilon}$ *(o* $C^{1,2s-1+\varepsilon}$ *si* $s \geq 1/2$*) para algún* $\varepsilon > 0$ *en un abierto* Ω*. Entonces, para* $s \in (0,1)$*,* $(-\Delta)^s f$ *es una función continua en* Ω *y sus valores están dados por la integral en (8).*

El enfoque desde la teoría de ecuaciones en derivadas parciales provee una definición explícita del laplaciano fraccionario mediante un método de extensión, aportando más claridad sobre su naturaleza. Comencemos repasando el resultado más clásico que permite ver a la raíz cuadrada del laplaciano $(-\Delta)^{1/2}$ como un operador de tipo "Dirichlet to Neumann". Consideremos el problema de Laplace en el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) \colon x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$ con una condición de borde $\varphi \in \mathcal{S}$

$$(P) \quad \begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Una solución puede expresarse en términos del núcleo de Poisson $P_1(x) = c_n (1+|x|^2)^{-(n+1)/2}$ y sus reescalamientos (o molificaciones) $P_y(x) = \frac{1}{y^n} P_1(\frac{x}{y})$ para $y > 0$, como la convolución con el dato de borde, es decir, $u(x,y) = P_y * \varphi(x)$. Definimos el operador T que mapea una condición de borde $\varphi \in \mathcal{S}$ del problema de Laplace en la derivada normal de la solución en la frontera $-\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, 0)$, es decir, la condición inicial de Neumann del problema. Debido a que el laplaciano conmuta con derivaciones, entonces $-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ es solución del problema (P) con una condición de borde de Dirichlet dada por $-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$. Luego, al iterar T obtenemos

$$T^2\varphi(x) = T(T\varphi)(x) = T\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(\cdot, 0)\right)(x) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0),$$

y como $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = -\Delta_x u(x,0) = -\Delta\varphi(x)$ se tiene que $T^2 = -\Delta$. Como además $-\Delta$ es un operador positivo, se concluye que $T = (-\Delta)^{1/2}$.

La formulación Dirichlet to Neumann introducida por Caffarelli y Silvestre para el caso general considera una generalización del problema (y del operador) de Laplace en el semiespacio superior dada por el siguiente problema de Dirichlet

$$(P_a) \quad \begin{cases} \operatorname{div}(y^a \operatorname{grad} u(x,y)) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde $a \in (-1,1)$. Introducen además los núcleos de Poisson generalizados

$$P^a_y(x) = C_{n,a}\frac{y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{n+1-a}{2}}},$$

donde $C_{n,a}$ es una constante que hace que $\int_{\mathbb{R}^n} P^a_1(x)\,dx = 1$. Estos núcleos verifican las siguientes propiedades.

Proposición 2.6.

(a) div(y^agrad $P^a_y(x)$) $= 0$ para todo $a \in (-1,1)$, donde los operadores divergencia y gradiente se calculan en las dos variables $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$;

(b) $P^a_y(x) = \frac{1}{y^n}P^a_1(\frac{x}{y})$ para todo $y > 0$, y por lo tanto $\int_{\mathbb{R}^n} P^a_y(x)\,dx = 1$;

(c) $\lim_{y\to 0^+} P^a_y = \delta_0$ en el sentido de las distribuciones de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

En consecuencia, una solución de (P_a) para $\varphi \in \mathcal{S}$ está dada por $u(x,y) = (P^a_y * \varphi)(x)$. Análogamente al caso $s = 1/2$, el operador que lleva una condición de borde de Dirichlet $\varphi \in \mathcal{S}$ en una condición de Neumann generalizada es el laplaciano fraccionario, precisamente

$$(9) \qquad \lim_{y\to 0^+} -y^a \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = C(-\Delta)^s \varphi(x)$$

para $s = \frac{1-a}{2}$ y C una constante que depende sólo de n y de s.

Los siguientes resultados constituyen la extensión de (9) a funciones de $\mathcal{L}_s$, en sentido débil.

Proposición 2.7. *Sean $\varphi \in \mathcal{S}$ y $u(x,y) = (P_y^a * \varphi)(x)$. Entonces, si $s = \frac{1-a}{2}$,*

(i) $y^a \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{M}_s$ para todo $y > 0$,

(ii) $\lim_{y\to 0^+} -y^a \frac{\partial u}{\partial y}(\cdot,y) = C(-\Delta)^s \varphi$ en la topología de $\mathcal{M}_s$.

Proposición 2.8. *Sea $f \in \mathcal{L}_s$, $0 < s < 1$.*

(i) La convolución $(P_y^a * f)(x)$ está bien definida para $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Además, $\left(\frac{\partial P_y^a}{\partial y} * f\right)(x)$ define una distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ para todo $y > 0$.

(ii) Si $u(x,y) = (P_y^a * f)(x)$, entonces para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\lim_{y\to 0^+} \left\langle -y^a \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi \right\rangle = \left\langle C(-\Delta)^s f, \varphi \right\rangle.$$

Estas propiedades permiten obtener varios resultados de regularidad para las soluciones de problemas que involucran al laplaciano fraccionario, mediante técnicas bien conocidas del análisis local. Como por ejemplo desigualdades de tipo Harnack (ver [26]) y fórmulas del valor medio (ver [8] y [19]).

2.5. Difusión Fraccionaria Diádica

Resumimos en esta sección los resultados de los trabajos [2] y [3], puesto que los núcleos asociados a la representación de las soluciones como operadores integrales actuando sobre la condición inicial son "el blanco" de nuestros procesos diádicos cuyo análisis iniciaremos en el próximo capítulo.

En lo que sigue haremos uso de la distancia diádica δ asociada a un sistema $\mathscr{D}$ y de las funciones de Haar $\mathscr{H}$, introducidos en el capítulo precedente.

Consideramos primero el caso más simple de $\mathbb{R}^+$ con la distancia $\delta(x,y) = \inf\left\{ |I| : x \in I, y \in I, I \in \mathscr{D}\right\}$. Aquí el operador de diferenciación fraccionaria diádica de orden

$0 < s < 1$ está dado por

$$D^s_{dy} f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(x) - f(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, dy.$$

El problema de difusión asociado es

$$P(\mathbb{R}^+) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -D^s_{dy} u(x,t), & x \in \mathbb{R}^+,\ t > 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

donde D^s_{dy} actúa sobre la variable espacial x para tiempo t fijo. La solución de $P(\mathbb{R}^+)$ está dada por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} W_{dy}(x,y;t) u_0(y)\, dy$$

donde el núcleo es

$$W_{dy}(x,y;t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-bt|I(h)|^{-s}} h(x)h(y),$$

con b una constante que depende de s e $I(h)$ es el soporte de la función de Haar h.

En el caso general de un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) con un sistema diádico $\mathscr{D}$ y otro de Haar $\mathscr{H}$ asociados, el operador, el problema y la solución tienen el mismo aspecto formal. Se considera, para $0 < s < 1$,

$$P(X) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -D^s_{dy} u(x,t), & x \in X,\ t > 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x), & x \in X, \end{cases} \tag{10}$$

con

$$D^s_{dy} f(x) = \int_X \frac{f(x) - f(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, d\mu(y).$$

Nuevamente, la solución está dada por

$$u(x,t) = \int_X W_{dy}(x,y;t) u_0(y)\, dy$$

con

$$W_{dy}(x,y;t) = \sum_{h \in \mathscr{H}} e^{-m_h t \mu(Q(h))^{-s}} h(x)h(y),$$

donde $Q(h)$ es el cubo diádico en el que h está basada y $0 < c_1 \leq m_h = m_{Q(h)} \leq c_2 < \infty$ para toda $h \in \mathscr{H}$ y algún par de constantes geométricas c_1 y c_2 que también dependen de s. Un contexto no euclídeo simple e interesante para este caso general son algunos fractales autosimilares, como el cuadrante de Sierpinski (Ejemplo 5). Consideramos estos casos en el Capítulo 7.

Uno de los propósitos centrales de esta tesis es determinar el carácter central de los núcleos W_{dy}, o al menos detectar su cuenca de atracción, para procesos análogos a los de los teoremas de límites centrales clásicos.

Capítulo 3

Núcleos de Markov diádicos en $\mathbb{R}^+$

Las sumas de variables aleatorias independientes se distribuyen de acuerdo a la convolución de sus distribuciones individuales, y la transformada de Fourier diagonaliza a los operadores de convolución. Cuando el análisis de Fourier trigonométrico se sustituye por el análisis en wavelets de Haar, los operadores naturales que se diagonalizan en estas bases son los inducidos por núcleos diádicos, que ya no son de convolución.

En este capítulo introducimos los núcleos iniciales en nuestro proceso de iteración–molificación, nos dedicamos a exponer varias representaciones y en particular consideramos su análisis espectral en términos de la base de Haar de $\mathbb{R}^+$. Como veremos, subfamilias especiales de estos núcleos están en la cuenca de los núcleos difusivos W_{dy}, introducidos en la Sección 2.5 del capítulo anterior, a través de procesos de iteración y molificación adecuados, mientras que en otros casos se obtendrán aproximaciones a la identidad o procesos disipativos.

3.1. El espacio $\mathbb{R}^+$ con la distancia diádica

Sea $(\mathbb{R}^+, d, \mathscr{L})$ el espacio métrico de medida constituido por la semirrecta real no negativa $\mathbb{R}^+ = \{x \geq 0\}$, la distancia usual (euclídea) d y la medida de Lebesgue $\mathscr{L}$. Este espacio es completo y de tipo homogéneo.

La familia usual de intervalos diádicos en $\mathbb{R}^+$ (ver Sección 1.1) se define por

$$\mathscr{D} = \left\{ I_k^j = \left[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

donde el índice j indica el nivel del intervalo y k su posición en cada nivel j. Las subfamilias de intervalos diádicos $\mathscr{D}_j = \left\{ I_k^j \colon k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ constituyen una partición de $\mathbb{R}^+$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Estas particiones están anidadas, en particular cada intervalo I_k^j es unión disjunta de los intervalos I_{2k}^{j+1} y I_{2k+1}^{j+1}. Observemos también que cada punto $x \in \mathbb{R}^+$ tendrá asociada una única sucesión encajada de intervalos diádicos que denotamos por

$\mathcal{I}_x = \left\{ I_x^j = I_{k(x,j)}^j \colon j \in \mathbb{Z} \right\}$ de manera que $\{x\} = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} I_x^j$, donde I_x^j denota al único intervalo en $\mathscr{D}_j$ que contiene a x, para cada $j \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo, $\mathcal{I}_0 = \left\{ I_0^j \colon j \in \mathbb{Z} \right\} = \{[0, 2^{-j}) \colon j \in \mathbb{Z}\}$.

La familia $\mathscr{D}$ junto con la medida de Lebesgue inducen naturalmente una métrica en $\mathbb{R}^+$, que se denomina métrica diádica y se define por

$$\delta(x, y) = \inf\{|I| : I \in \mathscr{D}, x \in I, y \in I\},$$

donde $|E|$ indica la medida de Lebesgue del conjunto E. Es sencillo verificar que δ es en efecto una distancia y, más aún, una ultra-métrica, es decir, $\delta(x, z) \leqslant \max\{\delta(x, y), \delta(y, z)\}$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

Observemos que las métricas d y δ no son equivalentes. Por un lado, la métrica diádica acota superiormente a la métrica euclídea, de hecho, si denotamos por $\mathcal{I}$ al conjunto de todos los intervalos de extremos en $\mathbb{R}^+$ entonces $\mathscr{D} \subset \mathcal{I}$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $d(x, y) = \inf\{|I| : I \in \mathcal{I}, x \in I, y \in I\} \leqslant \inf\{|I| : I \in \mathscr{D}, x \in I, y \in I\} = \delta(x, y)$. Por otro lado, la razón entre las métricas puede ser infinitamente grande: para todo $\epsilon \in (0, 1)$ se tiene $\delta(1, 1 - \epsilon) = 2$ y $d(1, 1 - \epsilon) = \epsilon$.

Como el rango de δ es el conjunto $D = \{2^j \colon j \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, la métrica diádica no resulta homogénea: dados $j \in \mathbb{Z}$ y $c \in (2^j, 2^{j+1})$ entonces $c\delta(0, 1) = 2c > 2^{j+1} = \delta(0, c)$. Sin embargo, se dá la homogeneidad cuando el factor es una potencia de 2.

Lema 3.1. *La distancia δ es diádicamente homogénea. Es decir, para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$ y todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\delta(2^j x, 2^j y) = 2^j \delta(x, y)$.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, $x < y$, e $i \in \mathbb{Z}$. Sea $I_k^j = [k2^{-j}, (k + 1)2^{-j})$ el intervalo diádico más chico al que pertenecen x e y. Luego, $x \in I_{2k}^{j+1} = [2k2^{-j-1}, (2k + 1)2^{-j-1})$ e $y \in I_{2k+1}^{j+1} = [(2k + 1)2^{-j-1}, 2(k + 1)2^{-j-1})$. Observemos que, para $I_k^j \in \mathscr{D}$ e $i \in \mathbb{Z}$, se tiene que $2^i I_k^j = [k2^{i-j}, (k + 1)2^{i-j}) = I_k^{j-i}$. Así, $2^i x \in 2^i I_{2k}^{j+1} = I_{2k}^{j-i+1}$ y $2^i y \in 2^i I_{2k+1}^{j+1} = I_{2k+1}^{j-i+1}$, y en consecuencia I_k^{j-i} es el menor intervalo diádico que contiene a $2^i x$ y $2^i y$. Por lo tanto, $\delta(2^i x, 2^i y) = |I_k^{j-i}| = |2^i I_k^j| = 2^i \delta(x, y)$. □

Observemos que la topología determinada por la distancia diádica, la topología diádica, τ_δ contiene estrictamente a la topología euclídea τ. Se tiene además que $\mathscr{D}$ es base de τ_δ, ya que las bolas diádicas (δ-bolas) son precisamente los intervalos diádicos.

En efecto, dado $x \in \mathbb{R}^+$ y $r > 0$ existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-j} < r \leqslant 2^{-j+1}$ y entonces $B_\delta(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^+ \colon \delta(x,y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^+ \colon \delta(x,y) \leqslant 2^{-j}\} = I_x^j$. Cabe destacar que $\mathbb{R}^+$ pierde la propiedad de completitud cuando se considera la métrica diádica.

El espacio $(\mathbb{R}^+, \delta, \mathscr{L})$ es un espacio de tipo homogéneo normal, no atómico y no acotado. En efecto, dados $x \in \mathbb{R}^+$ y $r > 0$, tomando $j \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{-j} < r \leqslant 2^{-j+1}$, se sigue que $\frac{1}{2}r \leqslant |B_\delta(x,r)| = |I_x^j| = 2^{-j} < r$. Luego, por el Lema 1.5 se tiene que

Lema 3.2. *Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Las siguientes estimaciones se satisfacen uniformemente en $x \in \mathbb{R}^+$ y $r > 0$:*

$$\int_{B_\delta(x,r)} \frac{dy}{\delta^{1-\varepsilon}(x,y)} \simeq r^\varepsilon,$$
$$\int_{\mathbb{R}^+ \setminus B_\delta(x,r)} \frac{dy}{\delta^{1+\varepsilon}(x,y)} \simeq r^{-\varepsilon}.$$

En la Sección 1.4 se define el sistema de Haar asociado a una familia diádica de Christ en el contexto general de los espacios de tipo homogéneo, aquí repasaremos los conceptos básicos adaptando la notación al contexto particular. En $\mathbb{R}^+$, el sistema de ondículas o wavelets de Haar es el conjunto de funciones simples de soporte compacto obtenido al aplicar traslaciones y dilataciones diádicas a la ondícula madre $h(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1)}(x)$, dado por

$$\mathscr{H} = \left\{ h_k^j(x) = 2^{j/2} h(2^j x - k) \colon j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

La notación hace referencia a la relación de cada wavelet h_k^j con el (menor) intervalo diádico que la soporta, que es I_k^j. Nuevamente, el índice j indica el nivel o resolución de la onda y el índice k la posición que esta ocupa a partir del origen en el nivel respectivo.

Por construcción, el conjunto de wavelets de Haar es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^+)$ y resulta además ser una base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^+)$ para $1 < p < \infty$. Enunciamos nuevamente el Teorema 1.10, con el lenguaje adaptado al contexto actual, que nos provee de una caracterización de los espacios $L^p(\mathbb{R}^+)$ a través de las wavelets de Haar.

Teorema 3.3 (Wojtaszczyk [60]). *Para cada $1 < p < \infty$ existen constantes C_1 y C_2 tales que*

$$C_1 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{h \in \mathscr{H}} |\langle f, h \rangle|^2 |I(h)|^{-1} \chi_{I(h)} \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p$$

para toda función medible f.

3.2. Núcleos de Markov diádicos. Representaciones y propiedades

Diremos que una función medible $K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es un **núcleo de Markov** si toma valores no negativos y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\,dy = 1 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+. \tag{11}$$

Por otra parte, decimos que un núcleo de dos variables $K(x,y)$ es **diádico** cuando depende de la distancia diádica, es decir, $\delta(x,y) = \delta(x',y')$ implica $K(x,y) = K(x',y')$. Notemos que un núcleo diádico es simétrico. Denotaremos por $\mathscr{K}$ a la familia de núcleos de Markov diádicos en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Observemos que todo núcleo diádico $K(x,y)$ está determinado por un perfil $\varphi\colon \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}$, de manera que $K = \varphi \circ \delta$. Dado que la distancia diádica toma valores en el conjunto $D = \big(\{2^j : j \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}\big)$, si consideramos perfiles φ con dominio en D la correspondencia es biunívoca. Se deduce de la expresión anterior que todo núcleo diádico es medible en el espacio producto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, dada la medibilidad de la distancia $\delta\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to D$. Para ver esto último, basta con chequear que los conjuntos $\delta^{-1}(\{2^j\})$ y $\delta^{-1}(\{0\})$ son medibles. En efecto, como los hijos de cada $I^j_k \in \mathscr{D}_j$ son los intervalos I^{j+1}_{2k} y I^{j+1}_{2k+1}, se tiene que

$$\delta^{-1}(\{2^{-j}\}) = \big\{(x,y)\colon \delta(x,y) = 2^{-j}\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \left[(I^{j+1}_{2k} \times I^{j+1}_{2k+1}) \cup (I^{j+1}_{2k+1} \times I^{j+1}_{2k})\right],$$

que es medible en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ por ser una unión numerable de rectángulos. Por otra parte, $\delta^{-1}(\{0\}) = \{(x,x)\colon x \in \mathbb{R}^+\}$ que es medible de medida nula.

Sea K un núcleo en la clase $\mathscr{K}$. Denotando a los conjuntos de nivel 2^j de δ por $L(2^j) = \delta^{-1}(\{2^j\})$ y a la diagonal $\Delta = \{(x,x)\colon x \in \mathbb{R}^+\}$ se tiene una partición de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dada por la unión disjunta $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} L(2^j) \cup \Delta$. Como el núcleo K toma un valor constante en cada conjunto de nivel $L(2^j)$, que denotamos $k_j := \varphi(2^j)$, al igual que en la diagonal, que denotamos $k_\infty := \varphi(0)$, entonces K está unívocamente determinado por los coeficientes $(k_j\colon j \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\})$ en la forma

$$K(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{L(2^j)}(x,y) + k_\infty \chi_\Delta(x,y).$$

Dado que el valor de K en la diagonal Δ no influye en la definición del operador integral asociado, en adelante supondremos, sin perdida de generalidad, que K se anula en Δ, y el núcleo quedará representado por los coeficientes $(k_j\colon j\in\mathbb{Z})$ por la fórmula

$$K(x,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j\chi_{L(2^j)}(x,y). \tag{12}$$

Por último, al tomar en consideración la propiedad de Markov, para todo $x\in\mathbb{R}^+$ tenemos que

$$1=\int_{\mathbb{R}^+}K(x,y)dy=\int_{\mathbb{R}^+}\sum_{j\in\mathbb{Z}}k_j\chi_{L(2^j)}(x,y)dy=\sum_{j\in\mathbb{Z}}k_j\int_{\mathbb{R}^+}\chi_{L(2^j)}(x,y)dy,$$

y dado que $\chi_{L(2^j)}(x,y)=\chi_{\{2^j\}}(\delta(x,y))=I_x^{-j}\setminus I_x^{-j+1}$, entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}k_j 2^{j-1}=1.$$

El siguiente lema consigna dos formas adicionales de representar a los núcleos en la clase $\mathscr{K}$, las cuales nos resultarán de utilidad para los cálculos que realizaremos más adelante, junto con las equivalencias entre las distintas representaciones de un mismo núcleo.

Lema 3.4 (Representaciones de los núcleos de $\mathscr{K}$). *Equivalen:*

1) $K\in\mathscr{K}$;

2) existe $(k_j\colon j\in\mathbb{Z})\subset\mathbb{R}$ *tal que*

(k1) $k_j\geq 0$ *para todo* $j\in\mathbb{Z}$,

(k2) $\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{j-1}k_j=1$

y $\quad K(x,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}k_j\chi_{L(2^j)}(x,y)$;

3) existe $(\alpha_j\colon j\in\mathbb{Z})\subset\mathbb{R}$ *tal que*

(α1) $\{\alpha_j\}\in\ell^1(\mathbb{Z})$,

(α2) $\sum_{l\leqslant j}\alpha_l 2^l\geq 0$ *para todo* $j\in\mathbb{Z}$,

(α3) $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j=1$

y $\quad K(x,y)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha_j 2^j\chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))$;

4) existe $(\Lambda_j\colon j\in\mathbb{Z})\subset\mathbb{R}$ *tal que*

(Λ1) $\Lambda_j\to 1$ *cuando* $j\to-\infty$,

(Λ2) $\Lambda_j\to 0$ *cuando* $j\to+\infty$,

(Λ3) $\sum_{l<j}2^l\Lambda_l\geq 2^j\Lambda_j$ *para todo* $j\in\mathbb{Z}$,

$$y \qquad K(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda_j 2^j \left(2\chi_{(0,2^{-j-1}]} - \chi_{(0,2^{-j}]}\right) \circ \delta(x,y).$$

Más aún, las representaciones anteriores asociadas a un núcleo $K \in \mathscr{K}$ están relacionadas por las siguientes fórmulas

- $\alpha_j = 2^{-j}(k_{-j} - k_{-j+1})$
- $\Lambda_j = \frac{1}{2}\left(-k_{-j}2^{-j} + \sum_{l<-j} k_l 2^l\right)$
- $k_j = \sum_{l\geqslant j} 2^{-l}\alpha_{-l}$
- $\Lambda_j = \sum_{l>j} \alpha_l$
- $k_j = -2^{-j}\Lambda_{-j} + \sum_{l>j} 2^{-l}\Lambda_{-l}$
- $\alpha_j = \Lambda_{j-1} - \Lambda_j$.

Demostración. Hemos probado que (1) implica (2) antes del enunciado del teorema.

Veamos que a partir de (2) se obtiene (1). El núcleo $K(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{L(2^j)}(x,y)$ toma el valor cero en la diagonal Δ y el valor k_j en el conjunto de nivel $L(2^j)$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, con lo cual K es diádico. Por ($k1$) resulta no negativo y por ($k2$) cumple la propiedad de Markov. En efecto, por el teorema de convergencia monótona tenemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{L(2^j)}(x,y)dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{L(2^j)}(x,y)dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j 2^{j-1} = 1.$$

Para ver que (3) implica (1), notemos que si $\delta(x,y) = 2^{-j}$ entonces $K(x,y) = \sum_{l\leqslant j} \alpha_l 2^l$, que resulta finito por ($\alpha 1$) y no negativo por ($\alpha 2$). Además, por ($\alpha 3$) se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)dy &= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j 2^j \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j 2^j \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{I_x^j}(y)dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j = 1,\end{aligned}$$

donde fue posible utilizar Fubini gracias a ($\alpha 1$), ya que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^+} |\alpha_j| 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| < \infty.$$

Probemos luego que (2) implica (3). Por ($k2$), tenemos que $\sum_{j\geqslant j_0} k_j$ es sumable para todo $j_0 \in \mathbb{Z}$ y entonces, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{L(2^j)}(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{(0,2^j]\setminus(0,2^{j-1}]}(\delta(x,y)) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \Big(\chi_{(0,2^j]}(\delta(x,y)) - \chi_{(0,2^{j-1}]}(\delta(x,y))\Big) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{(0,2^j]}(\delta(x,y)) - \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_{j+1}\chi_{(0,2^j]}(\delta(x,y)) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (k_j - k_{j+1})\chi_{(0,2^j]}(\delta(x,y)) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\frac{k_{-j} - k_{-j+1}}{2^j}\right) 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y)). \end{aligned}$$

Definiendo $\alpha_j := 2^{-j}(k_{-j} - k_{-j+1})$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, por ($k1$) y ($k2$) se tiene que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j}(k_{-j} + k_{-j+1}) = 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j-1}k_{-j} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j}k_{-j+1} = 2 + 1 = 3, \tag{13}$$

con lo cual $\{\alpha_j\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Si $\delta(x,y) = 2^{-j}$ entonces $k_j = K(x,y) = \sum_{l\leqslant j} \alpha_l 2^l$, que es no negativo a causa de ($k1$). Luego vale ($\alpha2$). Veamos que la propiedad de Markov implica ($\alpha3$). En efecto, por Fubini,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j 2^j \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j. \end{aligned}$$

Veamos ahora que (3) implica (4). Sea $(\alpha_j : j \in \mathbb{Z})$ una sucesión que verifica ($\alpha1$), ($\alpha2$) y ($\alpha3$) y K el núcleo asociado. Definamos $\Lambda_j := \sum_{l>j} \alpha_l$ para cada j entero. Luego ($\Lambda1$) y ($\Lambda2$) son consecuencia de ($\alpha1$) y ($\alpha3$). Por ($\alpha1$) tenemos además que $\{\Lambda_j\} \in l^\infty$, con lo cual $\sum_{l\leqslant j} \Lambda_l 2^l$ es sumable para todo $j \in \mathbb{Z}$. Dado que $\alpha_l = \Lambda_{l-1} - \Lambda_l$, para $x, y \in \mathbb{R}^+$ con $\delta(x,y) = 2^{-j}$ vale

$$K(x,y) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l 2^l \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(x,y)) = \sum_{l\leqslant j} \alpha_l 2^l$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l\leqslant j} (\Lambda_{l-1} - \Lambda_l)\, 2^l \\
&= \sum_{l\leqslant j} \Lambda_{l-1} 2^l - \sum_{l\leqslant j} \Lambda_l 2^l \\
&= 2\sum_{l<j} \Lambda_l 2^l - \sum_{l\leqslant j} \Lambda_l 2^l \\
&= 2\sum_{l\in\mathbb{Z}} \Lambda_l 2^l \chi_{(0,2^{-l-1}]} \circ \delta(x,y) - \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Lambda_l 2^l \chi_{(0,2^{-l}]} \circ \delta(x,y) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Lambda_l 2^l \left(2\chi_{(0,2^{-l-1}]} - \chi_{(0,2^{-l}]}\right) \circ \delta(x,y).
\end{aligned}$$

En vistas de los cálculos anteriores y ($\alpha 2$), tenemos que

$$0 \leq \sum_{l\leqslant j} \alpha_l 2^l = 2\sum_{l<j} \Lambda_l 2^l - \sum_{l\leqslant j} \Lambda_l 2^l = \sum_{l<j} \Lambda_l 2^l - \Lambda_j 2^j,$$

con lo cual se satisface ($\Lambda 3$).

Para finalizar, basta con probar que (4) implica (1). Sea $(\Lambda_j : j \in \mathbb{Z}) \subset \mathbb{R}$ que verifica ($\Lambda 1$), ($\Lambda 2$) y ($\Lambda 3$), y el núcleo asociado $K(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda_j 2^j \left(2\chi_{(0,2^{-j-1}]} - \chi_{(0,2^{-j}]}\right) \circ \delta(x,y)$. Por ($\Lambda 1$) y ($\Lambda 2$) tenemos que $\{\Lambda_j\} \in l^\infty$, con lo cual K está bien definido. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ con $\delta(x,y) = 2^{-j}$. Entonces, por ($\Lambda 3$), $K(x,y) = 2\sum_{l<j} \Lambda_l 2^l - \sum_{l\leqslant j} \Lambda_l 2^l = \sum_{l<j} \Lambda_l 2^l - \Lambda_j 2^j \geq 0$. Veamos por último que K satisface la propiedad de Markov. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)dy &= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j)\, 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j)\, 2^j \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y))dy \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j) \\
&= \lim_{J\to+\infty} \sum_{j=-J}^{J} (\Lambda_{j-1} - \Lambda_j) \\
&= \lim_{J\to+\infty} (\Lambda_{-J-1} - \Lambda_J) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde para calcular el último límite se utilizó ($\Lambda 1$) y ($\Lambda 2$) y en la segunda igualdad aplicamos el teorema de Fubini-Tonelli, aunque no es inmediato comprobar que esto último efectivamente es posible. Para ello definamos los coeficientes $q_j := \sum_{l<j} \Lambda_l 2^{l-j}$. Por ($\Lambda 3$), $q_j \geq \Lambda_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y luego

$$q_{j+1} = \sum_{l<j+1} \Lambda_l 2^{l-j-1} = \tfrac{1}{2}(q_j + \Lambda_j) \leq \tfrac{1}{2}(q_j + q_j) = q_j,$$

es decir que la sucesión $\{q_j\}$ es decreciente. Como $q_j = \sum_{m>0} \Lambda_{-m+j} 2^{-m}$, por ($\Lambda 1$) se tiene que $\lim_{j\to-\infty} q_j = 1$ y por ($\Lambda 2$) obtenemos que $\lim_{j\to+\infty} q_j = 0$. Luego,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (q_j - q_{j+1}) = \lim_{J\to+\infty} \sum_{j=-J}^{J} (q_j - q_{j+1}) = \lim_{J\to+\infty} (q_{-J} - q_{J+1}) = 1.$$

Notemos además que $0 \leq q_j - \Lambda_j = 2\left(q_j - \frac{1}{2}(q_j + \Lambda_j)\right) = 2(q_j - q_{j+1})$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Lambda_{j-1} - \Lambda_j| &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Lambda_{j+1} - \Lambda_j| \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Lambda_{j+1} - q_{j+1}| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} |q_{j+1} - q_j| + \sum_{j\in\mathbb{Z}} |q_j - \Lambda_j| \\
&= 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} (q_{j+1} - q_{j+2}) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} (q_j - q_{j+1}) + 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} (q_j - q_{j+1}) \\
&= 5,
\end{aligned}$$

lo cual comprueba que vale Fubini. □

La representación de un núcleo $K \in \mathscr{K}$ dada en el ítem *(2)* del Lema 3.4 expone los valores que toma K en los conjuntos de nivel respecto a la distancia diádica. En cambio, en el inciso *(3)* el núcleo es representado a través de los coeficientes que registran las diferencias entre los valores que toma K en niveles diádicos consecutivos, ponderadas (normalizadas) de acuerdo al tamaño del nivel respectivo. Por último, la representación del punto *(4)* está dada, como veremos más adelante, a través de los autovalores del operador integral determinado por el núcleo K respecto al sistema de Haar $\mathscr{H}$. El siguiente lema enseña otra representación útil de los núcleos de $\mathscr{K}$ por medio del sistema de Haar $\mathscr{H}$ y las sucesiones $\{\Lambda_j : j \in \mathbb{Z}\}$.

Lema 3.5. *Sea $K \in \mathscr{K}$ determinado por una sucesión $\Lambda_{\mathbb{Z}} = \{\Lambda_j : j \in \mathbb{Z}\}$ que verifique las condiciones ($\Lambda 1$), ($\Lambda 2$) y ($\Lambda 3$). Entonces, para $x \neq y$,*

$$K(x,y) = \sum_{h \in \mathscr{H}} \Lambda_{j(h)} h(x) h(y). \tag{14}$$

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, $x \neq y$. Entonces $\delta(x,y) = 2^{-j}$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Es decir, existe un intervalo $I \in \mathscr{D}_j$ con hijos $I_x, I_y \in \mathscr{D}_{j+1}$ tal que $x \in I_x$ e $y \in I_y$. Notemos que el producto $h(x)h(y)$ será distinto de cero cuando ambos términos no se anulen, lo cual ocurre sólo en las wavelets h con soporte en intervalos diádicos que contengan a I, es decir, en $\{I_m \in \mathscr{D}_{j-m} : I \subset I_m,\ m \geqslant 0\}$. Observemos además que, para $m > 0$ y h_m la wavelet soportada en I_m, se tiene que $h_m(x)h_m(y) = 2^{j-m}$, y para $m = 0$ se tiene que $h_0(x)h_0(y) = -2^j$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{h \in \mathscr{H}} \Lambda_{j(h)} h(x) h(y) &= \sum_{m \geqslant 0} \Lambda_{j-m} h_m(x) h_m(y) \\
&= -2^j \Lambda_j + \sum_{m > 0} \Lambda_{j-m} 2^{j-m} \\
&= -2^j \Lambda_j + \sum_{l > -j} \Lambda_{-l} 2^{-l} \\
&= k_{-j} \\
&= K(x,y),
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se utilizó la fórmula de transformación que vincula a la sucesión $\{\Lambda_j\}$ con la sucesión $\{k_j\}$, expuesta en el lema anterior. $\square$

A continuación, se prueban algunas estimaciones para los coeficientes de las representaciones de los núcleos de $\mathscr{K}$. Utilizaremos la notación α^+ y α^- para las partes positiva y negativa de la sucesión α respectivamente, es decir, en términos de las componentes se define

$$\alpha_j^+ = \begin{cases} \alpha_j & \text{si } \alpha_j \geqslant 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}, \quad \alpha_j^- = \begin{cases} -\alpha_j & \text{si } \alpha_j < 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Proposición 3.6.

(1) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^+ \leqslant 2$;

(2) $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^- \leqslant 1$;

(3) $\sup_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda_j = 1$;

(4) $\inf_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda_j \geqslant -1$.

DEMOSTRACIÓN. *(1)* y *(2)* son consecuencia de (13) y de la condición (α3) en el Lema 3.4.

Veamos *(3)*. Por el Lema 3.4.(4), $\{\Lambda_j\} \in \ell^\infty$ y pueden darse dos casos: o bien el 1 es una asíntota superior, con lo cual se cumple la propiedad, o $\{\Lambda_j\}$ alcanza un valor máximo mayor o igual a 1. Si se da este último caso, sea $j_0 \in \mathbb{Z}$ un índice cualquiera donde ocurre el máximo, y supongamos $\Lambda_{j_0} > 1$. Entonces, como $\Lambda_{j_0} \geqslant \Lambda_l$ para todo $l \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{l<j_0} \Lambda_l 2^l \leqslant \sum_{l<j_0} \Lambda_{j_0} 2^l = \Lambda_{j_0} 2^{j_0}.$$

Dado que de la condición (Λ3) resulta la desigualdad opuesta, se tiene entonces que

$$\sum_{l<j_0} \Lambda_l 2^l = \Lambda_{j_0} 2^{j_0}.$$

En consecuencia, debe ser $\Lambda_{j_0} = \Lambda_l$ para todo $l \leqslant j_0$, pero esto contradice (Λ1).

Finalmente, para probar *(4)* supongamos existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\Lambda(j_0) < -1$. Entonces, por (Λ3),

$$\begin{aligned}
\Lambda_{j_0+1} &\leqslant \sum_{l<j_0+1} 2^{l-(j_0+1)} \Lambda_l \\
&= 2^{-1} \left(\Lambda_{j_0} + \sum_{l<j_0} 2^{l-j_0} \Lambda_l \right) \\
&\leqslant 2^{-1} \left(\Lambda_{j_0} + 1 \right),
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó el ítem *(3)* anterior. Inductivamente, si $k_0 \in \mathbb{N}$ y $\Lambda_{j_0+k} \leqslant 2^{-1} (\Lambda_{j_0} + 1)$ para todo $1 \leqslant k \leqslant k_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda_{j_0+k_0+1} &\leqslant \sum_{l<j_0+k_0+1} 2^{l-(j_0+k_0+1)} \Lambda_l \\
&= 2^{-k_0-1} \left(\sum_{l=j_0}^{j_0+k_0} 2^{l-j_0} \Lambda_l + \sum_{l<j_0} 2^{l-j_0} \Lambda_l \right) \\
&= 2^{-k_0-1} \left(\sum_{l=1}^{k_0} 2^l \Lambda_{j_0+1} + \Lambda_{j_0} + \sum_{l<j_0} 2^{l-j_0} \Lambda_l \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2^{-k_0-1}\left(\sum_{l=1}^{k_0} 2^{l-1}\left(\Lambda_{j_0}+1\right)+\Lambda_{j_0}+\sum_{l<j_0} 2^{l-j_0}\right)\\
&=2^{-k_0-1}\left(\left(2^{k_0}-1\right)\left(\Lambda_{j_0}+1\right)+\Lambda_{j_0}+1\right)\\
&=2^{-1}\left(\Lambda_{j_0}+1\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Lambda_{j_0+k} \leqslant 2^{-1}\left(\Lambda_{j_0}+1\right) < 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero esto contradice la propiedad ($\Lambda 2$). $\square$

Ejemplo 6. Un caso donde se alcanzan los valores extremos precisados en la proposición anterior es el de los núcleos determinados por un perfil que sea la función característica normalizada de un intervalo de la forma $[2^{-J}, 2^{-J+1})$, para $J \in \mathbb{Z}$. Precisamente, sea $K(x,y) = 2^{J+1}\chi_{[2^{-J},2^{-J+1})}\big(\delta(x,y)\big) = 2^{J+1}\chi_{L(2^{-J})}(x,y)$. Así, las sucesiones de coeficientes que representan al núcleo K están dadas por $k_j = 2^{J+1}\delta_j^{-J}$, $\alpha_j = 2\delta_j^J - \delta_j^{J+1}$ y $\Lambda_j = \chi_{(-\infty,J)}(j) - \delta_j^J$, donde δ_j^i denota la delta de Kronecker.

De manera más general, puede demostrarse la siguiente propiedad para núcleos diádicos integrables.

Proposición 3.7. *Sea K un núcleo definido a través de una lista de coeficientes $\{\alpha_j\}$ como en el ítem (3) del Lema 3.4, pero que no necesariamente satisface la condición ($\alpha 3$). Entonces, $\sum_{l\leqslant j}\alpha_l^+ \geq 2\sum_{l\leqslant j}\alpha_l^-$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.*

3.3. Operadores markovianos diádicos. Análisis espectral

Comenzamos esta sección estudiando la buena definición en los espacios de Lebesgue de los operadores inducidos por núcleos de Markov diádicos.

Definición 3.1. Se define el operador integral T asociado a un núcleo $K \in \mathscr{K}$ por su acción sobre funciones medibles $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a través de la fórmula

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f(y)\,dy, \tag{15}$$

siempre que la integral esté bien definida en casi todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Escribiendo a la función medible f como la suma de sus partes positiva y negativa, $f = f^+ - f^-$, por definición $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f^+(y)dy -$

$\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f^-(y)dy = Tf^+(x) - Tf^-(x)$, con lo cual Tf estará bien definido siempre que Tf^+ y Tf^- no sean simultáneamente infinitas en casi todo punto, admitiendo así que tome valores en la recta extendida.

Lema 3.8. *Sea $K \in \mathscr{K}$, T el operador integral asociado y $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función medible. Si Tf está bien definido en casi todo punto entonces es medible en $\mathbb{R}^+$.*

Demostración. Si f es medible en $\mathbb{R}^+$ entonces la función $K(x,y)f(y)$ es medible en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, puesto que el núcleo $K(x,y)$ lo es. Así también, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ fijo, $K(x,y)f(y)$ es medible en $\mathbb{R}^+$ como función de y.

Para f medible no negativa se tiene entonces que $K(x,y)f(y)$ es una función no negativa y medible en $\mathbb{R}^+$ para cada $x \in \mathbb{R}^+$ fijo, y por lo tanto Tf está bien definida en todo punto. Luego, por el Teorema A.3 de Tonelli, Tf es medible en $\mathbb{R}^+$. Entonces para toda función medible $f = f^+ - f^-$ se tiene que Tf^+ y Tf^- son medibles. En consecuencia, si f es una función medible y Tf está bien definido, es decir, si la expresión $Tf = Tf^+ - Tf^-$ tiene sentido en casi todo punto, se sigue que Tf es medible en $\mathbb{R}^+$ por ser suma de funciones medibles. □

Lema 3.9. *Sea $K \in \mathscr{K}$, T el operador integral asociado y $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Entonces*

1. *Tf es finito en todo punto de Lebesgue de f;*
2. *$\|Tf\|_p \leq \|f\|_p$;*
3. *si $f \geqslant 0$ entonces Tf es semicontinua inferiormente respecto a δ;*
4. *si $f \geqslant 0$ entonces Tf es "casi" semicontinua inferiormente respecto a la distancia euclídea d. Es decir, para todo $\lambda > 0$ existen conjuntos G_λ d-abierto y $Z_\lambda \subset D$ (de medida cero) tal que $\{x : Tf(x) > \lambda\} = G_\lambda \cup Z_\lambda$.*

Demostración. (*1.*) Sea $f \geq 0$. Por el Teorema A.1 de Convergencia Monótona,

$$\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f(y)\,dy = \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Sea x un punto de Lebesgue de f, $x \in \mathscr{L}(f)$ (Apéndice, Definición A.1). Entonces

$$\frac{1}{|\{y : \delta(x,y) = 2^j\}|} \int_{\delta(x,y)=2^j} |f(y) - f(x)|\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{|B(x,2^j)|}{|\{y\colon \delta(x,y)=2^j\}|}\frac{1}{|B(x,2^j)|}\int_{B(x,2^j)}|f(y)-f(x)|\,dy\\
&\leq 4\frac{1}{|B(x,2^j)|}\int_{B(x,2^j)}|f(y)-f(x)|\,dy\\
&\xrightarrow[j\to-\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Luego, existe $j_0\in\mathbb{Z}$ tal que para todo $j\leq j_0$,

$$\frac{1}{2^{j-1}}\int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy \leq f(x)+1,$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f(y)\,dy &= \sum_{j\leqslant j_0} k_j\int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy + \sum_{j>j_0} k_j\int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy\\
&\leq (f(x)+1)\sum_{j\leqslant j_0} k_j 2^{j-1} + \sum_{j>j_0} k_j\int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy.
\end{aligned}
$$

Dado que $f\in L^p$ ($1\leqslant p\leqslant +\infty$), por la desigualdad de Hölder (A.11) se tiene que, para todo $j>j_0$,

$$\int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy \;\leq\; 2^{\frac{j-1}{p'}}\left\|f\right\|_p \;\leq\; 2^{-\frac{j-1}{p}}2^{j-1}\left\|f\right\|_p \;\leq\; 2^{-\frac{j_0}{p}}2^{j-1}\left\|f\right\|_p.$$

Reemplazando esto último en la desigualdad anterior obtenemos que, para $f\geq 0$ y $x\in\mathscr{L}(f)$,

$$
\begin{aligned}
Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f(y)\,dy \;&\leq\; (f(x)+1)\sum_{j\leqslant j_0} k_j 2^{j-1} + \sum_{j>j_0} k_j 2^{j-1}2^{-\frac{j_0}{p}}\left\|f\right\|_p\\
&\leq\; \text{máx}\left\{f(x)+1,\ 2^{-\frac{j_0}{p}}\left\|f\right\|_p\right\}\sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j 2^{j-1}\\
&<\; +\infty.
\end{aligned}
$$

Si $f\in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, es una función no necesariamente no negativa entonces $|f|\in L^p(\mathbb{R}^+)$ y luego $T\,|f|\,(x)<+\infty$ para todo $x\in\mathscr{L}(f)$. La prueba se completa con la observación de que $Tf(x)\neq\infty$ si y sólo si $T\,|f|\,(x)<+\infty$.

(*2.*) Sea $f\in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1<p<\infty$. Aplicando la desigualdad de Hölder en los puntos donde Tf está bien definida se tiene que

$$|Tf(x)|^p\leq\left(\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\,|f(y)|\,dy\right)^p=\left(\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)^{\frac{1}{p'}}K(x,y)^{\frac{1}{p}}\,|f(y)|\,dy\right)^p$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)dy\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\,|f(y)|^p\,dy\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\,|f(y)|^p\,dy.$$

Por lo tanto,

$$\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^+} |Tf(x)|^p\,dx \leq \int_{x\in\mathbb{R}^+}\int_{y\in\mathbb{R}^+} K(x,y)\,|f(y)|^p\,dy\,dx$$
$$= \int_{y\in\mathbb{R}^+}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^+} K(x,y)dx\right)|f(y)|^p\,dy = \|f\|_p^p.$$

Cuando $p=1$ y cuando $p=\infty$ este resultado se sigue directamente dado que K es un núcleo de Markov.

(*3.*) Sean, para $N\in\mathbb{N}$, los núcleos

$$K_N(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{si } K(x,y)\leqslant N, \\ N & \text{si } K(x,y) > N, \end{cases}$$

y $T_{K_N}f(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^+} K_N(\cdot,y)f(y)dy$ los operadores integrales asociados. Veamos que $T_{K_N}f$ es Hölder continua respecto a δ, para toda $f\in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1<p\leqslant\infty$, y para todo $N\in\mathbb{N}$. En efecto, dados $x,x'\in\mathbb{R}^+$ y denotando por $I(x,x')$ al menor intervalo diádico que contiene a x y x', como $\delta(x,y)=\delta(x',y)$ para todo y fuera de $I(x,x')$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_{K_N}f(x) - T_{K_N}f(x')| &= \left|\int_{\mathbb{R}^+} \left(K_N(x,y) - K_N(x',y)\right) f(y)dy\right| \\
&\leq \int_{\delta(x,y)\leqslant\delta(x,x')} |K_N(x,y) - K_N(x',y)|\,|f(y)|\,dy \\
&\leq N\int_{I(x,x')} |f(y)|\,dy \\
&\leq N\,\|f\|_p \left\|\chi_{I(x,x')}\right\|_{p'} \\
&= N\,\|f\|_p\,|I(x,x')|^{1/p'} \\
&= N\,\|f\|_p\,\delta(x,x')^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Obtuvimos entonces que $T_{K_N}f$ es Lipschitz de orden $1/p'$ (continua Hölder) respecto a δ, lo cual implica la δ-continuidad.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$,

$$|T_{K_N}f(x) - T_{K_N}f(x')| \leq N \int_{I(x,x')} |f(y)|\, dy$$

y la expresión de la derecha tiende a cero cuando $\delta(x,x')$ va a cero, por la absoluta continuidad de la integral. Esto es, $T_{K_N}f$ es uniformemente δ-continua cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

Notemos luego que, para $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, y no negativa se tiene que $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)f(y)dy = \lim\limits_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} K_N(x,y)f(y)dy = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} K_N(x,y)f(y)dy$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto, dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\{x \colon Tf(x) > \lambda\} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \{x \colon T_{K_N}f(x) > \lambda\}.$$

Por la δ-continuidad de las $T_{K_N}f$, los conjuntos en la unión son δ-abiertos y en consecuencia también lo es la unión.

(4.) Recordemos que todo $x \in \mathbb{R}^+$ tiene asociada una (única) sucesión de intervalos diádicos $\mathcal{I}_x = \{I_x^j \colon j \in \mathbb{Z}\}$ tal que $\{x\} = \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} I_x^j$, con lo que $\mathcal{I}_x$ constituye un encaje de intervalos. Notemos luego que para x fuera de $D = \{2^j \colon j \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$, los extremos de los intervalos de la sucesión $\mathcal{I}_x$ convergen por izquierda y derecha a x cuando $j \to +\infty$ pero no toman nunca el valor x. Por lo tanto, para tales x, $d(x,x') = |x - x'| \to 0$ implica $\delta(x,x') \to 0$. En consecuencia, la δ-continuidad de las $T_{K_N}f$ en $\mathbb{R}^+ \backslash D$ implica la d-continuidad en dicho conjunto. Luego, para todo $\lambda > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^+ \backslash D \colon T_{K_N}f(x) > \lambda\}$ es d-abierto. Llamando Z_λ^N al conjunto de los $x \in D$ tales que $T_{K_N}f(x) > \lambda$, tenemos entonces que

$$\{x \colon Tf(x) > \lambda\} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\{x \in \mathbb{R}^+ \backslash D \colon T_{K_N}f(x) > \lambda\} \cup Z_\lambda^N\right).$$

Denominando $G_\lambda = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^+ \backslash D \colon T_{K_N}f(x) > \lambda\}$ y $Z_\lambda = \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} Z_\lambda^N$, se sigue el resultado.

Es posible obtener *(4.)* de una forma un tanto más directa al comparar las topologías determinadas por ambas métricas. En efecto, como todo conjunto δ-abierto es unión de δ-bolas (que son intervalos en $\mathscr{D}$) y cada intervalo diádico es la unión de un intervalo d-abierto con uno de sus extremos (que es un punto de D) entonces cada conjunto δ-abierto es una unión de d-bolas junto con un subconjunto de D. $\square$

Como consecuencia directa de los Lemas 3.8 y 3.9.(1), junto con el Teorema A.15 de diferenciación de Lebesgue, se tiene el siguiente corolario.

COROLARIO 3.10. *Sea* $K \in \mathscr{K}$ *y* T *el operador integral asociado. Entonces* Tf *es medible en* $\mathbb{R}^+$ *para toda* $f \in \bigcup_{1\leqslant p\leqslant\infty} L^p(\mathbb{R}^+)$.

El próximo resultado será fundamental en nuestro estudio, pues provee la representación espectral de los operadores con núcleo en $\mathscr{K}$ en términos del sistema de Haar.

TEOREMA 3.11. *Sea* $K \in \mathscr{K}$ *y* T *el operador asociado. Entonces*

$$Th = \lambda(h)h$$

para toda h *en* $\mathscr{H}$, *con* $\lambda(h) = \Lambda_{j(h)} = \sum_{j>j(h)} \alpha_j$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \in \mathscr{K}$ y T el operador integral asociado. Sean $h \in \mathscr{H}$, $I = I(h)$ el intervalo diádico que soporta a h y $j = j(h) = j(I)$. Consideremos primero el caso $x \in I'$, con I' un hijo de I. Luego, siendo $\{I_x^l\}$ la sucesión de intervalos diádicos encajados que contienen a x, se tiene que $I \cap I_x^l = I$ si $l \leq j$, e $I \cap I_x^l = I_x^l$ si $l > j$. Notemos además que h es constante en I', es decir, $h(y) = h(x)$ para todo $y \in I'$, y que $\int_I h(y)dy = 0$. Escribiendo al núcleo K en su representación en diferencias ponderadas (Lema 3.4.(3)), teniendo en cuenta (α1) para intercambiar la integral y la sumatoria, obtenemos que

$$\begin{aligned}
Th(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)h(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l 2^l \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(x,y))h(y)dy \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l 2^l \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(x,y))h(y)dy \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l 2^l \int_{I\cap I_x^l} h(y)dy \\
&= \sum_{l>j} \alpha_l 2^l \int_{I_x^l} h(y)dy \\
&= \sum_{l>j} \alpha_l 2^l h(x) \left|I_x^l\right|
\end{aligned}$$

$$= h(x)\sum_{l>j}\alpha_l.$$

Por otro lado, si $x \notin I$ entonces $K(x,y)$ es constante para $y \in I$, y como $\int_I h = 0$ entonces $Th(x) = 0 = h(x)$. □

Dado que los valores del espectro respecto al sistema de Haar relativos a un núcleo de $\mathscr{K}$ dependen sólo de los niveles de las wavelets y están dados, precisamente, por la lista $\{\Lambda_j : j \in \mathbb{Z}\}$ definida en el Lema 3.4, de aquí en adelante utilizaremos indistintamente una de las notaciones $\lambda(\mathscr{H})$, $\lambda(\mathbb{Z})$, $\lambda_{\mathbb{Z}}$ o $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ para referirnos a tal conjunto de autovalores. Concluimos, en consecuencia, que el espectro respecto al sistema de Haar del operador integral determinado por un núcleo en $\mathscr{K}$ caracteriza completamente al núcleo, en la forma indicada en el ítem *(4)* del Lema 3.4.

Capítulo 4

Estabilidad de Núcleos de Markov diádicos en $\mathbb{R}^+$

En el Capítulo 2 hemos considerado el concepto de estabilidad de distribuciones con colas pesadas que, en cierto sentido, resulta un sustituto natural de la varianza en procesos poco localizados. El propósito de este capítulo es explorar el concepto de estabilidad para los núcleos introducidos en el Capítulo 3, que jugará un papel clave en nuestros resultados. Por otra parte, se definen las operaciones de iteración y molificación diádica y se estudian sus propiedades fundamentales. En particular, se observa la invariancia de la estabilidad bajo la acción de estas operaciones.

4.1. Estabilidad

Dado $s > 0$, diremos que un núcleo $K \in \mathscr{K}$ es **s-estable** si existe un número real positivo σ tal que

$$\delta(x,y)^{1+s} K(x,y) \xrightarrow[\delta(x,y)\to+\infty]{} \sigma. \tag{16}$$

El valor s se denomina *índice de estabilidad* y el valor σ es el *parámetro de s-estabilidad* (o *parámetro de estabilidad* a secas). Denotamos $\mathscr{K}^s$ a la clase de los núcleos de $\mathscr{K}$ que son s-estables, y $\mathscr{K}^s(\sigma)$ a la subclase de núcleos de $\mathscr{K}^s$ cuyo parámetro de estabilidad es σ.

Observemos que, aún para núcleos de Markov no diádicos, la condición de s-estabilidad diádica postula una estabilidad asintótica.

El siguiente resultado describe la estabilidad desde las tres perspectivas que tenemos para los núcleos markovianos diádicos.

Lema 4.1. *Sea $K \in \mathscr{K}$, $s > 0$ y $\sigma > 0$. Equivalen*

(a) K es s-estable con parámetro σ,

(b) $k_j 2^{(1+s)j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \sigma$,

(c) $2^{sj}\alpha_{-j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} (1-2^{-(1+s)})\sigma$,

(d) $2^{sj}(1-\lambda(-j)) \xrightarrow[j\to+\infty]{} \left(\dfrac{2^{1+s}-1}{2^{1+s}-2}\right)\sigma.$

Demostración. Escribiendo $K = \varphi\circ\delta$, la s-estabilidad se expresa por $\lim_{\delta(x,y)\to+\infty} \delta(x,y)^{1+s}\varphi(\delta(x,y)) = \sigma$, o equivalentemente, $\lim_{j\to+\infty}(2^j)^{1+s}\varphi(2^j) = \sigma$, dado que δ toma valores en $\{2^j : j\in\mathbb{Z}\}\cup\{0\}$. Esto es, $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Mediante la aplicación de las fórmulas de transformación entre las distintas representaciones de los núcleos, dadas en el Lema 3.4, veremos a continuación que $(d) \implies (c) \implies (b) \implies (d)$.

- $(d) \implies (c)$

  Como $\alpha_j = \lambda(j-1)-\lambda(j)$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{sj}\alpha_{-j} &= 2^{sj}\left(\lambda(-j-1)-\lambda(-j)\right) \\ &= 2^{sj}(1-\lambda(-j)) - 2^{-s}2^{s(j+1)}\left(1-\lambda\left(-(j+1)\right)\right) \end{aligned}$$

  y, tomando límite,

$$\lim_{j\to+\infty} 2^{sj}\alpha_{-j} = \left(1-2^{-s}\right)\left(\frac{2^{1+s}-1}{2^{1+s}-2}\right)\sigma = \left(1-2^{-s}\right)\left(\frac{1-2^{-(1+s)}}{1-2^{-s}}\right)\sigma.$$

- $(c) \implies (b)$

  Sea $\epsilon > 0$. Por (c), existe J entero tal que para todo $j \geqslant J$ se tiene que $2^{sj}\alpha_{-j} \in \big((1-2^{-(1+s)})\sigma-\epsilon, (1-2^{-(1+s)})\sigma+\epsilon\big)$. Luego, si $j\geqslant J$,

$$\begin{aligned} k_j &= \sum_{l\geqslant j} 2^{-l}\alpha_{-l} \\ &= \sum_{l\geqslant j} 2^{-(1+s)l}2^{sl}\alpha_{-l} \\ &\leqslant \big((1-2^{-(1+s)})\sigma+\epsilon\big)\sum_{l\geqslant j} 2^{-(1+s)l} \\ &= \big((1-2^{-(1+s)})\sigma+\epsilon\big)\left(\frac{1}{1-2^{-(1+s)}}\right)2^{-(1+s)j}. \end{aligned}$$

  O sea, $k_j2^{(1+s)j} \leq \sigma+\tilde{\epsilon}$, con $\tilde{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{1-2^{-(1+s)}}$. De igual manera, $k_j2^{(1+s)j} \geq \sigma-\tilde{\epsilon}$. Por lo tanto, $k_j2^{(1+s)j} \to \sigma$ cuando $j\to+\infty$.

- $(b) \implies (d)$

Por las fórmulas de transformación,

$$1-\lambda(j)=\sum_{l\leqslant j}\alpha_l=\sum_{l\leqslant j}2^{-l}(k_{-l}-k_{-l+1}).$$

Luego,

$$\begin{aligned}2^{sj}(1-\lambda(-j)) &= \sum_{l\geqslant j}2^{l+sj}(k_l-k_{l+1})\\ &= \sum_{l\geqslant j}2^{s(j-l)}\left(2^{(1+s)l}k_l-2^{-(1+s)}2^{(1+s)(l+1)}k_{l+1}\right).\end{aligned}$$

Por (b), el paréntesis en la suma converge a $\left(1-2^{-(1+s)}\right)\sigma$ cuando j, y con él l, tiende a $+\infty$. De aquí que

$$\lim_{j\to+\infty}2^{sj}(1-\lambda(-j)) = \left(\frac{1}{1-2^{-s}}\right)\left(1-2^{-(1+s)}\right)\sigma = \frac{2^s-\frac{1}{2}}{2^s-1}\sigma = \frac{2^{1+s}-1}{2^{1+s}-2}\sigma.$$

□

Observemos que si traducimos la condición de s-estabilidad a un perfil φ de variable continua, tendríamos que $\lim_{x\to+\infty}x^{1+s}\varphi(x)=\sigma$, es decir, $\varphi(x)$ sería del orden de $x^{-(1+s)}$ en $+\infty$. En nuestro caso el correlato, dado por el ítem (b) anterior, es que k_j tenga un comportamiento del orden de $2^{-j(1+s)}$ cuando $j\to+\infty$, lo cual se explica por el hecho de que k_j registra el valor que toma el núcleo K en pares de puntos que se encuentran a δ-distancia 2^j.

Una descripción más completa de la estabilidad y del comportamiento general de las colas de los núcleos en $\mathscr{K}$ puede darse al definir los conceptos de sub y supra estabilidad.

Definición 4.1. Diremos que un núcleo $K\in\mathscr{K}$ es **sub-s-estable** si

(17) $$\lim_{\delta(x,y)\to+\infty}\delta(x,y)^{1+s}K(x,y)=0,$$

y que es **supra-s-estable** si

(18) $$\lim_{\delta(x,y)\to+\infty}\delta(x,y)^{1+s}K(x,y)=+\infty.$$

Con la notación o-chica, la condición de sub-s-estabilidad se expresa $K\in o(\delta^{-(1+s)})$ cuando $\delta\to+\infty$. Los resultados del Lema anterior se obtienen de igual manera para estos casos.

Lema 4.2. *Sea $K \in \mathscr{K}$ y $s > 0$. Entonces K es sub(supra)-s-estable si y sólo si se dá alguna de las siguientes condiciones*

(a) $k_j 2^{(1+s)j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0\ (+\infty)$;
(b) $2^{sj}\alpha_{-j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0\ (+\infty)$;
(c) $2^{sj}(1-\lambda(-j)) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0\ (+\infty)$.

Observemos que si un núcleo es sub-s-estable para algún $s > 0$ entonces es sub-$\tilde{s}$-estable para todo $\tilde{s} < s$. De igual manera, si un núcleo es supra-s-estable entonces también lo es para todo $\bar{s} > s$. Además, un núcleo s-estable resulta sub-$\tilde{s}$-estable para todo $\tilde{s} < s$ y supra-$\bar{s}$-estable para todo $\bar{s} > s$.

Dado que la condición de Markov determina que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j 2^{j-1} = 1$ entonces podemos considerar que todo núcleo en $\mathscr{K}$ es "sub-0-estable". Luego, podemos dotar a los núcleos de $\mathscr{K}$ de un tipo de orden de estabilidad dado por las siguientes definiciones.

Definición 4.2. Sea $K \in \mathscr{K}$. Si el conjunto $\{s \geqslant 0\colon K \text{ es sub-s-estable}\}$ está acotado superiormente, se define el *orden de estabilidad inferior* de K por

$$s_* = s_*(K) = \sup\{s \geqslant 0\colon K \text{ es sub-s-estable}\}.$$

En caso contrario se define $s_* = +\infty$.

Si un núcleo es s-estable ($s > 0$) entonces $s_* = s$. Por otro lado, todo núcleo de $\mathscr{K}$ de soporte compacto es sub-s-estable para todo $s > 0$, es decir, $s_* = +\infty$ en este caso. También puede darse el caso $s_* = 0$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. Sea K el núcleo determinado por la sucesión $k_j = 2^{-j}\frac{a}{j^2}\chi_{\mathbb{N}}(j)$, para una constante $a > 0$ adecuada de manera que se verifique la propiedad de Markov. Para todo $s > 0$ tenemos entonces que $\lim_{j\to+\infty} k_j 2^{(1+s)j} = +\infty$, con lo cual $s_*(K) = 0$.

Definición 4.3. Para aquellos núcleos de $\mathscr{K}$ que son supra-s-estables para algún $s > 0$, se define el *orden de estabilidad superior* dado por

$$s^* = s^*(K) = \inf\{s > 0\colon K \text{ es supra-s-estable}\}.$$

En otro caso definimos $s^* = +\infty$.

Claramente, para todo núcleo K se verifica que $s_*(K) \leq s^*(K)$. Cuando se dá la igualdad entonces definimos a este valor como el *orden de estabilidad* de K. Si un núcleo $K \in \mathscr{K}$ es s-estable (de acuerdo a la definición (16)), entonces K tiene orden de estabilidad s. Sin embargo, el valor del orden de estabilidad de un núcleo no nos dice nada sobre su estabilidad en ese punto, como ilustran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8. Sea K determinado por la sucesión $k_j = a2^{-2j}j^{2\theta}\chi_{\mathbb{N}}(j)$, para $\theta \in \mathbb{R}$ y una constante $a = a(\theta) > 0$ adecuada de manera que se verifique la propiedad de Markov. Entonces $s_*(K) = s^*(K) = 1$ para cualquier valor de θ; sin embargo, K es 1-estable cuando $\theta = 0$, es sub-1-estable cuando $\theta = -1$ y es supra-1-estable cuando $\theta = 1$.

Ejemplo 9. El núcleo K determinado por la sucesión $k_j = a2^{-2j}\chi_{2\mathbb{N}}(j) + b2^{-2j}\chi_{2\mathbb{N}-1}(j)$, para constantes positivas a y b distintas elegidas de manera que se verifique la propiedad de Markov, tiene orden de estabilidad 1. Pero K no es 1-estable ya que el parámetro de estabilidad es indefinido (u oscilante), debido a que el límite de $k_j 2^{2j}$ cuando $j \to +\infty$ es a si miramos la sucesión de j pares y es igual a b cuando recorremos los j impares.

Cuando $s_*(K) < s^*(K)$ no existe un orden de estabilidad determinado, sin embargo cuando ambos valores son finitos puede entenderse al intervalo $[s_*(K), s^*(K)]$ como el orden de estabilidad, ya que el núcleo K tendrá un comportamiento oscilante entre las potencias $\delta^{-(1+s^*)}$ y $\delta^{-(1+s_*)}$ lejos de la diagonal.

4.2. Composición de núcleos de Markov

Sean K_1 y K_2 núcleos en $\mathscr{K}$. Se denota y define la **composición** entre K_1 y K_2 por

$$(K_1 * K_2)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^+} K_1(x, z)K_2(z, y)\, dz. \tag{19}$$

En lo que sigue, asociamos a cada núcleo $K \in \mathscr{K}$ las sucesiones $\{k_j\}$, $\{\alpha_j\}$ y $\{\lambda_j\}$ provistas por el Lema 3.4. Cuando utilicemos notación de sub- o super- índices para núcleos en $\mathscr{K}$ escribiremos las sucesiones asociadas con los mismos superíndices; por ejemplo, a $K_i \in \mathscr{K}$ asociamos $\{k_j^i\}$, $\{\alpha_j^i\}$ y $\{\lambda_j^i\}$.

Lema 4.3.

(a) Sean K_1 y $K_2 \in \mathscr{K}$. Entonces el núcleo $K_3 = K_1 * K_2$ está bien definido y pertenece a la clase $\mathscr{K}$, con $\alpha_j^3 = \alpha_j^1\alpha_j^2 + \alpha_j^1\lambda_j^2 + \alpha_j^2\lambda_j^1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$;

(b) $(\mathscr{K}, *)$ *es un semigrupo conmutativo;*

(c) $\lambda_j^3 = \lambda_j^1 \lambda_j^2$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Dado que K_1 y K_2 son medibles y no negativos entonces K_3 está bien definido y es no negativo. Por Tonelli, tenemos además que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^+} K_3(x,y)\,dy &= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z) K_2(z,y)\,dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z) \left(\int_{\mathbb{R}^+} K_2(z,y)\,dy \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z)\,dz \\ &= 1\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Veamos luego que K_3 es diádico y su representación a través de los coeficientes $\{\alpha_j^3\}$. Escribiendo a los núcleos K_1 y K_2 en su representación a través de los coeficientes $\{\alpha_j^1\}$ y $\{\alpha_j^2\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}K_3(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z) K_2(z,y)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j^1 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,z)) \right) \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_l^2 2^l \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(z,y)) \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_j^1 \alpha_l^2 2^{j+l} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,z)) \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(z,y))\,dz.\end{aligned}$$

En este punto usaremos el teorema de Fubini para intercambiar las sumatorias con la integral. Para ver que esto es posible, tomemos $x, y \in \mathbb{R}^+$ y sea $I = I_{x,y}^{j_0}$ el menor intervalo diádico que contiene a x y a y, es decir $\delta(x,y) = \left| I_{x,y}^{j_0} \right| = 2^{-j_0}$. Notemos que dado $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,z)) = \chi_{I_x^j}(z)$, donde $I_x^j = I_{k(x,j)}^j$ es el único intervalo diádico de nivel j que contiene a x, con lo cual $|I_x^j| = 2^{-j}$. Además, dado que $I_x^{j_0+1} \cap I_y^{j_0+1} = \emptyset$ entonces $I_x^l \cap I_y^i = \emptyset$ si $j > j_0$ y $l > j_0$. Luego, por el teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^+} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_j^1\right| \left|\alpha_l^2\right| 2^{j+l} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,z)) \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(z,y))\,dz = \\ &\qquad = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_j^1\right| \left|\alpha_l^2\right| 2^{j+l} \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,z)) \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(z,y))\,dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_j^1\right| 2^j \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_l^2\right| 2^l \left|I_x^j \cap I_y^l\right| \\
&\leq \sum_{j\leqslant j_0} \left|\alpha_j^1\right| 2^j \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_l^2\right| 2^l \left|I_y^l\right| + \sum_{j>j_0} \left|\alpha_j^1\right| 2^j \sum_{l\leqslant j_0} \left|\alpha_l^2\right| 2^l \left|I_x^j\right| \\
&\leq 2^{j_0} \sum_{j\leqslant j_0} \left|\alpha_j^1\right| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_l^2\right| + \sum_{j>j_0} \left|\alpha_j^1\right| \sum_{l\leqslant j_0} \left|\alpha_l^2\right| 2^{j_0} \\
&= 2^{j_0} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_j^1\right| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|\alpha_l^2\right| \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Aplicando entonces el teorema de Fubini a la expresión de $K_3(x,y)$, observando que

$$
I_x^l \cap I_y^j = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad j > j_0 \;\; \text{y} \;\; l > j_0 \\ I_x^j & \text{si} \quad l \leqslant j \;\; \text{y} \;\; l \leqslant j_0 \\ I_y^l & \text{si} \quad j < l \;\; \text{y} \;\; j \leqslant j_0, \end{cases}
$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
K_3(x,y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_j^1 \alpha_l^2 2^{j+l} \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,z)) \chi_{(0,2^{-l}]}(\delta(z,y))\, dz \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \alpha_j^1 \alpha_l^2 2^{j+l} \left|I_x^j \cap I_y^l\right| \\
&= \sum_{l\leqslant j_0} \sum_{j\geqslant l} \alpha_j^1 \alpha_l^2 2^{j+l} \left|I_x^j\right| + \sum_{j\leqslant j_0} \sum_{l>j} \alpha_j^1 \alpha_l^2 2^{j+l} \left|I_y^l\right| \\
&= \sum_{j\leqslant j_0} \sum_{l\geqslant j} \alpha_l^1 \alpha_j^2 2^j + \sum_{j\leqslant j_0} \sum_{l>j} \alpha_j^1 \alpha_l^2 2^j \\
&= \sum_{j\leqslant j_0} 2^j \left(\alpha_j^2 \sum_{l\geqslant j} \alpha_l^1 + \alpha_j^1 \sum_{l>j} \alpha_l^2 \right) \\
&= \sum_{j\leqslant j_0} 2^j \left(\alpha_j^2 (\lambda_j^1 + \alpha_j^1) + \alpha_j^1 \lambda_j^2 \right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j^3 2^j \chi_{(0,2^{-j}]}(\delta(x,y)),
\end{aligned}
$$

lo cual completa la prueba del ítem *(a)*.

Considerando K_1 y K_2 como núcleos de los operadores integrales T_1 y T_2, entonces K_3 será el núcleo de la composición $T_1 \circ T_2$. En efecto, dado $h \in \mathscr{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned} T_3h(x) &= \int_{\mathbb{R}^+} K_3(x,y)h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z)K_2(z,y)\,dz\,h(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z)\int_{\mathbb{R}^+} K_2(z,y)h(y)\,dy\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} K_1(x,z)T_2h(z)\,dz \\ &= T_1(T_2h)(x) \\ &= \lambda^2_{j(h)}T_1h(x) \\ &= \lambda^2_{j(h)}\lambda^1_{j(h)}h(x). \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el ítem *(c)*, del cual obtenemos como consecuencia las propiedades asociativa y conmutativa de la composición en $\mathscr{K}$ y se concluye la demostración del ítem *(b)*. $\square$

Lema 4.4. *$(\mathscr{K}^s, *)$ es un semigrupo conmutativo, para todo $s > 0$. Más aún, si $K_1 \in \mathscr{K}^s(\sigma_1)$ y $K_2 \in \mathscr{K}^s(\sigma_2)$ entonces $(K_1 * K_2) \in \mathscr{K}^s(\sigma_1 + \sigma_2)$.*

Demostración. Por el Lema anterior, sólo debemos probar que se cumple la ley de composición interna. Sean $K_1 \in \mathscr{K}^s(\sigma_1)$ y $K_2 \in \mathscr{K}^s(\sigma_2)$, es decir, $\lim_{j\to+\infty} 2^{sj}\alpha^i_{-j} = (1-2^{-(1+s)})\sigma_i$ para $i = 1,2$. Si $K_3 = K_1 * K_2$, por el lema anterior tenemos que $\alpha^3_{-j}2^{sj} = \alpha^1_{-j}\alpha^2_{-j}2^{sj} + \alpha^1_{-j}2^{sj}\lambda^2_{-j} + \alpha^2_{-j}2^{sj}\lambda^1_{-j}$. Como $\lim_{j\to+\infty}\alpha^i_{-j} = 0$ y $\lim_{j\to+\infty}\lambda^i_{-j} = 1$ para $i = 1,2$, entonces

$$\lim_{j\to+\infty}\alpha^3_{-j}2^{sj} = (1-2^{-(1+s)})(\sigma_1+\sigma_2).$$

Es decir, $(K_1 * K_2) \in \mathscr{K}^s(\sigma_1+\sigma_2)$. $\square$

Dicho coloquialmente, al componer dos núcleos con el mismo índice de estabilidad éste se preserva y el parámetro resultante es la suma de los previos. Si, en cambio, se componen dos núcleos con distinto índice de estabilidad, por un argumento similar al de la demostración anterior obtenemos que subsiste el menor de ellos con su respectivo parámetro de estabilidad.

Definición 4.4. Llamamos **iteración** a la composición de un mismo núcleo un número determinado de veces. Precisamente, dados $K \in \mathscr{K}$ y $m \in \mathbb{N}$, se denota K^m a la iteración de K m-veces. Es decir, $K^1 = K,\ K^2 = K * K,\ K^3 = K * K * K$, ...

Corolario 4.5. *Sean $K \in \mathscr{K}$ y $m \in \mathbb{N}$. Entonces los autovalores correspondientes al núcleo K^m están dados por $\lambda_j^m = (\lambda_j)^m$ y sus coeficientes por $\alpha_j^m = (\alpha_j + \lambda_j)^m - (\lambda_j)^m$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Además, si $K \in \mathscr{K}^s(\sigma)$ entonces $K^m \in \mathscr{K}^s(m\sigma)$.*

4.3. Molificación diádica de núcleos de Markov

Para introducir el concepto de molificación diádica, recordemos que en el caso euclídeo $\mathbb{R}^n$ una dilatación o contracción de un vector aleatorio se traduce en la molificación de su función de densidad, es decir, si el vector aleatorio X se distribuye con una función de densidad $g(x)$ entonces, para $c > 0$, el vector aleatorio cX tiene función de densidad dada por $c^{-n}g(c^{-1}x)$. Se llama a esta última la molificación con parámetro c de la función g. En el caso que nos ocupa se aplica el mismo principio a los núcleos de Markov diádicos, tomando parámetros de molificación diádicos (potencias de dos) para que el núcleo resultante continúe siendo diádico.

Definición 4.5. Sean $K \in \mathscr{K}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Se denota y define la **molificación** de K con factor o parámetro 2^i por

$$K_i(x, y) = 2^i K(2^i x, 2^i y). \tag{20}$$

Notemos que al escribir al núcleo como función de la distancia diádica, en la forma $K = \varphi \circ \delta$, la operación definida se corresponde a la molificación en $\mathbb{R}$ del perfil φ con parámetro 2^i, es decir, $K_i(x, y) = 2^i \varphi(2^i \delta(x, y))$. Usamos subíndices para la molificación, ya que hemos utilizado supraíndices para la iteración.

Lema 4.6.

(a) La molificación es cerrada en $\mathscr{K}$ y en $\mathscr{K}^s$;

(b) si $K \in \mathscr{K}^s(\sigma)$ entonces $K_i \in \mathscr{K}^s(2^{-is}\sigma)$.

Demostración. Sean $K \in \mathscr{K}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Dado que $K_i(x, y) = 2^i K(2^i x, 2^i y) = 2^i \varphi(\delta(2^i x, 2^i y)) = 2^i \varphi(2^i \delta(x, y))$ el núcleo K_i es diádico y toma valores no negativos. También, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, $\int_{\mathbb{R}^+} K_i(x, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^+} 2^i K(2^i x, 2^i y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^+} K(2^i x, z)\, dz = 1$, ya que K es un núcleo de Markov. Por lo tanto, $K_i \in \mathscr{K}$. Además, si $\{k_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes correspondientes a la representación diádica de K, de la fórmula $K_i(x,y) = 2^iK(2^ix, 2^iy) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^ik_j\chi_{L(2^j)}(2^ix, 2^iy) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^ik_j\chi_{L(2^{j-i})}(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^ik_{j+i}\chi_{L(2^j)}(x,y)$, obtenemos que los coeficientes $\{k_{i,j}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ correspondientes a K_i están dados por $k_{i,j} = 2^ik_{j+i}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y para cada $i \in \mathbb{Z}$. Aplicando las fórmulas de transformación obtenemos asimismo que $\alpha_{i,j} = \alpha_{j-i}$ y $\lambda_{i,j} = \lambda_{j-i}$.

Si $s > 0$, $\sigma > 0$ y $K \in \mathscr{K}^s(\sigma)$, entonces $k_j 2^{(1+s)j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \sigma$. Por lo tanto, $k_{i,j}2^{(1+s)j} = 2^ik_{j+i}2^{(1+s)j} = 2^{-is}k_{j+i}2^{(1+s)(j+i)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 2^{-is}\sigma$. □

4.4. Iteración, molificación y estabilidad

Manteniendo la analogía con los teoremas del límite central clásicos, buscamos la definición de procesos de composición iterada (iteración) y molificación de núcleos en $\mathscr{K}^s$ de manera que la expansión del parámetro de estabilidad producida por la iteración sea compensada por la contracción que produce la molificación. Esto se puede lograr en el caso que $s \in \mathbb{Q}^+$.

Sean $u, v \in \mathbb{N}$. Se define el proceso $\boldsymbol{P_v^u}$, de iteración y molificación diádica, como aquel que aplicado a un núcleo $K \in \mathscr{K}$ devuelve la sucesión de núcleos

$$P_v^u(K) = \left\{P_v^u(K,i) = K_{vi}^{2^{ui}} \colon i \in \mathbb{N}\right\}, \tag{21}$$

que tiene por i-ésimo elemento al núcleo K molificado con parámetro 2^{vi} e iterado 2^{ui} veces. Dado que las operaciones de iteración y molificación conmutan, puede verse a $P_v^u(K)$ de manera recursiva como la sucesión iniciada en K y en la que cada elemento resulta de iterar 2^u veces al núcleo anterior y luego molificarlo con parámetro 2^v.

Sean $s \in \mathbb{Q}^+$ y $u, v \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{u}{v} = s$. Si $K \in \mathscr{K}^s(\sigma)$ entonces, por el Corolario 4.5 y el Lema 4.6, $K_{vi} \in \mathscr{K}^s(2^{-vis}\sigma) = \mathscr{K}^s(2^{-ui}\sigma)$ y $P_v^u(K,i) = K_{vi}^{2^{ui}} \in \mathscr{K}^s(2^{ui}(2^{-ui}\sigma)) = \mathscr{K}^s(\sigma)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Es decir, los procesos P_v^u conservan el índice y el parámetro de estabilidad cuando se aplican a núcleos en $\mathscr{K}^s$, para $s = \frac{u}{v}$. En vista de esto, definimos las clases de **procesos s-estables** (aquellos que conservan el parámetro de estabilidad)

$$\mathscr{P}^s = \left\{P_v^u \colon u, v \in \mathbb{N}, s = \tfrac{u}{v}\right\}. \tag{22}$$

Del Corolario 4.5 y el Lema 4.6 se obtiene además la fórmula para el espectro, respecto al sistema de Haar, de los núcleos en las sucesiones obtenidas por procesos de iteración y molificación diádica en términos del espectro de los núcleos iniciales.

LEMA 4.7. *Sean $u, v \in \mathbb{N}$ y sea $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathbb{Z})$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, el núcleo $K^{(i)} = P_v^u(K,i) = K_{vi}^{2^{ui}}$ tiene por espectro a $\left\{\lambda^{(i)}(j) = \lambda^{2^{ui}}(j - vi) \colon j \in \mathbb{Z}\right\}$.*

En adelante, continuando con la notación del lema, denotaremos por $\left\{K^{(i)} \colon i \in \mathbb{N}\right\}$ a la sucesión de núcleos obtenida por un proceso P_v^u aplicado a un núcleo $K \in \mathscr{K}$, siempre que se sobreentienda cual es el proceso aplicado. A las sucesiones de coeficientes correspondientes a cada núcleo $K^{(i)}$, dadas en el Lema 3.4, las denotaremos por $\{k_j^{(i)}\}$, $\{\alpha_j^{(i)}\}$ y $\{\Lambda_j^{(i)}\}$ (también nos referiremos a esta última por $\{\lambda^{(i)}(j)\}$).

Capítulo 5

Teorema de la alternativa y el límite central

En este capítulo se expone uno de los resultados principales de nuestro análisis. Como en el caso clásico, el espectro de la sucesión de operadores, ahora respecto al sistema de Haar, nos proporciona información esencial sobre el comportamiento límite. Veremos que los procesos de iteración y molificación aplicados a núcleos de Markov diádicos dan lugar a sólo tres alternativas de convergencia espectral, que tendrá como consecuencia la convergencia en L^p de la sucesión de operadores asociados. Estas alternativas se traducen luego en aproximaciones de la identidad, límites centrales y procesos disipativos. Más aún, veremos que la relación entre los índices de estabilidad de los procesos y de los núcleos iniciales determinan tales opciones de convergencia. Analizamos seguidamente el caso del límite central, donde los atractores son las soluciones de las ecuaciones de difusión fraccionaria diádica en $\mathbb{R}^+$, de igual manera que los teoremas del límite central clásicos tienen como límite al núcleo del calor de Weierstrass o, en general, a las distribuciones simétricas α-estables. De las aproximaciones de la identidad nos ocuparemos en el Capítulo 6.

5.1. Los posibles límites del espectro

Con el objeto de proporcionar un desarrollo progresivo, e intuitivo, de la teoría, comenzaremos realizando nuestro análisis sobre el caso más simple dado por el proceso "estándar" P_1^1, definido según (21), seguido del resultado para P_2^1, para finalmente presentar los resultados correspondientes a los procesos generales P_v^u, con $u, v \in \mathbb{N}$.

Sean $K \in \mathscr{K}$ y $\lambda(\mathbb{Z})$ los autovalores asociados a K con respecto al sistema de Haar, y consideremos la sucesión $P_1^1(K) = \left\{K^{(i)} = P_1^1(K,i) = K_i^{2^i} : i \in \mathbb{N}\right\}$. Según el Lema 4.7, para cada $i \in \mathbb{N}$ el núcleo $K^{(i)}$ tiene autovalores $\lambda^{(i)}(j) = \lambda^{2^i}(j-i)$. Nos interesa estudiar el comportamiento límite cuando i crece, para cada j fijo. Para esto comencemos viendo el caso en que el perfil φ correspondiente a K tiene soporte compacto (o, equivalentemente, acotado).

Lema 5.1. *Sea $K = \varphi \circ \delta$ un núcleo de Markov diádico. El perfil φ tiene soporte compacto si y sólo si existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda(j_0) = 1$. En tal caso,* $\lim_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(j) = 1$ *para todo $j \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Dado que $\varphi(2^j) = k_j$, el perfil φ tiene soporte compacto si y sólo si existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $k_j = 0$ para todo $j \geqslant j_0$. En este caso, $\alpha_j = 2^{-j}(k_{-j} - k_{-j+1}) = 0$ para todo $j \leqslant -j_0$ y, en consecuencia, $1 = \sum_{j>-j_0} \alpha_j + \sum_{j\leqslant -j_0} \alpha_j = \lambda(-j_0)$, en vista de las fórmulas de transformación dadas en el Lema 3.4. La recíproca se obtiene de manera similar.

Supongamos, entonces, que $\lambda(j_0) = 1$ para $j_0 \in \mathbb{Z}$. Por la propiedad de los autovalores ($\Lambda 3$) del Lema 3.4.(4) y la Proposición 3.6.(3), se tienen las desigualdades

$$\sum_{l<j_0} \lambda(l)2^l \leqslant \sum_{l<j_0} 2^l = 2^{j_0} = \lambda(j_0)2^{j_0} \leqslant \sum_{l<j_0} \lambda(l)2^l.$$

Esto es, $\sum_{l<j_0} \lambda(l)2^l = 2^{j_0}$. Utilizando nuevamente la Proposición 3.6.(3), debe ser $\lambda(l) = 1$ para todo $l \leqslant j_0$. Por lo tanto, para j entero e $i \geqslant j - j_0$ se tiene que $\lambda(j-i) = 1$ y, en consecuencia,

$$\lim_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(j) = \lim_{i\to+\infty} \lambda^{2^i}(j-i) = 1.$$

□

Es decir, en este caso el límite espectral es constantemente 1. Por otro lado, cuando el perfil correspondiente al núcleo K tiene soporte no acotado podemos escribir su espectro en una forma adecuada para estudiar el límite, dada por la expresión

$$\lambda(j) = 1 - 2^{-\gamma(j)} \tag{23}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$, donde $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ verifica

($\gamma 1$) $\gamma(j) \to +\infty$ cuando $j \to -\infty$;

($\gamma 2$) $\gamma(j) \to 0$ cuando $j \to +\infty$;

($\gamma 3$) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\gamma(j-k)-k} \leqslant 2^{-\gamma(j)}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Estas condiciones se corresponden una a una con $(\Lambda 1), (\Lambda 2)$ y $(\Lambda 3)$ en el Lema 3.4.(4). Entonces, para $j \in \mathbb{Z}$ e $i \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\lambda^{(i)}(j) = \lambda^{2^i}(j-i) = \left(1 - 2^{-\gamma(j-i)}\right)^{2^i} = \left[\left(1 - 2^{-\gamma(j-i)}\right)^{2^{\gamma(j-i)}}\right]^{2^{-\gamma(j-i)+i}}.$$

Dado que el límite de la anterior expresión entre corchetes es e^{-1} cuando $i \to +\infty$, la existencia del límite de $\lambda^{(i)}(j)$ cuando $i \to +\infty$ resulta equivalente a que exista el límite de $i-\gamma(j-i)$ cuando $i \to +\infty$, y como $\lim_{i\to+\infty} i-\gamma(j-i) = j-\lim_{i\to+\infty} j-i+\gamma(j-i) = j - \lim_{i\to-\infty} i+\gamma(i)$, pueden darse los siguientes casos:

$$\lim_{i\to-\infty} i+\gamma(i) = \begin{cases} -\infty, \\ +\infty, \\ c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si ocurre el primer caso, resulta $\lim_{i\to+\infty} i-\gamma(j-i) = +\infty$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, $\lambda^{(i)}(j) \to 0$ cuando $i \to +\infty$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Si se dá el segundo caso entonces $\lim_{i\to+\infty} i-\gamma(j-i) = -\infty$ y $\lim_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(j) = 1$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Finalmente, en el tercer caso se tiene que $\lim_{i\to+\infty} i-\gamma(j-i) = j-c$ para cada entero j y luego

$$\lim_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(j) = e^{-2^{j-c}} = e^{-\nu 2^j}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$, con $\nu = 2^{-c} \in \mathbb{R}^+$.

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente **Teorema de Alternativa** para P_1^1.

Teorema 5.2. *Sea $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathscr{H})$ respecto al sistema de Haar y consideremos la sucesión $\left\{K^{(i)} : i \in \mathbb{N}\right\} = P_1^1(K)$. Si existe $\lim_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(h_0)$ para alguna $h_0 \in \mathscr{H}$ entonces existe $\lim\limits_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(h) =: \lambda_\infty(h)$ para toda $h \in \mathscr{H}$ y ocurre uno de los siguientes casos:*

(A) $\lambda_\infty \equiv 0$

(B) $\lambda_\infty \equiv 1$

(C) $\lambda_\infty(h) = e^{-\nu 2^{j(h)}}$ *para toda* $h \in \mathscr{H}$*, para algún* $\nu \in \mathbb{R}^+$*.*

Observemos que el caso del ítem (C) es el único en que el núcleo límite conserva la clase $\mathscr{K}$. Como vimos en la demostración que precede al teorema, esta ley central ocurre si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{i\to-\infty} i+\gamma(i) = c$. Esta condición en la función γ equivale a que $2^{-j}(1-\lambda(j)) = 2^{-(j+\gamma(j))} \to \nu > 0$ cuando $j \to -\infty$ que, por el Lema 4.1, es una condición de estabilidad del núcleo. Tenemos entonces que ocurre el caso (C) si y sólo si K es 1-estable con parámetro $\frac{2}{3}\nu$. La condición para los ítems (A) y (B) es la que se contempla en el Lema 4.2. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 5.3. *Sea* $P_1^1(K) = \{K^{(i)}: i \in \mathbb{N}\}$ *la sucesión de núcleos determinada por el proceso* $P_1^1 \in \mathscr{P}^1$ *y un núcleo* $K \in \mathscr{K}$*. Entonces*

(i) K *es supra-1-estable si y sólo si* $\lambda^{(i)}(j) \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$*;*
(ii) K *es sub-1-estable si y sólo si* $\lambda^{(i)}(j) \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$*;*
(iii) K *es 1-estable con parámetro* $\sigma = \frac{2}{3}\nu$ *si y sólo si* $\lim_{i\to+\infty} \lambda^{(i)}(j) = e^{-\nu 2^j}$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$*.*

Veremos en las secciones siguientes y en el próximo capítulo que las alternativas de convergencia espectral determinan los eventos antes mencionados: el caso (A) es un proceso de dispersión o disipativo, (B) constituye una aproximación a la identidad y (C) un teorema del límite central.

A continuación enunciamos el teorema de alternativa para el proceso P_2^1, correspondiente al caso $s = 1/2$, como muestra de las complicaciones que surgen para procesos fraccionarios. Consideramos aquí la sucesión de núcleos $\{K^{(i)}: i \in \mathbb{N}\} = P_2^1(K)$ determinada a partir de un núcleo $K \in \mathscr{K}$, cuyos autovalores asociados son $\lambda^{(i)}(j) = \lambda_{2i}^{2^i}(j) = \lambda(j-2i)^{2^i}$.

Teorema 5.4 (Teorema de Alternativa, $s = \frac{1}{2}$, P_2^1). *Sea* $K \in \mathscr{K}$ *y* $\lambda(\mathscr{H})$ *su espectro respecto al sistema de Haar. Si existe* $\lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_{2i}^{2^i}(\bar{h})$ *para algún vector* $\bar{h} = (h_0, h_1) \in \mathscr{H}^2$ *tal que* $j(h_0)$ *es par y* $j(h_1)$ *es impar, entonces existe* $\lim\limits_{i\to+\infty} \lambda_{2i}^{2^i}(h) =: \lambda_\infty(h)$ *para toda* $h \in \mathscr{H}$ *y ocurre uno de los siguientes casos:*

(A) $\lambda_\infty \equiv 0$
(B) $\lambda_\infty \equiv 1$
(C) $\lambda_\infty(h) = e^{-\eta_{\phi(h)}\sqrt{2}^{j(h)}}$ *para toda* $h \in \mathscr{H}$*, para algún* $\bar{\eta} = (\eta_0, \eta_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$ *tal que* $\eta_0 \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\eta_1$ *y* $\eta_1 \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\eta_0$*, con* $\phi(h) = j(h)$ *mod 2.*

Nuevamente, notemos que el caso (C) es el único en que el operador límite conserva la clase $\mathscr{K}$.

Por último, enunciamos los resultados correspondientes al caso más general en este contexto: $s \in \mathbb{Q}^+$. No desarrollaremos aquí su demostración, la misma puede hallarse en ambientes algo más generales en el Capítulo 7, Sección 7.3. Para $P_v^u \in \mathscr{P}^s$ y $K \in \mathscr{K}$ consideramos la sucesión de núcleos $\{K^{(i)}: i \in \mathbb{N}\} = P_v^u(K)$, cuyos autovalores asociados están dados por $\lambda^{(i)}(j) = \lambda^{2^{iu}}(j - iv)$. Utilizaremos la notación $\mathbb{Z}_v = \{0, 1, \dots, v-1\}$, para $v \in \mathbb{N}$, y $\phi(h) = \phi(j(h)) = [j(h)]_v = j(h) \bmod v$, para $h \in \mathscr{H}$.

Teorema 5.5 (Alternativa).

Sean $u, v \in \mathbb{N}$, $s = \frac{u}{v}$ y $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathscr{H})$. Si existe $\lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(\bar{h})$ para algún vector $\bar{h} = (h_0, h_1, \dots, h_{v-1}) \in \mathscr{H}^v$ tal que $\phi(h_m) = m$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, entonces existe $\lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(h) = \lambda_\infty(h)$ para toda $h \in \mathscr{H}$ y tienen lugar tres posibilidades

(*A*) $\lambda_\infty \equiv 0$;

(*B*) $\lambda_\infty \equiv 1$;

(*C*) $\lambda_\infty(h) = e^{-\nu_{\phi(h)} 2^{sj(h)}}$ *para toda $h \in \mathscr{H}$, donde $\bar{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{v-1}) \in (\mathbb{R}^+)^v$ y verifica la condición* $\frac{1}{2^{u+v}-2} \sum_{m=1}^{v-1} 2^{m(1+s)} \nu_{\phi(m_0+m)} \leqslant \nu_{m_0}$ *para todo $m_0 \in \mathbb{Z}_v$.*

Antes de enunciar el teorema que relaciona la estabilidad y la convergencia en el caso general, es preciso dar una definición de estabilidad en sub-sucesiones y exponer un lema que provee las equivalencias de esta definición en términos de las distintas representaciones del núcleo. Diremos que un núcleo $K \in \mathscr{K}$, representado por medio de los coeficientes $\{k_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, es s-estable en una subsucesión $\{k_{j_m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ cuando $\lim\limits_{m\to+\infty} k_{j_m} 2^{(1+s)j_m} = \sigma > 0$. Notemos que la definición se aplica cuando las sucesiones de índices $\{j_m\}$ son tales que $j_m \to +\infty$ cuando $m \to +\infty$. De igual manera se define la sub y supra s-estabilidad en (sub)sucesiones.

Lema 5.6. *Sea $K \in \mathscr{K}$. Equivalen*

(a) $\lim\limits_{i\to+\infty} 2^{-s(m-iv)}(1 - \lambda(m - iv)) = \nu_m > 0$ *para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, con $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{v-1}$ tales que* $\frac{1}{2^{u+v}-2} \sum\limits_{m=1}^{v-1} 2^{m(1+s)} \nu_{\phi(m_0+m)} \leqslant \nu_{m_0}$ *para todo $m_0 \in \mathbb{Z}_v$;*

(b) $\lim\limits_{i\to+\infty} k_{m+iv} 2^{(1+s)(m+iv)} = \sigma_m \geq 0$ *para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, con $\bar{\sigma} \neq 0$. Es decir, K es s-estable en al menos una sucesión $\{k_{m+vi}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ con $m \in \mathbb{Z}_v$, y es sub-s-estable en aquellas sucesiones donde no es estable.*

En estas condiciones, para todo $m_0 \in \mathbb{Z}_v$ se tiene que

$$\sigma_{m_0} = \frac{2^{u+v} - 2}{2^{u+v} - 1} \left(\nu_{\phi(-m_0)} - \frac{1}{2^{u+v} - 2} \sum_{m=1}^{v-1} 2^{m(1+s)} \nu_{\phi(m-m_0)} \right)$$

y

$$\nu_{m_0} = \frac{2^{sv+1} - 1}{2^{sv+1} - 2} \left(\sigma_{m_0} + \frac{2^{sv}}{2^{sv+1} - 1} \sum_{m=1}^{v-1} 2^{-sm} \sigma_{\phi(m_0+m)} \right).$$

Teorema 5.7 (Estabilidad y convergencia).
Sean $u, v \in \mathbb{N}$, $s = \frac{u}{v}$ y $K \in \mathscr{K}$. Consideremos el proceso $P_v^u(K)$. Entonces

(i) K es supra-s-estable si y sólo si $\lambda_\infty \equiv 0$;

(ii) K es sub-s-estable si y sólo si $\lambda_\infty \equiv 1$;

(iii) K satisface la propiedad de estabilidad $\lim_{i\to+\infty} k_{m+iv} 2^{(1+s)(m+iv)} = \sigma_m \geq 0$ para $m \in \mathbb{Z}_v$, con $\bar{\sigma} \neq 0$, si y sólo si ocurre la alternativa (C) del Teorema 5.5, con $\bar{\nu}$ y $\bar{\sigma}$ relacionados por las fórmulas descriptas en el Lema 5.6;

(iv) K es s-estable con parámetro $\sigma = \left(\frac{2^{1+s}-2}{2^{1+s}-1}\right)\nu$ si y sólo si $\lambda_\infty(h) = e^{-\nu 2^{sj(h)}}$ para toda $h \in \mathscr{H}$.

5.2. Convergencia en L^p

Veremos aquí que una consecuencia de la convergencia del espectro, respecto al sistema de Haar, para familias de operadores diagonalizables respecto a $\mathscr{H}$ que además sean lineales y continuos en espacios L^p, es la convergencia en L^p. Tratamos primeramente el caso del espacio L^2, del cual $\mathscr{H}$ es base ortonormal, y luego el caso general para $1 < p < \infty$, donde $\mathscr{H}$ es una base incondicional de L^p y el Teorema 3.3 provee una caracterización del espacio.

Teorema 5.8. *Sea $(T_i)_{i\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ una sucesión de operadores lineales y continuos en L^2 y diagonalizables respecto a $\mathscr{H}$ con autovalores $\lambda_i(h)$, para $i \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Si la familia $\{|\lambda_i(h)| \colon i \in \mathbb{N}, h \in \mathscr{H}\}$ está uniformemente acotada y $\lambda_i(h)$ converge a $\lambda_\infty(h)$ cuando $i \to \infty$ puntualmente (para toda $h \in \mathscr{H}$), entonces $T_i f \xrightarrow[i\to+\infty]{L^2} T_\infty f$ para toda $f \in L^2$.*

Demostración. Sea $f \in L^2$. Dado que $\mathscr{H}$ es base ortonormal de L^2 se tiene que $f \overset{L^2}{=} \sum_{h\in\mathscr{H}} \langle f, h\rangle\, h$, y, por la continuidad y linealidad de los operadores, entonces $T_i f = \sum_{h\in\mathscr{H}} \langle f, h\rangle\, T_i h = \sum_{h\in\mathscr{H}} \langle f, h\rangle\, \lambda_i(h) h,$ para todo $i \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Luego

$$
\begin{aligned}
\left\|T_i f - T_\infty f\right\|_2^2 &= \left\| \sum_{h\in\mathscr{H}} \left(\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h)\right) \langle f, h\rangle\, h \right\|_2^2 \\
&= \sum_{h\in\mathscr{H}} \left|\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h)\right|^2 \left|\langle f, h\rangle\right|^2,
\end{aligned}
$$

que converge a 0 cuando $i \to +\infty$ por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, dada la acotación uniforme de los autovalores. □

Teorema 5.9. *Sea $1 < p < \infty$, y $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y T_∞ operadores lineales y continuos en L^p y diagonalizables respecto a $\mathscr{H}$, con autovalores $\lambda_i(\mathscr{H})$ para $i \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Si los autovalores están uniformemente acotados y convergen en $\mathscr{H}$ cuando $i \to \infty$, es decir, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i(h) = \lambda_\infty(h)$ para toda $h \in \mathscr{H}$, entonces T_i converge a T_∞ en L^p cuando $i \to \infty$.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 3.3,

$$\begin{aligned}
\|T_i f - T_\infty f\|_p^p &= \left\| \sum_{h\in\mathscr{H}} (\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h)) \langle f, h\rangle\, h \right\|_p^p \\
&\lesssim \left\| \left(\sum_{h\in\mathscr{H}} (\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h))^2 \left|\langle f, h\rangle\right|^2 |I(h)|^{-1} \chi_{I(h)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^p \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \sum_{h\in\mathscr{H}} (\lambda_i(h) - \lambda_\infty(h))^2 \left|\langle f, h\rangle\right|^2 |I(h)|^{-1} \chi_{I(h)}(x) \right|^{\frac{p}{2}} dx,
\end{aligned}$$

y el resultado se obtiene al utilizar dos veces el Teorema de Convergencia Dominada: en la integral, dada la acotación uniforme de los autovalores y la pertenencia de f a L^p, y luego en la serie resultante, pues la podemos acotar por un múltiplo de la serie correspondiente a f, que es finita para casi todo x por las razones anteriores y el Teorema 3.3. □

5.3. El núcleo difusivo

Como ya fue descripto por Actis y Aimar en [1] y [2] (ver Sección 2.5), la ecuación de difusión fraccionaria diádica de orden s en $\mathbb{R}^+$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -D_{dy}^s$$

tiene por solución fundamental al núcleo

$$W_t(x,y) = \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-tb_s 2^{sj(h)}} h(x)h(y), \tag{24}$$

donde $b_s = 1 + \frac{1}{2^{1+s}(2^s-1)}$, el cual puede expresarse por composición de un perfil con la distancia diádica. Precisamente,

$$W_t = \varphi_t \circ \delta$$

donde φ_t es la molificación de parámetro $t^{-1/s}$ del perfil

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\left[-e^{-b_s r^{-s}} + \sum_{j\geq 1} 2^{-j} e^{-b_s (2^j r)^{-s}}\right],$$

definido para $r > 0$. Es decir, $\varphi_t(r) = t^{-1/s}\varphi(t^{-1/s}r)$.

Nuestro estudio de los núcleos de Markov diádicos permite dar mayores precisiones. Veremos que estos perfiles tienen esencialmente la forma de las densidades de las distribuciones simétricas-s-estables, que a su vez se parecen al núcleo de Poisson de orden s, por sus características de acotación y de decaimiento en el infinito.

Proposición 5.10. *El núcleo W_t es un núcleo de Markov diádico, positivo, acotado, monótono decreciente (respecto a δ) y s-estable.*

Demostración. Afirmamos que W_t es un núcleo en la clase $\mathscr{K}$ con autovalores $\lambda_j = e^{-tb_s 2^{sj}}$ ($j \in \mathbb{Z}$). Para ver esto basta con probar que la sucesión $\{\lambda_j\}$ satisface las condiciones ($\Lambda 1$), ($\Lambda 2$) y ($\Lambda 3$) del Lema 3.4, dada la fórmula obtenida en el Lema 3.5 y el Teorema 3.11. Efectivamente, ($\Lambda 1$) y ($\Lambda 2$) son triviales y ($\Lambda 3$) se sigue de que la sucesión $\{\lambda_j\}$ es monótona decreciente (estricta). Esta última propiedad implica asimismo que los coeficientes α_j asociados a W_t según el Lema 3.4 son todos positivos, y por lo tanto $W_t(x,y) > 0$ para todo $x \neq y$ y W_t es monótono decreciente. La s-estabilidad de W_t se obtiene a partir del ítem (d) del Lema 4.1. Por la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-\mu x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mu e^{-\mu x}}{1} = \mu$, con lo cual

$$\lim_{j\to+\infty} 2^{sj}(1-\lambda_{-j}) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1-e^{-tb_s 2^{-sj}}}{2^{-sj}} = tb_s$$

y en consecuencia W_t resulta s-estable con parámetro de estabilidad $t\sigma_s$, con $\sigma_s = b_s\left(\frac{2^{1+s}-2}{2^{1+s}-1}\right)$. Es decir, $\lim_{\delta(x,y)\to+\infty} \delta(x,y)^{1+s} W_t(x,y) = t\sigma_s$.

Por último, la acotación de W_t puede obtenerse de la acotación del perfil φ. Por la monotonía de W_t, basta con demostrar que el límite de $\varphi_t(2^j)$ cuando j tiende a $-\infty$ es finito. En efecto,

$$\begin{aligned}\varphi_t(2^j) &= 2^{-j}\left[-e^{-b_s t 2^{-js}} + \sum_{i\geq 1} 2^{-i} e^{-b_s t 2^{-s(i+j)}}\right] \\ &= -2^{-j} e^{-b_s t 2^{-js}} + \sum_{i\geq 1} 2^{-(i+j)} e^{-b_s t 2^{-s(i+j)}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2^{-j}e^{-b_s t 2^{-js}} + \sum_{\ell=i+j\geq j+1} 2^{-\ell}e^{-b_s t 2^{-s\ell}} \\
&\leq -2^{-j}e^{-b_s t 2^{-js}} + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} 2^{-\ell}e^{-b_s t 2^{-s\ell}} \\
&\leq -2^{-j}e^{-b_s t 2^{-js}} + \sum_{\ell\geq 0} 2^{-\ell} + \sum_{\ell\geq 1} 2^{\ell}e^{-b_s t 2^{s\ell}} \\
&\leq -2^{-j}e^{-b_s t 2^{-js}} + 2 + \sum_{\ell\geq 1} 2\int_{2^{\ell-1}}^{2^{\ell}} e^{-b_s t x^s}dx \\
&= -2^{-j}e^{-b_s t 2^{-js}} + 2 + 2\int_{1}^{\infty} e^{-b_s t x^s}dx
\end{aligned}
$$

y se tiene el resultado dado que el primer término de la última expresión tiende a 0 cuando $j \to -\infty$ y $\int_1^{\infty} e^{-b_s t x^s}dx < \infty$. $\square$

5.4. Teorema del Límite Central y Difusión Fraccionaria Diádica

Los resultados de las secciones anteriores nos permiten finalmente obtener un teorema del límite central asociado al problema de valor inicial en la difusión fraccionaria diádica, con convergencia en el sentido de la norma de L^p. El ítem (iv) del Teorema 5.7 postula que, en sentido espectral, la cuenca de atracción de los núcleos difusivos $W_t = W_{s,t}$ a través de un proceso s-estable (en $\mathscr{P}^s$) consiste en la familia de núcleos $\mathscr{K}^s(t\sigma_s)$, donde σ_s es una constante que depende sólo de s. Como consecuencia, por los resultados de la Sección 5.2, se obtiene la convergencia en el sentido de L^p de los operadores integrales asociados a tales núcleos. Entonces, en el límite, se alcanza la solución de la ecuación de difusión fraccionaria diádica, para cada tiempo $t > 0$.

Observemos que, en general, puede decirse que un proceso $P_v^u(K)$ converge a un *límite central* si se da el caso (C) del Teorema de Alternativas 5.5. Como vimos, este equivale a la condición de estabilidad sobre el núcleo inicial K que expresa el ítem (iii) del Teorema 5.7: la s-estabilidad de K sobre las subsucesiones $\{k_{vj+m}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ para cada $m \in \mathbb{Z}_v = \{0, 1, \dots, v-1\}$, es decir, $\lim_{j\to+\infty} k_{vj+m}2^{(1+s)(vj+m)} = \sigma_m > 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$. No obstante, este caso en toda su generalidad no siempre conduce, como resultado de la convergencia, a la solución de la ecuación de difusión fraccionaria diádica. Lo cual sucede precisamente cuando el núcleo K es s-estable.

Como vimos en la Sección 2.5, la solución del problema de difusión fraccionaria diádica, con condición inicial $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ y variable temporal $t > 0$, esta dada por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} W_t(x,y) f(y)\, dy.$$

TEOREMA 5.11. *Sea $s \in \mathbb{Q}^+$. Sea $P \in \mathscr{P}^s$. Sea K un núcleo de Markov diádico s-estable de parámetro $t\sigma_s > 0$, con $\sigma_s = \left(\frac{2^{1+s}-2}{2^{1+s}-1}\right) b_s$. Si T_i son los operadores integrales inducidos por la sucesión $P(K)$, entonces*

$$T_i f \xrightarrow{L^p} u(\cdot, t) \quad \textit{cuando} \quad i \to \infty$$

para cualquier condición inicial $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 < p < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, v \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{u}{v} = s$. Sean $t > 0$, $K \in \mathscr{K}^s(\sigma_s t)$ y consideremos el proceso $P_v^u(K) = \left\{K^{(i)} = K_{iv}^{2^{iu}} : i \in \mathbb{N}\right\}$. Si $\lambda^{(i)}(\mathbb{Z})$ es la sucesión de autovalores correspondiente al núcleo $K^{(i)}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces por el ítem (iv) del Teorema 5.7 se tiene que $\lim_{i \to +\infty} \lambda^{(i)}(j) = e^{-tb_s 2^{sj}}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, como vimos en la demostración de la Proposición 5.10, el espectro del núcleo difusivo $W_t(x,y)$ está dado precisamente por la sucesión $\left\{\lambda_\infty(j) = e^{-tb_s 2^{sj}} : j \in \mathbb{Z}\right\}$. Por lo tanto, la convergencia en L^p se deriva del Teorema 5.9. □

Capítulo 6

Segunda alternativa: la aproximación a la identidad

En este capítulo abordamos la segunda alternativa de convergencia para los procesos de iteración-molificación contenida en los Teoremas 5.2, 5.4 y 5.5 del capítulo anterior: la aproximación al operador identidad. Consideramos primero la convergencia en medias p y luego, a través del análisis del operador maximal por medio de la descomposición de Calderón–Zygmund, como en el teorema de Zó, que presentaremos en la segunda parte, resolvemos también el problema de la convergencia puntual.

6.1. Concentración

Una familia $\mathcal{K} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ de núcleos de dos variables definidos en $(\mathbb{R}^+, \delta, \mathscr{L})$ **concentra**, con respecto a δ, cuando n tiende a ∞, si para todo $\eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta(x,y)>\eta} K_n(x,y)dy = 0 \tag{25}$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^+$. Cuando $\mathcal{K}$ concentra escribimos $\mathcal{K} \in \mathcal{C}$. La definición puede naturalmente extenderse a familias no numerables de núcleos.

Sea $s \in \mathbb{Q}^+$. Recordemos que un núcleo $K \in \mathscr{K}$ es sub-s-estable si $\delta(x,y)^{1+s}K(x,y)$ tiende a cero cuando $\delta(x,y) \to \infty$, y que la clase de los procesos s-estables está dada por $\mathscr{P}^s = \left\{P^u_v : u, v \in \mathbb{N}, s = \frac{u}{v}\right\}$.

Lema 6.1. *Sea $P \in \mathscr{P}^s$ y sea $K \in \mathscr{K}$ un núcleo sub-s-estable. Entonces la sucesión de núcleos $P(K) = \left\{K^{(i)} = P(K,i) : i \in \mathbb{N}\right\}$ concentra cuando $i \to \infty$.*

Demostración. Denotaremos a los coeficientes en las distintas representaciones del núcleo $K^{(i)}$ (ver Lema 3.4) por medio del superíndice (i). Sea $j \in \mathbb{Z}$. Utilizando las fórmulas de transformación entre las representaciones de un núcleo, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tenemos que

$$\int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y)dy = \sum_{l>j} k^{(i)}_l 2^{l-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{l \le j} k_l^{(i)} 2^{l-1} \\
&= 1 - \lambda_{-j}^{(i)} - 2^j k_j^{(i)} \\
&= 1 - \lambda_{-j}^{(i)} - 2^j \Big[- 2^{-j} \lambda_{-j}^{(i)} + \sum_{l > j} 2^{-l} \lambda_{-l}^{(i)} \Big] \\
&= 1 - 2^j \sum_{l > j} 2^{-l} \lambda_{-l}^{(i)} \\
&= 1 - \sum_{l > 0} 2^{-l} \lambda_{-j-l}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 5.7 (*ii*) y el teorema de convergencia dominada (en el caso discreto), el límite de la última expresión es 0 cuando $i \to \infty$. □

6.2. Aproximaciones a la identidad en L^p

Trivialmente, el operador identidad es lineal y continuo en los espacios $L^p(\mathbb{R}^+)$, para $1 \le p \le \infty$, y es diagonalizable respecto al sistema de Haar $\mathscr{H}$ con espectro constante de valor 1. Dado que $\mathscr{H}$ es base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^+)$ para $1 < p < \infty$, en ese caso la recíproca es cierta. Es decir, si el espectro de un operador lineal y continuo en $L^p(\mathbb{R}^+)$, para $1 < p < \infty$, es constante de valor 1 entonces el operador es la identidad en $L^p(\mathbb{R}^+)$.

Decimos que una sucesión de operadores $\{T_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una **aproximación a la identidad** en el sentido de la norma de L^p si

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_n f - f\|_p = 0$$

para toda $f \in L^p$. Si los operadores están definidos en algún espacio funcional $\mathcal{F}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\lim_{n \to +\infty} T_n f(x) = f(x)$$

en casi todo punto, decimos que la aproximación a la identidad es en sentido puntual en $\mathcal{F}$. Cuando los operadores $\{T_n\}$ están determinados por una sucesión de núcleos $\{K_n\}$, nos referiremos también a tal sucesión de núcleos como una aproximación a la identidad.

Teorema 6.2. *Sea $P \in \mathscr{P}^s$ y sea $K \in \mathscr{K}$ sub-s-estable. Entonces la sucesión de núcleos $\{K^{(i)} = P(K, i) \colon i \in \mathbb{N}\}$ es una aproximación a la identidad en el sentido de L^p, para $1 \le p < \infty$.*

Demostración. La prueba se basa en un argumento de densidad, dado el hecho de que el espacio $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$, de las funciones d-continuas con soporte compacto, es denso en $L^p(\mathbb{R}^+)$, para todo $1 \leq p < \infty$. El ingrediente fundamental para la prueba en $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$ es la propiedad de concentración provista por el Lema 6.1.

Sea $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de operadores integrales determinada por los núcleos $\{K^{(i)}\}$. Comencemos probando el caso $p = 1$. Sea $f \in L^1$ y $\varepsilon > 0$. Por densidad, existe g continua de soporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{4}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|T_i f - f\|_1 &\leq \|T_i f - T_i g\|_1 + \|T_i g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\
&\leq 2\,\|f - g\|_1 + \|T_i g - g\|_1 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|T_i g - g\|_1\,,
\end{aligned}$$

ya que los operadores $\{T_i\}$ son lineales y uniformemente acotados (Lema 3.9). Luego, bastará con probar que $\|T_i g - g\|_1 \to 0$ cuando $i \to +\infty$ para toda $g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$.

Si $g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$ entonces g es uniformemente continua y existen enteros j y J, $j < J$, tales que $\operatorname{sop}(g) \subset [0, 2^J) = I_0^J$ y $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2^{J+2}}$ si $\delta(x, y) \leq 2^j$. Notemos además que si $\delta(x, y) \leq 2^J$, entonces $x \in [0, 2^J)$ si y sólo si $y \in [0, 2^J)$. Luego

$$\begin{aligned}
\|T_i g - g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \int_{\mathbb{R}^+} K^{(i)}(x, y) g(y)\, dy - g(x) \right| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \left| \int_{\mathbb{R}^+} K^{(i)}(x, y)(g(y) - g(x))\, dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} K^{(i)}(x, y)\, |g(y) - g(x)|\; dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)\leqslant 2^j} K^{(i)}(x, y)\, |g(y) - g(x)|\; dy\, dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x, y)\, |g(y) - g(x)|\; dy\, dx \\
&= \int_{[0,2^J)} \int_{\delta(x,y)\leqslant 2^j} K^{(i)}(x, y)\, |g(y) - g(x)|\; dy\, dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x, y)\, |g(y) - g(x)|\; dy\, dx \\
&\leq \int_{[0,2^J)} \frac{\varepsilon}{2^{J+2}} \int_{\delta(x,y)\leqslant 2^j} K^{(i)}(x, y)\, dy\, dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x, y)\, |g(y) - g(x)|\; dy\, dx
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \left| g(y) - g(x) \right| \, dy \, dx.$$

Sea $M = \|g\|_\infty < \infty$. Para acotar la última integral usamos finalmente la propiedad de concentración de la familia $\{K^{(i)}\}$, por la cual existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq i_0$ resulta $\int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y)dy < \dfrac{\varepsilon}{M2^{J+4}}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. De esta manera, si $i \geq i_0$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \left| g(y) - g(x) \right| \, dy \, dx \\
&\qquad = \int_{I_0^J} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \left| g(y) - g(x) \right| \, dy \, dx \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I_0^J} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \left| g(y) \right| \, dy \, dx \\
&\qquad \leq \int_{I_0^J} 2M \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \, dy \, dx + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \left| g(y) \right| \, dy \, dx \\
&\qquad \leq \int_{I_0^J} 2M \frac{\varepsilon}{M2^{J+4}} \, dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left| g(y) \right| \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \, dx \, dy \\
&\qquad = \frac{\varepsilon}{8} + \int_{I_0^J} \left| g(y) \right| \int_{\delta(x,y)>2^j} K^{(i)}(x,y) \, dx \, dy \\
&\qquad \leq \frac{\varepsilon}{8} + \int_{I_0^J} M \frac{\varepsilon}{M2^{J+4}} \, dy \\
&\qquad = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Con esto, hemos demostrado que $\|T_i f - f\|_1 \to 0$ cuando $i \to +\infty$, para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Podemos demostrar el caso $1 < p < \infty$ utilizando el mismo argumento de densidad, con lo cual basta con probar que para toda $g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$ se tiene que $\|T_i g - g\|_p \to 0$ cuando $i \to +\infty$. En efecto, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
|T_i g(x) - g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^+} K^{(i)}(x,y)(g(y) - g(x)) \, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^+} |g(y) - g(x)| \left| K^{(i)}(x,y) \right|^{\frac{1}{p}} \left| K^{(i)}(x,y) \right|^{\frac{1}{p'}} \, dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^+} |g(y) - g(x)|^p \, K^{(i)}(x,y) \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} K^{(i)}(x,y) \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^+} |g(y) - g(x)|^p \, K^{(i)}(x,y) \, dy \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\|T_i g - g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^+} |T_i g(x) - g(x)|^p \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} |g(y) - g(x)|^p \, K^{(i)}(x,y) \, dy \, dx,\end{aligned}$$

y la demostración se completa de manera análoga al caso $p = 1$.

Una forma alternativa de probar el resultado en el caso $1 < p < \infty$ es a través del análisis espectral de los operadores, por la aplicación directa de los Teoremas 5.7 (ii) y 5.9, donde ahora el operador límite T_∞ es el operador identidad. □

La recíproca es también cierta.

Teorema 6.3. *Sea $P \in \mathscr{P}^s$ y sea $K \in \mathscr{K}$. Si la sucesión de núcleos $\{K^{(i)} = P(K,i) \colon i \in \mathbb{N}\}$ es una aproximación a la identidad en el sentido de L^p para algún $1 \leq p < \infty$, entonces K es sub-s-estable.*

Demostración. Como $\mathscr{H} \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^+) \subset L^p(\mathbb{R}^+)$ para todo p, el resultado es consecuencia del Teorema 5.7.(ii), dado que para cada $h \in \mathscr{H}$,

$$\|T_i h - h\|_p = \left\|\lambda^{(i)}(h)h - h\right\|_p = \left|\lambda^{(i)}(h) - 1\right| \|h\|_p \, .$$

□

Una consecuencia de los dos últimos teoremas es que si una sucesión de núcleos $P(K)$, con $s > 0$, $P \in \mathscr{P}^s$ y $K \in \mathscr{K}$, es una aproximación a la identidad en el sentido de L^p para algún $1 \leq p < \infty$ entonces lo es también para todo $1 \leq p < \infty$.

6.3. El operador Maximal

Sea $\mathcal{K}$ una subclase de núcleos de $\mathscr{K}$ y $\{T_K \colon K \in \mathcal{K}\}$ la familia de operadores integrales determinados por $\mathcal{K}$. Se define el **operador maximal** asociado a $\mathcal{K}$ por

$$T^* f(x) = T^*_{\mathcal{K}} f(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} |T_K f(x)| \, .$$

Lema 6.4. *Sea $\mathcal{K}$ una subfamilia a lo sumo numerable de núcleos de $\mathscr{K}$ y T^* el operador maximal asociado. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 \leq p \leq \infty$, entonces $T^* f$ está bien definido y es medible. Si además f es no negativa entonces $T^* f$ es semicontinua inferiormente respecto a δ.*

Demostración. Por el Corolario 3.10, para $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ y $K \in \mathscr{K}$ se tiene que $T_K f$ es medible y si además f es no negativa entonces el Lema 3.9.(3) enseña que $T_K f$ resulta semicontinua inferiormente respecto a δ. Luego, para cada $\lambda > 0$ el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^+ \colon T^* f(x) > \lambda\} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \{x \colon |T_K f(x)| > \lambda\}$$

es medible si $f \in L^p$ y es δ-abierto si además $f \geq 0$. □

El mismo resultado se verifica para el caso general de subfamilias de $\mathscr{K}$ arbitrarias, aunque la demostración resulta más trabajosa.

Lema 6.5. *Sea $\mathcal{K} \subset \mathscr{K}$ y T^* el operador maximal asociado a $\mathcal{K}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces $T^* f$ está bien definido y es medible. Si f es además no negativa entonces $T^* f$ es semicontinua inferiormente respecto a δ.*

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dado que casi todo punto de $\mathbb{R}^+$ es un punto de Lebesgue de f, el Lema 3.9.(1) demuestra la buena definición de $T^* f$. Denotamos por $\mathscr{L}(f)$ al conjunto de puntos de Lebesgue de f en $\mathbb{R}^+$. Para ver la medibilidad bastará con probar que para cada $\lambda > 0$ el conjunto $\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^* f(x) > \lambda\}$ es medible.

Sean los conjuntos de núcleos diádicos dados, en términos de los coeficientes introducidos en el Capítulo 3, por

$$\mathcal{Q} = \{K \in \mathscr{K} \colon k_j \in \mathbb{Q} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathcal{Q}_J = \left\{K_J = K.\chi_{\bigcup_{-J \leqslant j \leqslant J} L(2^j)} \colon K \in \mathcal{Q}\right\} \quad \text{para } J \in \mathbb{N}, \text{ y}$$

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \bigcup_{J \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_J.$$

Notemos que $\widetilde{\mathcal{Q}}$ tiene cardinal $\aleph_0$ (es un conjunto numerable). Notemos además que los núcleos de $\widetilde{\mathcal{Q}}$ son diádicos y sub-markovianos, es decir, núcleos definidos en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, no negativos y diádicos tales que $\int_{\mathbb{R}^+} K(x, y)\, dy \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Las propiedades de medibilidad de los operadores con núcleos en $\mathscr{K}$ dadas en los Lemas 3.8 y 3.9 y en el Corolario 3.10 se verifican también para núcleos diádicos sub-markovianos, ya que la propiedad de Markov no interviene de manera crucial en las demostraciones.

Sean además las clases

$$\begin{aligned}
E(f,K,\varepsilon) &= \{N \in \mathcal{Q} \colon \ |T_N f(x) - T_K f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in \mathscr{L}(f)\},\\
E(f,\mathcal{K},\varepsilon) &= \bigcup_{K\in\mathcal{K}} E(f,K,\varepsilon)\\
&= \{N \in \mathcal{Q} \colon \ \text{existe } K \in \mathcal{K} \colon \ |T_N f(x) - T_K f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in \mathscr{L}(f)\}.
\end{aligned}$$

Afirmación: Para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, todo núcleo $K \in \mathscr{K}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un núcleo $N \in \mathcal{Q}$ tal que $|T_K f(x) - T_N f(x)| < \varepsilon$ en todo punto de Lebesgue de f. Es decir, $E(f,K,\varepsilon) \neq \emptyset$.

En efecto, si $x \in \mathscr{L}(f)$ entonces, por el Lema 3.9.(1) y el Teorema de Convergencia Dominada, $T_K f(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} k_j \int_{\delta(x,y)=2^j} f(y)\,dy < \infty$ para todo $K \in \mathcal{K}$. Luego, tomemos una sucesión $\{q_j \colon j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}_0^+$ tal que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} q_j 2^{j-1} = 1$ y $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |k_j - q_j|\, 2^{\frac{j-1}{p'}} < \dfrac{\varepsilon}{\|f\|_p}$, donde p' es el exponente conjugado de p $\big($i.e. $1/p + 1/p' = 1\big)$. Tenemos entonces que el núcleo N determinado por la sucesión $\{q_j\}$ está en $\mathcal{Q}$ y, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
|T_K f(x) - T_N f(x)| &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |k_j - q_j| \int_{\delta(x,y)=2^j} |f(y)|\, dy\\
&\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |k_j - q_j|\, 2^{\frac{j-1}{p'}}\, \|f\|_p\\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathscr{L}(f)$. Queda así probada la afirmación.

Entonces, dado $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^* f(x) > \lambda\} &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^* f(x) > \lambda + \tfrac{2}{n}\right\}\\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ \bigcup_{N\in E(f,\mathcal{K},\frac{1}{n})} \left\{x \in \mathscr{L}(f) \colon \ |T_N f(x)| > \lambda + \tfrac{1}{n}\right\}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Efectivamente, si $x \in \mathscr{L}(f)$ es tal que $T^* f(x) > \lambda$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual $T^* f(x) > \lambda + \frac{2}{n}$, y luego existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $|T_K f(x)| > \lambda + \frac{2}{n}$. Escogiendo cualquier $N \in E(f,K,\frac{1}{n})$ se tiene entonces que $\lambda + \frac{2}{n} < |T_K f(x)| \le |T_K f(x) - T_N f(x)| + |T_N f(x)| < \frac{1}{n} + |T_N f(x)|$, y por lo tanto $|T_N f(x)| > \lambda + \frac{1}{n}$. Recíprocamente, si $x \in \mathscr{L}(f)$ es tal que existe un $n \in \mathbb{N}$ y un $N \in E(f,\mathcal{K},\frac{1}{n})$ para los cuales $|T_N f(x)| > \lambda + \frac{1}{n}$, entonces existe además un núcleo $K \in \mathcal{K}$ tal que $N \in E(f, K, \frac{1}{n})$ y por lo tanto $\lambda + \frac{1}{n} < |T_N f(x)| \leq |T_N f(x) - T_K f(x)| + |T_K f(x)| < \frac{1}{n} + |T_K f(x)|$, con lo cual $T^* f(x) > \lambda$.

Ahora bien, dado que para todo $x \in \mathscr{L}(f)$ y todo núcleo $N \in \mathcal{Q}$ se tiene que $T_N f(x) = \lim_{J\to+\infty} T_{N_J} f(x)$, donde $N_J = N.\chi_{C(J)} \in \mathcal{Q}_J$ para $C(J) = \bigcup_{-J\leqslant j\leqslant J} L(2^j)$, entonces $|T_N f(x)| > \lambda + \frac{1}{n}$ si y sólo si existen $m \in \mathbb{N}$ y $J_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $J \geqslant J_0$ vale $|T_{N_J} f(x)| > \lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Es posible entonces cambiar el conjunto $E(f, \mathcal{K}, \frac{1}{n})$ en (26) por un subconjunto de $\widetilde{\mathcal{Q}}$, de manera de obtener una fórmula con una unión numerable. Definiendo

$$E_J(f, \mathcal{K}, \varepsilon) = \{N_J \in \mathcal{Q}_J \colon N \in E(f, \mathcal{K}, \varepsilon)\} \quad \text{para } \varepsilon > 0 \text{ y } J \in \mathbb{N}, \text{ y}$$
$$\widetilde{E}(f, \mathcal{K}, \varepsilon) = \bigcup_{J\in\mathbb{N}} E_J(f, \mathcal{K}, \varepsilon) = \left\{\tilde{N} \in \widetilde{\mathcal{Q}} \colon \tilde{N} = N_J \text{ con } N \in E(f, \mathcal{K}, \varepsilon)\right\},$$

tendremos entonces que

$$\begin{aligned}(27)\qquad &\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in E(f,\mathcal{K},\frac{1}{n})} \{x \in \mathscr{L}(f) \colon |T_N f(x)| > \lambda + \tfrac{1}{n}\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{\tilde{N}\in\widetilde{E}(f,\mathcal{K},\frac{1}{n})} \Big(\{x \in \mathscr{L}(f) \colon |T_{\tilde{N}} f(x)| > \lambda + \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}\} \cap \\ &\qquad \{x \colon |T_{\tilde{N}} f(x) - T_N f(x)| < \tfrac{1}{m}\} \Big).\end{aligned}$$

Veamos esto. Sea x en el primer conjunto. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $N \in E(f, \mathcal{K}, \frac{1}{n})$ tales que $|T_N f(x)| > \lambda + \frac{1}{n}$. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|T_N f(x)| > \lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Dado que $T_N f(x) = \lim_{J\to+\infty} T_{N_J} f(x)$ entonces existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $|T_{N_J} f(x)| > \lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ y $|T_{N_J} f(x) - T_N f(x)| < \frac{1}{m}$. Notando que $N_J \in \widetilde{E}(f, \mathcal{K}, \frac{1}{n})$, se tiene que x pertenece al segundo conjunto. Recíprocamente, si x está en el segundo conjunto entonces existen $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ y $\tilde{N} \in \widetilde{E}(f, \mathcal{K}, \frac{1}{n})$ tales que $|T_{\tilde{N}} f(x)| > \lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ y $|T_{\tilde{N}} f(x) - T_N f(x)| < \frac{1}{m}$. Como $\tilde{N} \in \widetilde{E}(f, \mathcal{K}, \frac{1}{n})$ entonces $\tilde{N} = N_J$ para algún $N \in E(f, \mathcal{K}, \frac{1}{n})$ y algún $J \in \mathbb{N}$. Así, $\lambda + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < |T_{\tilde{N}} f(x)| \leqslant |T_{\tilde{N}} f(x) - T_N f(x)| + |T_N f(x)| < \frac{1}{m} + |T_N f(x)|$, con lo cual $|T_N f(x)| > \lambda + \frac{1}{n}$. Por lo tanto, x pertenece al primer conjunto.

Dado que $\widetilde{E}(f, \mathcal{K}, \varepsilon) \subset \widetilde{\mathcal{Q}}$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces la unión en el miembro derecho de (27) es numerable, y los conjuntos involucrados en dicha unión son conjuntos medibles de $\mathbb{R}^+$ ya que las funciones $T_N f$ y $T_{\tilde{N}} f$ son medibles. En vistas de esto y de las ecuaciones (26) y (27), se obtiene que los conjuntos $\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^* f(x) > \lambda\}$ son medibles para todo $\lambda > 0$, y por lo tanto $T^* f$ resulta medible en $\mathbb{R}^+$.

Si f es además no negativa, entonces T^*f está bien definido en todo punto de $\mathbb{R}^+$, ya que esto ocurre para $T_K f$ para todo $K \in \mathscr{K}$. Además, para cada $\lambda > 0$,

$$\left\{x \in \mathbb{R}^+ \colon T^*f(x) > \lambda\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \colon \sup_{K \in \mathcal{K}} |T_K f(x)| > \lambda\right\}$$
$$= \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \left\{x \in \mathbb{R}^+ \colon T_K f(x) > \lambda\right\}.$$

Por el Lema 3.9.(3), para todo $K \in \mathcal{K}$ y todo $\lambda > 0$ los conjuntos $\{x \colon T_K f(x) > \lambda\}$ son δ-abiertos, y en consecuencia es δ-abierto cualquier unión de tales conjuntos. □

6.4. Tipo débil y tipo fuerte del operador maximal

Sean $p, q \in [1, \infty]$ y sea T un operador definido en $L^p(\mathbb{R}^+)$ sobre $L^q(\mathbb{R}^+)$. Se dice que el operador T es de **tipo fuerte (p, q)** o, escuetamente, de tipo (p, q) si está acotado, es decir, si para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ vale

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$$

para alguna constante positiva C independiente de f.

Si $q < \infty$, decimos que el operador T es de **tipo débil (p, q)** si para todo $\lambda > 0$ y toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ vale que

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^+ \colon \ |Tf(x)| > \lambda\right\}\right| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_p\right)^q$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de λ y de f. Cuando $q = \infty$, diremos que T es de tipo débil (p, ∞) si es de tipo fuerte (p, ∞).

Por la desigualdad de Chebyshev (Teorema A.5) se obtiene que el tipo fuerte (p, q) implica el tipo débil (p, q).

Para probar el tipo débil $(1, 1)$ de los operadores maximales, aunque no usamos aquí explícitamente el Teorema de Zó sobre aproximaciones de la identidad con núcleos no monótonos, sí usamos la idea básica en su análisis: la descomposición de Calderón–Zygmund. Repasemos este resultado de C–Z antes de enunciar nuestro teorema.

Lema 6.6 (Calderón-Zygmund). *Sea f no negativa e integrable en $\mathbb{R}^+$ y sea $\zeta > 0$. Entonces existe una familia de intervalos diádicos $\mathscr{G} = \mathscr{G}(f, \zeta) \subset \mathscr{D}$ tal que*

(i) los intervalos de $\mathscr{G}$ son disjuntos dos a dos;

(ii) $m_I(f) := \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy > \zeta$ *para todo* $I \in \mathscr{G}$*;*

(iii) $m_J(f) \leq \zeta$ *para todo* $J \in \mathscr{D}$ *tal que* $J \supsetneq I$ *para algún* $I \in \mathscr{G}$*;*

(iv) $f(x) \leq \zeta$ *en casi todo punto* $x \notin \bigcup_{I\in\mathscr{G}} I$*;*

(v) $\left|\bigcup_{I\in\mathscr{G}} I\right| \leq \frac{\|f\|_1}{\zeta}$*;*

(vi) $f = g + b$ *con* $b(x) = \sum_{I\in\mathscr{G}} b_I(x) = \sum_{I\in\mathscr{G}} \big(f(x) - m_I(f)\big)\chi_I(x)$*;*

(vii) $0 \leq g(x) \leq c\zeta$ *en casi todo punto, para alguna constante geométrica* $c \geq 1$*;*

(viii) $\int_I b(y)\,dy = 0$ *para todo* $I \in \mathscr{G}$*;*

(ix) $\|b\|_1 \leq 2\,\|f\|_1$.

Teorema 6.7. *Sea* $\mathcal{K} \subset \mathscr{K}$*. El operador maximal* T^* *asociado a* $\mathcal{K}$ *es de tipo débil* $(1,1)$ *y de tipo fuerte* (p,p) *para todo* $1 < p \leqslant \infty$*.*

Demostración. Veamos primero que T^* es de tipo débil $(1,1)$.

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ no negativa, y sea $\lambda > 0$. Por el Lema de Calderón-Zygmund 6.6 con $\zeta = \frac{\lambda}{2c}$, tenemos entonces que existen una familia $\mathscr{G} = \mathscr{G}(f,\zeta) \subset \mathscr{D}$ y funciones $g(x)$ y $b(x)$ con las propiedades $(i) - (ix)$ del lema.
2. Sean $K \in \mathscr{K}$ y $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces, por (vii),
$$T_K g(x) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)g(y)\,dy \leq c\zeta \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)\,dy = \frac{\lambda}{2},$$
con lo cual
$$T^*g(x) = \sup_{K\in\mathcal{K}} T_K g(x) \leq \frac{\lambda}{2}$$
en todo $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Sea $G = \bigcup_{I\in\mathscr{G}} I$. Por definición, $b \equiv 0$ en $G^{\complement} = \mathbb{R}^+ \backslash G$. Además, dado que $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ y $b = f - g$ entonces $T_K b$ es finito en $\mathscr{L}(f)$ para cualquier $K \in \mathscr{K}$ (Lema 3.9). Luego, por el teorema de convergencia dominada, tenemos que, para todo $x \in \mathscr{L}(f)$,
$$T_K b(x) = \int_{\mathbb{R}^+} K(x,y)b(y)\,dy = \int_G K(x,y)b(y)\,dy = \sum_{I\in\mathscr{G}} \int_I K(x,y)b(y)\,dy.$$
Si $x \in G^{\complement}$ entonces $K(x,\cdot)$ es constante en cada $I \in \mathscr{G}$. Por lo tanto, por $(viii)$ se tiene que $T_K b(x) = 0$ para todo $x \in \mathscr{L}(f) \cap G^{\complement}$, y en consecuencia
$$T^*b(x) = \sup_{K\in\mathcal{K}} |T_K b(x)| = 0 \;\text{ en }\; \mathscr{L}(f) \cap G^{\complement}.$$

4. Por último, notemos que, por el Lema 6.5, T^*f, T^*g y T^*b están bien definidos en $\mathscr{L}(f)$ y son medibles en $\mathbb{R}^+$, dado que $f, b \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Luego,

$$T^*f(x) = \sup_{K\in\mathcal{K}} |T_K f(x)| \leq \sup_{K\in\mathcal{K}} \big(|T_K g(x)| + |T_K b(x)| \big) \leq T^*g(x) + T^*b(x)$$

en los puntos de buena definición.

Por las observaciones anteriores y el ítem (v) del Lema de C-Z 6.6 tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\big|\{x \in \mathbb{R}^+ \colon T^*f(x) > \lambda\}\big| &= |\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^*f(x) > \lambda\}| \\
&\leq \big|\big\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^*g(x) > \tfrac{\lambda}{2}\big\}\big| + \big|\big\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^*b(x) > \tfrac{\lambda}{2}\big\}\big| \\
&= \big|\big\{x \in \mathscr{L}(f) \colon T^*b(x) > \tfrac{\lambda}{2}\big\}\big| \\
&\leq |G| + \left|\left\{x \in G^{\complement} \cap \mathscr{L}(f) \colon T^*b(x) > \tfrac{\lambda}{2}\right\}\right| \\
&\leq \frac{\|f\|_1}{\zeta} \\
&= \frac{2c}{\lambda}\,\|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Dado que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ se tiene que $T^*f(x) \leq T^*|f|(x)$ en $\mathscr{L}(f)$, queda demostrado que T^* es de tipo débil $(1,1)$.

Veamos a continuación el tipo fuerte (∞,∞) de T^*. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Por el Lema 3.9.(2), para todo $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$T^*f(x) = \sup_{K\in\mathcal{K}} |T_K f(x)| \leq \sup_{K\in\mathcal{K}} \|T_K f\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

Para finalizar, la demostración se completa por aplicación del teorema de interpolación de Marcinkiewics (Teorema 8.4). □

6.5. Aproximaciones a la identidad en casi todo punto para funciones de L^p

En esta sección probamos el resultado de convergencia puntual.

Lema 6.8. *Sea $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de núcleos de $\mathscr{K}$ que concentra cuando $n \to \infty$. Si $\{T_n\}$ es la sucesión de operadores integrales asociados a $\{K_n\}$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} T_n g(x) = g(x)$$

en cada punto de δ-continuidad de g.

Demostración. Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ y x un punto de continuidad de g respecto a la métrica diádica δ. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $y \in B_\delta(x, \eta)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|T_n g(x) - g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^+} K_n(x,y)\,|g(y) - g(x)|\,dy \\
&= \int\limits_{\delta(x,y)<\eta} K_n(x,y)\,|g(y) - g(x)|\,dy + \int\limits_{\delta(x,y)\geqslant\eta} K_n(x,y)\,|g(y) - g(x)|\,dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\,\|g\|_\infty \int_{\delta(x,y)\geqslant\eta} K_n(x,y)dy,
\end{aligned}$$

y el resultado se obtiene al aplicar la propiedad de concentración de $\{K_n\}$ en el segundo término de la última desigualdad. $\square$

Observemos que, dado que la topología diádica es más fina que la topología euclídea (la contiene estrictamente), "hay más" funciones continuas respecto a la métrica diádica que respecto a la euclídea, es decir, $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+) \subsetneq \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \delta)$ (un ejemplo de función continua respecto a δ pero no respecto a la distancia euclídea es la característica de un intervalo diádico). Más aún, como $|x - y| \leq \delta(x, y)$, los puntos de continuidad de una función respecto a la métrica euclídea lo son también respecto a la métrica diádica. El siguiente resultado es un corolario del lema anterior junto con el Lema 6.1.

Corolario 6.9. *Si $P \in \mathscr{P}^s$ y $K \in \mathscr{K}$ es sub-s-estable entonces la sucesión $P(K)$ es una aproximación a la identidad puntual (en todo punto) en $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \delta) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$.*

El siguiente teorema sigue las mismas lineas que el resultado clásico que relaciona el tipo débil del operador maximal y las aproximaciones a la identidad en sentido puntual para funciones de L^p, $1 \leq p < \infty$, provisto que el resultado vale en un subconjunto denso.

Teorema 6.10. *Sea $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de núcleos de $\mathscr{K}$ que concentra cuando $n \to \infty$. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Si T^* es de tipo débil (p, p) entonces para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ se tiene que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n f(x) = f(x)$ en casi todo punto.*

Demostración. Sea $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ y supongamos que T^* es de tipo débil (p, p). Consideremos el conjunto

$$E := \left\{x \in \mathbb{R}^+ \colon \lim_{n\to\infty} T_n f(x) \neq f(x)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \colon \lim_{n\to\infty} |T_n f(x) - f(x)| \neq 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \colon \limsup_{n\to\infty} |T_n f(x) - f(x)| > 0 \right\} \\
&= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \colon \limsup_{n\to\infty} |T_n f(x) - f(x)| > 1/i \right\} \\
&= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i.
\end{aligned}
$$

Luego $|E| = \left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right| \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |E_i|$.

Dada $g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$ y $x \in \mathbb{R}^+$, por el Lema 6.8 y usando la subaditividad del límite superior, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |T_n f(x) - f(x)| &\leq \limsup_{n\to\infty} \big(|T_n(f-g)(x)| + |T_n g(x) - g(x)| \big) + |f(x) - g(x)| \\
&= \limsup_{n\to\infty} |T_n(f-g)(x)| + |f(x) - g(x)| \,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para $i \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
E_i &= \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \colon \limsup_{n\to\infty} |T_n f(x) - f(x)| > 1/i \right\} \\
&\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^+ \colon \limsup_{n\to\infty} |T_n(f-g)(x)| + |(f-g)(x)| > 1/i \right\} \\
&\subset \left\{ x \colon \limsup_{n\to\infty} |T_n(f-g)(x)| > 1/2i \right\} \cup \left\{ x \colon |(f-g)(x)| > 1/2i \right\} \\
&\subset \left\{ x \colon \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n(f-g)(x)| > 1/2i \right\} \cup \left\{ x \colon |(f-g)(x)| > 1/2i \right\}
\end{aligned}
$$

y entonces

$$
\begin{aligned}
|E_i| &\leq \left| \left\{ x \colon T^*(f-g)(x) > 1/2i \right\} \right| + \left| \left\{ x \colon |(f-g)(x)| > 1/2i \right\} \right| \\
&\leq c_1 (2i)^p \, \|f-g\|_p^p + c_2 (2i)^p \, \|f-g\|_p^p \,,
\end{aligned}
$$

donde en la última desigualdad usamos el tipo débil (p,p) de T^* y la desigualdad de Chebyshev. Por la densidad de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^+)$ en $L^p(\mathbb{R}^+)$ tenemos entonces que $|E_i| = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $|E| = 0$. Es decir, $\lim_{n\to+\infty} T_n f(x) = f(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus E$ y $|E| = 0$. □

Como corolario se obtiene que los procesos s-estables (22) con inicio en un núcleo de Markov diádico sub-s-estable son aproximaciones a la identidad puntuales en los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^+)$, para cada $1 \leqslant p < \infty$. Recíprocamente, si para $K \in \mathscr{K}$ y $P \in \mathscr{P}^s$ la sucesión $P(K)$ es una aproximación puntual a la identidad en algún espacio $L^p(\mathbb{R}^+)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ entonces K es un núcleo sub-s-estable. Refraseando: las sucesiones obtenidas de aplicar un proceso s-estable a núcleos en $\mathscr{K}$ que son aproximaciones puntuales a la identidad en los espacios L^p son exactamente las iniciadas en núcleos sub-s-estables. Enunciamos estos resultados a continuación.

Teorema 6.11. *Sea $P \in \mathscr{P}^s$. Si $K \in \mathscr{K}$ es sub-s-estable entonces la sucesión de núcleos $P(K)$ es una aproximación a la identidad puntual en $L^p(\mathbb{R}^+)$, para todo $1 \leq p < \infty$. Es decir, si $\{T_i\}$ es la sucesión de operadores integrales asociados a la sucesión de núcleos $P(K)$, entonces*

$$\lim_{i \to +\infty} T_i f(x) = f(x) \quad \textit{en c.t.p.}$$

para toda $f \in \bigcup_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathbb{R}^+)$.

Demostración. Las hipótesis del teorema anterior son provistas por el Lema 6.1 y el Teorema 6.7. $\square$

Teorema 6.12. *Sean $K \in \mathscr{K}$, $u, v \in \mathbb{N}$ y $s = \frac{u}{v}$. Si la sucesión de núcleos $P_v^u(K)$ es una aproximación a la identidad en sentido puntual en $L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces el núcleo inicial K es sub-s-estable.*

Demostración. Sea $h \in \mathscr{H}$ y elijamos un $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{i \to +\infty} T_i h(x) = h(x) \neq 0$ (notar que $\mathscr{H} \subset L^p$). Por lo tanto, $\lim_{i \to +\infty} \lambda^{(i)}(h) h(x) = h(x)$ y, como $h(x) \neq 0$, debe ser $\lim_{i \to +\infty} \lambda^{(i)}(h) = 1$. Luego, por el Teorema 5.7 se tiene que K es sub-s-estable. $\square$

Corolario 6.13. *Sean $K \in \mathscr{K}$, $u, v \in \mathbb{N}$. Si la sucesión de núcleos $P_v^u(K)$ es una aproximación a la identidad en sentido puntual en $L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces lo es para todo $1 \leq p < \infty$. Más aún, en tal caso el resultado vale para todo proceso de $\mathscr{P}^s$, para $s = \frac{u}{v}$.*

Capítulo 7

Teoremas límites en espacios homogéneos y de tipo homogéneo

El objetivo de este capítulo es desarrollar la teoría anterior en contextos generales con ciertas propiedades de homogeneidad del espacio. En primer lugar abordamos estructuras autosimilares que incluyen espacios euclídeos, métricas parabólicas y fractales clásicos construidos por sistemas iterados de funciones, como el cuadrante de Sierpinski. Luego, exploramos extensiones a los contextos diádicos generales en espacios de tipo homogéneo con sistemas diádicos de Christ y bases de Haar que no son necesariamente autosimilares.

7.1. Familias diádicas homogéneas

Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finito. Una familia diádica es una clase de subconjuntos medibles de X de la forma $\mathscr{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}^j$, donde $\mathscr{D}^j = \left\{Q^j_k \colon k \in F^j\right\}$ es una partición de X, F^j es algún conjunto a lo sumo numerable de índices, y la sucesión de particiones $\{\mathscr{D}^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es anidada, es decir, cada elemento de $\mathscr{D}^j$ es unión disjunta de (finitos) elementos de $\mathscr{D}^{j+1}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Diremos que una familia diádica es *regular de grado* n si cada elemento es unión disjunta de exactamente n elementos del nivel siguiente y es *homogénea* si además todos los elementos de un mismo nivel miden lo mismo. Por analogía con el caso usual en espacios euclídeos llamaremos *cubos* a los elementos de $\mathscr{D}$. En lo que sigue de la sección consideraremos familias diádicas regulares y homogéneas. En consecuencia el espacio es no atómico y $\mu(X) = \infty$, y puede tomarse $F^j = \mathbb{N}$ para todo j.

Desde el punto de vista de la teoría de grafos, toda familia diádica regular de grado n que conforme un único cuadrante tiene asociado un árbol regular de grado n, al considerar como vértices a los cubos y que las aristas unen vértices asociados a cubos de niveles consecutivos que verifican una relación de contención.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los cubos de nivel cero miden uno, es decir, $\mu(Q^0_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, dado que cada cubo es unión disjunta de n cubos del nivel siguiente y que todos los cubos de un mismo nivel miden lo mismo, se tiene que $\mu(Q_k^1) = 1/n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mu(Q_k^{-1}) = n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y, en general, $\mu(Q_k^j) = n^{-j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $\mu(\mathscr{D}) = D = \{n^j : j \in \mathbb{Z}\}$.

Hemos definido una estructura diádica con medida de manera abstracta, sin hacer alusión a un conjunto X, a una topología o a una métrica en particular.

De manera natural, puede definirse en el espacio una topología determinada por la estructura diádica. Definimos en X la topología diádica $\tau = \tau_{\mathscr{D}}$ como la menor topología que contiene a la familia de conjuntos diádicos $\mathscr{D}$. Es decir, $\mathscr{D}$ es base de esta topología.

En referencia al conjunto X notemos que, dado que la familia $\mathscr{D}$ es unión de particiones anidadas, cada punto $x \in X$ tendrá asociada una única sucesión encajada de cubos diádicos $\mathscr{D}_x = \left\{Q_x^j = Q_{k(x,j)}^j : j \in \mathbb{Z}\right\}$, de manera que $x \in \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} Q_x^j$. Se define el espacio cociente X/τ como el conjunto de clases de equivalencia respecto a la relación [$x \sim y$ si y sólo si $\mathscr{D}_x = \mathscr{D}_y$]. Observemos que existe una inyección natural de X/τ en el espacio $G = \left\{\left(Q_{k(j)}^j\right)_{j\in\mathbb{Z}} : Q_{k(j+1)}^{j+1} \subset Q_{k(j)}^j \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}\right\}$ compuesto por todas las sucesiones encajadas de cubos de $\mathscr{D}$ con exactamente un elemento de cada nivel. Además, (X, τ) es un espacio de Kolmogorov (T_0) si y sólo si $X = X/\tau$, y en este caso el espacio resulta ser también de Haussdorf (T_2).

Como antes, se define la métrica diádica δ en X por

$$\delta(x, y) = \text{ínf}\,\{\mu(Q) : x, y \in Q,\ Q \in \mathscr{D}\}\,.$$

Observemos que para que δ esté bien definida en X es necesario que la familia diádica $\mathscr{D}$ determine un único cuadrante. Además, δ resulta confiable si y sólo si las clases de equivalencia son conjuntos unitarios (de un solo elemento), es decir, si $X = X/\tau$. En adelante consideraremos que este es el caso en cuestión. Luego, δ es también una ultramétrica y las δ-bolas son exactamente los cubos de $\mathscr{D}$. La propiedad de duplicación se satisface para μ y δ, más aún, (X, δ, μ) es un espacio de tipo homogéneo normal y no atómico. En efecto, dados $x \in X$ y $r > 0$ existe un único $j \in \mathbb{Z}$ tal que $n^{-j} < r \leq n^{-j+1}$ y entonces $B(x, r) = \left\{y \in X : \delta(x, y) < r\right\} = \left\{y \in X : \delta(x, y) \leq n^{-j}\right\} = Q_x^j$. Luego, $\frac{r}{n} \leq \mu(B(x, r)) = \mu(Q_x^j) = n^{-j} < r$.

La propiedad de Heine-Borel, de que los conjuntos compactos son los cerrados y acotados, tiene como consecuencia varios de los resultados fundamentales del análisis. Ésta resulta válida en espacios casi-métricos completos donde los conjuntos acotados sean totalmente acotados. Como esto último lo verifican los espacios diádicos abstractos aquí considerados, es interesante ver cuando se tiene la completitud.

Proposición 7.1. *El espacio métrico* (X, δ) *es completo si y solo si la aplicación que asigna* $x \mapsto \mathscr{D}_x$ *es una biyección entre* X *y* G.

Demostración. Como $(X, \mathscr{D}, \tau_{\mathscr{D}})$ es un espacio T_0, entonces la aplicación que asigna a cada punto $x \in X$ su correspondiente sucesión encajada de cubos $\mathscr{D}_x$ es una inyección. Para que el espacio sea completo esta aplicación debe ser también suryectiva. Efectivamente, en caso contrario existe una sucesión encajada $\left\{Q^j_{k(j)} \colon j \in \mathbb{Z}\right\}$ que no es imagen de ningún punto de X. Luego, tomando un punto de cada conjunto $Q^j_{k(j)}$ obtenemos una sucesión de Cauchy en X cuando $j \to +\infty$ que no converge a un punto de X. Recíprocamente, toda sucesión de Cauchy $\{z_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ determina unívocamente una sucesión en G, al tomar de cada nivel el único cubo diádico que contiene infinitos elementos de $\{z_k\}$. Luego, el único punto $z \in X$ asociado a tal sucesión de G es el límite al que converge la sucesión de Cauchy. □

Puede probarse fácilmente que (G, δ) es isomorfo a la completación de $\mathbb{R}^+$ con respecto a la métrica diádica usual, lo cual pone además de manifiesto la propiedad del espacio de ser totalmente disconexo.

La no validez de la propiedad de Heine-Borel no es, sin embargo, un impedimento para que resulten ciertos varios teoremas fundamentales del análisis que necesitaremos. Esto ocurre especialmente en contextos diádicos. Como ya vimos, por ejemplo, en el caso elemental del espacio $(\mathbb{R}^+, \delta)$ determinado por la familia diádica usual, que no es completo y es totalmente disconexo (los únicos conjuntos conexos son los unitarios). Allí, dado que las bolas son abiertas y cerradas, no se satisface la propiedad de Heine-Borel, y los únicos conjuntos compactos son los de cardinal finito.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, en las Secciones 7.2, 7.3 y 7.4 siguientes vamos a trabajar en un espacio "homogéneo" $\big(X, \mu, \mathscr{D}\big)$, consistente en un conjunto X en el cual haya definida una medida μ σ-finita, no atómica y con $\mu(X) = \infty$, y a partir de ella una familia diádica $\mathscr{D}$ regular y homogénea de grado $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, donde esté bien definida la distancia diádica δ, y dotamos al espacio de la topología diádica τ. Supondremos además que $\mu(Q^j_k) = n^{-j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Cuando estudiemos teoremas en espacios

L^p tomaremos en cuenta a la medida μ respecto a la σ-álgebra de Borel relativa a τ, es decir, $L^p = L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$.

Observemos finalmente que, al igual que con la construcción diádica de Christ (ver Capítulos 1 y 6), valen en estos contextos los siguientes resultados: densidad de las continuas con soporte compacto en $L^p(X, \mathscr{B}, \mu)$ para $1 \leqslant p < \infty$, tipo débil (1,1) de la maximal, teorema de diferenciación de Lebesgue, lema de Calderón-Zygmund. Con todo esto el sistema de Haar resulta ser base ortonormal de L^2 e incondicional de L^p para todo $1 < p < \infty$, y se tiene la caracterización provista por el Teorema 1.10. Un desarrollo completo de los resultados mencionados en este párrafo se halla en [5]. Utilizaremos para el sistema de wavelets de Haar la notación $\mathscr{H} = \left\{h_Q^l \colon Q \in \mathscr{D}, l = 1, 2, \dots, n-1\right\}$, y también denotamos $h_{j,k}^l = h_Q^l$ para $Q = Q_k^j$.

7.2. Núcleos de Markov diádicos. Estabilidad

Las definiciones y resultados de esta sección son análogos a los desarrollados en el contexto diádico de $\mathbb{R}^+$, en los capítulos 3 y 4, con la única distinción de considerar de manera general los grados de las familias diádicas. Por consiguiente, veremos aquí sólo los enunciados del caso, de forma de tenerlos presentes en el capítulo.

Denotaremos, como antes, por $\mathscr{K}$ a la clase de núcleos de Markov $K(x,y)$ que dependen de la distancia diádica δ. Representaciones de los núcleos de $\mathscr{K}$, análogas a las del Lema 3.4, se obtienen sustituyendo el 2 correspondiente al grado de la familia diádica en $\mathbb{R}^+$ por un $n \in \mathbb{N}$ general. Es decir, podemos escribir

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j \chi_{L(n^j)}(x,y) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j n^j \chi_{(0,n^{-j}]}(\delta(x,y)) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Lambda_j n^j \left(n\chi_{(0,n^{-j-1}]} - \chi_{(0,n^{-j}]}\right) \circ \delta(x,y). \end{aligned}$$

Nuevamente vale el resultado fundamental de diagonalización de los operadores con núcleos en $\mathscr{K}$ por el sistema de Haar.

Teorema 7.2. *Sea $K \in \mathscr{K}$ y T el operador asociado. Entonces*

$$Th = \lambda(h)h$$

para toda h en $\mathscr{H}$, con $\lambda(h) = \Lambda_{j(h)} = \sum_{j>j(h)} \alpha_j$.

Se tiene además la representación en términos de los autovalores y la base de Haar, como en el Lema 3.5.

Para $s > 0$, se dice que un núcleo $K \in \mathscr{K}$ es ***s*-estable** si existe $\sigma > 0$ tal que

$$\lim_{\delta(x,y)\to+\infty} \delta(x,y)^{1+s} K(x,y) = \sigma.$$

Se denota por $\mathscr{K}^s$ a la clase de los núcleos de $\mathscr{K}$ que son s-estables, y por $\mathscr{K}^s(\sigma)$ a los núcleos en $\mathscr{K}^s$ cuyo parámetro de estabilidad es σ.

LEMA 7.3. *Sean $K \in \mathscr{K}$, $s > 0$ y $\sigma > 0$. Equivalen*

(a) K es s-estable con parámetro σ;

(b) $k_j n^{(1+s)j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \sigma$;

(c) $\alpha_{-j} n^{sj} \xrightarrow[j\to+\infty]{} (1 - n^{-(1+s)})\sigma$;

(d) $n^{sj}(1 - \lambda(-j)) \xrightarrow[j\to+\infty]{} \left(\dfrac{n^{1+s} - 1}{n^{1+s} - n}\right)\sigma$.

Un núcleo $K \in \mathscr{K}$ es **sub *s*-estable** si

$$\lim_{\delta(x,y)\to+\infty} \delta(x,y)^{1+s} K(x,y) = 0,$$

y es **supra *s*-estable** si

$$\lim_{\delta(x,y)\to+\infty} \delta(x,y)^{1+s} K(x,y) = +\infty.$$

LEMA 7.4. *Sea $K \in \mathscr{K}$ y $s \in \mathbb{R}^+$. Entonces K es sub (supra) s-estable si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones*

(a) $k_j n^{(1+s)j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ $(+\infty)$;

(b) $n^{sj}\alpha_{-j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ $(+\infty)$;

(c) $n^{sj}(1 - \lambda(-j)) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ $(+\infty)$.

Por último, definamos los procesos de iteración y molificación. Dado un núcleo $K \in \mathscr{K}$, al iterarlo $i \in \mathbb{N}$ veces obtenemos el núcleo $K^i \in \mathscr{K}$, definido de igual forma que en la Sección 4.2. La molificación de parámetro $i \in \mathbb{Z}$ de K es el núcleo $K_i \in \mathscr{K}$, definido por $K_i(x,y) = n^i K(n^i x, n^i y)$. Dados $u, v \in \mathbb{N}$ se define el proceso P_v^u como aquel que aplicado a un núcleo $K \in \mathscr{K}$ devuelve la sucesión $P_v^u(K) = \left\{P_v^u(K,i) = K_{vi}^{n^{ui}} : i \in \mathbb{N}\right\}$, cuyo i-ésimo elemento corresponde al núcleo K molificado con parámetro n^{vi} e iterado n^{ui} veces. Los procesos P_v^u conservan el índice y el parámetro de estabilidad cuando se aplican a núcleos en $\mathscr{K}^s$, para $s = \frac{u}{v}$. Se definen entonces las clases de **procesos *s*-estables** por $\mathscr{P}^s = \left\{P_v^u : u, v \in \mathbb{N}, s = \frac{u}{v}\right\}$. El siguiente lema, similar en forma y demostración al Lema 4.7, provee la fórmula para el espectro de los núcleos pertenecientes a las sucesiones obtenidas al aplicar estos procesos a núcleos de Markov diádicos.

Lema 7.5. *Sea $s = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}^+$ y sea $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathbb{Z})$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, el núcleo $K^{(i)} = P_v^u(K,i) = K_{vi}^{n^{ui}}$ tiene por espectro, respecto al sistema de Haar, a $\left\{\lambda^{(i)}(j) = \lambda(j - vi)^{n^{ui}} : j \in \mathbb{Z}\right\}$.*

7.3. Alternativa

Los procesos s-estables aplicados a núcleos s-estables conservan el orden y el parámetro de estabilidad en cada paso o etapa. Queremos estudiar, en primer lugar, si hay convergencia en estos casos y en qué sentido, en particular los tipos de convergencia de los operadores integrales asociados en distintos espacios funcionales, más precisamente en L^p, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$. En general, se plantea el interrogante sobre la relación entre la estabilidad de los núcleos y de los procesos y la convergencia. El camino elegido para dar estas respuestas consiste en fijar un proceso P_v^u, donde $s = \frac{u}{v}$, y estudiar las alternativas de convergencia espectral de las sucesiones obtenidas para distintos núcleos iniciales. Las propiedades de estabilidad de estos núcleos surgen naturalmente en este estudio como las condiciones que separan los casos de convergencia.

El siguiente resultado contempla el caso general. Sean $u, v \in \mathbb{N}$ y $s = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}^+$. Dado $K \in \mathscr{K}$, denotamos $P_v^u(K) = \left\{K^{(i)} = K_{iv}^{n^{iu}} : i \in \mathbb{N}\right\}$ y a sus autovalores asociados por $\lambda^{(i)}(j)$. Utilizamos además la notación $\mathbb{Z}_v = \{0, 1, \ldots, v-1\}$ y $\phi(h) = \phi(j(h)) = [j(h)]_v = j(h) \bmod v$, para $h \in \mathscr{H}$.

Teorema 7.6 (Alternativas).
Sean $u, v \in \mathbb{N}$, $s = \frac{u}{v}$ y $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathscr{H})$. Si existe $\lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(\bar{h})$ para algún vector $\bar{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_{v-1}) \in \mathscr{H}^v$ tal que $\phi(h_m) = m$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, entonces existe $\lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(h) = \lambda_\infty(h)$ para toda $h \in \mathscr{H}$ y tienen lugar tres posibilidades

(A) $\lambda_\infty \equiv 0$;

(*B*) $\lambda_\infty \equiv 1$;

(*C*) $\lambda_\infty(h) = e^{-\nu_{\phi(h)} n^{sj(h)}}$ *para toda* $h \in \mathscr{H}$, *donde* $\bar{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{v-1}) \in (\mathbb{R}^+)^v$ *y verifica la condición* $\frac{n-1}{n^{u+v}-n} \sum_{m=1}^{v-1} n^{m(1+s)} \nu_{\phi(m_0+m)} \leqslant \nu_{m_0}$ *para todo* $m_0 \in \mathbb{Z}_v$.

Demostración. El caso de núcleos iniciales determinados por perfiles de soporte compacto se inscribe en el ítem (B), de forma similar al resultado del Lema 5.1. Por otra parte, podemos escribir al espectro de los restantes núcleos en la forma $\lambda(j) = 1 - n^{-s\gamma(j)}$, para una sucesión $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que

(γ1) $\gamma(j) \to +\infty$ cuando $j \to -\infty$,

(γ2) $\gamma(j) \to 0$ cuando $j \to +\infty$,

(γ3) $(n-1) \sum_{l<j} n^{l-s\gamma(l)} \leqslant n^{j-s\gamma(j)}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Luego, por el Lema 7.5,

$$\lambda^{(i)}(j) = \lambda^{n^{iu}}(j - iv) = \left(1 - n^{-s\gamma(j-iv)}\right)^{n^{iu}} = \left[\left(1 - n^{-s\gamma(j-iv)}\right)^{n^{s\gamma(j-iv)}}\right]^{n^{-s\gamma(j-iv)+iu}}$$

y dado que el límite de la expresión entre corchetes es e^{-1} cuando $i \to \infty$, vemos que el límite espectral estará determinado por $\lim_{i\to\infty} j - iv + \gamma(j - iv)$ para $j = 0, 1, \dots, v-1$, ya que $-s\gamma(j - iv) + iu = s(j - [(j - iv) + \gamma(j - iv)])$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{Z}_v$ pueden darse estos casos

$$L_m = \lim_{i\to\infty} m - iv + \gamma(m - iv) = \begin{cases} -\infty, \\ +\infty, \\ c_m \in \mathbb{R}, \\ \nexists \text{ (por oscilación).} \end{cases}$$

El último caso no nos interesa ya que no se tiene convergencia de los autovalores.

Reescribiendo la condición (γ3) con $w = j - l$ tenemos que, para todo $j \in \mathbb{Z}$,

$$(n-1) \sum_{w>0} n^{-(1+s)w} n^{-s(j-w+\gamma(j-w))} \leqslant n^{-s(j+\gamma(j))},$$

y escribiendo cada $w > 0$ en la forma $w = m + kv$ para $m \in \mathbb{Z}_v + 1$ y $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$(n-1) \sum_{m=1}^{v} \sum_{k=0}^{\infty} n^{-(1+s)(m+kv)} n^{-s(j-m-kv+\gamma(j-m-kv))} \leqslant n^{-s(j+\gamma(j))}.$$

Luego, escribiendo $j = m_0 - iv$ en la expresión anterior para $i \in \mathbb{N}_0$ y $m_0 \in \mathbb{Z}_v$ fijo y calculando el límite cuando $i \to +\infty$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$(n-1)\sum_{m=1}^{v}\sum_{k=0}^{\infty} n^{-(1+s)(m+kv)} n^{-sL_{\phi(m_0-m)}} \leqslant n^{-sL_{m_0}},$$

esto es,

$$\frac{(n-1)n^{v(1+s)}}{n^{v(1+s)}-1}\sum_{m=1}^{v} n^{-m(1+s)} n^{-sL_{\phi(m_0-m)}} \leqslant n^{-sL_{m_0}} \tag{28}$$

para todo $m_0 \in \mathbb{Z}_v$. Como

$$n^{-sL_{\phi(j)}} = \begin{cases} +\infty & si \quad L_{\phi(j)} = -\infty, \\ 0 & si \quad L_{\phi(j)} = +\infty, \\ \nu_{\phi(j)} := n^{-sc_{\phi(j)}} & si \quad L_{\phi(j)} = c_{\phi(j)} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

de acuerdo a (28) se tienen las siguientes alternativas:

- si para algún $j \in \mathbb{Z}$ se tiene $L_{\phi(j)} = -\infty$ entonces $n^{-sL_{\phi(j)}} = +\infty$ y, por (28), debe ser $n^{-sL_m} = +\infty$ y $L_m = -\infty$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, y ocurre el caso (A);
- si $L_{\phi(j)} = +\infty$ para algún $j \in \mathbb{Z}$ entonces $L_m = +\infty$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$ y ocurre el caso (B);
- si $L_m = c_m \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$ entonces $\bar{\nu} = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{v-1}) \in (\mathbb{R}^+)^v$, donde $\nu_m = n^{-sL_m}$ para $m \in \mathbb{Z}_v$, y por (28) se tiene

  $$\frac{(n-1)n^{u+v}}{n^{u+v}-1}\sum_{m=1}^{v} n^{-m(1+s)}\nu_{\phi(j-m)} \leqslant \nu_{\phi(j)} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z},$$

  que operando equivale a

  $$\frac{n-1}{n^{u+v}-n}\sum_{m=1}^{v-1} n^{m(1+s)}\nu_{\phi(j+m)} \leqslant \nu_{\phi(j)} \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

  De forma concisa, esto resulta en el sistema

  $$\frac{n-1}{n^{u+v}-n}\sum_{m=1}^{v-1} n^{m(1+s)}\nu_{\phi(m_0+m)} \leqslant \nu_{m_0}, \quad m_0 \in \mathbb{Z}_v. \tag{29}$$

  Cabe observar que en al menos una de estas ecuaciones la desigualdad debe ser estricta, pues sino resulta una contradicción.

Por lo tanto, en este caso

$$\lambda_\infty(h) = \lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(j(h)) = e^{-n^{s(j(h)-L_{\phi(h)})}} = e^{-\nu_{\phi(h)} n^{sj(h)}}$$

para todo $h \in \mathscr{H}$. Esto corresponde al ítem (C) del enunciado.

$\square$

Precisaremos, para el resultado que relaciona la estabilidad y la convergencia, una definición de estabilidad en subsucesiones y un lema que provea las equivalencias de esta definición en términos de las distintas representaciones del núcleo. Diremos que un núcleo $K \in \mathscr{K}$, representado por medio de los coeficientes $\{k_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, es s-estable en una subsucesión $\{k_{j_m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ cuando $\lim_{m\to+\infty} k_{j_m} n^{(1+s)j_m} = \sigma > 0$. Notemos que la definición se aplica cuando las sucesiones de índices $\{j_m\}$ son tales que $j_m \to +\infty$ cuando $m \to +\infty$. De igual manera definimos la sub y supra s-estabilidad en (sub)sucesiones.

Lema 7.7. *Sea $K \in \mathscr{K}$. Equivalen*

(a) $\lim_{i\to+\infty} n^{-s(m-iv)}(1-\lambda(m-iv)) = \nu_m > 0$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}_v$*, tal que* $\frac{n-1}{n^{u+v}-n} \sum_{m=1}^{v-1} n^{m(1+s)} \nu_{\phi(m_0+m)} \leqslant \nu_{m_0}$ *para todo* $m_0 \in \mathbb{Z}_v$ *(29);*

(b) $\lim_{i\to+\infty} k_{m+iv} n^{(1+s)(m+iv)} = \sigma_m \geq 0$ *para todo* $m \in \mathbb{Z}_v$*, con* $\bar{\sigma} \neq 0$*. Es decir, K es s-estable en al menos una sucesión* $\{k_{m+vi}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *con* $m \in \mathbb{Z}_v$*, y es sub s-estable en aquellas sucesiones donde no es estable.*

En estas condiciones, para todo $m_0 \in \mathbb{Z}_v$ *se tiene que*

$$\sigma_{m_0} = \frac{n^{u+v}-n}{n^{u+v}-1}\left(\nu_{\phi(-m_0)} - \frac{n-1}{n^{u+v}-n}\sum_{m=1}^{v-1} n^{m(1+s)}\nu_{\phi(m-m_0)}\right)$$

y
$$\nu_{m_0} = \frac{n^{sv+1}-1}{n^{sv+1}-n}\left(\sigma_{m_0} + \frac{n^{sv}(n-1)}{n^{sv+1}-1}\sum_{m=1}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m_0+m)}\right).$$

Demostración. Veamos primero que *(a)* $\Longrightarrow$ *(b)*. Como

$$\begin{aligned}
k_j &= \sum_{l\geqslant j} n^{-l}\left(\lambda(-l-1)-\lambda(-l)\right) \\
&= \sum_{l\geqslant j} n^{-l(1+s)}\left[n^{sl}(1-\lambda(-l)) - n^{-s}n^{s(l+1)}(1-\lambda(-l-1))\right] \\
&= \sum_{m=j}^{j+v-1}\sum_{l=0}^{\infty} n^{-(1+s)(m+lv)}\Big[n^{s(m+lv)}(1-\lambda(-(m+lv)))
\end{aligned}$$

$$- n^{-s} n^{s(m+1+lv)}(1-\lambda(-(m+1+lv)))\Big],$$

tomando $j = m_0 + iv$ para $m_0 \in \mathbb{Z}_v$ fijo e $i \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande tenemos, por hipótesis, que

$$\begin{aligned}
k_{m_0+iv} &= \sum_{m=0}^{v-1}\sum_{l=0}^{\infty} n^{-(1+s)(m+m_0+iv+lv)}\Big[n^{s(m+m_0+iv+lv)}(1-\lambda(-(m+m_0+iv+lv))) \\
&\qquad - n^{-s} n^{s(m+m_0+1+iv+lv)}(1-\lambda(-(m+m_0+1+iv+lv)))\Big] \\
&\approx \sum_{m=0}^{v-1}\sum_{l=0}^{\infty} n^{-(1+s)(m+m_0+iv+lv)}\big[\nu_{\phi(-m-m_0)} - n^{-s}\nu_{\phi(-m-m_0-1)}\big].
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} k_{m_0+iv} n^{(1+s)(m_0+iv)} &= \sum_{m=0}^{v-1} n^{-m(1+s)}\big(\nu_{\phi(-m-m_0)} - n^{-s}\nu_{\phi(-m-m_0-1)}\big)\sum_{l=0}^{\infty}(n^{-v(1+s)})^l \\
&= \tfrac{1}{1-n^{-u-v}}\sum_{m=0}^{v-1}\big(n^{-m(1+s)}\nu_{\phi(-m_0-m)} - n.n^{-(m+1)(1+s)}\nu_{\phi(-m_0-(m+1))}\big) \\
&= \tfrac{n^{u+v}}{n^{u+v}-1}\left[(1-n)\sum_{m=1}^{v-1} n^{-m(1+s)}\nu_{\phi(-m_0-m)} + (1-n^{1-v(1+s)})\nu_{\phi(-m_0)}\right] \\
&= \tfrac{n^{u+v}}{n^{u+v}-1}\left[(1-n)n^{-v(1+s)}\sum_{l=1}^{v-1} n^{-l(1+s)}\nu_{\phi(l-m_0)} + (1-n^{1-v(1+s)})\nu_{\phi(-m_0)}\right] \\
&= \tfrac{1}{n^{u+v}-1}\left[(1-n)\sum_{l=1}^{v-1} n^{-l(1+s)}\nu_{\phi(l-m_0)} + (n^{u+v}-n)\nu_{\phi(-m_0)}\right] \\
&= \frac{n^{u+v}-n}{n^{u+v}-1}\left[\nu_{\phi(-m_0)} - \frac{n-1}{n^{u+v}-n}\sum_{m=1}^{v-1} n^{m(1+s)}\nu_{\phi(m-m_0)}\right] \\
&=: \sigma_{m_0}.
\end{aligned}$$

Por hipótesis resulta además $\sigma_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, y, dado que en al menos una de las ecuaciones de (29) se dá una desigualdad estricta, entonces $\bar{\sigma} \neq 0$.

Probemos ahora que *(b)* $\Longrightarrow$ *(a)*. Por las fórmulas de transformación, para $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
n^{sj}(1-\lambda(-j)) &= \sum_{l\geqslant j} n^{l+sj}(k_l - k_{l+1}) \\
&= \sum_{m=0}^{v-1}\sum_{l=0}^{\infty} n^{m+vl+j+sj}\left(k_{m+vl+j} - k_{m+vl+j+1}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{v-1} \sum_{l=0}^{\infty} n^{-s(m+vl)} \big(n^{(1+s)(m+vl+j)} k_{m+vl+j} \\ - n^{-(1+s)} n^{(1+s)(m+vl+j+1)} k_{m+vl+j+1}\big).$$

Tomando en la fórmula anterior $j = m_0 + iv$ para $m_0 \in \mathbb{Z}_v$ fijo e $i \in \mathbb{Z}$, tenemos por hipótesis que

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to+\infty} & n^{s(m_0+iv)}(1-\lambda(-(m_0+iv))) \\
&= \sum_{m=0}^{v-1} \sum_{l=0}^{\infty} n^{-s(m+vl)} \left[\sigma_{\phi(m+m_0)} - n^{-(1+s)}\sigma_{\phi(m+m_0+1)}\right] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} (n^{-sv})^l \left[\sum_{m=0}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m+m_0)} - n^{-1-s}\sum_{m=0}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m+m_0+1)}\right] \\
&= \frac{1}{1-n^{-sv}} \left[\sum_{m=0}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m_0+m)} - n^{-1}\sum_{m=0}^{v-1} n^{-s(m+1)}\sigma_{\phi(m_0+m+1)}\right] \\
&= \frac{n^{sv}}{n^{sv}-1} \left[(1-n^{-1})\sum_{m=1}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m_0+m)} + (1-n^{-1-sv})\sigma_{m_0}\right] \\
&= \frac{n^{sv}}{n^{sv+1}-n} \left[(n-1)\sum_{m=1}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m_0+m)} + (n-n^{-sv})\sigma_{m_0}\right] \\
&= \frac{n^{sv+1}-1}{n^{sv+1}-n} \left[\frac{n^{sv}(n-1)}{n^{sv+1}-1}\sum_{m=1}^{v-1} n^{-sm}\sigma_{\phi(m_0+m)} + \sigma_{m_0}\right] \\
&= \nu_{m_0}.
\end{aligned}$$

Como $\bar{\sigma} \neq 0$, resulta $\nu_m > 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$. Podemos ver que además se satisface (29). □

TEOREMA 7.8 (Estabilidad y convergencia).
Sean $u, v \in \mathbb{N}$ y $s = \frac{u}{v}$. Para $K \in \mathscr{K}$ consideremos el proceso $P_v^u(K)$. Entonces

(i) K es supra-s-estable si y sólo si $\lambda_\infty \equiv 0$ (caso (A) del teorema de alternativas);

(ii) K es sub-s-estable si y sólo si $\lambda_\infty \equiv 1$ (caso (B) del teorema de alternativas);

(iii) K satisface la propiedad de estabilidad $\lim_{i\to+\infty} k_{m+iv} n^{(1+s)(m+iv)} = \sigma_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, con $\bar{\sigma} \neq 0$, si y sólo si ocurre la alternativa (C) del Teorema 7.6, con $\bar{\nu}$ y $\bar{\sigma}$ relacionados por las fórmulas descriptas en el Lema 7.7;

(iv) K es s-estable con parámetro $\sigma = \left(\frac{n^{1+s}-n}{n^{1+s}-1}\right)\nu$ si y sólo si $\lambda_\infty(h) = e^{-\nu n^{sj(h)}}$ para toda $h \in \mathscr{H}$.

Demostración. *(i)* Remitiéndonos a la demostración del teorema anterior, observamos que se da el caso *(A)* si y sólo si $L_m = \lim_{i\to\infty} m - iv + \gamma(m - iv) = -\infty$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, lo que equivale a $\lim_{j\to-\infty} j + \gamma(j) = -\infty$. Como $\lambda(j) = 1 - n^{-s\gamma(j)}$, luego $n^{-s(\gamma(j)+j)} = n^{-sj}(1-\lambda(j))$. Por lo tanto, sucede *(A)* si y sólo si $\lim_{j\to-\infty} n^{-sj}(1-\lambda(j)) = +\infty$, esto es, cuando K es supra s-estable (Lema 7.4).

(ii) Si K tiene soporte compacto, entonces es sub s-estable y ocurre *(B)*. En otro caso,

$$\begin{aligned}
(B) \;&\Leftrightarrow\; \lim_{j\to-\infty} j + \gamma(j) = +\infty\\
&\Leftrightarrow\; \lim_{j\to-\infty} n^{-s(j+\gamma(j))} = 0\\
&\Leftrightarrow\; \lim_{j\to-\infty} n^{-sj}(1-\lambda(j)) = 0\\
&\Leftrightarrow\; K \text{ es sub } s\text{-estable.}
\end{aligned}$$

(iii) Según vimos, ocurre *(C)* si y sólo si $L_m = \lim_{i\to\infty} m - iv + \gamma(m - iv) \in \mathbb{R}$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, verificando la condición (29) para $\nu_m = n^{-sL_m}$. Ahora bien, como $n^{-s(\gamma(m-iv)+m-iv)} = n^{-s(m-iv)}(1 - \lambda(m - iv))$, tomando límites para $i \to \infty$ tenemos que ocurre *(C)* si y sólo si $\lim_{i\to\infty} n^{-s(m-iv)}(1 - \lambda(m - iv)) = \nu_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$ y vale (29). Esto equivale, según el Lema 7.7, a que K sea s-estable en al menos una sucesión $\{k_{m+vi}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, donde $m \in \mathbb{Z}_v$, y sub s-estable en aquellas sucesiones donde no es estable. Es decir, $\lim\limits_{i\to+\infty} k_{m+iv}n^{(1+s)(m+iv)} = \sigma_m \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$, con $\bar{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{v-1}) \neq \bar{0}$. La relación entre $\bar{\sigma}$ y $\bar{\nu}$ se describe en el Lema 7.7.

(iv) Este es el caso particular del ítem anterior cuando K es s-estable (sobre todo $\mathbb{Z}$). Como $\lambda_\infty(j) = e^{-\nu n^{sj}}$ para toda $j \in \mathbb{Z}$ si y sólo si ocurre *(C)* con $\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_{v-1} = \nu$, por la demostración del teorema anterior esto acontece si y sólo si $\nu = n^{-sL} \in \mathbb{R}^+$ con $L = L_m = \lim_{i\to\infty} m - iv + \gamma(m - iv)$ para todo $m \in \mathbb{Z}_v$. Equivalen a esto cada una de las siguientes lineas

$$\lim_{j\to-\infty} j + \gamma(j) = L \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{j\to-\infty} n^{-s(j+\gamma(j))} = n^{-sL} = \nu,$$

$$\lim_{j\to-\infty} n^{-sj}(1-\lambda(j)) = \nu,$$

con lo cual, en vistas del Lema 7.3, $K \in \mathscr{K}^s(\sigma)$ con $\sigma = \left(\dfrac{n^{1+s}-n}{n^{1+s}-1}\right)\nu$. $\square$

7.4. Teorema del límite central y Aproximación de la identidad

Veremos en esta sección que, también en este contexto, todo proceso s-estable P_v^u iniciado en un núcleo de Markov diádico s-estable K converge en el sentido de L^p a la solución de la ecuación de difusión s-fraccionaria diádica, para todo $p \in (1,\infty)$.

Teorema 7.9. *Sea $s \in \mathbb{Q}^+$ y $K \in \mathscr{K}$ un núcleo s-estable con parámetro $\left(\frac{n^{1+s}-n}{n^{1+s}-1}\right)t$. Entonces todo proceso $P_v^u(K)$ con $u, v \in \mathbb{N}$ y $s = \frac{u}{v}$ converge a una ley central en el sentido de $L^p(X,\mu)$, para $1 < p < \infty$. Más precisamente, si $\frac{u}{v} = s$ y $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de operadores integrales de núcleos $\{K^{(i)} = K_{vi}^{n^{ui}} : i \in \mathbb{N}\}$, entonces*

$$T_i f \xrightarrow{L^p} u(\cdot,t) \qquad \textit{cuando} \qquad i \to \infty$$

para toda $f \in L^p(X,\mu)$, $1 < p < \infty$, donde $u(x,t) = \int_X K_\infty(x,y;t) f(y)\, d\mu(y)$, con

$$K_\infty(x,y;t) = \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-tn^{sj(h)}} h(x)h(y). \tag{30}$$

Notemos que $K_\infty(x,y;t) \in \mathscr{K}^s\left(\frac{n^{1+s}-n}{n^{1+s}-1}\, t\right)$.

Demostración. El resultado se deriva de la aplicación del Teorema 7.8.(iv).

$\square$

De igual forma, vale también la recíproca.

Teorema 7.10. *Sean $s \in \mathbb{Q}^+$ y $K \in \mathscr{K}$. Si el límite en L^p de la sucesión de núcleos asociados a un proceso s-estable iniciado en K es el núcleo $K_\infty(x,y;t)$ (definido en (30)) entonces K es s-estable con parámetro de estabilidad $\frac{n^{1+s}-n}{n^{1+s}-1}\, t$.*

Los resultados relativos a aproximaciones a la identidad en $\mathbb{R}^+$ se pueden reproducir de manera análoga en este contexto. Repasamos aquí los enunciados principales.

Lema 7.11. *Sea $K \in \mathscr{K}$ un núcleo sub-s-estable y sea $P \in \mathscr{P}^s$. Entonces la sucesión de núcleos $\{K^{(i)} = P(K,i) : i \in \mathbb{N}\}$ concentra cuando $i \to +\infty$.*

Teorema 7.12. *Sea $K \in \mathscr{K}$ sub-s-estable y sea $P \in \mathscr{P}^s$. Entonces la sucesión de núcleos $\{K^{(i)} = P(K,i)\colon i \in \mathbb{N}\}$ es una aproximación a la identidad en el sentido de L^p, para $1 \leq p < \infty$. Recíprocamente, si $K \in \mathscr{K}$, $P \in \mathscr{P}^s$ y la sucesión de núcleos $\{K^{(i)} = P(K,i)\colon i \in \mathbb{N}\}$ es una aproximación a la identidad en el sentido de L^p para algún $1 \leq p < \infty$, entonces K es sub-s-estable.*

Teorema 7.13. *Si $K \in \mathscr{K}$ es sub-s-estable entonces para cada $P_v^u \in \mathscr{P}^s$ la sucesión de núcleos $P_v^u(K)$ es una aproximación a la identidad puntual en $L^p(\mathbb{R}^+)$, para todo $1 \leq p < \infty$. Es decir,*

$$\lim_{i \to +\infty} T_i f(x) = f(x) \quad \textit{en c.t.p.}$$

para toda $f \in \bigcup_{1 \leq p < \infty} L^p(\mathbb{R}^+)$. Recíprocamente, si $K \in \mathscr{K}$, $u, v \in \mathbb{N}$, $s = \frac{u}{v}$ y la sucesión de núcleos $P_v^u(K)$ es una aproximación a la identidad en sentido puntual en $L^p(\mathbb{R}^+)$ para algún $1 \leq p < \infty$, entonces el núcleo K es sub-s-estable.

7.5. Núcleos diádicos de Markov en espacios de tipo homogéneo

El problema no trivial de la existencia de familias diádicas en espacios de tipo homogéneo con control métrico del tamaño de los cubos fue resuelto por Christ en [29]. Sin embargo, en tales construcciones la medida de los cubos de un mismo nivel puede variar notablemente cuando los cubos están alejados, de acuerdo al grado de heterogeneidad del espacio. Un ejemplo de espacio de tipo homogéneo con tales variaciones está dado por la semirrecta real positiva con la distancia usual y la medida $x^{-1/2}dx$. Esto puede representar ciertas complicaciones, debido a que es la medida de los cubos la que guía el comportamiento de la operación de molificación en la definición de los procesos de iteración y molificación como lo hicimos en casos homogéneos. Vamos a situarnos entonces en espacios normales. Recordemos que existen métodos de normalización de espacios de tipo homogéneo generales que conservan características topológicas (ver Sección 1.2).

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo normal, no acotado y no atómico. Sea $\mathscr{D} = \left\{Q_k^j\colon j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$ un sistema diádico exacto consistente en un único cuadrante y $\mathscr{H}$ un sistema de Haar asociado. Por simplicidad, supongamos además que todos los cubos diádicos tienen más de un hijo, es decir $\mathscr{D} = \widetilde{\mathscr{D}} := \{Q \in \mathscr{D}\colon \sharp\mathscr{O}(Q) > 1\}$, lo cual se puede lograr eligiendo la constante de escala ρ suficientemente chica en la construcción de Christ de $\mathscr{D}$ en 1.7. Con la distancia diádica δ determinada por $\mathscr{D}$ el espacio (X, δ, μ)

es también normal. Por las heterogeneidades del espacio base los cubos de cada nivel no tienen necesariamente la misma medida o la misma cantidad de hijos, aunque estos valores se encuentran en un rango determinado.

PROPOSICIÓN 7.14. *Sea ρ la constante en la definición de $\mathscr{D}$ dada en el Teorema 1.7. Entonces existen constantes geométricas positivas C_1 y C_2 tales que*

$$C_1\rho^{j(Q)} \leq \mu(Q) \leq C_2\rho^{j(Q)}$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la excentricidad de los cubos diádicos (propiedad *(4)* en 1.7) y la condición de normalidad (1). □

La clase de núcleos iniciales en estos contextos débilmente homogéneos será entonces algo diferente a la considerada en los casos de homogeneidad estricta. Mientras que, en principio, la nueva clase admitirá núcleos que no sólo dependen de δ sino también de la ubicación espacial, por otro lado nos restringiremos a núcleos decrecientes con la distancia cuando una de las coordenadas está fija. Precisemos. Sea, para cada cubo $Q = Q^j_k$, la función

$$\psi_Q(x,y) = \psi^j_k(x,y) = \mu(Q)^{-1}\chi_Q(x)\chi_Q(y).$$

Definimos la clase $\mathscr{K}$ de los núcleos de la forma

$$K(x,y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \alpha_Q\psi_Q(x,y), \tag{31}$$

con $\alpha\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ tal que

(α1) $\alpha_Q \geq 0$ para todo $Q \in \mathscr{D}$,

(α2) $\sum_{Q\in\mathscr{D}} \alpha_Q\chi_Q(x) = 1$ para todo $x \in X$.

De esta manera, los núcleos de $\mathscr{K}$ están bien definidos y toman valores finitos y no negativos fuera de la diagonal $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\}$. En la diagonal los núcleos pueden tomar valor infinito, pero esto no afecta la definición de los operadores integrales asociados ya que el espacio es no atómico. Son además medibles, simétricos y, por la no negatividad de α, vale una propiedad de monotonía localizada: si $\delta(x,y) \leq \delta(x,z)$ entonces $K(x,y) \leq K(x,z)$. Finalmente, la condición (α2) determina el carácter markoviano de los núcleos en $\mathscr{K}$.

A partir de la definición se observa que los valores que toma un núcleo $K \in \mathscr{K}$ están determinados por los cubos diádicos, y podemos escribir

$$K(x,y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} k_Q \chi_Q(x)\chi_Q(y) \sum_{Q'\in\mathscr{O}(Q)} \frac{1}{2}\left|\chi_{Q'}(x) - \chi_{Q'}(y)\right|,$$

con $k_Q = \sum_{Q'\supset Q} \alpha_{Q'}\mu(Q')^{-1}$. Luego, los coeficientes $\{k_Q\}_{Q\in\mathscr{D}}$ verifican

($k1$) $k_Q \geq 0$ para todo $Q \in \mathscr{D}$;

($k2$) $\sum_{Q\in\mathscr{D}} k_Q \sum_{Q'\in\mathscr{O}(Q)} (\mu(Q) - \mu(Q'))\, \chi_{Q'}(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Veremos a continuación que los núcleos en la clase $\mathscr{K}$ tienen propiedades similares a los de la clase homónima estudiada anteriormente. El primer teorema fundamental prueba la diagonalización de los operadores integrales asociados con respecto al sistema de Haar.

Teorema 7.15. *Sea $K \in \mathscr{K}$ con coeficientes $\{\alpha_Q \colon Q \in \mathscr{D}\}$ y sea T el operador asociado. Entonces $Th = \lambda(h)h$ para toda h en $\mathscr{H}$, con $\lambda(h) = \lambda(Q(h)) = 1 - \sum_{Q\supset Q(h)} \alpha_Q$.*

Demostración. Sea $h \in \mathscr{H}$. Para cada $x \in X$ denotemos $\mathscr{D}_x = \{Q \in \mathscr{D} \colon x \in Q\}$. Luego, por la definición de K y las propiedades de h se tiene

$$\begin{aligned}
Th(x) &= \int_X \sum_{Q\in\mathscr{D}} \alpha_Q \psi_Q(x,y) h(y)\, d\mu(y) \\
&= \sum_{Q\in\mathscr{D}} \alpha_Q \chi_Q(x)\mu(Q)^{-1} \int_X \chi_Q(y)h(y)\, d\mu(y) \\
&= \sum_{Q\in\mathscr{D}_x} \alpha_Q \mu(Q)^{-1} \int_Q h(y)\, d\mu(y) \\
&= \sum_{\substack{Q\subsetneq Q(h)\\ Q\in\mathscr{D}_x}} \alpha_Q \mu(Q)^{-1} \int_Q h(y)\, d\mu(y).
\end{aligned}$$

Si $x \notin Q(h)$ entonces $Th(x) = 0 = h(x)$. Por otra parte, si $x \in Q(h)$ entonces $h(x) = h(y)$ para todo $y \in Q$ para todo cubo $Q \in \mathscr{D}_x$ estrictamente contenido en $Q(h)$. Luego, en este último caso se tiene

$$\begin{aligned}
Th(x) &= \sum_{\substack{Q\subsetneq Q(h)\\ Q\in\mathscr{D}_x}} \alpha_Q \mu(Q)^{-1} \int_Q h(x)\, d\mu(y) \\
&= \sum_{\substack{Q\subsetneq Q(h)\\ Q\in\mathscr{D}_x}} \alpha_Q h(x)
\end{aligned}$$

$$= \left(1 - \sum_{Q \supset Q(h)} \alpha_Q\right) h(x),$$

donde en la última igualdad utilizamos ($\alpha 2$). □

De acuerdo al teorema anterior y a las propiedades de los coeficientes α_Q, el espectro de los operadores asociados a núcleos de $\mathscr{K}$ tiene las propiedades que enunciamos seguidamente. Primero, notemos que el espectro depende de los cubos diádicos que soportan a las wavelets, con lo cual es natural escribir $\lambda(Q)$ o λ_Q para referirnos a los autovalores. Denotaremos por $\widetilde{Q}$ al padre, o primer ancestro, del cubo Q en $\mathscr{D}$, y por $\mathscr{D}_x = \{Q \in \mathscr{D} \colon x \in Q\}$ a la cadena de los cubos diádicos que contienen al punto $x \in X$.

Lema 7.16. *Sea $K \in \mathscr{K}$. Entonces*

($\lambda 1$) $\lambda(Q) \leq \lambda(\widetilde{Q})$ para todo $Q \in \mathscr{D}$;

($\lambda 2$) $\lambda(Q) \to 1$ cuando $\mu(Q) \to \infty$ restringido a la cadena $\mathscr{D}_x$, para todo $x \in X$;

($\lambda 3$) $\lambda(Q) \to 0$ cuando $\mu(Q) \to 0$ sobre $\mathscr{D}_x$, para todo $x \in X$.

Observamos que el espectro de un núcleo en la clase $\mathscr{K}$ lo identifica, del mismo modo que lo hacen las sucesiones $\alpha(\mathscr{D})$ y $k(\mathscr{D})$. Más aún, toda sucesión $\lambda(\mathscr{D})$ que verifique las condiciones del lema anterior determina unívocamente un núcleo en $\mathscr{K}$, del cual es el espectro, definido por los coeficientes $\alpha_Q = \lambda(\widetilde{Q}) - \lambda(Q)$ para todo $Q \in \mathscr{D}$.

Algunas fórmulas de transformación entre los coeficientes que representan a un núcleo en $\mathscr{K}$, que nos resultarán de utilidad, son:

- $\alpha_Q = \lambda(\widetilde{Q}) - \lambda(Q)$
- $k_Q = \sum_{Q' \supset Q} \alpha_{Q'} \mu(Q')^{-1}$
- $\lambda(Q) = 1 - \sum_{Q' \supset Q} \alpha_{Q'}$
- $\alpha_Q = \mu(Q)(k_Q - k_{\widetilde{Q}})$.

Asimismo, contamos en este contexto con una representación de los núcleos de $\mathscr{K}$ a partir del sistema de Haar $\mathscr{H}$ y sus autovalores respectivos.

Lema 7.17. *Sea $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathscr{D})$. Entonces*

$$K(x, y) = \sum_{h \in \mathscr{H}} \lambda(Q(h)) h(x) h(y) \tag{32}$$

para todo par (x, y) de puntos distintos de X.

Para la demostración necesitaremos el siguiente resultado previo, válido en general en espacios de tipo homogéneo no acotados, con sistemas diádico $\mathscr{D}$ y de Haar $\mathscr{H}$ asociados.

LEMA 7.18. *Sea* $Q_0 \in \widetilde{\mathscr{D}} = \{Q \in \mathscr{D} \colon \sharp(\mathscr{O}(Q)) > 1\}$ *y sean* x *e* y *puntos pertenecientes a cubos distintos en* $\mathscr{O}(Q_0)$*, o sea,* $\delta(x,y) = \mu(Q_0)$*. Entonces*

(i) $\sum_{Q \supset Q_0} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) = 0$*;*

(ii) $-\sum_{h \in \mathscr{H}(Q_0)} h(x)h(y) = \sum_{Q \supsetneq Q_0} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) = \mu(Q_0)^{-1}$*;*

(iii) $\sum_{h \in \mathscr{H}(\widetilde{Q})} h(x)h(y) = \mu(Q)^{-1} - \mu(\widetilde{Q})^{-1}$*, para todo* $Q \supset Q_0$*.*

DEMOSTRACIÓN. Los ítems *(i)* y *(ii)* son el resultado del Lema 5.1 en [2]. Para ver *(iii)* notemos que, para todo cubo $Q_* \in \widetilde{\mathscr{D}}$ tal que $Q_* \supset Q_0$,

$$\chi_{Q_*}(x) = \sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} \langle \chi_{Q_*}, h \rangle h(x).$$

Luego, por la identidad de Parseval y, puesto que h es constante en Q_* y $x \in Q_*$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(Q_*) = \|\chi_{Q_*}\|_2^2 &= \sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} |\langle \chi_{Q_*}, h \rangle|^2 \\
&= \sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} \left(\int_{Q_*} h(z) d\mu(z) \right)^2 \\
&= \sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} \left(\int_{Q_*} h(x) d\mu(z) \right)^2 \\
&= \mu(Q_*)^2 \sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)^2,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) = \mu(Q_*)^{-1}.$$

Aplicando esta identidad a Q_* y a $\widetilde{Q_*}$, el primer ancestro de Q_* en $\widetilde{\mathscr{D}}$, obtenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{h \in \mathscr{H}(\widetilde{Q_*})} h(x)h(y) &= \sum_{Q \supset \widetilde{Q_*}} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) - \sum_{Q \supsetneq \widetilde{Q_*}} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) \\
&= \sum_{Q \supsetneq Q_*} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) - \sum_{Q \supsetneq \widetilde{Q_*}} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y)
\end{aligned}$$

$$= \mu(Q_*)^{-1} - \mu(\widetilde{Q_*})^{-1}.$$

□

Demostración del Lema 7.17. Sea $K \in \mathscr{K}$ con espectro $\{\lambda(Q) \colon Q \in \mathscr{D}\}$ y definamos, para $x \neq y$,

$$N(x,y) := \sum_{h \in \mathscr{H}} \lambda(Q(h))h(x)h(y).$$

Para probar la validez de la tesis, veamos primero que N está bien definido en $(X \times X) \setminus \Delta$ y que es un núcleo diádico y markoviano. Luego bastará con probar que el espectro de N coincide con el de K.

Sean $x, y \in X$ distintos. Entonces $\delta(x,y) = \mu(Q')$ para algún cubo $Q' \in \mathscr{D}$. Dado que las únicas wavelets que no se anulan en x ni en y son las basadas en cubos que contienen a Q', tenemos que

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \sum_{Q \supset Q'} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} \lambda(Q(h))h(x)h(y) \\ &= \sum_{Q \supset Q'} \lambda(Q) \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y). \end{aligned}$$

El resultado *(ii)* del Lema 7.18 dice que

$$-\sum_{h \in \mathscr{H}(Q')} h(x)h(y) = \sum_{Q \supsetneq Q'} \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) = \mu(Q')^{-1}, \tag{33}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} N(x,y) &= \sum_{Q \supsetneq Q'} \lambda(Q) \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)h(y) - \lambda(Q')\mu(Q')^{-1} \\ &= \sum_{Q \supsetneq Q'} \lambda(Q) \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} h(x)^2 - \lambda(Q')\mu(Q')^{-1}. \end{aligned}$$

Luego, se tiene la buena definición por (33) y la acotación uniforme de $\{\lambda(Q) \colon Q \in \mathscr{D}\}$ y se tiene la no negatividad de N por (33) y la propiedad de monotonía de los autovalores de K. Además, la última fórmula demuestra el carácter diádico de N. Para ver que N satisface la propiedad de Markov, fijemos $x \in X$ y seleccionemos para cada $j \in \mathbb{Z}$ un punto $x^j \in Q_x^j \setminus Q_x^{j+1}$, donde Q_x^j es el cubo de nivel j que contiene a x. Integrando, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_X N(x,y)\,d\mu(y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{Q_x^j\setminus Q_x^{j+1}} N(x,y)\,d\mu(y)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} N(x,x^j)\left[\mu(Q_x^j)-\mu(Q_x^{j+1})\right].\end{aligned}$$

Veamos que esta serie converge a 1. Dado que $\delta(x,x^j)=\mu(Q_x^j)$, por el Lema 7.18 *(iii)* se tiene

$$\begin{aligned}N(x,x^j) &= \sum_{i\geq 1}\lambda(Q_x^{j-i})\sum_{h\in\mathscr{H}(Q_x^{j-i})} h(x)^2 - \lambda(Q_x^j)\mu(Q_x^j)^{-1}\\ &= \sum_{i\geq 1}\lambda(Q_x^{j-i})\left[\mu(Q_x^{j-i+1})^{-1}-\mu(Q_x^{j-i})^{-1}\right]-\lambda(Q_x^j)\mu(Q_x^j)^{-1}.\end{aligned} \tag{34}$$

Ahora, definiendo la sucesión auxiliar

$$\begin{aligned}s_j :&= N(x,x^j)+\lambda(Q_x^j)\mu(Q_x^{j+1})^{-1}\\ &= \sum_{i\geq 0}\lambda(Q_x^{j-i})\left[\mu(Q_x^{j-i+1})^{-1}-\mu(Q_x^{j-i})^{-1}\right]\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}N(x,x^j)\left[\mu(Q_x^j)-\mu(Q_x^{j+1})\right] &= \left[s_j-\lambda(Q_x^j)\mu(Q_x^{j+1})^{-1}\right]\left[\mu(Q_x^j)-\mu(Q_x^{j+1})\right]\\ &= \left[\mu(Q_x^j)s_j+\left(1-\frac{\mu(Q_x^j)}{\mu(Q_x^{j+1})}\right)\lambda(Q_x^j)\right]-\mu(Q_x^{j+1})s_j\\ &= \mu(Q_x^j)s_{j-1}-\mu(Q_x^{j+1})s_j.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_X N(x,y)\,d\mu(y) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} N(x,x^j)\left[\mu(Q^j)-\mu(Q_x^{j+1})\right]\\ &= \lim_{J\to+\infty}\sum_{j=-J}^{J}\left(\mu(Q_x^j)s_{j-1}-\mu(Q_x^{j+1})s_j\right)\\ &= \lim_{J\to+\infty}\mu(Q_x^{-J})s_{-J-1}-\mu(Q_x^{J+1})s_J.\end{aligned}$$

Con esto, hemos reducido el problema al estudio de los límites de $\mu(Q_x^{j+1})s_j$ en los infinitos negativo y positivo.

A partir de la primera igualdad de (34), por las propiedades (λ1), (λ2) y (λ3) del Lema 7.16 de los autovalores de K y por (33), tenemos que

$$\left(\lambda(Q_x^{j-1}) - \lambda(Q_x^j)\right) \mu(Q_x^j)^{-1} \leq N(x, x^j) \leq \left(1 - \lambda(Q_x^j)\right) \mu(Q_x^j)^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\mu(Q_x^{j+1})s_j \;=\; \mu(Q_x^{j+1})N(x, x^j) + \lambda(Q_x^j) \;\leq\; \mu(Q_x^{j+1})\mu(Q_x^j)^{-1}\left(1 - \lambda(Q_x^j)\right) + \lambda(Q_x^j)$$

y, por otra parte,

$$\mu(Q_x^{j+1})s_j \;\geq\; \mu(Q_x^{j+1})\mu(Q_x^j)^{-1}\left(\lambda(Q_x^{j-1}) - \lambda(Q_x^j)\right) + \lambda(Q_x^j),$$

con lo cual $\mu(Q_x^{j+1})s_j \to 1$ cuando $j \to -\infty$, dada la acotación uniforme de los cocientes $\mu(Q_x^{j+1})\mu(Q_x^j)^{-1}$. Para estudiar la convergencia para $j \to +\infty$, notemos en primer lugar que $\mu(Q_x^j)$ tiene comportamiento exponencial, según lo expresa la Proposición 7.14. Es decir, $\mu(Q) \simeq \rho^{j(Q)}$ para todo $Q \in \mathscr{D}$, donde $\rho \in (0,1)$ es la constante en la construcción de $\mathscr{D}$ dada en el Teorema 1.7. O bien,

$$\mu(Q_x^j) \simeq \rho^j$$

con constantes independientes de j. Luego,

$$\sum_{i\leq j} \mu(Q_x^i)^{-1} \;\simeq\; \sum_{i\leq j} \rho^{-i} \;=\; \frac{\rho^{-j}}{1-\rho} \;=\; \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\rho^{-j-1} \;\simeq\; \mu(Q_x^{j+1}).$$

Podemos escribir entonces

$$\begin{aligned}
s_j &= \sum_{i\geq 0} \lambda(Q_x^{j-i}) \left[\mu(Q_x^{j-i+1})^{-1} - \mu(Q_x^{j-i})^{-1}\right] \\
&= \sum_{i\geq 0} \lambda(Q_x^{j-i})\mu(Q_x^{j-i+1})^{-1} - \sum_{i\geq 0} \lambda(Q_x^{j-i})\mu(Q_x^{j-i})^{-1} \\
&= \lambda(Q_x^j)\mu(Q_x^{j+1})^{-1} + \sum_{i\geq 1} \left[\lambda(Q_x^{j-i}) - \lambda(Q_x^{j+1-i})\right] \mu(Q_x^{j+1-i})^{-1} \\
&= \lambda(Q_x^j)\mu(Q_x^{j+1})^{-1} + \sum_{i\geq 1} \alpha(Q_x^{j+1-i})\mu(Q_x^{j+1-i})^{-1},
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
s_j\mu(Q_x^{j+1}) &= \lambda(Q_x^j) + \mu(Q_x^{j+1})\sum_{i\geq 1}\alpha(Q_x^{j+1-i})\mu(Q_x^{j+1-i})^{-1}\\
&= \lambda(Q_x^j) + \mu(Q_x^{j+1})\sum_{i\leq j}\alpha(Q_x^{i})\mu(Q_x^{i})^{-1}.
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Elijamos j_0 suficientemente grande de manera que $\alpha(Q_x^i) \leq \varepsilon$ para todo $i \geq j_0$. Luego, tomemos j_1 aún más grande tal que $\frac{\mu(Q_x^{j+1})}{\mu(Q_x^{j_0})} + \lambda(Q_x^j) < \varepsilon$ para todo $j \geq j_1$. En consecuencia, para $j \geq j_1$ se tiene

$$\begin{aligned}
s_j\mu(Q_x^{j+1}) &= \lambda(Q_x^j) + \mu(Q_x^{j+1})\sum_{i\leq j_0}\alpha(Q_x^{i})\mu(Q_x^{i})^{-1} + \mu(Q_x^{j+1})\sum_{i=j_0+1}^{j}\alpha(Q_x^{i})\mu(Q_x^{i})^{-1}\\
&\leq \lambda(Q_x^j) + \mu(Q_x^{j+1})\mu(Q_x^{j_0})^{-1}\sum_{i\leq j_0}\alpha(Q_x^{i}) + \mu(Q_x^{j+1})\sum_{i=j_0+1}^{j}\varepsilon\mu(Q_x^{i})^{-1}\\
&\leq \lambda(Q_x^j) + \mu(Q_x^{j+1})\mu(Q_x^{j_0})^{-1} + \varepsilon\mu(Q_x^{j+1})\sum_{i\leq j}\mu(Q_x^{i})^{-1}\\
&\lesssim \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu(Q_x^{j+1})s_j \to 0$ cuando $j \to +\infty$, y así concluimos que

$$\int_X N(x,y)\,d\mu(y) = 1$$

para todo $x \in X$.

Para finalizar, veamos que los autovalores correspondientes a K y a N coinciden. Sea $h_0 \in \mathscr{H}$ y $Q(h_0) = Q_0 \in \mathscr{D}$. Supongamos primero que $x \in Q_0$, con lo cual $Q_0 = Q_x^{j_0}$. Entonces

$$\begin{aligned}
T_N h_0(x) &= \int_X N(x,y)h_0(y)d\mu(y)\\
&= \int_{Q_x^{j_0}\setminus Q_x^{j_0+1}} N(x,x^{j_0})h_0(y)d\mu(y) + \int_{Q_x^{j_0+1}} N(x,y)h_0(x)d\mu(y)\\
&= N(x,x^{j_0})\left(-\int_{Q_x^{j_0+1}} h_0(y)d\mu(y)\right) + h_0(x)\sum_{j\geq j_0+1}\int_{Q_x^{j}\setminus Q_x^{j+1}} N(x,x^j)d\mu(y)\\
&= -N(x,x^{j_0})h_0(x)\mu(Q_x^{j_0+1}) + h_0(x)\lim_{J\to+\infty}\sum_{j_0+1}^{J} N(x,x^j)\left[\mu(Q_x^j)-\mu(Q_x^{j+1})\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h_0(x)\left[-N(x,x^{j_0})\mu(Q_x^{j_0+1}) + \lim_{J\to+\infty}\sum_{j=j_0+1}^{J}\left(\mu(Q_x^j)s_{j-1} - \mu(Q_x^{j+1})s_j\right)\right]\\
&= h_0(x)\left[-N(x,x^{j_0})\mu(Q_x^{j_0+1}) + \lim_{J\to+\infty}\left(\mu(Q_x^{j_0+1})s_{j_0} - \mu(Q_x^{J+1})s_J\right)\right]\\
&= h_0(x)\left[-N(x,x^{j_0})\mu(Q_x^{j_0+1}) + \mu(Q_x^{j_0+1})s_{j_0}\right]\\
&= h_0(x)\mu(Q_x^{j_0+1})\left[-N(x,x^{j_0}) + s_{j_0}\right]\\
&= h_0(x)\mu(Q_x^{j_0+1})\left[\lambda(Q_x^{j_0})\mu(Q_x^{j_0+1})^{-1}\right]\\
&= h_0(x)\lambda(Q_x^{j_0})\\
&= h_0(x)\lambda(Q_0)\\
&= h_0(x)\lambda(h_0)\\
&= T_K h_0(x).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si $x \notin Q_0$ entonces $h_0(x) = 0$ y además $N(x,y)$ es constante como función de y en Q_0. Por lo tanto,

$$T_N h_0(x) = \int_{Q_0} N(x,y)h_0(y)d\mu(y) = c\int_{Q_0} h_0(y)d\mu(y) = 0.$$

□

Ejemplo 10 (El núcleo difusivo fraccionario diádico). Como vimos en la Sección 2.5, el núcleo que es solución del problema de difusión (10) a tiempo $t > 0$ está dado por

$$W_{dy}(x,y;t) = \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-tm_h\mu(Q(h))^{-s}} h(x)h(y),$$

donde los coeficientes $m_h = m_{Q(h)}$ están uniformemente acotados entre constantes positivas. Para comprobar que $W_{dy}(\cdot,\cdot;t)$ es un núcleo en la clase $\mathscr{K}$ con autovalores

$$\lambda(Q) = e^{-tm_Q\mu(Q)^{-s}}$$

basta con ver esta familia satisface las condiciones $(\lambda1)$, $(\lambda2)$ y $(\lambda3)$ del Lema 7.16. Probemos la propiedad de monotonía $(\lambda1)$, las otras se obtienen de manera directa. Sea $Q \in \mathscr{D}$ y sea $\widetilde{Q}$ el padre de Q. Queremos ver que $e^{-tm_Q\mu(Q)^{-s}} \le e^{-tm_{\widetilde{Q}}\mu(\widetilde{Q})^{-s}}$, o equivalentemente, que $m_{\widetilde{Q}}\mu(\widetilde{Q})^{-s} \leq m_Q\mu(Q)^{-s}$. En efecto, dado que (ver [2]) para cualquier $x \in Q$

$$m_Q = 1 + \mu(Q)^s \int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-s-1} d\mu(y), \tag{35}$$

entonces tomando $x \in Q$ se tiene

$$\begin{aligned}
&m_Q\mu(Q)^{-s} - m_{\widetilde{Q}}\mu(\widetilde{Q})^{-s} \\
&\quad = \mu(Q)^{-s} + \int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-s-1} d\mu(y) - \mu(\widetilde{Q})^{-s} - \int_{X\setminus \widetilde{Q}} \delta(x,y)^{-s-1} d\mu(y) \\
&\quad = \mu(Q)^{-s} - \mu(\widetilde{Q})^{-s} + \int_{\widetilde{Q}\setminus Q} \delta(x,y)^{-s-1} d\mu(y) \\
&\quad = \mu(Q)^{-s} - \mu(\widetilde{Q})^{-s} + \mu(\widetilde{Q})^{-s-1}\mu(\widetilde{Q}\setminus Q) \\
&\quad = \mu(Q)^{-s} - \mu(\widetilde{Q})^{-s-1}\mu(Q) \\
&\quad = \mu(Q)\left(\mu(Q)^{-s-1} - \mu(\widetilde{Q})^{-s-1}\right) \\
&\quad > 0.
\end{aligned}$$

Definimos ahora las operaciones de iteración y molificación de núcleos de $\mathscr{K}$, y enunciamos los lemas de composición interna y propiedades básicas.

Sean K_1 y K_2 núcleos en $\mathscr{K}$. Se denota y define la *composición* entre K_1 y K_2 por

$$(K_1 * K_2)(x,y) = \int_X K_1(x,z)K_2(z,y)\, d\mu(z).$$

Lema 7.19.

(a) Sean $K_1(x,y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \alpha_Q\psi_Q(x,y)$ y $K_2(x,y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \beta_Q\psi_Q(x,y)$ núcleos en $\mathscr{K}$. Entonces el núcleo $K_3 = K_1 * K_2$ está bien definido y pertenece a la clase $\mathscr{K}$, y se escribe

$$K_3(x,y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \gamma_Q\psi_Q(x,y)$$

con $\gamma_Q = \alpha_Q\beta_Q + \alpha_Q\lambda_2(Q) + \beta_Q\lambda_1(Q)$ para todo $Q \in \mathscr{D}$, donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de los operadores asociados a K_1 y K_2 respectivamente.

(b) $(\mathscr{K}, *)$ es un semigrupo conmutativo.

(c) $\lambda_3(Q) = \lambda_1(Q)\lambda_2(Q)$ para todo $Q \in \mathscr{D}$.

Llamamos *iteración* a la operación de componer a un núcleo repetidas veces consigo mismo. Es decir, dados $K \in \mathscr{K}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define y denota la iteración de K n veces por $K^n = K * \cdots * K$.

LEMA 7.20. *Sea $K \in \mathscr{K}$ de coeficientes $\alpha_{\mathscr{D}}$ y autovalores $\lambda_{\mathscr{D}}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\alpha^{(n)}$ es la lista de coeficientes correspondientes a K^n y $\lambda^{(n)}$ es la sucesión de autovalores asociada, entonces $\alpha_Q^{(n)} = (\alpha_Q + \lambda_Q)^n - (\lambda_Q)^n$ y $\lambda_Q^{(n)} = (\lambda_Q)^n$ para todo $Q \in \mathscr{D}$.*

La definición de una operación análoga a la molificación es más delicada en este contexto ya que, por la heterogeneidad del espacio, en general la distancia diádica carece de todo tipo de homogeneidad. Una forma satisfactoria de definir esta operación es por su acción en el espectro de los operadores asociados respecto al sistema de Haar. Esta manera de introducir la molificación de un núcleo tiene como antecedente el caso de convolución, en el que es posible interpretarla como un cambio de escala. Denominamos operación **molificación** a aquella que aplicada a un núcleo K en la clase $\mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathscr{D})$ dá como resultado el núcleo $K_1 \in \mathscr{K}$ de espectro $\lambda_1(\mathscr{D})$ donde, para cada $Q \in \mathscr{D}$, el autovalor $\lambda_1(Q)$ toma el valor $\lambda(\widetilde{Q})$ (el autovalor de K correspondiente al cubo de nivel inmediato superior de Q). Para $K \in \mathscr{K}$ con autovalores $\lambda(Q)$ y $n \in \mathbb{N}$, se define la *molificación de parámetro n* a aquella que tiene por resultado al núcleo K_n de autovalores $\lambda_n(Q) = \lambda(Q^{(n)})$, donde $Q^{(n)}$ es el enésimo ancestro del cubo Q. Observemos que en estas condiciones la operación está bien definida y conserva la clase $\mathscr{K}$, ya que los autovalores correspondientes a los núcleos molificados cumplen las condiciones del Lema 7.16. Además, como el orden de decaimiento en el infinito de los autovalores en las cadenas $\mathscr{D}_x$ no se modifica al molificar entonces la operación conserva propiedades de regularidad de los núcleos en el infinito. Aplicando las fórmulas de transformación entre los coeficientes que representan a los núcleos de $\mathscr{K}$, obtenemos que la lista de coeficientes $\alpha_i(\mathscr{D})$ correspondientes al núcleo molificado K_i está dada por

$$\alpha_i(Q) = \lambda_i(\widetilde{Q}) - \lambda_i(Q) = \lambda(Q^{(i+1)}) - \lambda(Q^{(i)}) = \alpha(Q^{(i)})$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$.

7.6. Teorema del Límite Central en espacios normales

Como antes, sea (X, d, μ) un espacio normal, no atómico y no acotado al que dotamos de un sistema diádico $\mathscr{D}$ consistente en un único cuadrante y tal que $\mathscr{D} = \widetilde{\mathscr{D}}$.

Por la Proposición 7.14, con $\beta := \rho^{-1}$, tenemos que existe una sucesión $\{m(Q) : Q \in \mathscr{D}\}$ tal que $C_1 \leq m(Q) \leq C_2$ y

$$\beta^{j(Q)} = \mu(Q)^{-1} m(Q) \tag{36}$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$. Notemos que $\beta > 1$. Sea q el menor número natural mayor o igual a β y sea $\zeta = \log_\beta q$.

Vamos a investigar teoremas límite para procesos de iteración y molificación de orden $\frac{s}{\zeta}$, para índices s positivos que verifiquen la condición $\frac{s}{\zeta} \in \mathbb{Q}$.

Sea $s > 0$ tal que $\frac{s}{\zeta} \in \mathbb{Q}$ y sean $u, v \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{u}{v} = \frac{s}{\zeta}$. Consideremos el proceso P_v^u que aplicado a un núcleo $K \in \mathscr{K}$ devuelve la sucesión $P_v^u(K) = \big\{K^{(i)} = P_v^u(K, i) = K_{vi}^{q^{ui}} : i \in \mathbb{N}\big\}$. Denotemos por $\alpha^{(i)}$ a los coeficientes correspondientes a $K^{(i)}$ y a su espectro por $\lambda^{(i)}$. Notemos que

$$\lambda^{(i)}(Q) = \lambda\big(Q^{(vi)}\big)^{q^{ui}} \tag{37}$$

para todo cubo Q, donde $\lambda(\mathscr{D})$ es el espectro del núcleo K.

Veamos primero el caso de aplicar el proceso $P = P_v^u$ a núcleos con marginales de soporte acotado. Las *marginales* φ_x de un núcleo $K \in \mathscr{K}$ se definen por $\varphi_x(y) := K(x, y)$, para cada $x \in X$.

Lema 7.21. *Sea K un núcleo en la clase $\mathscr{K}$ con espectro $\lambda(\mathscr{D})$. Si existe $Q_0 \in \mathscr{D}$ tal que $\lambda(Q_0) = 1$ entonces $\lambda^{(i)}(Q) \to 1$ cuando $i \to \infty$ para todo $Q \in \mathscr{D}$.*

Demostración. Por la acotación y monotonía de los autovalores de K se tiene que $\lambda(Q_0^{(i)}) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego, dado que $\mathscr{D}$ determina un único cuadrante, el resultado se sigue de la fórmula (37) de los autovalores $\lambda^{(i)}(Q)$. $\square$

Este caso corresponderá, como en los contextos homogéneos, a aproximaciones a la identidad determinadas por P.

La identificación de la propiedad de estabilidad que determina la convergencia de estos procesos a límites centrales presenta algunas dificultades debido a la heterogeneidad del espacio, en particular para expresarla en términos de los coeficientes k_Q asociados a los núcleos de $\mathscr{K}$. No obstante, puede darse una definición precisa por medio de los coeficientes α_Q.

Definición 7.1. Dado $s > 0$ se dice que un núcleo $K \in \mathscr{K}$ es ***s*-estable** con parámetro $\sigma > 0$ si para toda cadena $\mathscr{D}_x$ se tiene que

$$\lim_{\substack{\mu(Q)\to+\infty\\ Q\in\mathscr{D}_x}} \beta^{-sj(Q)}\alpha_Q = \left(1-\beta^{-s}\right)\sigma. \tag{38}$$

Puede escribirse la condición anterior, utilizando la notación $Q^{(i)}$ para el i-ésimo ancestro de un cubo $Q \in \mathscr{D}$, como

$$\beta^{-sj(Q^{(i)})}\alpha_{Q^{(i)}} \xrightarrow[i\to+\infty]{} \left(1-\beta^{-s}\right)\sigma \tag{39}$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$. Dado que el espacio consiste en un único cuadrante, por lo que todo par de cubos diádicos tiene un ancestro común, basta con que (39) valga para un cubo Q_0 dado, o de igual manera que (38) valga para alguna cadena $\mathscr{D}_x$ particular. Veamos la equivalencia de esta definición en términos de los autovalores $\lambda(Q)$.

Lema 7.22. *Sea $K \in \mathscr{K}$ con $\{\lambda(Q) \colon Q \in \mathscr{D}\}$ la sucesión de autovalores asociada y sea $s > 0$. El núcleo K es s-estable con parámetro $\sigma > 0$ si y sólo si*

$$\left(1-\lambda(Q^{(i)})\right)\beta^{-sj(Q^{(i)})} \xrightarrow[i\to\infty]{} \sigma \tag{40}$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$.

Demostración. Se sigue de las identidades

$$1-\lambda(Q) = \sum_{Q'\supset Q} \alpha_{Q'}$$

y

$$\alpha_Q = \lambda(\widetilde{Q}) - \lambda(Q) = (1-\lambda(Q)) - (1-\lambda(\widetilde{Q})).$$

□

La expresión de la condición de estabilidad en términos de los coeficientes k_Q tiene una formulación más engorrosa, que aquí mencionaremos informalmente en calidad informativa, para mayor completitud. Esta condición consiste en que para cubos Q de medida suficientemente grande en alguna cadena $\mathscr{D}_x$ el valor de $k_Q\beta^{-(1+s)j(Q)}$ se aproxime a $\sigma\,(1-\beta^{-s})\sum_{i\geq 0}\beta^{-(1+s)i}m(Q^{(i)})^{-1}$. Sin embargo, bajo la propiedad geométrica, del espacio y el sistema diádico, de regularidad a grandes escalas de que las constantes $m(Q)$ definidas en (36) satisfagan que $m(Q)\to\eta$ cuando $\mu(Q)\to+\infty$ en alguna cadena $\mathscr{D}_x$ para alguna constante positiva η, se tiene que esta propiedad de estabilidad es la usual de los casos más homogéneos anteriores, es decir, la existencia de una constante $\tilde{\sigma}>0$ tal que para todo $x\in X$ se tenga $K(x,y)\delta(x,y)^{1+s}\to\tilde{\sigma}$ cuando $\delta(x,y)\to\infty$.

Ejemplo 11. Estudiemos, por medio del lema anterior, la estabilidad del núcleo difusivo $W_{dy}(\cdot,\cdot;t)$. Como vimos en el Ejemplo 10, sus autovalores tienen la forma

$$\lambda(Q)=e^{-tm_Q\mu(Q)^{-s}},$$

con coeficientes m_Q dados por (35). Denotando $b_Q=\mu(Q)^s\beta^{sj(Q)}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\big(1-\lambda(Q)\big)\beta^{-sj(Q)}&=\left(1-e^{-tm_Q\mu(Q)^{-s}}\right)\mu(Q)^s b_Q^{-1}\\&=\left(1-e^{-tm_Q\mu(Q)^{-s}}\right)m_Q^{-1}\mu(Q)^s\frac{m_Q}{b_Q}.\end{aligned}$$

Dado que los coeficientes m_Q y b_Q están uniformemente acotados entre constantes positivas, entonces $m_Q\mu(Q)^{-s}$ tiende a cero cuando $\mu(Q)\to+\infty$. Como además, por la regla de l'Hôpital, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-tx}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{te^{-tx}}{1}=t$, entonces

$$\big(1-\lambda(Q)\big)\beta^{-sj(Q)}\xrightarrow[j(Q)\to-\infty]{}t\lim_{j(Q)\to-\infty}\frac{m_Q}{b_Q}$$

donde el límite se calcula sobre alguna cadena $\mathscr{D}_x$. Notemos que esta expresión tendrá sentido sólo cuando $\frac{m_Q}{b_Q}$ sea convergente. De esta manera, $W_{dy}(\cdot,\cdot;t)$ es s-estable si y sólo si la sucesión $\left\{\frac{m_Q}{b_Q}\colon Q\in\mathscr{D}_x\right\}$ converge para algún $x\in X$. Más precisamente, si $\lim_{j(Q)\to-\infty}\frac{m_Q}{b_Q}=B$, con B un número que debe ser positivo, entonces $W_{dy}(\cdot,\cdot;t)$ es s-estable con parámetro tB, y recíprocamente. Esta condición es una propiedad de la geometría del espacio y del sistema diádico. Por otra parte, aunque no haya convergencia, la sucesión $\frac{m_Q}{b_Q}$ estará acotada entre constantes positivas, con lo cual el comportamiento de W_{dy} es de todos modos "de tipo" s-estable.

Por las fórmulas (35) y (36), para $x\in Q$ y denotando por $Q^{(i)}$ al i-ésimo ancestro de Q, se tiene

$$\begin{aligned} m_Q &= 1 + \mu(Q)^s \int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-s-1} d\mu(y) \\ &= 1 + \mu(Q)^s \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\mu(Q^{(i-1)})}{\mu(Q^{(i)})}\right] \mu(Q^{(i)})^{-s} \\ &= 1 + b_Q \beta^{-sj(Q)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \rho \frac{m(Q^{(i-1)})}{m(Q^{(i)})}\right] b_{Q^{(i)}}^{-1} \beta^{sj(Q^{(i)})}, \end{aligned}$$

y como $j(Q^{(i)}) = j(Q) - i$, entonces

$$\frac{m_Q}{b_Q} = \frac{1}{b_Q} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[1 - \rho \frac{m(Q^{(i-1)})}{m(Q^{(i)})}\right] \frac{1}{b_{Q^{(i)}}} \rho^{si}.$$

De esta fórmula podemos ver que en espacios heterogéneos (a grandes escalas) no podemos esperar que haya convergencia. Digamos que un espacio de tipo homogéneo normal, no atómico, no acotado y con un sistema diádico $\mathscr{D}$ asociado es *estable* si

$$m(Q) \xrightarrow[j(Q)\to-\infty]{} \eta$$

en alguna cadena $\mathscr{D}_x$, con $0 < C_1 \leq \eta \leq C_2$, con las constantes C_1 y C_2 como en la Proposición 7.14. En tal contexto, como $\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{si} = \frac{\rho^s}{1-\rho^s} = \frac{1}{\beta^s - 1}$, se tiene que

$$\lim_{j(Q)\to-\infty} \frac{m_Q}{b_Q} = \frac{1}{\eta^s} + [1-\rho] \frac{1}{\eta^s} \frac{1}{\beta^s - 1} = \eta^{-s} \frac{1-\rho}{\beta^s - 1} =: c_s$$

en cualquier cadena $\mathscr{D}_x$, con lo cual $W_{dy}(\cdot,\cdot;t)$ resulta ser s-estable con parámetro $c_s t$.

Observemos que las operaciones de iteración y molificación conservan el índice de estabilidad de los núcleos. Efectivamente, sea $K \in \mathscr{K}$ un núcleo s-estable con parámetro σ y con autovalores $\lambda(Q)$ y sea $n \in \mathbb{N}$. La iteración de K n-veces tiene por resultado al núcleo K^n con autovalores $\lambda^n(Q) = \lambda(Q)^n$. Luego, en vistas de (40) y (λ2), se tiene

$$\begin{aligned} \left(1 - \lambda(Q^{(i)})^n\right) \beta^{-sj(Q^{(i)})} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda(Q^{(i)})^k\right) \left(1 - \lambda(Q^{(i)})\right) \beta^{-sj(Q^{(i)})} \\ &\xrightarrow[i\to\infty]{} n\sigma \end{aligned}$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$, es decir, K^n es s-estable con parámetro $n\sigma$. Por otra parte, la molificación de K de parámetro n resulta en el núcleo K_n de autovalores $\lambda_n(Q) = \lambda(Q^{(n)})$, con lo cual

$$\left(1 - \lambda_n(Q^{(i)})\right)\beta^{-sj(Q^{(i)})} = \left(1 - \lambda(Q^{(n+i)})\right)\beta^{-sj(Q^{(n+i)})}\beta^{-sn}$$
$$\xrightarrow[i\to\infty]{} \beta^{-sn}\sigma$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$. O sea, K_n es s-estable con parámetro $\beta^{-sn}\sigma$. De esta forma, si $s \in \zeta\mathbb{Q}$, donde q es el menor número natural mayor o igual a β y $\zeta = \log_\beta q$, los números naturales u y v son tales que $\frac{u}{v} = \frac{s}{\zeta}$, y K es un núcleo s-estable de parámetro σ, entonces los núcleos $P(K,i) = K^{(i)} = K_{vi}^{q^{ui}}$ resultan s-estables de parámetro $q^{ui}\beta^{-siv}\sigma = \beta^{\zeta ui}\beta^{-siv}\sigma = \beta^{i(\zeta u - sv)}\sigma = \sigma$. Es decir, el proceso P es conservativo de la s-estabilidad y del parámetro de estabilidad. Diremos entonces que los procesos de iteración y molificación así definidos son ***procesos estables*** *de índice s o s-estables.*

Estamos ahora en condiciones de formular el resultado principal de la sección: un teorema del límite central en el contexto normal.

TEOREMA 7.23. *Sea $P = P_v^u$ un proceso s-estable y sea $K \in \mathscr{K}$ un núcleo s-estable con parámetro σ. Entonces la sucesión $P(K)$ converge en $L^p(X,\mu)$ a un núcleo central. Precisamente, si $\{T_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de operadores integrales de núcleos $\{K^{(i)} \colon i \in \mathbb{N}\}$ entonces*

$$T_i f \xrightarrow{L^p} T_\infty f \quad \textit{cuando} \quad i \to \infty$$

para toda $f \in L^p(X,\mu), 1 < p < \infty$, donde T_∞ es el operador integral de núcleo (central)

$$K_\infty(x,y;\sigma) = \sum_{h\in\mathscr{H}} e^{-\sigma b_{Q(h)}\mu(Q(h))^{-s}} h(x)h(y),$$

donde $b_Q = m(Q)^s$ y los coeficientes $m(Q)$, uniformemente acotados entre constantes positivas, son los definidos en (36).

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{\lambda(Q) \colon Q \in \mathscr{D}\}$ la sucesión de autovalores de K. Dado que K es un núcleo estable ningún autovalor toma el valor 1, y por lo tanto los podemos escribir en la forma general

$$\lambda(Q) = 1 - \beta^{-s\gamma(Q)},$$

para cierta función $\gamma \colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ tal que se verifican las condiciones en 7.16. De esta manera se tiene que $\gamma(Q^{(i)}) \to +\infty$ cuando $i \to \infty$ para todo $Q \in \mathscr{D}$. Recordemos que $Q^{(i)}$ representa el i-ésimo ancestro de Q.

La cuenta clave que nos permitirá estudiar el límite espectral es la siguiente. Dado $Q \in \mathscr{D}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lambda^{(i)}(Q) = \lambda^{q^{ui}}(Q^{(vi)}) = \left(1 - \beta^{-s\gamma(Q^{(vi)})}\right)^{q^{ui}} = \left[\left(1 - \beta^{-s\gamma(Q^{(vi)})}\right)^{\beta^{s\gamma(Q^{(vi)})}}\right]^{\beta^{-s\gamma(Q^{(vi)})} q^{ui}}$$
$$= \left[\left(1 - \beta^{-s\gamma(Q^{(vi)})}\right)^{\beta^{s\gamma(Q^{(vi)})}}\right]^{\beta^{-s[\gamma(Q^{(vi)})-vi]}}$$

puesto que $q = \beta^{\zeta} = \beta^{\frac{sv}{u}}$. Luego, tomando límite tenemos

$$\lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(Q) = e^{-\beta^{-sL(Q)}}$$

donde

$$\begin{aligned} L(Q) &= \lim_{i\to\infty} \gamma(Q^{(vi)}) - vi \\ &= \lim_{i\to\infty} \left(\gamma(Q^{(vi)}) + j(Q) - vi\right) - j(Q) \\ &= \lim_{i\to\infty} \left(\gamma(Q^{(vi)}) + j(Q^{(vi)})\right) - j(Q). \end{aligned}$$

La condición de estabilidad de K expresada en términos de los autovalores por la fórmula (40) equivale a

$$\beta^{-s(\gamma(Q^{(i)})+j(Q^{(i)}))} \xrightarrow[i\to\infty]{} \sigma,$$

que a su vez es equivalente a que

$$\gamma(Q^{(i)}) + j(Q^{(i)}) \xrightarrow[i\to\infty]{} \nu$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$, donde $\nu \in \mathbb{R}$ es tal que $\beta^{-s\nu} = \sigma$. Esto implica que

$$L(Q) = \nu - j(Q)$$

para todo $Q \in \mathscr{D}$, con ν independiente de Q. Por lo tanto, aplicando (36) llegamos a que

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \lambda^{(i)}(Q) &= e^{-\beta^{-s(\nu - j(Q))}} \\ &= e^{-\sigma\beta^{sj(Q)}} \\ &= e^{-\sigma m(Q)^s \mu(Q)^{-s}}. \end{aligned}$$

La demostración se completa aplicando el Lema 7.17 y el análogo al Teorema 5.9 en el contexto general. □

Este teorema determina la clase de los núcleos atractores de los procesos estables de índice $s \in \zeta\mathbb{Q}$. Observemos que cuando $0 < s < 1$ estos núcleos límite $K_\infty(x, y; \sigma)$ tienen una forma similar a la de los núcleos difusivos $W_{dy}(x, y; t)$. La diferencia entre ellos es que, aunque están uniformemente acotadas, las constantes m_Q y b_Q son en general distintas, excepto en casos de espacios con alta regularidad, como puede inferirse del Ejemplo 11.

Parte II

Aproximación de la identidad por núcleos estables

Introducción de la Parte II

La Parte II está estructurada en cuatro capítulos. El primero de ellos incluye una revisión de algunos resultados clásicos sobre aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$, incluyendo el ubicuo Teorema de Zó basado en la descomposición de Calderón-Zygmund, similar a la que en el caso diádico se aplica en el Capítulo 6 de la Parte I, y las propiedades básicas de acotación de los operadores maximales asociados a las familias de núcleos. En el segundo capítulo se exponen los resultados de concentración y aproximación de la identidad para núcleos de Cauchy-Poisson y de Lévy. En el tercer capítulo nos dedicamos al análisis de las propiedades de concentración y aproximación de la identidad para familias de núcleos de Markov que son estables y cumplen una desigualdad de Harnack. Finalmente, en el último capítulo, extendemos estos resultados a espacios de tipo homogéneo. Estos resultados son originales y fueron publicados en [**15**].

Capítulo 8

Resultados clásicos de aproximación a la identidad de convolución

Este capítulo tiene el propósito de introducir notación y enunciar algunos resultados bien conocidos sobre núcleos de aproximación a la identidad por convolución. En particular nos ocupamos de describir condiciones suficientes para la acotación y tipo en espacios de Lebesgue de los operadores maximales asociados a las familias de núcleos. Estas propiedades de acotación producen los espacios naturales para la convergencia puntual. El capítulo se organiza en tres secciones. En la primera se muestra que la concentración es suficiente para la convergencia en L^p. La segunda sección corresponde a la convergencia puntual con núcleos dominados por otros que sean radiales, decrecientes e integrables. La tercera se dedica a la clase más general de núcleos de Zó. Las referencias básicas para este capítulo son [**35**], [**57**], [**63**] y [**6**].

8.1. Concentración y convergencia en L^p y en puntos de continuidad

Los casos clásicos refieren a operadores integrales definidos por convolución con una función núcleo K. Para $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define el operador T por

$$Tf(x) = K * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} K(y)f(x-y)dy,$$

para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible perteneciente a algún espacio funcional determinado. Por la desigualdad de Young para la convolución, estos operadores están bien definidos y acotados en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 8.1 (Young). *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \le p \le \infty$, y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1 .$$

Sea A un conjunto de índices que acumula en algún α_0. En general, decimos que una familia de operadores $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ es una **aproximación a la identidad** si $T_\alpha f \to f$ cuando $\alpha \to \alpha_0$ en algún sentido. Cuando los operadores están determinados por una sucesión de núcleos nos referiremos también a tal sucesión de núcleos como una aproximación a la identidad.

Así, una familia de operadores $\{T_\alpha\}$ es una aproximación a la identidad en el sentido de la norma de L^p si $\lim_{\alpha\to\alpha_0} \|T_\alpha f - f\|_p = 0$ para toda $f \in L^p$. En cambio, cuando los operadores están definidos en algún espacio funcional $\mathcal{F}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que $\lim_{\alpha\to\alpha_0} T_\alpha f(x) = f(x)$ en casi todo punto, decimos que la aproximación a la identidad es en sentido puntual en $\mathcal{F}$.

Sea $\{K_\alpha \colon \alpha > 0\}$ una familia de núcleos en $\mathbb{R}^n$ tal que

(*i*) $\int K_\alpha = 1$ para todo $\alpha > 0$,

(*ii*) $\sup_{\alpha>0} \int |K_\alpha| = M < \infty$,

(*iii*) para todo $r > 0$, $\int_{|x|>r} |K_\alpha(x)|\, dx \to 0$ cuando $\alpha \to 0$.

La propiedad (*iii*) es la denominada propiedad de *concentración* en torno al origen de la familia $\{K_\alpha\}_{\alpha>0}$. En estas condiciones obtenemos que $\{K_\alpha\}_{\alpha>0}$ es una aproximación a la identidad en el sentido de la norma de L^p.

Teorema 8.2. *Si $\{K_\alpha\}_{\alpha>0}$ es una familia que cumple (i), (ii) y (iii), entonces $\lim_{\alpha\to 0} \|K_\alpha * f - f\|_p = 0$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.*

Demostración. Si f es continua con soporte compacto tenemos, por (*i*), que

$$\begin{aligned}
|K_\alpha * f(x) - f(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |K_\alpha(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&= \int_{|y|<\delta} |K_\alpha(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&\quad + \int_{|y|\ge\delta} |K_\alpha(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&\le \varepsilon \int_{|y|<\delta} |K_\alpha(y)|\, dy + 2\,\|f\|_\infty \int_{|y|\ge\delta} |K_\alpha(y)|\, dy
\end{aligned}$$

donde ε y δ están asociados por la continuidad (uniforme) de f. Por consiguiente, por (*ii*) y (*iii*), tenemos que $K_\alpha * f \to f$ puntualmente cuando $\alpha \to 0$ de manera uniforme. Entonces para $1 \le p < \infty$ y α suficientemente pequeño

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |K_\alpha * f - f|^p\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^n} |K_\alpha * f - f|\, dx \\
&= \int_{x\in(\operatorname{sop} f)_1} |K_\alpha * f - f|\, dx + \int_{x\notin(\operatorname{sop} f)_1} |K_\alpha * f|\, dx
\end{aligned}$$

donde $(\mathrm{sop} f)_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : d(y, \mathrm{sop} f) < 1\}$ es un 1-entorno del soporte de f. El primer sumando en el miembro derecho tiende a cero con α por la convergencia uniforme de $K_\alpha * f$ hacia f en el conjunto de medida finita $(\mathrm{sop} f)_1$. En cuanto al segundo término, notemos que está acotado por $\int_{y\in \mathrm{sop} f} |f(y)| \left(\int_{|x-y|\geq 1} |K_\alpha(x-y)|\, dx\right) dy$, que tiende a cero con α por (iii).

El caso de una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ general se trata igual que en el caso de molificación, usando la desigualdad de Young. Es decir, dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ tomamos g continua y con soporte compacto tal que $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}$. Entonces

$$\|K_\alpha * f - f\|_p \leq \|K_\alpha * (f-g)\|_p + \|K_\alpha * g - g\|_p + \|f-g\|_p$$

y el resultado sigue del caso anterior y la desigualdad de Young 8.1 usando (ii). □

Siguiendo la demostración anterior, se tiene el siguiente resultado de convergencia en sentido puntual para funciones continuas y acotadas, bajo las hipótesis (i), (ii) y (iii) de la familia de núcleos.

Lema 8.3. *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\lim_{\alpha\to 0} K_\alpha * f(x) = f(x)$ en todo punto de continuidad de f.*

8.2. Convergencia puntual. Mayorantes radiales decrecientes e integrables

La acotación del operador maximal asociado a una familia de núcleos juega un papel clave en el estudio de las aproximaciones a la identidad en sentido puntual para funciones de L^p. Precisamos algunas definiciones antes de enunciar los resultados correspondientes.

Se define el **operador maximal** asociado a una familia de operadores $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$ por

$$T^* f(x) = \sup_{\alpha>0} |T_\alpha f(x)|\,.$$

Sea $p \in [1,\infty]$ y sea T un operador definido en L^p. Se dice que el operador T es de **tipo fuerte (p,p)** si está acotado, es decir, si para toda $f \in L^p$ vale

$$\|Tf\|_p \leq C\,\|f\|_p$$

para alguna constante positiva C independiente de f.

Por otra parte, cuando $p < \infty$ decimos que el operador T es de **tipo débil (p, p)** si para todo $\lambda > 0$ y toda $f \in L^p$ vale que

$$|\{x\colon\ |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\, \|f\|_p\right)^p$$

para alguna constante $C > 0$ independiente de λ y de f. Diremos que T es de tipo débil (∞, ∞) si es de tipo fuerte (∞, ∞). La desigualdad de Chebyshev (Teorema A.5) permite probar que el tipo fuerte (p, p) implica el tipo débil (p, p), para todo p. Se tiene además un importante resultado clásico de interpolación debido a Marcinkiewicz.

TEOREMA 8.4 (de interpolación de Marcinkiewicz).

Sea T un operador sublineal definido en $L^{p_1} + L^{p_2}$ con $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$. Si T es de tipo débil (p_1, p_1) y también de tipo débil (p_2, p_2) entonces T es de tipo fuerte (p, p) para $p_1 < p < p_2$.

El siguiente teorema relaciona el tipo débil de los operadores maximales con los resultados de aproximación a la identidad en sentido puntual en L^p.

TEOREMA 8.5. *Sea $\{T_\alpha\colon \alpha > 0\}$ una familia de operadores lineales y sea $1 \leq p < \infty$. Si $T^*f(x) = \sup_{\alpha>0} |T_\alpha f(x)|$ es de tipo débil (p,p) y además $\lim_{\alpha\to 0} T_\alpha g(x) = g(x)$ puntualmente (en todo punto) para toda función g en algún subconjunto denso de L^p; entonces $\lim_{\alpha\to 0} T_\alpha f(x) = f(x)$ en casi todo punto, para toda $f \in L^p$.*

Algunas veces los núcleos de aproximación son tan buenos que se puede verificar la acotación puntual por la maximal de Hardy–Littlewood, lo cual nos permite probar el tipo débil del aperador maximal asociado. En esta sección veremos algunos casos de esta situación. Denotamos por M al operador **maximal de Hardy–Littlewood** definido para toda función localmente integrable f por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(z)|\, dz.$$

LEMA 8.6. *La maximal de Hardy–Littlewood es de tipo débil (1,1) y acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p \leq \infty$.*

El siguiente teorema clásico, debido a Calderón y Zygmund, toma en consideración familias de núcleos obtenidos por molificaciones de un núcleo integrable, no negativo, radial y no creciente sobre rayos.

Teorema 8.7. *Sea $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, no negativo, radial y no creciente sobre rayos. Para cada $\varepsilon > 0$ se define la molificación de K con parámetro ε por $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(\frac{x}{\varepsilon})$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$ entonces $K_\varepsilon * f$ está bien definida y es finita en casi todo punto. Se define el operador maximal asociado a la familia $\{K_\varepsilon\colon \varepsilon > 0\}$ por $K^*f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon * f(x)|$. Entonces $K^*f(x) \leq cMf(x)$, y por consiguiente es de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p \leq \infty$. Por lo tanto, si $\int K = 1$ se tiene que $K_\varepsilon * f(x) \to f(x)$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $f \in \bigcup_{1\leq p<\infty} L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Los resultados del teorema anterior permanecen válidos si se cambia la condición de $K(x)$ de ser no creciente con $|x|$ por la condición que $K(x)\,|x|^{-\alpha}$ sea no creciente con $|x|$ para algún $\alpha > 0$, como establace el siguiente resultado debido a Coifman. Ambos teoremas se hallan en [**35**].

Teorema 8.8. *Sea $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, no negativo, radial y tal que para algún $\alpha > 0$, $K(x)\,|x|^{-\alpha}$ es no creciente con $|x|$. Entonces, con la notación del teorema anterior, K^* es de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p \leq \infty$. En consecuencia, si $\int K = 1$, $K_\varepsilon * f(x) \to f(x)$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$.*

Como corolario se tiene que toda familia de núcleos $\{K_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ obtenidos por molificación, a la manera del Teorema 8.7, de un núcleo K de integral uno cuya mayorante radial no creciente esté en las condiciones de alguno de los dos teoremas anteriores, constituye una aproximación a la identidad en sentido puntual en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Pero también, que todos los espacios en los que se sepa la acotación de la maximal de Hardy–Littlewood son adecuados para la convergencia puntual. Tal es el caso de $L^p(wdx)$ con $w \in A_p$.

8.3. Núcleos de Zó

El criterio de la existencia de una mínima mayorante radial decreciente e integrable para el caso de convolución-molificación es interesante, tiene muchas aplicaciones, pero está lejos de ser necesario y algunas veces no se puede aplicar directamente mientras que, como veremos en el próximo capítulo, es factible utilizar el Teorema de Zó. Este último explota la estrategia de Calderón–Zygmund para integrales singulares que, en modo clásico, no es de uso para núcleos positivos e integrables. El Teorema de Zó contiene al de la mínima mayorante radial decreciente e integrable como caso particular.

El resultado original obtenido por Zó está en [**63**]. Aquí lo enunciamos en la forma dada en el Teorema 10.3.1 de [**35**].

Teorema 8.9 (Zó). *Sea A una familia de índices. Asumamos que para cada α en A está dada una función integrable k_α en $\mathbb{R}^n$ que satisface*

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} |k_\alpha(x)|\, dx$ *está acotada superiormente uniformemente en* $\alpha \in A$*;*

(b) $\int_{|x|\geq 2|z|} F(x,z)dx$ *está acotada superiormente uniformemente en* $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *con*

$$F(x,z) = \sup_{\alpha\in A} |k_\alpha(x-z) - k_\alpha(x)|\,.$$

Entonces el operador maximal $\sup_{\alpha\in A} |k_\alpha * f|$ *es de tipo débil (1,1) y acotado en* L^p *para* $1 < p \leq \infty$*.*

Aunque en general no exista una estimación puntual superior de $K^*f = \sup_{\alpha\in A} |k_\alpha * f|$ por la maximal de Hardy–Littlewood Mf, los resultados en [**6**] prueban que los pesos de Muckenhoupt $w \in A_p$ son buenos pesos para la acotación de K^* en $L^p(wdx)$. Una consecuencia útil del Teorema 8.9, para el caso de molificación, es decir, con $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}K(x/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$, es la dada por el siguiente resultado.

Corolario 8.10. *Si* $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y existe* $\widetilde{K}$ *en* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *y de clase* $\mathscr{C}^1$ *fuera del origen, tal que*

(a) $|K(x)| \leq \widetilde{K}(x)$*, y*

(b) $\left|\nabla \widetilde{K}(x)\right| \leq \dfrac{C}{|x|^{n+1}}$*;*

entonces $\sup_{\varepsilon>0} |K_\varepsilon * f|$ *es de tipo débil* $(1,1)$ *y acotado en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 < p \leq \infty$*.*

Mencionamos finalmente que, además del enfoque clásico para la prueba del Teorema de Zó, también puede obtenerse el resultado desde la mirada de integrales singulares con valores vectoriales. Pero de una u otra manera la teoría de Calderón–Zygmund subyace.

Capítulo 9

Aproximaciones de la identidad definidas por núcleos de Cauchy–Poisson y de Lévy

En este capítulo se presentan nuevos resultados de aproximaciones a la identidad en $\mathbb{R}^n$, primero para núcleos obtenidos por convolución de las familias de Cauchy–Poisson y luego para familias de Lévy. En la Sección 9.1 se introducen los núcleos elementales de Cauchy–Poisson P^σ de órdenes $\sigma \in (0,2)$ y la familia biparamétrica $\mathcal{P}$ obtenida por molificaciones de estos núcleos con parámetro $y > 0$. Dos propiedades características que satisfacen los núcleos P^σ y sus molificaciones son las de estabilidad y una desigualdad de tipo Harnack, bien conocidas de las teorías de probabilidad y de ecuaciones en derivadas parciales respectivamente. Otra propiedad que es fácilmente verificable en estas familias es la de concentración, que junto con el tipo débil de los operadores maximales constituyen ingredientes fundamentales para las aproximaciones a la identidad. El Teorema 9.1 demuestra estas propiedades para subfamilias particulares en las cuales los órdenes de estabilidad y el parámetro de molificación guardan relación. En la Sección 9.2 se enuncian las fórmulas conocidas para la transformada de Fourier de funciones radiales en términos de las funciones de Bessel. Estas resultarán de utilidad en la aplicación del Teorema de Zó que haremos en la Sección 9.3, en la que se obtienen resultados de aproximación de la identidad asociados a núcleos de Lévy.

9.1. Concentración y Aproximaciones a la Identidad para núcleos de Cauchy-Poisson

Comencemos recordando la definición de la familia de núcleos de Poisson-Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Para $0 < \sigma < 2$, sean $R^\sigma(\rho) = (1+\rho^2)^{-(n+\sigma)/2}$ e $I(\sigma) = \omega_n \int_0^\infty R^\sigma(\rho)\rho^{n-1}d\rho$, donde ω_n es el área de la superficie de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$. Como $I(\sigma) \geq \omega_n 2^{-(n+\sigma)/2} \int_1^\infty \rho^{n-1}\rho^{-n-\sigma}d\rho = \omega_n\sigma^{-1}2^{-(n+\sigma)/2}$, se tiene que $I(\sigma) \to +\infty$ cuando $\sigma \to 0$. Denotemos por P^σ al núcleo de

Cauchy-Poisson de orden $\sigma \in (0,2)$, definido en $\mathbb{R}^n$ por

$$P^\sigma(x) = (I(\sigma))^{-1} R^\sigma(|x|) = (I(\sigma))^{-1}(1+|x|^2)^{-(n+\sigma)/2}.$$

Observemos que, para cada σ, $\int_{\mathbb{R}^n} P^\sigma(x)dx = 1$ y $|x|^{n+\sigma} P^\sigma(x) \to (I(\sigma))^{-1} > 0$ cuando $x \to \infty$. Por otro lado, para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene que $P^\sigma(x) \to 0$ cuando $\sigma \to 0$. Consideremos las molificaciones de cada P^σ, para $y > 0$. Precisamente,

$$P_y^\sigma(x) = y^{-n} P^\sigma(y^{-1}x) = (I(\sigma))^{-1} y^\sigma (y^2 + |x|^2)^{-(n+\sigma)/2}.$$

Sea la familia biparamétrica de núcleos $\mathcal{P} = \{P_y^\sigma \colon y > 0, 0 < \sigma < 2\}$. Algunas de sus propiedades se encuentran en el Capítulo 2. Entre ellas, recordemos que $\int_{\mathbb{R}^n} P_y^\sigma(x)dx = 1$ para todo $y > 0$ y todo $\sigma \in (0,2)$.

Veamos que estas familias constituyen aproximaciones a la identidad de convolución en sentido puntual cuando $y \to 0$, en los espacios de funciones clásicos. Más precisamente, considerando $\sigma \colon \mathbb{R}^+ \to (0,2)$ como función de y se dá un resultado de aproximación de la identidad bajo la condición $\sigma(y) \log y \to -\infty$ cuando $y \to 0^+$.

Teorema 9.1.

(a) El operador $P^* f(x) = \sup_{y>0, 0<\sigma<2} \left|(P_y^\sigma * f)(x)\right|$ *está acotado superiormente por el operador maximal de Hardy–Littlewood. Por lo tanto,* P^* *es de tipo débil (1,1) y acotado en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para* $1 < p \le \infty$.

(b) Para una función $\Sigma : \mathbb{R}^+ \to (0,2)$ *tal que* $\Sigma(y) \log y \to -\infty$ *cuando* $y \to 0^+$*, la familia uniparamétrica de núcleos* $\{P_y^{\Sigma(y)} : y > 0\}$ *concentra en torno al origen, i.e. para cada* $\lambda > 0$, $\int_{|x|>\lambda} P_y^{\Sigma(y)}(x)dx \to 0$ *cuando* $y \to 0^+$.

(c) Con Σ *como en (b), tenemos que* $(P_y^{\Sigma(y)} * f)(x)$ *converge en casi todo punto a* $f(x)$*, para* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$.

Demostración. *(a)* Se sigue del hecho de que cada P^σ es radial, decreciente y $\int_{\mathbb{R}^n} P^\sigma dx = 1$ (Teorema 8.7, Capítulo 8).

(b) Deseamos probar que si $y^{\Sigma(y)} \to 0$ cuando $y \to 0^+$, entonces $\{P_y^{\Sigma(y)} : y > 0\}$ concentra alrededor del origen cuando $y \to 0^+$. Sea $\lambda > 0$ dado, luego

$$\int_{|x|\ge\lambda} P_y^{\Sigma(y)}(x)dx = [I(\Sigma(y))]^{-1} y^{\Sigma(y)} \int_{|x|\ge\lambda} (y^2 + |x|^2)^{-\frac{n+\Sigma(y)}{2}} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= [I(\Sigma(y))]^{-1} \int_{|x|\geq \frac{\lambda}{y}} (1+|x|^2)^{-\frac{n+\Sigma(y)}{2}} dx \\
&\leq \left[\omega_n \Sigma(y)^{-1} 2^{-\frac{n+\Sigma(y)}{2}}\right]^{-1} \omega_n \int_{\frac{\lambda}{y}}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1+\rho^2)^{(n+\Sigma(y))/2}} d\rho \\
&\leq \Sigma(y) 2^{\frac{n+\Sigma(y)}{2}} \int_{\frac{\lambda}{y}}^{\infty} \rho^{-1-\Sigma(y)} d\rho \\
&= 2^{\frac{n+\Sigma(y)}{2}} \left(\frac{\lambda}{y}\right)^{-\Sigma(y)} \\
&\leq C(n,\lambda) y^{\Sigma(y)}
\end{aligned}
$$

que tiende a cero cuando $y \to 0^+$.

(c) Si g es una función continua de soporte compacto, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\left|(P_y^{\Sigma(y)} * g)(x) - g(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-z) - g(x)|\, P_y^{\Sigma(y)}(z) dz \\
&\leq \varepsilon \int_{|z|<\delta} P_y^{\Sigma(y)}(z) dz + 2\, \|g\|_\infty \int_{|z|\geq\delta} P_y^{\Sigma(y)}(z) dz,
\end{aligned}
$$

que es menor que 2ε para y suficientemente pequeño. Entonces, como

$$
P_\Sigma^* f(x) = \sup_{y>0} \left|(P_y^{\Sigma(y)} * f)(x)\right| \leq P^* f(x),
$$

aplicando argumentos estándar se obtiene que $(P_y^{\Sigma(y)} * f)(x) \to f(x)$ cuando $y \to 0^+$ en casi todo x, para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. $\square$

Además del caso en que Σ esté acotada inferiormente por una constante positiva, un ejemplo de una función Σ en las condiciones del teorema está dado por $\Sigma(y) = (\log^\alpha y^{-1})^{-1}$ para $0 < \alpha < 1$. En este caso $\Sigma(y) \to 0$ cuando $y \to 0$.

9.2. Transformada de Fourier de funciones radiales y funciones de Bessel en $\mathbb{R}^n$

En la Sección 9.3 usaremos una fórmula explícita de la transformada de Fourier del núcleo de Lévy que puede escribirse en términos de integrales de Bessel.

Una función f definida en $\mathbb{R}^n$ es radial si existe una función F definida en $\mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = F(|x|)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se observa que el conjunto de funciones radiales en $L^p(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

La transformada de Fourier de funciones radiales en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es también una función radial, y se tienen buenas representaciones de la transformada y su inversa en términos de las funciones de Bessel unidimensionales. Denotaremos por $\mathcal{J}_\alpha$ a la función de Bessel del primer tipo de orden α. Las funciones $\mathcal{J}_\alpha$ son las soluciones canónicas de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

para α real o complejo. Se definen a través de su expansión en series por

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha} \\ &= \frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\left(1 - \frac{x^2}{2(2\alpha+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2\alpha+2)(2\alpha+4)} - \dots\right),\end{aligned}$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma, que extiende el factorial a $\mathbb{C}$. Debido a que $\mathcal{J}_\alpha(x)$ es una serie de potencias, se deduce que $\mathcal{J}_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Las soluciones de la ecuación de Bessel que son linealmente independientes respecto a $\mathcal{J}_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ se llaman funciones de Bessel del segundo tipo. Observemos que $\mathcal{J}_\alpha$ y $\mathcal{J}_{-\alpha}$ son linealmente independientes si y sólo si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Las funciones de Bessel de órdenes $1/2$ y $-1/2$ tienen expresiones sencillas, dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x, \\ \mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x.\end{aligned}$$

A la función de orden cero se la puede expresar en forma integral por

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\theta}d\theta.$$

Asimismo, para $n \in \mathbb{N}$ vale la fórmula

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\theta - x\sin\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta,\end{aligned}$$

que se extiende a órdenes α generales agregando un término

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha\theta - x\sin\theta)d\theta - \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\sinh(t)-\alpha t}dt.$$

Resultará también útil la fórmula de recurrencia

$$\frac{\mathcal{J}_{\alpha+1}(x)}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathcal{J}_\alpha(x)}{x^\alpha}\right),$$

con lo cual, para $m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\mathcal{J}_{\alpha+m}(x)}{x^{\alpha+m}} = (-1)^m\left(\frac{d}{xdx}\right)^m\left(\frac{\mathcal{J}_\alpha(x)}{x^\alpha}\right).$$

Mediante el cambio de variables $x = s^{1/2}t$, tenemos luego que

$$\frac{\mathcal{J}_{\alpha+m}(\sqrt{s}t)}{(\sqrt{s})^{\alpha+m}} = \left(-\frac{2}{t}\right)^m\frac{d^m}{ds^m}\left(\frac{\mathcal{J}_\alpha(\sqrt{s}t)}{(\sqrt{s})^\alpha}\right).$$

Por último, mencionamos la expresión integral de Hankel, dada por

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^1 e^{ixt}(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dt.$$

Con el cambio de variables $t = \cos\theta$, la fórmula anterior se expresa también como

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi e^{ix\cos\theta}(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta.$$

Para la representación del núcleo de Lévy usaremos, como Blumenthal y Getoor en [**22**], la siguiente expresión de la transformada de Fourier de funciones radiales que puede hallarse en [**23**].

Teorema 9.2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función radial, con $f(x) = F(|x|)$. Entonces su transformada de Fourier*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ix\cdot\xi}\,dx$$

depende sólo de $|\xi|$, y se puede expresar como

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^\infty F(t)t^{n/2}\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(|\xi|\,t)\,dt. \tag{41}$$

Más aún, se tiene una expresión en términos de $\mathcal{J}_0$ y $\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}$ dada por *(a) para* $n = 2m + 2$,

$$\widehat{f}(\xi) = (-1)^m 2^m \frac{d^m}{ds^m}\bigg|_{|\xi|^2} \int_0^\infty F(t) t \mathcal{J}_0(\sqrt{s}t)\, dt;$$

(b) para $n = 2m + 1$,

$$\widehat{f}(\xi) = (-1)^m 2^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^m}{ds^m}\bigg|_{|\xi|^2} \int_0^\infty F(t) \cos(\sqrt{s}t)\, dt.$$

TEOREMA 9.3. *Si* $F(t)$ *es continua en* $0 \leq t < \infty$, $\int_0^\infty |F(t)|\, t^{n-1}\, dt < \infty$ *y si*

$$\phi(\xi) := \frac{1}{\xi^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty F(t) t^{n/2} \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\xi t)\, dt$$

es tal que $\int_0^\infty |\phi(\xi)|\, \xi^{n-1}\, d\xi < \infty$, *entonces, para todo* t,

$$F(t) = \frac{1}{t^{(n-2)/2}} \int_0^\infty \phi(\xi) \xi^{n/2} \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(\xi t)\, d\xi. \tag{42}$$

9.3. Concentración y Aproximaciones a la Identidad para núcleos de Levy

Las distribuciones de Lévy elementales en $\mathbb{R}^n$ son las distribuciones de probabilidad, absolutamente continuas, cuya función de densidad se define como la transformada de Fourier inversa de $e^{-|\xi|^\sigma}$, para $0 < \sigma < 2$. Denotaremos a las densidades de Lévy elementales por L^σ ó $v(\cdot, 1; \sigma)$. Como $e^{-|\xi|^\sigma}$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces L^σ está bien definida y pertenece a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Además, como su transformada es radial, los Teoremas 9.2 y 9.3 nos proveen una fórmula explícita, dada por

$$L^\sigma(x) = v(x, 1; \sigma) = \frac{1}{|x|^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty e^{-t^\sigma} t^{n/2} \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(|x|\, t)\, dt. \tag{43}$$

Esta fórmula en el caso $\sigma = 1$ produce un resultado más tangible, que es el núcleo de Poisson. Para σ general entre cero y dos, los resultados de [22] dan el comportamiento asintótico de $v(x, 1; \sigma)$, lo cual muestra la estabilidad de estas densidades:

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{n+\sigma} v(x, 1, \sigma) = \sigma 2^{\sigma + \frac{n}{2} - 1} \pi^{-1} \sin \frac{\sigma\pi}{2} \Gamma\left(\tfrac{1+\sigma}{2}\right) \Gamma\left(\tfrac{\sigma}{2}\right).$$

Por otra parte, la molificación de parámetros $y > 0$ de las densidades elementales dá lugar a la familia

$$\mathcal{L} = \left\{L_y^\sigma \colon L_y^\sigma(x) = v(x, y; \sigma) = y^{-n} L^\sigma(y^{-1}x),\ y > 0,\ 0 < \sigma < 2\right\},$$

correspondiente a las distribuciones simétricas-α-estables. Notemos que $\widehat{L_y^\sigma}(\xi) = e^{-|y\xi|^\sigma}$, para $y > 0$ y $0 < \sigma < 2$.

A continuación, estudiamos los resultados relativos a la familia de núcleos de Lévy en dimensión $n = 1$. Allí, los núcleos elementales están dados por

$$(44) \qquad L^\sigma(x) = v(x, 1; \sigma) = \sqrt{|x|} \int_0^\infty e^{-t^\sigma} t^{1/2} \mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(|x|\, t) dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^\sigma} t^{1/2} \cos(|x|\, t) dt.$$

Teniendo en cuenta los trabajos de Blumenthal y Getoor [22] y Polya [55], conocemos el comportamiento asintótico de $v(x, 1; \sigma)$. Se tienen además, para los núcleos más generales, cotas de la forma $v(x, y; \sigma) \leq C P_y^\sigma(x)$. Sin embargo, dado que la constante C depende de σ, esta estimación no es adecuada para obtener cotas superiores del operador maximal

$$L^* f(x) = \sup_{y>0, 0<\sigma<2} |(v(\cdot, y; \sigma) * f)(x)|$$

en términos de la maximal de Hardy–Littlewood de f. En cambio, lograremos obtener el tipo débil (1,1) de $L^* f$ como una aplicación del Teorema 8.9 de Zó. En el análisis subsiguiente utilizaremos, aparte de (44), también la fórmula (43) correspondiente a los núcleos $v(x, 1; \sigma)$ en dimensión $n = 3$.

Probamos a continuación los resultados principales en relación al operador L^*.

Teorema 9.4. *El operador maximal L^* es de tipo débil (1,1) y acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. Sea $A = \{\alpha = (\sigma, y) : 0 < \sigma < 2, y > 0\}$ y, para cada $\alpha = (\sigma, y) \in A$, pongamos $k_\alpha(x) = v(x, y; \sigma)$. La hipótesis *(a)* en el teorema de Zó se sigue de que $\int_\mathbb{R} k_\alpha(x) dx = \widehat{k_\alpha}(0) \simeq 1$ para cada $\alpha \in A$. Para chequear que se cumple *(b)*, comencemos usando las fórmulas del Teorema 9.2. Sea

$$\varphi_\sigma(s) = \int_0^\infty e^{-t^\sigma} \cos(\sqrt{s} t) dt.$$

Si $\Phi_\sigma^n(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, es la función tal que $\Phi_\sigma^n(|x|)$ es la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$ de $e^{-|\xi|^\sigma}$, tenemos que

$$\Phi_\sigma^n(\rho) = (-1)^m 2^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^m \varphi_\sigma}{ds^m}(\rho^2),$$

para $n = 2m + 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Cuando $n=1$ y $n=3$ se tiene entonces que

$$\Phi^1_\sigma(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varphi_\sigma(\rho^2) \qquad y \qquad \Phi^3_\sigma(\rho) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d\varphi_\sigma}{ds}(\rho^2).$$

Luego

$$\frac{d\Phi^1_\sigma}{d\rho}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2\rho\frac{d\varphi_\sigma}{ds}(\rho^2) = -\rho\Phi^3_\sigma(\rho),$$

y, en consecuencia,

$$\rho^2\left|\frac{d\Phi^1_\sigma}{d\rho}\right| \leq \rho^3\left|\Phi^3_\sigma(\rho)\right|. \tag{45}$$

Veamos que $\rho^3\left|\Phi^3_\sigma(\rho)\right|$ está acotado superiormente por una constante que no depende de $\sigma \in (0,2)$. Por la fórmula de inversión para la transformada de Fourier de funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\Phi^n_\sigma = L^\sigma$. Luego, de la ecuación (43) con $n=3$ y del hecho que $\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{2}(\sqrt{\pi\rho})^{-1}\sin\rho$ obtenemos que

$$\Phi^3_\sigma(\rho) = \rho^{-1/2}\int_0^\infty e^{-t^\sigma}t^{3/2}\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}(\rho t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{-1}\int_0^\infty e^{-t^\sigma}t\sin(\rho t)dt.$$

Veamos entonces que $(\pi/2)^{1/2}\rho^3\Phi^3_\sigma(\rho) = \rho^2\int_0^\infty e^{-t^\sigma}t\sin(\rho t)dt$ está acotado superiormente por una constante independiente tanto de $0<\sigma<2$ como de $\rho>0$. Sea $\eta(s) = s\sin s$, $s>0$. Integrando por partes obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\rho^2\int_0^\infty e^{-t^\sigma}t\sin(\rho t)dt \\
&\quad = \rho\int_0^\infty e^{-t^\sigma}\eta(\rho t)dt \\
&\quad = \rho\left[\frac{\sin\rho t - \rho t\cos\rho t}{\rho}e^{-t^\sigma}\Big|_0^\infty + \sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}\frac{\sin\rho t - \rho t\cos\rho t}{\rho}\,dt\right] \\
&\quad = \sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}\sin\rho t\,dt - \sigma\rho^{1-\sigma}\int_0^\infty e^{-t^\sigma}(\rho t)^\sigma\cos(\rho t)\,dt \\
&\quad = \sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}\sin\rho t\,dt - \sigma\rho^{1-\sigma}\left[\left(e^{-t^\sigma}\,\frac{\zeta(\rho t)}{\rho}\Big|_0^\infty\right) + \sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}\frac{\zeta(\rho t)}{\rho}dt\right]
\end{aligned}$$

donde $\zeta(t) = \int_0^t s^\sigma\cos s\,ds$. Integrando por partes nuevamente vemos que

$$\zeta(t) = \int_0^t s^\sigma\cos s\,ds = s^\sigma\sin s\big|_0^t - \sigma\int_0^t s^{\sigma-1}\sin s\,ds = t^\sigma\sin t - \sigma\int_0^t s^{\sigma-1}\sin s\,ds$$

Luego

$$\begin{aligned}\rho^2\int_0^\infty e^{-t^\sigma} t\sin(\rho t)dt &= \sigma\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}\sin\rho t\,dt\\ &\quad -\sigma^2\rho^{-\sigma}\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}(\rho t)^\sigma\sin(\rho t)dt\\ &\quad +\sigma^3\rho^{-\sigma}\int_0^\infty t^{\sigma-1}e^{-t^\sigma}\left(\int_0^{\rho t}s^{\sigma-1}\sin s\,ds\right)dt\\ &:= I+II+III.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u=(\rho t)^\sigma$, entonces

$$I=\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\rho^\sigma}}\sin(u^{1/\sigma})d\left(\frac{u}{\rho^\sigma}\right)$$

y

$$II=-\sigma\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\rho^\sigma}}\frac{u}{\rho^\sigma}\sin(u^{1/\sigma})d\left(\frac{u}{\rho^\sigma}\right),$$

que están ambos uniformemente acotados. Para el tercer término tenemos que

$$\begin{aligned}|III| &= \left|\sigma^2\rho^{-\sigma}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\rho^\sigma}}\left(\int_0^{u^{1/\sigma}}s^{\sigma-1}\sin s\,ds\right)d\left(\frac{u}{\rho^\sigma}\right)\right|\\ &\le \sigma^2\frac{1}{\rho^\sigma}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\rho^\sigma}}\frac{1}{\sigma}(u^{1/\sigma})^\sigma d\left(\frac{u}{\rho^\sigma}\right)\\ &= \sigma\int_0^\infty e^{-\frac{u}{\rho^\sigma}}\frac{u}{\rho^\sigma}d\left(\frac{u}{\rho^\sigma}\right),\end{aligned}$$

que también resulta uniformemente acotado por arriba. Por lo tanto de (45) obtenemos que $\left|\frac{d\Phi_\sigma^1}{d\rho}\right|\le C\rho^{-2}$ con C independiente de σ y ρ.

Estamos ahora en condiciones de verificar que la familia $\{k_\alpha : \alpha\in A\}$ satisface *(b)* en el teorema de Zó. En efecto, como $|x|\ge 2|z|$, por el teorema del valor medio tenemos que

$$|v(x-z,y;\sigma)-v(x,y;\sigma)| = \frac{1}{y}\left|v\Big(\frac{x-z}{y},1;\sigma\Big)-v\Big(\frac{x}{y},1;\sigma\Big)\right| = \frac{1}{y}\left|\frac{d}{dx}v(\xi,1;\sigma)\right|\frac{|z|}{y}$$

para algún ξ en el intervalo $\left(\frac{x}{y},\frac{x-z}{y}\right)$. De la estimación anterior para $d\Phi_\sigma^1/d\rho$, dado que $|\xi|\simeq|x|/y$, ya que $|x|\ge 2|z|$, se tiene que

$$|v(x-z,y;\sigma)-v(x,y;\sigma)|\le C\frac{|z|}{y^2}\left(\frac{y}{|x|}\right)^2.$$

Luego $F(x,z) \le C\frac{|z|}{|x|^2}$ para todo $|x| \ge 2\,|z|$, y, en consecuencia,

$$\int_{|x|\ge 2|z|} F(x,z)dx \le C\,|z| \int_{2|z|}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{C}{2} = \widetilde{C},$$

que es independiente de $\alpha = (\sigma, y) \in A$. De esta manera podemos aplicar el teorema de Zó, lo cual demuestra que L^* es de tipo débil (1,1) y acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p \le \infty$. $\square$

Teorema 9.5. *Sea $n = 1$ y $\Sigma\colon \mathbb{R}^+ \to (0,2)$ una función que satisface la condición $y^{\Sigma(y)+1/2}(\Sigma(y))^{-1} \to 0$ cuando $y \to 0^+$. Entonces los núcleos $\{v(x,y;\Sigma(y)) : y > 0\}$ concentran en torno al origen. Por lo tanto, $\big(v(\cdot,y;\Sigma(y)) * f\big)(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$ para toda función $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\cos\rho$, entonces integrando por partes

$$\begin{aligned}
v\left(x,y;\Sigma(y)\right) &= y^{-1} v\left(\tfrac{x}{y}, 1; \Sigma(y)\right) = \frac{1}{y}\sqrt{|x|}\int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}} t^{1/2} \mathcal{J}_{-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{|x|}{y}t\right) dt \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}\int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}} \cos\left(\tfrac{|x|}{y}t\right) dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{y}}\left[e^{-t^{\Sigma(y)}} \frac{y}{|x|}\sin\left(\tfrac{|x|}{y}t\right)\Big|_0^\infty + \Sigma(y)\int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}} t^{\Sigma(y)-1}\frac{y}{|x|}\sin\left(\tfrac{|x|}{y}t\right) dt\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{y}}\Sigma(y)\frac{y}{|x|}\int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}} t^{\Sigma(y)} \sin\left(\tfrac{|x|}{y}t\right)\frac{dt}{t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Sigma(y)\frac{\sqrt{y}}{|x|}\left(\frac{|x|}{y}\right)^{1-\Sigma(y)}\int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}}\left(\frac{|x|}{y}t\right)^{\Sigma(y)-1}\sin\left(\tfrac{|x|}{y}t\right) dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Sigma(y)y^{\Sigma(y)-1/2}}{|x|^{\Sigma(y)}}\int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}}\xi\left(\frac{|x|\,t}{y}\right) dt,
\end{aligned}$$

donde $\xi(s) = s^{\Sigma(y)-1}\sin s$. Definamos $\Theta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Luego, $\Theta(0) = 0$ y $\Theta'(t) = \xi(t)$. Además, para $\frac{|x|t}{y} \le \pi$ tenemos la estimación $\left|\Theta\left(\frac{|x|t}{y}\right)\right| \le \int_0^\pi s^{\Sigma(y)-1}ds = \frac{\pi^{\Sigma(y)}}{\Sigma(y)}$. Si, por otro lado, $\frac{|x|t}{y} > \pi$, se tiene una serie alternante con valores absolutos decrecientes y así

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{|x|t}{y}} s^{\Sigma(y)-1}\sin s ds &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\int_{(j-1)\pi}^{j\pi} s^{\Sigma(y)-1}\mathcal{X}_{\left[0,\frac{|x|t}{y}\right]}(s)\,|\sin s|\,ds \\
&\le \int_0^\pi s^{\Sigma(y)-1}\sin s\,ds \le \int_0^\pi s^{\Sigma(y)-1}ds = \frac{\pi^{\Sigma(y)}}{\Sigma(y)}.
\end{aligned}$$

Entonces, en cualquier caso,
$$\left|\Theta\left(\frac{|x|\,t}{y}\right)\right| \leq \frac{\pi^{\Sigma(y)}}{\Sigma(y)}.$$
Luego,
$$\begin{aligned} v\left(x, y; \Sigma(y)\right) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Sigma(y) y^{\Sigma(y)-1/2}}{|x|^{\Sigma(y)}} \left[e^{-t^{\Sigma(y)}} \frac{y}{|x|} \Theta\left(\frac{|x|\,t}{y}\right)\Big|_0^\infty \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^\infty (-\Sigma(y)) t^{\Sigma(y)-1} e^{-t^{\Sigma(y)}} \frac{y}{|x|} \Theta\left(\frac{|x|\,t}{y}\right) dt \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Sigma(y)^2 y^{\Sigma(y)+1/2}}{|x|^{1+\Sigma(y)}} \int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}} t^{\Sigma(y)} \Theta\left(\frac{|x|\,t}{y}\right) \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi^{\Sigma(y)} y^{\Sigma(y)+1/2}}{|x|^{1+\Sigma(y)}} \Sigma(y) \int_0^\infty e^{-t^{\Sigma(y)}} t^{\Sigma(y)} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi^{\Sigma(y)} y^{\Sigma(y)+1/2}}{|x|^{1+\Sigma(y)}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2} y^{\Sigma(y)+1/2}}{|x|^{1+\Sigma(y)}}. \end{aligned}$$
Para probar la propiedad de concentración para la familia $\{v(x, y; \Sigma(y)) : y > 0\}$, tomemos λ positivo y menor a uno, y estimemos las integrales fuera del intervalo centrado en el origen de longitud 2λ. Así
$$\begin{aligned} \int_{|x|\geq\lambda} v(x, y; \Sigma(y)) dx &\leq \sqrt{2}\pi^{3/2} y^{\Sigma(y)+1/2} 2 \int_\lambda^\infty \frac{dx}{x^{1+\Sigma(y)}} \\ &= (2\pi)^{3/2} y^{\Sigma(y)+1/2} \left(-\frac{1}{\Sigma(y)} x^{-\Sigma(y)} \Big|_\lambda^\infty \right) \\ &\leq \frac{(2\pi)^{3/2}}{\lambda^2} \frac{y^{\Sigma(y)+1/2}}{\Sigma(y)}. \end{aligned}$$
Por la hipótesis sobre Σ, la última expresión tiende a cero cuando $y \to 0^+$. $\square$

Observemos que potencias chicas de y satisfacen la condición para Σ. En efecto, tomando $0 < \varepsilon < 1/2$ y $\Sigma(y) = y^\varepsilon$ tenemos que $\frac{y^{(1/2+y^\varepsilon)}}{y^\varepsilon} = y^{1/2-\varepsilon} y^{y^\varepsilon}$ tiende a cero cuando $y \to 0^+$. En general, la condición para Σ en el Teorema 9.5 es estrictamente menos restrictiva que la del Teorema 9.1. Por último, notemos que la simplicidad en la estructura de las funciones $\mathcal{J}_{1/2}$ y $\mathcal{J}_{-1/2}$ es la que nos permite obtener las estimaciones necesarias para la integración por partes. Cuando la dimensión n del espacio subyacente es mayor a uno la función de Bessel involucrada en (43) es más compleja, por lo tanto estos métodos no se extienden de manera directa para tales casos.

Capítulo 10

Concentración y Aproximación de la Identidad por familias de núcleos de Markov con propiedades de Estabilidad y Harnack

Los resultados del Capítulo 9 asociados a los núcleos de Cauchy y de Lévy se pueden extender a familias de núcleos que no son de convolución y en las que la estructura precisa de aquellos se sustituye por dos propiedades cualitativas más generales. Estas propiedades son una desigualdad de Harnack y una estabilidad en el infinito. El resultado principal está contenido en el Teorema 10.3.

10.1. Desigualdad de Harnack, Estabilidad y Concentración

Comenzaremos definiendo los conceptos de estabilidad, Harnack y concentración, tomando como ilustración a la familia biparamétrica de núcleos de Cauchy-Poisson $\mathcal{P} = \{P^{\sigma}_y : 0 < \sigma < 2, y > 0\}$. Luego, extenderemos estos conceptos y los resultados que los relacionan a familias de núcleos más generales, no necesariamente de convolución.

La desigualdad de Harnack clásica en las funciones analíticas de variable compleja ha adquirido una merecida centralidad en la teoría de De Giorgi, Moser y Nash de regularidad de soluciones débiles de ecuaciones elípticas y parabólicas con coeficientes irregulares. Dado un abierto Ω en $\mathbb{R}^n$ y u una solución de $Lu = 0$, donde L es parecido al Laplaciano pero más general, entonces

$$\sup_B u \leq C \inf_B u,$$

con C una constante independiente de u y de B, siempre que $2B \subset \Omega$.

El siguiente resultado prueba que la familia $\mathcal{P}$ satisface una desigualdad de Harnack uniforme en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Esta desigualdad compara los ínfimos y los supremos de cualquier núcleo de $\mathcal{P}$ en bolas de la forma $B(x, \gamma\,|x|)$ con $0 < \gamma < 1$ fijo y $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Proposición 10.1. *Sea* $0 < \gamma < 1$. *Para* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *consideremos la bola* $B(x, \gamma|x|)$, $\mathfrak{s}_\gamma(x,y,\sigma) = \sup_{z\in B(x,\gamma|x|)} P_y^\sigma(z)$ *e* $\mathfrak{i}_\gamma(x,y,\sigma) = \text{ínf}_{z\in B(x,\gamma|x|)} P_y^\sigma(z)$. *Entonces*

$$\frac{\mathfrak{s}_\gamma(x,y,\sigma)}{\mathfrak{i}_\gamma(x,y,\sigma)} < \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \tag{46}$$

uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *e* $y > 0$. *Más aún,* $\sup_{x,y} \frac{\mathfrak{s}_\gamma}{\mathfrak{i}_\gamma} = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}$.

Demostración. Recordemos que $P_y^\sigma(z) = y^{-n}P_1^\sigma(y^{-1}z) = (I(\sigma))^{-1}y^\sigma(y^2+|z|^2)^{-(n+\sigma)/2}$. Por lo tanto, para $x \neq 0$ y $z \in B(x,\gamma|x|)$ tenemos que

$$\mathfrak{s}_\gamma(x,y,\sigma) = \frac{y^\sigma}{I(\sigma)(y^2+(1-\gamma)^2|x|^2)^{\frac{n+\sigma}{2}}},$$

y

$$\mathfrak{i}_\gamma(x,y,\sigma) = \frac{y^\sigma}{I(\sigma)(y^2+(1+\gamma)^2|x|^2)^{\frac{n+\sigma}{2}}}.$$

Así que

$$\frac{\mathfrak{s}_\gamma(x,y,\sigma)}{\mathfrak{i}_\gamma(x,y,\sigma)} = \left[\frac{1+(1+\gamma)^2\left(\frac{|x|}{y}\right)^2}{1+(1-\gamma)^2\left(\frac{|x|}{y}\right)^2}\right]^{\frac{n+\sigma}{2}}.$$

Como la expresión entre corchetes es estrictamente creciente como función de $\left(\frac{|x|}{y}\right)^2$, el supremo de esta expresión es su límite para $\frac{|x|}{y} \to \infty$. De este modo, $\frac{\mathfrak{s}_\gamma}{\mathfrak{i}_\gamma} < \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}$ y $\sup_{x,y} \frac{\mathfrak{s}_\gamma}{\mathfrak{i}_\gamma} = \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}$. $\square$

Notemos que, como $0 < \sigma < 2$, el número $\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+2}$ es una cota superior para $\frac{\mathfrak{s}_\gamma}{\mathfrak{i}_\gamma}$, la cual es además uniforme en σ.

En lo que sigue nuestro estudio estará referido a familias en la clase general de núcleos de tipo Markov de dos variables. Un **núcleo de Markov** simétrico en $\mathbb{R}^n$ es una función medible no negativa y simétrica K definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} K(x,z)dz = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado un núcleo de Markov K definido en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ diremos que K satisface una **condición de Harnack con constantes $\mathbf{0 < \boldsymbol{\gamma} < 1}$ y $\boldsymbol{H} \geq \mathbf{1}$**, y denotaremos $\boldsymbol{K \in \mathcal{H}(\gamma, H)}$, si vale la desigualdad

$$\sup_{z\in B(\xi,\gamma|x-\xi|)} K(x,z) \leq H \inf_{z\in B(\xi,\gamma|x-\xi|)} K(x,z)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi \neq x$. Con esta notación, la Proposición 10.1 se lee $P_y^\sigma \in \mathcal{H}\big(\gamma, \big(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\big)^{n+\sigma}\big)$ para todo $0 < \gamma < 1$, todo $0 < \sigma < 2$ y todo $y > 0$. De esta manera, notemos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}\big(\gamma, \big(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\big)^{n+2}\big)$ para todo $0 < \gamma < 1$.

Como ya observamos antes, con una mirada probabilística, el parámetro σ en los núcleos de tipo $P^\sigma(x) = (I(\sigma))^{-1}(1+|x|^2)^{-(n+\sigma)/2}$ sustituye de algún modo a la varianza, que para estos núcleos es infinita. La siguiente proposición consituye el punto de partida para la generalización del parámetro de estabilidad para núcleos de dos variables.

Proposición 10.2. *Para $0 < \sigma < 2$ y $y > 0$, se tiene que $|x-z|^{n+\sigma} P_y^\sigma(x-z) \to y^\sigma (I(\sigma))^{-1}$ cuando $|x-z| \to \infty$.*

Demostración. Basta con escribir

$$|x-z|^{n+\sigma} \frac{y^\sigma}{I(\sigma)\big(y^2+|x-z|^2\big)^{\frac{n+\sigma}{2}}} = \frac{y^\sigma}{I(\sigma)} \frac{|x-z|^{n+\sigma}}{\big(y^2+|x-z|^2\big)^{\frac{n+\sigma}{2}}} = \frac{y^\sigma}{I(\sigma)} \frac{1}{\left(\frac{y^2}{|x-z|^2}+1\right)^{\frac{n+\sigma}{2}}}$$

y tomar límite para $|x-z| \to \infty$. □

Dado un núcleo de Markov K definido en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ decimos que **K es σ-estable con parámetro $\alpha > 0$** y denotamos **$K \in \mathcal{S}(\sigma, \alpha)$** si

$$\lim_{|x-z|\to\infty} |x-z|^{n+\sigma} K(x,z) = \alpha.$$

Con esta notación $P_y^\sigma \in \mathcal{S}(\sigma, y^\sigma(I(\sigma))^{-1})$ para cada $0 < \sigma < 2$ e $y > 0$.

En el Capítulo 9 probamos que las familias $\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}$ poseen propiedades de concentración en torno al origen. Más generalmente, podemos preguntarnos por la propiedad de concentración en torno a a diagonal de una familia de núcleos de Markov. Decimos que una familia de núcleos de Markov $\mathcal{K} = \{K_\tau(x,z) \colon 0 < \tau < 1\}$ **concentra**, o que satisface la **propiedad de concentración**, y lo denotamos **$\mathcal{K} \in \mathcal{C}$** si $\int_{|x-z|\geq\lambda} K_\tau(x,z)dz$ tiende a cero cuando $\tau \to 0$ para todo $\lambda > 0$, uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$. De esta manera, según los resultados del Capítulo 9, tenemos que las familias $\{P_y^{\Sigma(y)}(x-z) : 0 < y < 1\}$, con $y^{\Sigma(y)} \to 0^+$ cuando $y \to 0^+$, y $\{L_y^{\Sigma(y)}(x-z) : 0 < y < 1\}$, para $y^{1/2+\Sigma(y)}(\Sigma(y))^{-1} \to 0^+$ cuando $y \to 0^+$, pertenecen a $\mathcal{C}$.

10.2. Aproximación de la Identidad por familias de núcleos de Markov estables con la propiedad de Harnack.

El siguiente es el resultado principal del capítulo, en el cual se demuestra que propiedades de estabilidad y Harnack implican concentración y acotación del operador maximal para familias adecuadas de núcleos de Markov, que por lo tanto constituyen aproximaciones a la identidad en sentido puntual en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 10.3. *Sea $\sigma > 0$ arbitrario. Supongamos que para cada $0 < \alpha < 1$ está dado un núcleo de Markov $K_\alpha^\sigma \in \mathcal{S}(\sigma, \alpha)$. Si para algún $0 < \gamma < 1$ se tiene que $\mathcal{K} = \{K_\alpha^\sigma : 0 < \alpha < 1\} \subset \mathcal{H}\left(\gamma, \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}\right)$, entonces*

(a) $\mathcal{K} \in \mathcal{C}$;

(b) $\mathcal{K}^* f(x) = \sup_{0<\alpha<1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha^\sigma(x,z) f(z) dz\right|$ *es de tipo débil (1,1) y acotado en* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *para* $1 < p \leq \infty$;

(c) $\lim_{\alpha \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha^\sigma(x,z) f(z) dz = f(x)$ *en casi todo punto, para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración de *(a)*. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$. Dado que cada K_α^σ pertenece a $\mathcal{S}(\sigma, \alpha)$, entonces existe $R(\alpha)$ suficientemente grande tal que $|x - z|^{n+\sigma} K_\alpha^\sigma(x,z) < 2\alpha$ cuando $|x - z| \geq R(\alpha)$. En otros términos $K_\alpha^\sigma(x,z) \leq \frac{2\alpha}{|x-z|^{n+\sigma}}$ para $|x - z| \geq R(\alpha)$. Ahora, como $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}\left(\gamma, \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}\right)$ para cierto $0 < \gamma < 1$, nos será posible estimar $K_\alpha^\sigma(x,z)$ en $B(x, R(\alpha)) \setminus \{x\}$. La familia de anillos

$$A_j = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{j+1} R(\alpha) \leq |x - z| < \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{j} R(\alpha) \right\}, \ j = 0, 1, 2, \dots$$

provee un cubrimiento del conjunto $B(x, R(\alpha)) \setminus \{x\}$. Luego, tomando $J = J(\lambda, R(\alpha))$ el menor entero para el cual $\left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{j+1} R(\alpha) \leq \lambda$, obtenemos que $\{z : |x - z| \geq \lambda\} \subset \bigcup_{j=0}^J A_j \cup \{z : |x - z| \geq R(\alpha)\}$. Para los z tales que $|x - z| \geq R(\alpha)$ tenemos que $K_\alpha^\sigma(x,z) \leq \frac{2\alpha}{|x-z|^{n+\sigma}}$. Busquemos a continuación cotas para $K_\alpha^\sigma(x,z)$ con z en los anillos A_j. Comenzamos con $j = 0$. Notemos que si $\frac{1-\gamma}{1+\gamma} R(\alpha) < |x - z| < R(\alpha)$ entonces z pertenece además a una bola $\widetilde{B} = B(\xi, \gamma |x - \xi|)$ tal que $\widetilde{B} \cap \{z : |x - z| \geq R(\alpha)\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, si $\theta \in \widetilde{B} \cap \{z : |x - z| \geq R(\alpha)\}$ tenemos que

$$K_\alpha^\sigma(x,z) \leq \sup_{\eta \in \widetilde{B}} K_\alpha^\sigma(x,\eta)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \inf_{\eta\in\widetilde{B}} K_\alpha^\sigma(x,\eta) \\
&\leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} K_\alpha^\sigma(x,\theta) \\
&\leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \frac{2\alpha}{R(\alpha)^{n+\sigma}}.
\end{aligned}
$$

Iterando, obtenemos para $z \in A_j$ la cota superior

$$
K_\alpha^\sigma(x,z) \leq \frac{2\alpha}{R(\alpha)^{n+\sigma}} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{(j+1)(n+\sigma)}.
$$

Entonces, para $|x-z| \geq \lambda$ tenemos que

$$
K_\alpha^\sigma(x,z) \leq \frac{2\alpha}{R(\alpha)^{n+\sigma}} \sum_{j=0}^{J} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{(j+1)(n+\sigma)} \mathcal{X}_{A_j}(z) + \frac{2\alpha}{|x-z|^{n+\sigma}} \mathcal{X}_{\{|x-z|\geq R(\alpha)\}}(z).
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\int_{\{z:|x-z|\geq\lambda\}} K_\alpha^\sigma(x,z)dz &\leq 2\alpha \left\{ \frac{1}{R(\alpha)^{n+\sigma}} \sum_{j=0}^{J} \left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{(j+1)(n+\sigma)} |A_j| + \omega_n \int_{R(\alpha)}^{\infty} \rho^{n-1} \frac{d\rho}{\rho^{n+\sigma}} \right\} \\
&\leq 2\alpha\omega_n \left\{ \frac{1}{R(\alpha)^{n+\sigma}} \sum_{j=0}^{J} \left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{(j+1)(n+\sigma)} \left(\tfrac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{jn} R(\alpha)^n + \frac{1}{\sigma R(\alpha)^\sigma} \right\} \\
&= \frac{2\omega_n}{R(\alpha)^\sigma}\alpha \left\{ \frac{1}{\sigma} + \sum_{j=0}^{J} \left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma(j+1)} \right\} \\
&= \frac{2\omega_n}{R(\alpha)^\sigma}\alpha \left\{ \frac{1}{\sigma} + \left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \frac{1}{\left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{\sigma} - 1} \left[\left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{(J+1)\sigma} - 1 \right] \right\}.
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que J es el menor entero para el cual $\left(\tfrac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^{j+1} R(\alpha) \leq \lambda$, vemos que

$$
\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{(J+1)\sigma} \geq \left(\frac{R(\alpha)}{\lambda}\right)^{\sigma} > \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{J\sigma}.
$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
\int_{\{z:|x-z|\geq\lambda\}} K_\alpha^\sigma(x,z)dz &\leq \frac{2\omega_n}{R(\alpha)^\sigma}\alpha \left\{ \frac{1}{\sigma} + \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \frac{\left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{\sigma}}{\left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{\sigma} - 1} \left(\frac{R(\alpha)}{\lambda}\right)^{\sigma} \right\} \\
&\leq \frac{2\omega_n\alpha}{\sigma} + 2\omega_n\alpha \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \frac{(1+\gamma)^\sigma}{(1+\gamma)^\sigma - (1-\gamma)^\sigma} \frac{1}{\lambda^\sigma}.
\end{aligned}
$$

Esta última expresión tiende a cero cuando $\alpha \to 0$, con lo cual queda demostrada la propiedad de concentración.

Demostración de *(b)*. Veamos que $\mathcal{K}^*f$ está mayorada por la función maximal de Hardy-Littlewood Mf puntualmente. Comencemos por construir una regularización $\widetilde{K}^\sigma_\alpha$ de K^σ_α, definiendo

$$\widetilde{K}^\sigma_\alpha(x,z) = \fint_{\zeta\in B(z,\gamma|z-x|)} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)d\zeta = \frac{1}{|B(z,\gamma\,|z-x|)|}\int_{\zeta\in B(z,\gamma|z-x|)} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)d\zeta.$$

Dado que $\mathcal{K}\subset\mathcal{H}\big(\gamma,\big(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\big)^{n+\sigma}\big)$ entonces tenemos que $\widetilde{K}^\sigma_\alpha$ provee una cota superior para K^σ_α. En efecto

$$\begin{aligned}
K^\sigma_\alpha(x,z) &\leq \sup_{\zeta\in B(z,\gamma|z-x|)} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)\\
&\leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \inf_{\zeta\in B(z,\gamma|z-x|)} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)\\
&\leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \fint_{B(z,\gamma|z-x|)} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)d\zeta\\
&= \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma} \widetilde{K}^\sigma_\alpha(x,z).
\end{aligned}$$

De hecho, también $\widetilde{K}^\sigma_\alpha$ esta acotada superiormente por K^σ_α (con la misma constante) y en consecuencia resultan equivalentes punto a punto. Luego

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} K^\sigma_\alpha(x,z)f(z)dz\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} K^\sigma_\alpha(x,z)\,|f(z)|\,dz\\
&\leq \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{K}^\sigma_\alpha(x,z)\,|f(z)|\,dz\\
&= \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}\frac{\omega_n}{\gamma^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|z-x|^n}\int_{\zeta\in B(z,\gamma|z-x|)} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)d\zeta\right)|f(z)|\,dz\\
&= \frac{\omega_n}{\gamma^n}\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{n+\sigma}\int_{\zeta\in\mathbb{R}^n} K^\sigma_\alpha(x,\zeta)\left(\int_{\{z\in\mathbb{R}^n:|\zeta-z|<\gamma|x-z|\}}\frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz\right)d\zeta.
\end{aligned}$$

A fin de estimar la integral interior haremos dos observaciones geométricas:

Hecho 1. Para $\zeta\neq x$ el conjunto $\{z\in\mathbb{R}^n : |\zeta-z|<\gamma\,|x-z|\}\subset B\left(x,\frac{|\zeta-x|}{1-\gamma}\right)$.

En efecto, para z tal que $|\zeta-z|<\gamma\,|x-z|$ tenemos que $|z-x|\leq|z-\zeta|+|\zeta-x|<\gamma\,|x-z|+|\zeta-x|$. Luego $|z-x|\,(1-\gamma)<|\zeta-x|$ y $z\in B\left(x,\frac{|\zeta-x|}{1-\gamma}\right)$.

Hecho 2. Para z tal que $|\zeta-z|<\gamma\,|x-z|$, se tiene que $|x-\zeta|\leq(1+\gamma)\,|z-x|$.

En efecto, $|x-\zeta| \leq |x-z| + |z-\zeta| < (1+\gamma)\,|x-z|$.

Utilizando el Hecho 2 en la primera desigualdad y el Hecho 1 en la segunda tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\{z\in\mathbb{R}^n:|\zeta-z|<\gamma|x-z|\}} \frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz &\leq \frac{(1+\gamma)^n}{|x-\zeta|^n}\int_{\{z\in\mathbb{R}^n:|\zeta-z|<\gamma|x-z|\}} |f(z)|\,dz\\ &\leq \frac{(1+\gamma)^n}{|x-\zeta|^n}\int_{B\left(x,\frac{|\zeta-x|}{1-\gamma}\right)} |f(z)|\,dz.\end{aligned}$$

Claramente el último miembro está acotado por una constante veces la función maximal de Hardy–Littlewood de f en x. Precisamente

$$\int_{\{z\in\mathbb{R}^n:|\zeta-z|<\gamma|x-z|\}} \frac{|f(z)|}{|x-z|^n}dz \leq \omega_n\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^n Mf(x).$$

Luego,

(47)
$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha^\sigma(x,z)f(z)dz\right| \leq \frac{\omega_n^2}{\gamma^n}\left(\tfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^{2n+\sigma} Mf(x)\int_{\zeta\in\mathbb{R}^n} K_\alpha^\sigma(x,\zeta)d\zeta = C(\gamma,\sigma,n)Mf(x).$$

Como esta cota superior es uniforme en α tenemos el resultado del ítem *(b)*.

Demostración de *(c)*. Basta con probar la convergencia puntual para funciones continuas de soporte compacto. Sea $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que $|f(x)-f(z)| < \varepsilon$ si $|x-z| < \lambda$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha^\sigma(x,z)f(z)dz - f(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha^\sigma(x,z)\,|f(z)-f(x)|\,dz\\ &\leq 2\,\|f\|_\infty \int_{\{z:|x-z|\geq\lambda\}} K_\alpha^\sigma(x,z)dz + \varepsilon\int_{\{z:|x-z|<\lambda\}} K_\alpha^\sigma(x,z)dz.\end{aligned}$$

Por la propiedad de concentración de la familia $\mathcal{K}$ probada en el ítem *(a)* se tiene el resultado para f. Finalmente, se concluye la demostración por el argumento usual de densidad y tipo débil del operador $\mathcal{K}^*$. □

Cabe destacar que los valores precisos de las constantes en la condición de Harnack se utilizan únicamente en la demostración de la propiedad de concentración dada en la parte *(a)* del Teorema 10.3. Para las propiedades de acotación del operador maximal $\mathcal{K}^*$ esos valores son irrelevantes. Por lo tanto, por la desigualdad (47) en la prueba del ítem *(b)* del Teorema 10.3 se obtiene el tipo débil y la acotación para una función maximal aún mayor. Para $\sigma_0 > 0$ fijo definamos

$$\mathcal{K}^{**}f(x) = \sup_{\substack{0<\alpha<1 \\ 0<\sigma\leq\sigma_0}} \left| \int K_\alpha^\sigma(x,z)f(z)dz \right|.$$

COROLARIO 10.4. *El operador $\mathcal{K}^{**}$ es de tipo débil (1,1) y acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p \leq \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta con notar que el valor $C(\gamma, \sigma, n)$ en (47) esta superiormente acotado por $C(\gamma, \sigma_0, n)$. □

Capítulo 11

Estabilidad, Harnack y Aproximación de la Identidad en espacios de tipo homogéneo

En este capítulo se extienden algunos de los resultados del capítulo anterior a núcleos con colas pesadas en espacios generales de tipo homogéneo. En efecto, los espacios de tipo homogéneo proveen un contexto muy general que es natural para la formulación de las cuatro propiedades en consideración: estabilidad, Harnack, concentración y tipo débil del operador maximal. En particular, la propiedad de duplicación de la medida es central en la acotación del operador maximal asociado a los núcleos de Markov por el de Hardy–Littlewood del contexto. En la primera sección del capítulo nos ocuparemos del tipo débil del operador maximal y en la segunda de la propiedad de concentración.

11.1. Estimación del operador maximal

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Una función medible K, no negativa y simétrica definida en $X \times X$ es un **núcleo de Markov simétrico** en X si $\int_X K(x,y)d\mu(y) = 1$ para todo $x \in X$. Notemos que el concepto de núcleo de Markov depende únicamente de la estructura de medida de X pero no explícitamente de la métrica. Por otro lado, la desigualdad de tipo Harnack depende sólo de la estructura métrica. A primera vista, la condición de estabilidad parece ser un concepto métrico. Sin embargo, como en la expresión $|x-y|^{n+\sigma}$ el parámetro n es la dimensión del espacio subyacente, su interpretación correcta es $|B(x, |x-y|)|^{1+\sigma/n}$. De este modo, la estabilidad debe ser interpretada como un concepto mixto que involucra métrica y medida.

En lo que sigue (X, d, μ) denota un espacio de tipo homogéneo no acotado.

Diremos que un núcelo de Markov simétrico K definido en X satisface una **desigualdad de Harnack con constantes $\boldsymbol{0 < \gamma < 1}$ y $\boldsymbol{H \geq 1}$** y lo denotaremos $\boldsymbol{K \in \mathcal{H}(\gamma, H)}$ si la desigualdad

$$\sup_{\eta \in B(y,\gamma d(x,y))} K(x,\eta) \leq H \inf_{\eta \in B(y,\gamma d(x,y))} K(x,\eta)$$

vale para todo x e y en X con $y \neq x$.

Un primer resultado que sigue de una desigualdad de Harnack uniforme en una familia de núcleos es la acotación del operador maximal asociado por el operador de Hardy–Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| \, d\mu(y).$$

En la definición de M el supremo se toma sobre la familia de todas las bolas que contienen a x. De los lemas de cubrimiento del tipo Wiener, se puede ver que M es de tipo débil (1,1) y acotado en $L^p(X,\mu)$ para $1 < p \leq \infty$.

TEOREMA 11.1. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo con constantes geométricas τ y A. Si $\mathcal{K}$ es una familia de núcleos de Markov simétricos sobre X tal que existen $0 < \gamma < \frac{1}{\tau}$ y $H \geq 1$ para los cuales $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\gamma, H)$, entonces existe una constante C que depende de τ, A, γ y H tal que*

$$\mathcal{K}^* f(x) \leq CMf(x)$$

para todo $x \in X$ y toda función medible f.

En el enunciado, el operador maximal está definido por

$$\mathcal{K}^* f(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} \left| \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y) \right|.$$

Para probar el Teorema 11.1 introducimos una regularización $\widetilde{K}$ de cada $K \in \mathcal{K}$, dada por

$$\widetilde{K}(x,y) = \frac{1}{\mu(B(y,\gamma d(x,y)))} \int_{z \in B(y,\gamma d(x,y))} K(x,z) d\mu(z)$$

para $x \neq y$ y $\widetilde{K}(x,x) = K(x,x)$. Escribiremos

$$\widetilde{\mathcal{K}}^* f(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} \left| \int_X \widetilde{K}(x,y) f(y) d\mu(y) \right|.$$

LEMA 11.2. *Para todo $K \in \mathcal{K}$ y todo $(x,y) \in X \times X$ tenemos que $K(x,y) \leq H\widetilde{K}(x,y) \leq H^2 K(x,y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que, como $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\gamma, H)$, para $x \neq y$ se tiene que

$$K(x,y) = \frac{1}{\mu(B(y,\gamma d(x,y)))} \int_{B(y,\gamma d(x,y))} K(x,y) d\mu(z)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\mu(B(y,\gamma d(x,y)))}\int_{B(y,\gamma d(x,y))}\sup_{\eta\in B(y,\gamma d(x,y))}K(x,\eta)d\mu(z)\\
&\leq \frac{H}{\mu(B(y,\gamma d(x,y)))}\int_{B(y,\gamma d(x,y))}\inf_{\eta\in B(y,\gamma d(x,y))}K(x,\eta)d\mu(z)\\
&\leq H\widetilde{K}(x,y).
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se sigue aplicando de nuevo la condición de $\mathcal{H}(\gamma,H)$. □

Puesto que en nuestro contexto general el espacio puede tener átomos, damos a continuación una cota para K sobre la diagonal en términos de las medidas de los átomos.

Lema 11.3. *Sea $\mathcal{K}$ como en el Teorema 11.1. Entonces* $\sup_{K\in\mathcal{K},x\in X}K(x,x)\mu(\{x\})\leq 1$.

Demostración. Basta observar que

$$K(x,x)\mu(\{x\})=\int_{z\in\{x\}}K(x,z)d\mu(z)\leq\int_{z\in X}K(x,z)d\mu(z)=1,$$

para todo $K\in\mathcal{K}$ y todo punto $x\in X$. □

Demostración del Teorema 11.1. Del Lema 11.2 tenemos que $\mathcal{K}^*f(x)\leq H\widetilde{\mathcal{K}}^*f(x)$ para toda f y todo x. Así, es suficiente probar la existencia de una constante $C=C(\tau,A,\gamma,H)>0$ tal que para toda función medible y no negativa f valga que

$$\int_{y\in X}\widetilde{K}(x,y)f(y)d\mu(y)\leq CMf(x),$$

para todo $x\in X$ y todo $K\in\mathcal{K}$. Fijemos, entonces, $f\geq 0$ y $x\in X$. Observemos que si $\{x\}$ es un átomo entonces $f(x)\leq Mf(x)$. Luego, por el Lema 11.3 y el teorema de Tonelli's con $E(x,z)=\{y:y\neq x, d(y,z)<\gamma d(x,y)\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{y\in X}\widetilde{K}(x,y)f(y)d\mu(y)\\
&=K(x,x)f(x)\mu(\{x\})+\int_{y\in X\setminus\{x\}}\left(\frac{1}{\mu(B(y,\gamma d(x,y)))}\int_{z\in B(y,\gamma d(x,y))}K(x,z)d\mu(z)\right)f(y)d\mu(y)\\
&\leq f(x)+\int_{y\in X}\int_{z\in X}\mathcal{X}_{X\setminus\{x\}}(y)K(x,z)\mathcal{X}_{B(y,\gamma d(x,y))}(z)\mu(B(y,\gamma d(x,y)))^{-1}f(y)d\mu(z)d\mu(y)\\
&=f(x)+\int_{z\in X}K(x,z)\left(\int_{E(x,z)}\frac{f(y)}{\mu(B(y,\gamma d(x,y)))}d\mu(y)\right)d\mu(z)\\
&\leq Mf(x)+\left(\frac{4\tau}{\gamma}\right)^{\log_2 A}\int_{z\in X}K(x,z)\left(\int_{E(x,z)}\frac{f(y)}{\mu(B(y,2\tau d(x,y)))}d\mu(y)\right)d\mu(z).
\end{aligned}$$

Notemos que $E(x,z) \subset B(x, \frac{\tau}{1-\gamma\tau}d(x,z))$. En efecto, para $y \in E(x,z)$ tenemos que $y \neq x$ y que $d(y,z) < \gamma d(x,y)$. Así $d(x,y) \leq \tau(d(x,z)+d(z,y)) < \tau d(x,z) + \gamma\tau d(x,y)$. Luego, $d(x,y) < \frac{\tau}{1-\gamma\tau}d(x,z)$. Además $B(y, 2\tau d(x,y)) \supset B\big(x, \frac{d(x,z)}{\tau(1+\gamma)}\big)$. Para $\xi \in B\big(x, \frac{d(x,z)}{\tau(1+\gamma)}\big)$,

$$\begin{aligned} d(\xi,y) &\leq \tau(d(\xi,x)+d(x,y)) \\ &< \tfrac{1}{1+\gamma}d(x,z) + \tau d(x,y) \\ &\leq \tfrac{\tau}{1+\gamma}d(x,y) + \tfrac{\tau}{1+\gamma}d(y,z) + \tau d(x,y) \\ &< \tau\big(\tfrac{1}{1+\gamma} + \tfrac{\gamma}{1+\gamma} + 1\big)d(x,y) = 2\tau d(x,y). \end{aligned}$$

Así,

$$\mu(B(y,2\tau d(x,y))) \geq \mu(B(x, \tfrac{1-\gamma\tau}{\tau^2(1+\gamma)}\tfrac{\tau}{1-\gamma\tau}d(x,z))) \geq \Big(\tfrac{1-\gamma\tau}{\tau^2(1+\gamma)}\Big)^{\log_2 A}\mu(B(x, \tfrac{\tau}{1-\gamma\tau}d(x,z))).$$

Con las estimaciones de arriba para $E(x,z)$ y $\mu(B(y,2\tau d(x,y)))$, y como $\int_X K(x,z)d\mu(z) = 1$, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} &\int_{y\in X} \widetilde{K}(x,y)f(y)d\mu(y) \\ &\leq Mf(x) + \Big(\tfrac{4\tau^3(1+\gamma)}{\gamma(1-\gamma\tau)}\Big)^{\log_2 A}\int_{z\in X}K(x,z)\Bigg[\frac{1}{\mu\Big(B\big(x,\frac{\tau}{1-\gamma\tau}d(x,z)\big)\Big)}\int_{B\left(x,\frac{\tau}{1-\gamma\tau}d(x,z)\right)} f(y)d\mu(y)\Bigg]d\mu(z) \\ &\leq \left[1 + \left(\frac{4\tau^3(1+\gamma)}{\gamma(1-\gamma\tau)}\right)^{\log_2 A}\right]Mf(x). \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado es directo del teorema anterior y del tipo de la maximal de Hardy–Littlewood mencionado anteriormente.

Corolario 11.4. *Sean* (X,d,μ) *y* $\mathcal{K}$ *como en el Teorema 11.1. Entonces* $\mathcal{K}^*$ *es de tipo débil* $(1,1)$ *y acotado en* $L^p(X,\mu)$ *para* $1 < p \leq \infty$.

11.2. Concentración y aproximación de la identidad

Observemos primero que en $\mathbb{R}^n$ la desigualdad de Harnack para un núcleo de Markov $K(x,y)$ es equivalente a una desigualdad de tipo Harnack sobre anillos, lo cual no es evidente en este contexto. Diremos que $K \in \mathcal{H}_a(\gamma, H)$ si

$$\sup_{y\in A(x,\gamma r,r)} K(x,y) \leq H \inf_{y\in A(x,\gamma r,r)} K(x,y)$$

para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$. Aquí $0 < \gamma < 1$, $H \geq 1$ y $A(x,\gamma r,r) = B(x,r) \setminus B(x,\gamma r)$.

Menos simple es la pregunta sobre la estabilidad de una núcleo de Markov en el contexto general. En particular, en principio en algún sentido intuitivo, el espacio (X, d, μ) puede no ser estable en si mismo en el infinito. De esta manera la estabilidad de un núcleo se vuelve una propiedad que también refiere al comportamiento del espacio subyacente en el infinito. Antes de introducir el contexto natural para la definición de estabilidad de un núcleo de Markov, repasaremos resultados conocidos y probaremos algunos nuevos teniendo en mente la normalización de un espacio de tipo homogéneo.

Si (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo tal que las d-bolas son conjuntos abiertos, $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$ y $\mu(X) = +\infty$, entonces $\delta(x,y) = \inf\{\mu(B) : x, y \in B, B \text{ una } d-\text{bola en } X\}$ es una casi-metrica en X que determina la misma topología que d genera en X y existen constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tales que $c_1 r \leq \mu(B_\delta(x,r)) \leq c_2 r$ para todo $x \in X$ y $r > 0$. Es decir, el espacio de tipo homogéneo (X, δ, μ) es normal. Siguiendo la dependencia de c_1, c_2 y la constante triangular $\widetilde{\tau}$ de (X, δ, μ) en términos de las constantes geométricas τ y A de (X, d, μ) vemos que $c_1 = 1/A$, $c_2 = (10\tau^2)^{\log_2 A}$ y $\widetilde{\tau} = (6\tau^2)^{\log_2 A}$ sirven.

Para nuestras aplicaciones, es relevante describir la estabilidad sólo en el caso de espacios no acotados y no atómicos. Escribiremos en forma breve $(X, \delta, \mu) \in \mathcal{N}(\widetilde{\tau}, c_1, c_2)$ cuando (X, δ, μ) es un espacio normal no acotado y no atómico con constantes $\widetilde{\tau}$, c_1 y c_2. En términos de la estructura original (X, d, μ) es conveniente notar que $\delta(x,y) \simeq \mu(B_d(x, d(x,y)) \cup B_d(y, d(x,y))) \simeq \mu(B_d(x, d(x,y)))$ con constantes que no dependen de $x, y \in X$. Una de las ventajas de δ sobre otras normalizaciones es que las δ-bolas son conjuntos abiertos y que los núcleos dados como funciones continuas de δ se vuelven medibles.

La normalización puede ser vista como una forma de medir la distancia entre los puntos del espacio en términos de la distribución de la masa en la estructura original. En otras palabras, el proceso de normalización mejora la homogeneidad del espacio. El siguiente resultado contiene una propiedad elemental que es consecuencia de la normalidad, que será útil en nuestra extensión del Teorema 10.3.

LEMA 11.5. *Sea* $(X,\delta,\mu)\in\mathcal{N}(\widetilde{\tau},c_1,c_2)$*, entonces* $\mu\left(B_\delta\left(x,\frac{(1+\varepsilon)c_2}{c_1}r\right)\setminus B_\delta(x,r)\right)\geq \varepsilon c_2 r>0$ *para todo* $\varepsilon>0$.

DEMOSTRACIÓN. $\mu\left(B_\delta\left(x,\frac{(1+\varepsilon)c_2}{c_1}r\right)\setminus B_\delta(x,r)\right)=\mu(B_\delta(x,\frac{(1+\varepsilon)c_2}{c_1}r))-\mu(B_\delta(x,r))\geq (1+\varepsilon)c_2r-c_2r=\varepsilon c_2 r$. $\square$

Esto índica en particular que en espacios normales los anillos de algún radio son no vacíos. En general, si (X,d) es un espacio métrico y $\nu>1$, decimos que $A(x,r,\nu r)=B(x,\nu r)\setminus B(x,r)$ es un ν-anillo en (X,d) si $x\in X$ y $r>0$. Diremos que $(X,d)\in\mathcal{A}(\nu)$ si todo ν-anillo es no vacío. Notar que si $(X,d)\in\mathcal{A}(\nu)$ para algún $\nu>1$ entonces el espacio es no acotado y no tiene puntos aislados. Con esta notación tenemos que $\mathcal{N}(\widetilde{\tau},c_1,c_2)\subseteq\mathcal{A}(\frac{(1+\varepsilon)c_2}{c_1})$ para todo $\varepsilon>0$. Volviendo a la estructura original (X,d,μ) con constantes geométricas τ y A, el resultado de anterior implica que los δ-anillos de radio $(1+\varepsilon)A(10\tau^2)^{\log_2 A}$ son no vacíos para $\varepsilon>0$.

Si $\nu_1<\nu_2$ entonces $\mathcal{A}(\nu_1)\subset\mathcal{A}(\nu_2)$. A veces, como en el contexto euclídeo, $\inf\{\nu:(X,d)\in\mathcal{A}(\nu)\}=1$. Sin embargo esta no es la situación general. Por ejemplo, si consideramos el subconjunto de los números reales dado por $X=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k-\frac{1}{2},2k+\frac{1}{2})$ con la restricción de la distancia Euclidea, el índice $\inf\{\nu:(X,d)\in\mathcal{A}(\nu)\}$ es igual a 3. Existen también espacios de tipo homogéneo (X,d,μ) en los cuales (X,d) no pertenece a ningún $\mathcal{A}(\nu)$, $\nu>1$. En efecto, como el subconjunto de los números reales $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2^n-\frac{1}{2},2^n+\frac{1}{2}]$ con la restricción a la distancia usual es completo, el resultado en [61] provee una medida μ en X que duplica con respecto a la restricción d de la distancia usual en $\mathbb{R}$ (ver también [47]). Así (X,d,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sin embargo, (X,d) no satisface $\mathcal{A}(\nu)$ para cualquier $\nu>1$. Notar que $A(2^n,1,\nu)=\{x\in X:1\leq|2^n-x|<\nu\}$ es vacío para n suficientemente grande que depende de ν.

Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo no acotado y no atómico tal que las d-bolas son conjuntos abiertos, con constantes geométricas τ y A. Sea K un núcleo de Markov simétrico definido en X. Sea s un número positivo dado. Podríamos definir ***s*-estabilidad** con parámetro $\alpha>0$ pidiendo que $\lim_{\delta(x,y)\to\infty}\delta(x,y)^{1+s}K(x,y)=\alpha$. En su lugar, introducimos una condición de alguna manera diferente para la estabilidad. Para

$R > 0$ diremos que $\boldsymbol{K \in \mathcal{S}(s, \alpha, R)}$ si la desigualdad

$$K(x,y) \leq \frac{\alpha}{\delta(x,y)^{1+s}} \tag{48}$$

vale para todo $x, y \in X$ tal que $\delta(x,y) > R$. Lo cual en términos de la estructura original en X podría refrasearse como $K(x,y) \leq C\frac{\alpha}{\mu(B_d(x,d(x,y)))^{1+s}}$ para alguna constante C y $\mu(B_d(x,d(x,y)))$ suficientemente grande.

Ahora introducimos el concepto de concentración para una familia uni-paramétrica de núcleos de Markov simétricos. Sea $\mathcal{K} = \{K_\alpha(x,y) : 0 < \alpha < 1\}$ una familia de núcleos de Markov simétricos definidos en (X, δ, μ). Diremos que $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ **concentra** (cuando α tiende a cero), y escribimos $\boldsymbol{\mathcal{K} \in \mathcal{C}}$, si para todo λ positivo $\int_{\delta(x,y)\geq\lambda} K_\alpha(x,y)d\mu(y)$ tiende a cero cuando $\alpha \to 0$ uniformemente en $x \in X$.

Finalmente, estamos en posición de enunciar y probar el resultado principal del capítulo.

Teorema 11.6. *Sea $(X, \delta, \mu) \in \mathcal{N}(\widetilde{\tau}, c_1, c_2)$. Supongamos que las funciones continuas son densas en $L^1(X, \mu)$. Sea $s > 0$ dado y sea $\mathcal{K} = \{K_\alpha : 0 < \alpha < 1\}$ una familia de núcleos de Markov simétricos en X tales que*

(a) $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_a(\gamma, H)$ *con* $\gamma < \frac{c_1}{c_2}$;

(b) $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{H})$ *con* $0 < \widetilde{\gamma} < \frac{1}{\widetilde{\tau}}$;

(c) existe $R > 0$ *tal que* $K_\alpha \in \mathcal{S}(s, \alpha, R)$ *para todo* $0 < \alpha < 1$.

Entonces

(i) $\mathcal{K} \in \mathcal{C}$;

(ii) $\mathcal{K}^*$ *es de tipo débil (1,1) y acotado en* $L^p(X, \mu)$ *para* $1 < p \leq \infty$;

(iii) $\int_X K_\alpha(x,y)f(y)d\mu(y) \to f(x)$ *cuando* $\alpha \to 0^+$ *para toda* $f \in L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Para probar *(i)*, fijamos $0 < \lambda < R$. Sea $\nu = \frac{1}{\gamma}$ y sea $A_j = A(x, \frac{R}{\nu^{j+1}}, \frac{R}{\nu^j})$ una sucesión de δ-anillos para $j \in \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{N}(\widetilde{\tau}, c_1, c_2) \subset \mathcal{A}(\nu)$, vemos que para todo entero j los anillos A_j son no vacíos y existen $y_1 \in A_j$ y $y_2 \in A_{j-1}$ tal que ambos y_1 e y_2 pertencen a un anillo $A(x, r, \nu r)$ para algún $r > 0$. Entonces, de la condición $\mathcal{H}_a(\gamma, H)$,

$$\sup_{y \in A_j} K_\alpha(x,y) \leq H \inf_{y \in A_j} K_\alpha(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq H K_\alpha(x, y_1)\\
&\leq H \sup_{y\in A(x,r,\nu r)} K_\alpha(x,y)\\
&\leq H^2 \inf_{y\in A(x,r,\nu r)} K_\alpha(x,y)\\
&\leq H^2 K_\alpha(x, y_2)\\
&\leq H^2 \sup_{y\in A_{j-1}} K_\alpha(x,y),
\end{aligned}
$$

y, por iteración y teniendo en cuenta la propiedad de estabilidad (48),

$$
\begin{aligned}
\sup_{y\in A_j} K_\alpha(x,y) &\leq H^2 \sup_{y\in A_{j-1}} K_\alpha(x,y)\\
&\leq (H^2)^2 \sup_{y\in A_{j-2}} K_\alpha(x,y)\\
&\leq (H^2)^{j+1} \sup_{y\in A_{-1}} K_\alpha(x,y)\\
&\leq H^{2(j+1)} \frac{\alpha}{R^{1+s}}.
\end{aligned}
$$

Ahora, para todo $y \in A(x,\lambda,R)$ con $\frac{R}{\nu^{j_0+1}} \leq \lambda < \frac{R}{\nu^{j_0}}$ ($j_0 \sim \log_\nu \frac{R}{\lambda}$), tenemos

$$
\begin{aligned}
K_\alpha(x,y) &= \sum_{j=0}^{j_0(R,\lambda)} K_\alpha(x,y)\mathcal{X}_{A_j}(y)\\
&\leq \frac{\alpha}{R^{1+s}} \sum_{j=0}^{j_0(R,\lambda)} H^{2(j+1)}\\
&= \frac{\alpha}{R^{1+s}} C(R,\lambda).
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\int_{\delta(x,y)\geq\lambda} K_\alpha(x,y)d\mu(y) &\leq \int_{\lambda\leq\delta(x,y)<R} K_\alpha(x,y)d\mu(y) + \alpha \int_{\delta(x,y)\geq R} \frac{d\mu(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}\\
&\leq \frac{\alpha}{R^{1+s}} C(R,\lambda)\mu(A(x,\lambda,R)) + C\frac{\alpha}{R^s}
\end{aligned}
$$

y para $\alpha \to 0^+$ obtenemos *(i)*, esto es, $\mathcal{K} \in \mathcal{C}$.

La propiedad *(ii)* se sigue del Teorema 11.1 por la propiedad de Harnack sobre bolas *(b)*. Por último, *(iii)* es consecuencia de argumentos estándar puesto que estamos suponiendo que las funciones continuas son densas en $L^1(X,\mu)$. $\square$

Apéndice A

Teoría de la medida

En este anexo se exponen brevemente los rudimentos de la teoría de la medida y de los espacios de Lebesgue, para una rápida consulta y de manera de uniformizar la notación.

Un *espacio de medida* (X, Σ, μ) está dado por un conjunto X y una medida μ definida en una σ-álgebra de subconjuntos medibles Σ. Se dice que un espacio de medida es σ-finito (o que la medida es σ-finita) si se puede expresar como unión a lo sumo numerable de conjuntos de medida finita. Cuando el espacio es $\mathbb{R}^n$ consideraremos de manera usual la σ-álgebra de Lebesgue $\mathscr{L}$ y la medida de Lebesgue. Referencias básicas sobre la construcción y propiedades de la medida de Lebesgue y otras propiedades de la teoría de la medida abstracta se encuentran en [**37**] o [**39**].

Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es *medible* si la pre-imagen de abiertos es un conjunto medible. Denotamos por $\mathscr{M}$ al conjunto de las funciones medibles. Operaciones básicas y límites de funciones medibles son funciones medibles. Una función es *simple* si es combinación lineal de características de conjuntos medibles, las funciones simples son en consecuencia funciones medibles. Además, toda función medible no negativa se alcanza como límite puntual de funciones simples. Dos funciones que coinciden excepto en un conjunto de medida nula se dice que son iguales en casi todo punto, y son indistinguibles en el sentido de la teoría de la medida.

La *integral de Lebesgue* de funciones medibles se define a partir de la integral de las funciones simples y haciendo un paso al límite. Se dice que una función es integrable si su integral está bien definida y es finita. La integral de una función medible no negativa está bien definida aunque no siempre es finita. Una función medible general es integrable si y sólo si es absolutamente integrable.

Dos teoremas básicos de paso al límite en la teoría de integración son los teoremas de convergencia monótona y de convergencia dominada.

Teorema A.1 (Convergencia monótona). *Sea* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $\{f_n\}$ *una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas definidas en* X*. Sea* f *el límite puntual de la sucesión* $\{f_n\}$*. Entonces,* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$*.*

Teorema A.2 (Convergencia dominada). *Sea* (X, Σ, μ) *un espacio de medida y* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones medibles definidas en* X*. Si toda* $|f_n|$ *está acotada superiormente por una función integrable* g *y* f_n *converge a* f *en casi todo punto, entonces* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$*.*

Dos teoremas clásicos sobre iteración de la integral son los teoremas de Fubini y de Tonelli. Dados dos espacios de medida σ-finitos (X, Σ, μ) e (Y, Γ, ν) se definen la σ-álgebra producto $\Sigma \times \Gamma$ como la menor σ-álgebra que contiene a los rectángulos de $X \times Y$ y la medida producto $\gamma = \mu \times \nu$ como la única medida σ-finita tal que para cada rectángulo medible $R = A \times B$ se verifica $\gamma(R) = \mu(A)\nu(B)$.

Teorema A.3 (Tonelli). *Sean* (X, Σ, μ) *e* (Y, Γ, ν) *dos espacios de medida* σ*-finitos. Sea* $f(x, y)$ *una función no negativa y medible con respecto a la* σ*-álgebra producto* $\Sigma \times \Gamma$*. Entonces*

(i) $f(x, \cdot)$ *es* Γ*-medible para cada* $x \in X$*;*

(ii) $f(\cdot, y)$ *es* Σ*-medible para cada* $y \in Y$*;*

(iii) las funciones $\int_Y f(\cdot, y) d\nu(y)$ *y* $\int_X f(x, \cdot) d\mu(x)$ *son* Σ *y* Γ *medibles, respectivamente;*

(iv)

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$
$$= \int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y).$$

Teorema A.4 (Fubini). *Sean* (X, Σ, μ) *e* (Y, Γ, ν) *dos espacios de medida* σ*-finitos y* $f(x, y)$ *una función integrable en el espacio producto* $(X \times Y, \Sigma \times \Gamma, \mu \times \nu)$*. Entonces*

(i) para casi todo x*, la función* $f(x, \cdot)$ *es una función integrable en* (Y, Γ, ν)*;*

(ii) para casi todo y*, la función* $f(\cdot, y)$ *es una función integrable en* (X, Σ, μ)*;*

(iii) las funciones $\int_Y f(\cdot, y) d\nu(y)$ *y* $\int_X f(x, \cdot) d\mu(x)$ *son funciones integrables en* X *e* Y*, respectivamente;*

(iv)

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\nu)(x,y) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$
$$= \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x).$$

Otros resultados útiles son la desigualdad de Chebyshev y la continuidad de la integral de Lebesgue.

Teorema A.5 (Chebyshev). *Sea f una función medible y no negativa. Si E es un conjunto medible y $\lambda > 0$ entonces*

$$\mu\{x\in E\colon f(x)>\lambda\} \leq \frac{1}{\lambda}\int_E f d\mu.$$

Teorema A.6. *Sea f una función integrable en (X,Σ,μ). Entonces $\int_A f d\mu \to 0$ cuando $\mu(A)\to 0$.*

Cambio de variables en $\mathbb{R}^n$. Sean G y H dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\Phi\colon G\to H$ una aplicación biyectiva y continuamente diferenciable en G ($\Phi\in\mathscr{C}^1(G)$) con determinante jacobiano distinto de cero en G, con lo cual existe la aplicación inversa y verifica $\Phi^{-1}\in\mathscr{C}^1(H)$. Denotando por $\Phi'(x) = D\Phi(x)$ a la matriz jacobiana y por $J(x) = |\det(\Phi'(x))|$ al valor absoluto del determinante jacobiano, se tiene el siguiente

Teorema A.7 (Cambio de variables en $\mathbb{R}^n$). *Si f es una función medible en H y no negativa, entonces $f\circ\Phi$ es medible en G y además*

$$\int_H f(y)dy = \int_G (f\circ\Phi)(x)J(x)dx.$$

Corolario A.8. *La función f medible en H es integrable si y sólo si $(f\circ\Phi)(x)J(x)$ es integrable sobre G y, en tal caso, $\int_H f(y)dy = \int_G(f\circ\Phi)(x)J(x)dx$.*

Como una aplicación del teorema de cambio de variables se deduce una útil fórmula de integración en coordenadas polares para funciones radiales en $\mathbb{R}^n$. Una función f es radial si existe una función φ definida en la semirrecta real no negativa tal que $f(x) = \varphi(|x|)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$. Denotemos por ω_n al área de la superficie de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$.

Teorema A.9 (Integración en coordenadas polares de funciones radiales en $\mathbb{R}^n$).

Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función radial, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \omega_n \int_0^\infty r^{n-1}\varphi(r)dr.$$

Espacios de Lebesgue. Dado (X,Σ,μ) un espacio de medida y $p \in [1,\infty)$ se denota y define al espacio de Lebesgue de orden p por

$$L^p = L^p(X,\Sigma,\mu) = \left\{ f \text{ medible} \colon \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Con la norma $\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/n}$, el espacio L^p es de Banach. En particular el espacio L^2 es también un espacio de Hilbert. Para $E \subset X$ se define $L^p(E) = \left\{ f \text{ medible} \colon \int_E |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \right\}$.

Decimos que una función está esencialmente acotada si existe M positivo y finito tal que $|f(x)| \le M$ en casi todo punto. Se define el espacio L^∞ de las funciones esencialmente acotadas, que dotado con la norma $\|f\|_\infty = \operatorname{ínf}\{M > 0\colon\ |f(x)| \le M \text{ en casi todo punto}\}$ es también un espacio de Banach.

Como ya mencionamos, el conjunto de funciones simples es denso en el conjunto de funciones medibles y, por lo tanto, es denso en L^p para todo $1 \le p \le \infty$. En $\mathbb{R}^n$, se demuestra además que el conjunto de las funciones escalera (combinaciones lineales de características de intervalos) es denso en L^p para todo $1 \le p < \infty$, pero no en L^∞. Más aún, se tiene el siguiente resultado

Teorema A.10. *El conjunto* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ *de las funciones continuas de soporte compacto es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $1 \le p < \infty$*. En* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *este resultado no es cierto.*

Si $1 < p < \infty$ el número p' para el cual $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ se llama el exponente conjugado de p, luego también $1 < p' < \infty$. Para $p = 1$ se define $p' = \infty$ y viceversa.

Teorema A.11 (Hölder). *Sean* $f \in L^p$ *y* $g \in L^{p'}$*, con* $1 \le p \le \infty$*. Entonces*

$$\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \le \|f\|_p \|g\|_{p'} \, .$$

La desigualdad triangular de las normas se conoce como Teorema de Minkowski.

Teorema A.12 (Minkowski). *Sean* $f, g \in L^p$*,* $1 \le p \le \infty$*. Entonces*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Los siguientes teoremas resultan de utilidad.

Teorema A.13 (Módulo de continuidad). *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \leq p < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{|h| \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0.$$

Teorema A.14 (Minkowski integral). *Sea* f *una función medible en* $X \times X$ *y* $1 \leq p < \infty$. *Entonces*

$$\left(\int \left| \int f(x,y) d\mu(x) \right|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leq \int \left(\int |f(x,y)|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p} d\mu(x).$$

A continuación se define punto de Lebesgue y se enuncia el teorema de diferenciación de Lebesgue en el contexto general de los espacios de tipo homogéneo (ver la Sección 1.2 en el Capítulo 1), lo cual engloba al caso en espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ con la medida usual.

Definición A.1. Dada f una función localmente integrable definida en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), decimos que $x \in X$ es un *punto de Lebesgue* de f si existe un número real $\widetilde{f}(x)$ tal que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \left| f(y) - \widetilde{f}(x) \right| d\mu(y) = 0.$$

Se denota al conjunto de puntos de Lebesgue de una función $f \in L^1_{\text{loc}}$ por $\mathscr{L}(f)$. Notar que el conjunto de puntos de Lebesgue de una función no se modifica por un cambio de métrica equivalente.

Teorema A.15 (de diferenciación de Lebesgue).

Sea (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo tal que las funciones continuas son densas en* L^1. *Sea* f *una función localmente integrable definida en* X. *Entonces casi todo punto* $x \in X$ *es un punto de Lebesgue de* f. *Más aún,* $\widetilde{f}(x) = f(x)$ *en casi todo punto.*

Definición A.2. El conjunto de *puntos de diferenciación* de f se denota y define por

$$\mathscr{D}(f) = \left\{ x \in X \colon \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \, d\mu(y) = f(x) \right\}.$$

Notar que casi todo punto de Lebesgue es punto de diferenciación, en particular cuando $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Conclusiones generales

- ✓ Probamos que, como la gaussiana, los núcleos que guían a las difusiones fraccionarias diádicas son atractores de sucesiones de iteración y molificación de núcleos de Markov diádicos y estables.
- ✓ Las wavelets, en este caso las de Haar, son buenos sustitutos de la transformada de Fourier, en cuanto que funciones característica de variables aleatorias, para el análisis de centralidad y concentración en contextos diádicos.
- ✓ Se obtienen condiciones suficientes, en términos de la estabilidad, para la concentración hacia la certidumbre como alternativa a la centralidad y la disipación.
- ✓ Se obtienen aproximaciones de la identidad por familias de núcleos de convolución de Cauchy-Poisson en $\mathbb{R}^n$ y de Lévy en $\mathbb{R}$, donde los índices de estabilidad pueden degenerar en el límite a un ritmo determinado.
- ✓ Propiedades combinadas de estabilidad y Harnack resultan condiciones suficientes para obtener aproximaciones de la identidad por familias de núcleos de Markov en espacios euclídeos. Estos resultados se extienden de manera natural a espacios de tipo homogéneo.

Bibliografía

1. Marcelo Actis, *Difusiones no locales y operadores de derivación fraccionaria en espacios métricos de medida*, Tesis doctoral, FIQ - Universidad Nacional del Litoral, IMAL, CONICET, 2014. Disponible en http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/tesis/handle/11185/552.
2. Marcelo Actis and Hugo Aimar, *Dyadic nonlocal diffusions in metric measure spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. **18** (2015), no. 3, 762–788. MR 3351499
3. ———, *Pointwise convergence to the initial data for nonlocal dyadic diffusions*, Czechoslovak Math. J. **66(141)** (2016), no. 1, 193–204. MR 3483232
4. Marcelo Actis, Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez, *Nonlocal Schrödinger equations in metric measure spaces*, J. Math. Anal. Appl. **435** (2016), no. 1, 425–439. MR 3423406
5. Hugo Aimar, *Distance and Measure in Analysis and PDE*, Preprint.
6. ———, *Operadores integrales singulares y aproximaciones de la identidad en espacios de tipo homogéneo*, Tesis doctoral, FCEyN - Universidad Nacional de Buenos Aires, PEMA - INTEC, 1983. Disponible en http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/TesisIMAL/tesisAimarH.pdf.
7. ———, *Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), no. 1, 135–153. MR MR805957 (86m:42022)
8. Hugo Aimar, Gastón Beltritti, and Ivana Gómez, *Improvement of Besov regularity for solutions of the fractional Laplacian*, Constr. Approx. **41** (2015), no. 2, 219–229. MR 3315676
9. Hugo Aimar, Ana Bernardis, and Bibiana Iaffei, *Multiresolution approximations and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*, J. Approx. Theory **148** (2007), no. 1, 12–34. MR 2356573 (2008h:42056)
10. Hugo Aimar, Ana Bernardis, and Luis Nowak, *Dyadic Fefferman-Stein inequalities and the equivalence of Haar bases on weighted Lebesgue spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **141** (2011), no. 1, 1–21. MR 2773436 (2012b:42035)
11. ———, *Equivalence of Haar bases associated with different dyadic systems*, J. Geom. Anal. **21** (2011), no. 2, 288–304. MR 2772074 (2012a:42070)
12. Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez, *On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data*, J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34. MR 3063102
13. Hugo Aimar, Marilina Carena, and Bibiana Iaffei, *Discrete approximation of spaces of homogeneous type*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 1, 1–18. MR 2465294

14. Hugo Aimar, Ivana Gómez, and Federico Morana, *The dyadic fractional diffusion kernel as a central limit*, Czechoslovak Math. J. (2017). En prensa. Disponible en http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints/2017-0038.pdf.
15. ______, *Heavy tailed approximate identities and σ-stable Markov kernels*, Potential Anal. (2017). En prensa. Disponible en http://www.imal.santafe-conicet.gov.ar/publicaciones/preprints/2017-0037.pdf.
16. Hugo Aimar and Roberto Scotto, *On weighted averages of random variables*, Rev. Un. Mat. Argentina **39** (1995), no. 3-4, 173–183. MR 1376793 (97a:60047)
17. David Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 116, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. MR 2512800
18. Patrice Assouad, *étude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans* $\mathbf{R}^n$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **288** (1979), no. 15, A731–A734. MR 532401
19. Gastón Beltritti, *Fómulas de valor medio en transporte anómalo y aplicaciones*, Tesis doctoral, FIQ - Universidad Nacional del Litoral, IMAL, CONICET, 2015.
20. Jean Bertoin, *Lévy Processes*, Part of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
21. Patrick Billingsley, *Probability and measure*, third ed., Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, A Wiley-Interscience Publication. MR 1324786 (95k:60001)
22. R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 263–273. MR 0119247
23. S. Bochner and K. Chandrasekharan, *Fourier Transforms*, Annals of Mathematics Studies, no. 19, Princeton University Press, Princeton, N. J.; Oxford University Press, London, 1949. MR 0031582
24. Claudia Bucur and Enrico Valdinoci, *Nonlocal diffusion and applications*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 20, Springer, [Cham]; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016. MR 3469920
25. D. L. Burkholder, R. F. Gundy, and M. L. Silverstein, *A maximal function characterization of the class H^p*, Trans. Amer. Math. Soc. **157** (1971), 137–153. MR 0274767 (43 #527)
26. Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260. MR 2354493 (2009k:35096)
27. Calixto Calderón, *Unidades aproximantes y sumas de variables aleatorias independientes*, Exp. 266, Jornadas de Comunicaciones Técnico-Científicas, UNL y CONICET, Santa Fe (1983).
28. Calixto P. Calderón and Wilfredo O. Urbina, *Some non standard applications of the Laplace method*, Special functions, partial differential equations, and harmonic analysis, Springer Proc. Math. Stat., vol. 108, Springer, Cham, 2014, pp. 41–47. MR 3297653
29. Michael Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloq. Math. **60/61** (1990), no. 2, 601–628. MR 1096400 (92k:42020)

30. Ole Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003. MR 1946982 (2003k:42001)
31. Kai Lai Chung, *A course in probability theory*, third ed., Academic Press, Inc., San Diego, CA, 2001. MR 1796326
32. Ronald R. Coifman and Guido Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Étude de certaines intégrales singulières. MR 0499948
33. ______, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no. 4, 569–645. MR 0447954
34. Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. MR 1162107 (93e:42045)
35. Miguel de Guzmán, *Real variable methods in Fourier analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 46, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 75. MR 596037 (83j:42019)
36. Javier Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. MR 1800316 (2001k:42001)
37. N.A. Fava and Felipe Zó, *Medida e integral de Lebesgue*, Colección Textos Universitarios, Instituto Argentino de Matemática, 1996.
38. William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971. MR 0270403
39. Gerald B. Folland, *Real analysis*, second ed., Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 1681462
40. José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. MR 807149 (87d:42023)
41. B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for sums of independent random variables*, Translated from the Russian, annotated, and revised by K. L. Chung. With appendices by J. L. Doob and P. L. Hsu. Revised edition, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills., Ont., 1968. MR 0233400
42. Shizuo Kakutani, *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 706–714. MR 0014647 (7,315b)
43. John L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975, Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27. MR 0370454
44. A. I. Khintchine and P. Lévy, *Sur les lois stables*, C. R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 374–376.

45. Michel Loève, *Probability theory. I*, fourth ed., Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 45. MR 0651017 (58 #31324a)
46. ———, *Probability theory. II*, fourth ed., Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 46. MR 0651018 (58 #31324b)
47. Jouni Luukkainen and Eero Saksman, *Every complete doubling metric space carries a doubling measure*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 2, 531–534. MR 1443161
48. P. Lévy, *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
49. ———, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
50. Roberto A. Macías and Carlos Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), no. 3, 257–270. MR 546295
51. Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs. I*, Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics], Hermann, Paris, 1990. MR 93i:42002
52. E. Mordecki and V.V. Petrov, *Teoría de probabilidades*, Libros de ciencia, URSS, 2003.
53. Peter Mörters and Yuval Peres, *Brownian motion*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, With an appendix by Oded Schramm and Wendelin Werner. MR 2604525 (2011i:60152)
54. Karl Endel Petersen, *Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation*, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977, London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 28. MR 0651556 (58 #31383)
55. G. Polya, *On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral*, Messenger of Math. **52** (1923), 185–188.
56. Luis Enrique Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2005, Thesis (Ph.D.)–The University of Texas at Austin. MR 2707618
57. Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. MR 44 #7280
58. ———, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III. MR 1232192 (95c:42002)
59. Elias M. Stein and Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. MR 46 #4102
60. P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR 1436437
61. Jang-Mei Wu, *Hausdorff dimension and doubling measures on metric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 5, 1453–1459. MR 1443418
62. J. Yeh, *Stochastic processes and the Wiener integral*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973, Pure and Applied Mathematics, Vol. 13. MR 0474528 (57 #14166)

63. Felipe Zo, *A note on approximation of the identity*, Studia Math. **55** (1976), no. 2, 111–122. MR 0423013

64. A. Zygmund, *Trigonometric series. Vol. I, II*, third ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, With a foreword by Robert A. Fefferman. MR 1963498 (2004h:01041)