Dificultades de los estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función

Tulio Amaya De Armas
Corporación Universitaria del Caribe (Colombia)
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (Argentina)

Resumen: *Tradicionalmente, ha sido problemático el aprendizaje del concepto de función. En este trabajo se reportan los hallazgos de una investigación en donde se analizaron las dificultades presentadas por estudiantes de once grado al hacer transformaciones de representaciones de una función, con el registro tabular como registro principal. Para recoger la información se aplicó un cuestionario, con una situación que involucra el concepto de función. Las dificultades estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos. Fue posible apreciar que los estudiantes no reconocen el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas.*

Palabras clave: *registros semióticos de representación, coordinación entre registros, conversión, tratamiento, función.*

Difficulties of students from elevend grade to make changes of representations of a function

Abstract: *Traditionally, the learning of the concept of function has been problematic. In this paper we report the findings of an investigation which analyzed the difficulties presented by grade eleven students to make transformations of representations of a function, with tabular register as primordial one. To collect the information a questionnaire was applied with a situation involving the concept of function. The difficulties were related to the identification of the content of the representations, the operation of registers and the coordination between them. It was possible to identify that students do not recognize as a valid support the tabular register to support their answers.*

Keywords: *semiotic registers of representation, coordination between registers, conversion, treatment, function.*

INTRODUCCIÓN

Al analizar lo propuesto en los estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) frente a los resultados de las investigaciones respecto a la conceptualización de la noción de función (Cordero, 1997; Dolores, 2004; Gatica et al., 2010; Hitt, 2000, 2003a, 2003b), se evidencia una descompensación en el abordaje dado a este concepto a través de diferentes registros semióticos de representación, lo que podría dificultar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes. Esta descompensación lleva al alumno a cometer errores y los errores, si no son resignificados apropiadamente, pueden conducir el proceso de aprendizaje por un camino equivocado, ya que los estudiantes se pueden acostumbrar a ellos y no distinguir lo adecuado de lo inadecuado. Incluso, por acumulación de malas experiencias, pueden llevar a los sujetos a no permitirse conflictos cognitivos, por lo que en estas condiciones sería difícil la adquisición de conocimientos (Amaya, 2010).

Además, uno de los conceptos básicos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo es, sin duda, el de función. Asimismo, numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Benítez, 2010; D'Amore, 2006; Ochoviet y Oktaç, 2011; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008) han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas a la construcción de este concepto (Del Castillo, 2003). Una de estas dificultades, según Duval (2004), es el tránsito entre diferentes registros de representación; esto es, identificar elementos en un registro de partida y encontrar su equivalente en un registro de llegada. En particular, Duval (2012a) considera que, a diferencia de otras ciencias, el acceso al objeto de estudio en matemáticas es exclusivamente semiótico y que toda actividad matemática consiste en la transformación de representaciones semióticas –producciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de referencia, el cual tiene sus propias reglas de significación y de funcionamiento–.

De lo anterior se puede deducir que este proceso de transformación de representaciones es esencial en el aprendizaje de las matemáticas, ya que la única forma de acceder a los conocimientos matemáticos es a través de las representaciones semióticas (Hitt, 2003a). Las representaciones en diferentes registros se complementan, es decir, ningún sistema de representación puede producir una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado, por lo que el recurso a varios registros se considera condición necesaria para la conceptualización (Del Castillo, 2003). Esto se debe, según Duval (1999), a que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a las representaciones semióticas. En este sentido se ha fortalecido la idea de que cuando se usan en la enseñanza de las matemáticas actividades didácticas que favorecen la utilización y articulación entre diferentes registros, el aprendizaje resulta beneficiado.

Se evidencia así que un sistema de representación coopera en la construcción de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput, 1989). También pone en evidencia la importancia de que los alumnos conecten los diferentes sistemas semióticos de representación con los elementos del medio sociocultural donde se desempeñan.

El presente estudio se centra en el análisis de las transformaciones entre representaciones que realizan estudiantes colombianos de 15-17 años de edad. Se caracterizan sus dificultades, tanto con la identificación del contenido de la representación de partida como con el funcionamiento de los registros en los que se hacen las representaciones y la coordinación entre ellos, en el tema funciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En las últimas décadas las investigaciones en Educación Matemática han tenido un importante desarrollo, presentándose algunos acuerdos entre administradores educativos y grupos de investigadores, quienes a su vez han sentado algunas sugerencias sobre el tipo de problemas que se debe utilizar en matemáticas -que despierten el interés de los alumnos y favorezcan su aprendizaje-, la forma de organizar las secuencias de actividades utilizadas en clase de matemáticas y la necesidad de analizar las producciones de los estudiantes -para utilizar sus dificultades de comprensión en beneficio de su propio aprendizaje-. Este trabajo se encuadra en esto último.

En particular, los contextos de representación usados en la actividad matemática surgen como hilo de enlace que permite proponer problemas interesantes a través de los cuales analizar las dificultades de comprensión de los estudiantes –a través de, por ejemplo, sus errores conceptuales– y usarlos para mejorar sus procesos de aprendizaje.

En relación con el tipo de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) considera fundamental que se los enfrente a actividades que constituyan un reto para su curiosidad, que los estimulen a usar sus presaberes, a investigar lo que desconozcan y a analizar los contenidos estudiados. Específicamente, el Ministerio de Educación Nacional (2005) considera indispensable el estudio de patrones, nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, el cual tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos o algebraicos. Tiene como propósito construir distintos acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos así como del cálculo numérico y algebraico. Además, cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana. Su estudio se inicia con la detección de los criterios que rigen regularidades o reglas de formación, para identificar la unidad que se repite periódicamente dando lugar a un patrón.

El tipo de actividades sugeridas por el *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) y el análisis de secuencias y patrones recomendado por el Ministerio de Educación Nacional (2005) pueden desarrollar en los estudiantes la capacidad para identificar o construir un patrón de regularidad y la capacidad para reproducirlo en diferentes registros, por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula. Según Del Castillo (2003), este proceso de establecer congruencias es condición necesaria para la comprensión de un concepto matemático.

El análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes invocando sus concepciones es indispensable para ayudarlos a entender el tema que se esté estudiando, para lo que es necesario analizar sus errores conceptuales. Al respecto, Godino, Font y Batanero (2003) mencionan:

> (…) hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja (p.69).

Este planteamiento implica concebir la práctica curricular y evaluativa como un seguimiento permanente al proceso de adquisición de conocimientos. El error se constituye en una vía natural de acceso al conocimiento, una manifestación de un proceso constructivo que se debe encauzar y orientar de tal manera que el que aprende se termine beneficiando.

Por otro lado están los contextos de representación usados en la actividad matemática. Duval (2004) considera prioritarias las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, como base en un proceso de comunicación que busca saber cómo puede ser codificado/decodificado un objeto matemático para poder ser comprendido por alguien. Según este autor, todo progreso de conocimiento en matemáticas pasa por este trabajo de transformación. Distingue dos tipos de transformaciones: el *tratamiento*, que es una transformación estrictamente interna en un registro determinado, con cierta homogeneidad en las representaciones producidas, donde la producción se hace como si cada representación fuera autosuficiente, y la *conversión*, que es una transformación de un objeto de un registro a otro, es decir, es aquella en la que la representación se pone en paralelo con otra representación de otro registro.

La conversión de un registro a otro puede resultar congruente o no; es decir, el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede hacerse en un sentido y no hacerse en el otro. Además, las representaciones de un mismo objeto pueden resultar heterogéneas; esto es, el contenido de una representación en un registro dado puede ser sustancialmente diferente al contenido de otra representación en otro registro. Para Duval (2004), si se quieren comprender los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es necesario tomar en cuenta muy seriamente esta heterogeneidad, estableciéndose así la necesidad de utilizar más de una representación para acceder al conocimiento matemático y de conocer la proveniencia de las transformaciones; es decir, si provienen de un tratamiento o de una conversión, que permita un análisis cognitivo de las dificultades en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un esquema de símbolos que contiene correspondencias especiales (Kaput, 1987). Los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos. El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa para representar otro sistema de símbolos que exhibe una autosimilitud cuando se amplifica (Meel, 2003). Es así que, a través de las representaciones externas de un objeto matemático y las relaciones entre ellas, es posible estructurar nuevas representaciones que pueden tener connotaciones diferentes a las que les dieron origen.

Entre las tantas representaciones que permite una función, está la representación analítica, la cual a su vez puede asumir varias formas: *algebraica*, consistente en una fórmula que permite modelar la situación en juego; *polinomio aritmético*, como resultado de reemplazar un valor numérico en un registro algebraico; *secuencia*, que permite determinar el patrón de regularidad o de crecimiento de una función. Otra de las representaciones semióticas de una función es la *tabular*, en la que se parte de una tabla y se ubican las entradas de tal forma que el número de columnas (o filas, según se ordenen) corresponde al total o gran parte de las cantidades que intervienen en la situación, que vienen a ser los elementos que constituyen la función en ese registro.

Al respecto, diversas investigaciones (Amaya, 2010; Carrión, 2007; Dolores, 2004; León y Corredor, 2003) han tratado de identificar los problemas más comunes en el aprendizaje de las matemáticas, a través del análisis de las producciones de los estudiantes, sus procedimientos espontáneos, sus errores y sus incomprensiones. Han intentado dilucidar elementos acerca de su funcionamiento cognitivo y proponer formas para mejorar la adquisición de habilidades que permitan a los alumnos acceder con mayor facilidad a los conceptos. Comprender matemáticas se manifiesta a través de habilidades a disposición y transferibles a diversos espacios de razonamiento en y sobre la realidad. Para Meel (2003), comprender en matemáticas significa saber qué hacer y por qué se debe hacer algo con un concepto matemático en el momento que se requiera utilizarlo, lo que proporciona vías para la transferencia y extracción de información desde la memoria del estudiante. Esta idea está relacionada con la manera como se construyen conceptos o redes conceptuales, vinculados a una serie de procesos cognitivos en relación con representaciones simbólicas; esto es, a la significación que un individuo le atribuye a un objeto matemático al vincular las representaciones internas y externas con una situación contextual.

Según Hitt (2000), una idea matemática -o procedimiento o hecho- es entendida si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. En este sentido, la adquisición de un concepto por parte de un individuo se dará cuando coordine por lo menos dos de sus representaciones. Esto tiene que ver, según Duval (1999), con la articulación entre sus representaciones semióticas. U*n concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto.* Para Meel (2003), estos mecanismos producen significados y, por lo tanto, desarrollan comprensión para el estudiante por medio de la creación de nuevos vínculos entre los sistemas de representación o los elementos de reorganización dentro de un sistema de representación.

De lo anterior se reconoce que la comprensión de un objeto matemático se hace por medio de las representaciones semióticas, lo cual se basa en la ley fundamental del funcionamiento cognitivo de Duval (1999): no hay noesis sin semiosis. Se manifiesta a través de la soltura en la actividad cognitiva de conversión. De aquí cabe destacar el papel de las representaciones semióticas como andamio en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Se basan en tratamientos y conversiones entre registros, que permiten conexiones entre los elementos de una red (el concepto) así como de la estructura cognitiva (como un todo). Según Duval (2004), en matemáticas, poder cambiar de sistema de representación es una exigencia cognitiva absolutamente necesaria y fundamental, porque el acceso a los conocimientos matemáticos requiere la integración en una arquitectura cognitiva de los sistemas semióticos de representación. De hecho "se cree que la familiarización progresiva con un nuevo tipo de representación provoca de manera casi natural el pasaje de este tipo de representación a los tipos de representación anteriormente utilizados" (Duval, 2004, p.30).

Además, Duval (2012b) considera que las diferencias que separan las matemáticas de otros campos del conocimiento provienen del modo de acceso a los objetos estudiados: en matemáticas se hace por medio de la producción de representaciones semióticas y no por la percepción o la utilización de instrumentos, como ocurre en otras ciencias.

> Esto nos permitirá inferir tres ideas clave para describir el modo de funcionamiento cognitivo que caracteriza al pensamiento matemático. (1) Los registros son los sistemas productores de representaciones semióticas. (2) La comprensión en matemáticas moviliza siempre implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros. (3) Cada registro abre un campo de transformación de las representaciones, y por lo tanto, posibilidades de tratamiento matemático que le son propias (p.15).

Duval (2004) considera que el reto de la enseñanza para la formación inicial no es tanto la adquisición de tal o cual conocimiento matemático, sino -a través de ello- el desarrollo de las capacidades de pensamiento del alumno. El desarrollo de estas capacidades depende de adquisiciones funcionales de diferentes sistemas que se requieren para la comprensión de todos los conocimientos que él deberá adquirir, no solamente en la escuela, sino después de ella. Por estar en un mundo en el cual ningún individuo puede aprender de antemano lo que le será profesional o humanamente útil, el reto de la enseñanza en la formación inicial es dar al estudiante los medios para comprender y aprender por él mismo. Al respecto, la UNESCO (2005) considera que la escuela, como responsable tradicional de la educación de los miembros de una sociedad, debe bregar para que estos adquieran una formación básica que les permita aprender a aprender, y hacerlo continua, sistemática y permanentemente. Lo que está en juego, según Duval (2012a), es el desarrollo de la autonomía intelectual de los estudiantes. Desde esta perspectiva es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación de los alumnos.

METODOLOGÍA

Se asume un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010), bajo un enfoque cualitativo de tipo empírico (Bravin y Pievi, 2008). Las transformaciones entre registros, tanto tratamientos como conversiones, se constituyeron en las categorías de análisis de la investigación. Se desarrolló en tres etapas fundamentales:

a) Revisión documental: consistió en una búsqueda bibliográfica a fin de obtener antecedentes de investigaciones y fundamentar a nivel teórico lo relativo a las dificultades de los estudiantes con las transformaciones de representaciones del concepto de función.
b) Diseño y aplicación de instrumentos: se elaboraron, adecuaron y pusieron en marcha los protocolos empleados en la investigación.
c) Obtención y análisis interpretativo de resultados: teniendo en cuenta el desempeño estudiantil en las transformaciones entre registros del contenido función, se procesó la información recabada y se avanzó hacia la discusión de los hallazgos.

Los informantes fueron 50 estudiantes (E_n, con n = 1, 2, 3, …, 50) de undécimo grado de la media académica de una escuela pública colombiana, con edades entre 15 y 17 años, en un curso ordinario de pre-cálculo previo al ingreso a la universidad. Para este trabajo el desempeño fue de manera individual.

En una investigación más amplia, en la que se inscribe este trabajo, se utilizaron cuatro tipos de técnicas: cuestionarios escritos con preguntas abiertas, observación participante, entrevistas semiestructuradas y grupos de discusión. En cuanto a los cuestionarios, cabe señalar que se aplicó un total de seis, cada uno involucrando una situación problemática. Aquí se comparten los resultados relativos a una de las situaciones, en la que se consideró al registro tabular como registro principal. Los contenidos matemáticos requeridos ya habían sido desarrollados en el curso.

La situación presentada está constituida por ocho cuestiones a resolver:

En la siguiente tabla se muestran los costos de producción de una empresa de discos compactos.

Número de discos	*Costo (en dólares)*
1000	*116000*
2000	*128000*
3000	*140000*
5000	
6100	
	224000
15000	
72000	

1) *Termina de llenar la tabla.*
2) *Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente.*
3) *Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2).*
4) *¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?*
5) *¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?*
6) *Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?*
7) *Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos.*
8) *Realiza una gráfica que represente esta situación.*

Para procesar la información se analizaron las resoluciones de los estudiantes para cada categoría de análisis, atendiendo tanto a los tratamientos como a las conversiones empleadas. Se empleó la técnica de análisis del contenido (Ander-Egg, 2003) para estudiar el contenido manifiesto de las producciones escritas al abordar las cuestiones planteadas. Se agruparon las resoluciones con respuestas similares y se fue registrando en una matriz de datos el porcentaje de alumnos de cada grupo así como las características de los procedimientos llevados a cabo, ejemplificando en algunos casos con el de algún estudiante en particular.

RESULTADOS

En lo que sigue se describen algunas características de los desempeños estudiantiles al realizar transformaciones de registros en la resolución de la situación planteada.

Cuestión 1. "Termina de llenar la tabla".

Una característica de las resoluciones del 92% de los estudiantes fue el paso previo al registro analítico-aritmético, donde realizaron las operaciones que consideraron pertinentes, para el llenado de la tabla. Es decir, primero hicieron una conversión, utilizando el registro analítico-aritmético como registro auxiliar. Realizadas las operaciones (transformaciones tipo tratamientos) en este registro, volvieron a hacer otra conversión, al registro tabular como registro principal, y entonces procedieron a llenar la tabla (Fig. 1). Realizaron un tratamiento en cierto sentido sin autosuficiencia, necesitando de la articulación con el registro analítico-aritmético como registro auxiliar para poder funcionar. Sin embargo, teniendo en cuenta que ningún sistema de representación produce una representación cuyo contenido sea del todo completo y adecuado al objeto representado (Del Castillo, 2003), el recurso a otros registros podría considerarse oportuno y hasta conveniente, quedando la inquietud acerca de las reglas compartidas entre los registros en juego.

Número de discos	Costo (en dólares)
1000	116000
2000	128000
3000	140000
5000	152.000
6100	164.000
14.250	224000
15000	236.000
72000	-60.000

116.000
-128.000
12.000
+140.000
152.000

Figura 1. Tabla completada por el estudiante E_8

Particularmente E_8 parece asumir de inmediato un modelo lineal afín de la situación. Encuentra la diferencia entre las dos primeras entradas (omitiendo signos) para conocer la constante de proporcionalidad directa (12000) cada 1000 unidades (discos). Procede a adicionar 12000 a filas consecutivas posteriores de la columna "costo", sin detenerse demasiado a observar el incremento correspondiente en la cantidad de discos (pues en las tres primeras filas el incremento de discos es de a 1000 unidades, pero en la cuarta fila el incremento es de 2000 discos y en la siguiente es de 1100). En concordancia con lo planteado por Carrión (2007), en la resolución de E_8 se advierten errores tanto en la ubicación de las cantidades con las que se opera como en la escritura matemática implicada.

Cuestión 2. "Determina el costo de 5500 discos y de 14500 discos respectivamente".

En su mayoría los estudiantes se percataron de que el incremento en el costo de producción era un múltiplo de 12. Sin embargo, al variarles el incremento en la cantidad de discos de 1000 a 100, no hicieron el cambio de 12000 a 1200 en los costos. Esto les impidió seguir un patrón para cualquier cantidad de discos.

Precisamente el 72% de los estudiantes identificó el patrón de regularidad y de crecimiento de la situación; sin embargo solo el 8% lo utilizó adecuadamente. El 12% empleó los datos de la tabla y los modificó con información que se puede deducir de la situación, pero que no aparece explícita en la tabla que se les pide llenar. El 6% de los estudiantes encontró el costo para producir cada disco si no se tuvieran costos fijos y lo utilizó para dar su respuesta. El resto trató de encontrar este valor, pero haciendo una regla de tres simple directa, sin excluir los costos fijos de producción y sin llegar a la respuesta pedida. Es así que se evidencian múltiples interpretaciones de la situación, y aunque no todas ellas son adaptadas a esta, sí muestran rasgos característicos genuinos del concepto de función; lo que según Gallardo, González y Quintanilla (2013) es un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto.

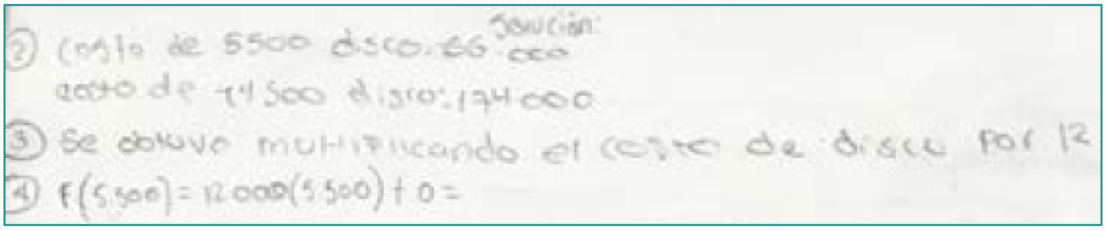


Figura 2. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E12

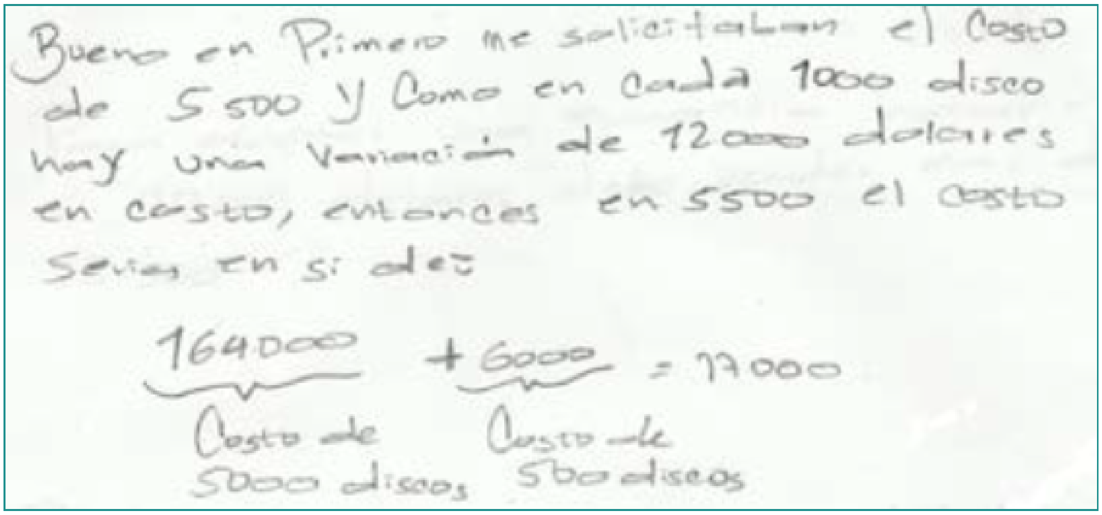
Cuestión 3. "Explica cómo obtuviste la respuesta a la pregunta 2)".

Fueron notorias las dificultades de los estudiantes al intentar describir los procesos realizados: el 36% realizó de manera adecuada los procedimientos y solo el 16% los describió correctamente, el 32% describió correctamente un procedimiento errado y los restantes (32%) no pudieron ni con el proceso ni con su descripción. Al tratar de explicar los procedimientos que siguieron para obtener sus respuestas, lo que hicieron fue repetir lo realizado anteriormente, acorde a lo reportado por Amaya y Barrera (2009). En las explicaciones dadas por los estudiantes se evidencian dificultades al pasar de cualquier registro de representación al del lenguaje materno (coloquial); es decir, esta conversión le resultó problemática a un grupo considerable de estudiantes. Esto coincide con los hallazgos de Caligaris, Schivo, Romiti y Sgreccia (2013), en este caso, en el ingreso a la universidad.

Un ejemplo de esta situación se muestra en la Fig. 2, donde el estudiante E_{12} manifestó que hizo algo que en realidad no es lo que se ve que hizo. Al resolver un polinomio aritmético dice que multiplicó por 12, cuando en realidad lo hizo por 12000. Los resultados de su resolución no coinciden con lo que le daría haciendo lo que dice que hizo (cuyos resultados sí serían válidos).

Sin embargo, al validar esta respuesta en un grupo de discusión, el estudiante da muestra de que su comunicación escrita fue la inadecuada, porque en su oralidad fue bien explícito aclarando adecuadamente lo que realizó. En general los estudiantes dan la cifra de cualquier cantidad sin decir los miles, incluso a veces también así lo escriben. Pero al cuestionárseles sobre la incoherencia de los valores, hicieron la aclaración que era 12000, acotando "todo el mundo dice 12". Fue prácticamente una constante en este grupo de estudiantes: ser más explícitos y precisos en su comunicación oral que en la escrita.

En la conversión al registro coloquial parece que los estudiantes dejaron el proceso de asimilación -en el sentido de Piaget- a medias, al quedarse solo en el manejo de datos, estableciendo pocos vínculos entre la nueva información y su estructura mental constituida (Meel, 2003). Es decir, lograron establecer pocas conexiones entre el contenido de los registros que los ayudara en la comprensión de la situación y el proceso de conexión entre las representaciones. Esto requiere un manejo adecuado de la relación entre el conocimiento y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo. Acorde con estas ideas, el progreso matemático -lograr generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios (Godino et al, 2003)- fue logrado por pocos estudiantes (16%) en esta investigación. Y este proceso de establecer


Bueno en Primero me solicitaban el Costo de 5500 y Como en Cada 1000 disco hay una Variación de 12000 dólares en costo, entonces en 5500 el costo Seria en si de:

$\underbrace{164000}_{\text{Costo de 5000 discos}} + \underbrace{6000}_{\text{Costo de 500 discos}} = 17000$

Figura 3. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E21

congruencias es, según Del Castillo (2003), condición necesaria para la comprensión en matemáticas.

En el manuscrito que se muestra en la Fig. 3 se evidencia que el estudiante E_{21} reconoció algunos elementos significativos de la función, teniendo en cuenta que para Tall (1985) el propósito de toda función es mostrar cómo varía algo. El hecho de que un alumno reconozca que en la situación se da el proceso de variación es de gran relevancia para este estudio, por cuanto el hecho de llevarlos a realizar transformaciones de registros se convirtió en una intervención para la mejora en la comprensión del tema.

Cuestión 4. "¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿Cuáles varían y cuáles son constantes o permanecen fijas?".

Los estudiantes (64%) presentaron serias dificultades relacionadas con el reconocimiento de los elementos de la función y con el manejo de las operaciones; es decir, con la identificación del contenido de las representaciones y con el funcionamiento del registro, en términos de Duval (2004). Sin embargo, el 48% de ellos identificó ciertos elementos de la función, pero no alcanzó a dar respuestas del todo acertadas, por omitir otros. Por ejemplo, se dieron cuenta que por cada incremento de 1000 en la cantidad de discos se presentaba un incremento de 12000 dólares en el costo de producción, pero al dar su respuesta no tuvieron en cuenta que en la cuarta fila hubo un salto en la secuencia de número de discos (se omitió el 4000), por lo que en la primera entrada que llenaron de la tabla (correspondiente al costo para 5000 discos), en lugar de 164000 (140000+12000+12000) colocaron 152000, que era el valor correspondiente a 4000.

Otra de las dificultades fue relacionar los elementos de la función con su significado contextual. Por ejemplo, les costó aceptar que los valores de la función correspondieran con los costos de producción, que los costos fijos por unidad fueran 12 y no 12000, y que los costos fijos de producción fueran 104000 y no 116000, evidenciándose lo que Benítez (2010) llama interpretación local de la situación.

Cuestión 5. "¿Qué relación de dependencia hay entre las variables?".

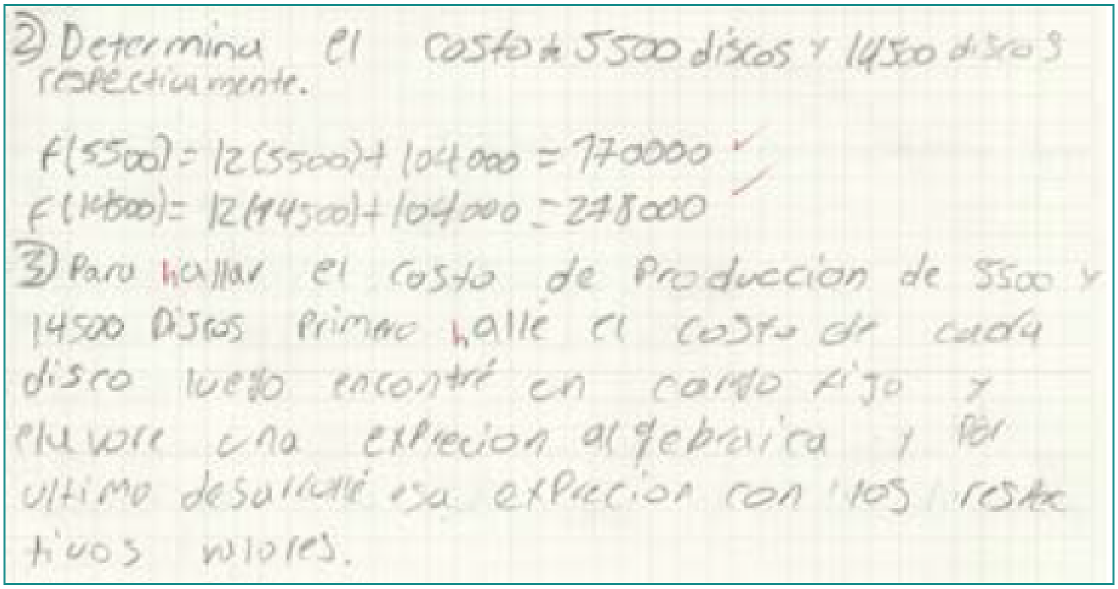
Un alto porcentaje de estudiantes (76%) presentó dificultades para relacionar los elementos de la función en una transformación tipo conversión. En cada registro pudieron identificar solo algunos elementos. Por ejemplo, ignoraron los costos fijos de producción y trabajaron con la función lineal como si fuera una función afín, evidenciándose un obstáculo en el sentido de Brousseau (1999). Aquellos que identificaron los elementos de la función (24%) también pudieron clasificarlos y establecer relaciones de dependencia entre ellos. Además, cabe advertir que el 16% de los estudiantes utilizó un registro auxiliar analítico-aritmético para dar respuesta a la consigna; mostrándose nuevamente que el proceso de hacer transformaciones entre registros no es una cuestión sencilla ni espontánea, es decir, estos procesos ontosemióticos de identificación de aspectos comunes en distintos registros suelen resultar complejos.

Cuestión 6: "Si se sabe que el costo de producción fue de 314000 dólares, ¿cuántos discos se produjeron?".

Ningún estudiante utilizó el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada, ni en la entrada de la tabla que implicaba un tratamiento, ni en la pregunta que implicaba una conversión al registro algebraico, coincidiendo en este sentido con lo reportado por Ochoviet y Oktaç (2011). Los que dieron con la respuesta, lo hicieron por tanteo (24%) o utilizando el patrón deducido en la secuencia (16%). Es decir, a los estudiantes se les dificultó más encontrar el número de discos cuando se les dio previamente el costo de producción para una cierta cantidad de discos, que el proceso inverso: hallar el costo de producción para una determinada cantidad dada de discos. El primer caso es un proceso que lleva implícito el concepto de ecuación, que no fue utilizado por ningún estudiante para dar respuesta a esta pregunta. El segundo caso parece ser más familiar a los estudiantes, ya que es dar solución a un polinomio aritmético -como el mostrado en la Fig. 4, con el que se trabaja con frecuencia en cursos anteriores y en asignaturas como Física y Química- o seguir el patrón de regularidad hasta dar con la respuesta.

Sin embargo resulta curioso que un grupo de estudiantes haya encontrado y utilizado una expresión algebraica que modelara la situación y no la hubieran utilizado para encontrar una incógnita. Aquí los estudiantes no pudieron concebir la letra como número generalizado, lo que les pudo impedir usar el concepto de ecuación para encontrar la incógnita solicitada. Esto es, establecer la equivalencia entre la expresión algebraica y el valor dado para los costos de producción que lo llevaría a plantear una ecuación y, de resolverla, a encontrar el número de discos correspondientes a esos costos de producción (fig. 4).

Además, cabe señalar que el 80% de los estudiantes no utilizó la información que había consignado en su tabla para responder otras preguntas, en concordancia con lo reportado por Amaya y Barrera (2009), donde la mayoría de los alumnos realizó nuevos procedimientos para responder una pregunta, cuya respuesta ya había obtenido al llenar la tabla.


2) Determina el costo de 5500 discos y 14500 discos respectivamente.

f(5500)= 12(5500)+ 104000 = 170000
f(14500)= 12(14500)+ 104000 = 278000

3) Para hallar el costo de produccion de 5500 y 14500 Discos primero halle el costo de cada disco luego encontré en campo fijo y elavore una exprecion algebraica y por ultimo desarrolle esa exprecion con los respectivos valores.

Figura 4. Descripción del procedimiento efectuado por el estudiante E18

Se evidencia en los estudiantes dificultades para conectar las representaciones en los registros tabular, analítico y del lenguaje materno, en sintonía con lo reportado por Sánchez-Matamoros et al. (2008), lo que según Hitt (2000) podría utilizarse como indicio de si se comprende o no la situación.

Cuestión 7. "Obtén una expresión matemática que permita calcular los costos de producción para cualquier cantidad de discos compactos".

El mismo grupo de estudiantes que pudo relacionar los elementos de la función modeló la situación funcional, recurriendo y sin recurrir a un registro auxiliar. De salida escribieron una expresión analítica y la utilizaron para obtener otras respuestas, como se muestra en la Fig. 4. El estudiante E_{18} presenta claras evidencias de haber encontrado una expresión algebraica y utilizarla para obtener algunas de las respuestas que se le solicitaron. Este resultado corrobora una vieja creencia popular según la cual es más fácil el trabajo con funciones partiendo del registro algebraico como registro principal. Además, hay una creencia generalizada entre los estudiantes que al solicitárseles una expresión matemática que modele la situación, se les está pidiendo que escriban una fórmula. De hecho, aquí un reducido grupo de estudiantes (4%) propuso como modelo una tabla. En general, no conciben como un modelo matemático otra representación que no sea la algebraica.

Cuestión 8. "Realiza una gráfica que represente esta situación".

En la conversión al registro gráfico también presentaron dificultades relacionadas específicamente con la congruencia entre los ejes y el sistema de unidades utilizado para demarcarlos. Colocaron en los ejes la secuencia de números en el orden en que los iban

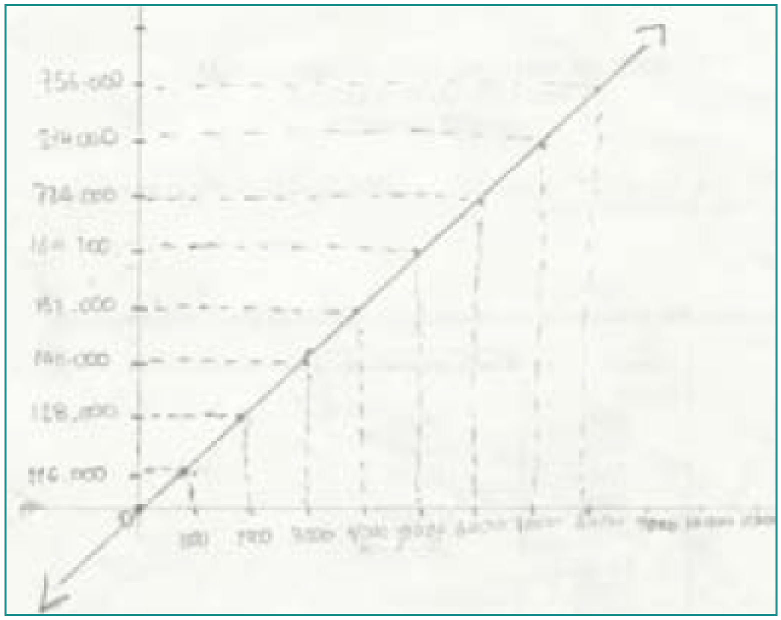


Figura 5. Gráfica realizada por el estudiante E5

encontrando al ir resolviendo el polinomio aritmético, sin tener en cuenta el orden y cardinal en la variable independiente. Algo similar fue reportado por Dolores (2004), quien encontró que los estudiantes asociaban el comportamiento de las imágenes en las gráficas con el comportamiento de sus abscisas, sin importarles el signo de sus ordenadas.

En el caso presente, los estudiantes sí tuvieron en cuenta el signo de las ordenadas, pero no la ubicación en los ejes. La dificultad estuvo asociada al funcionamiento del registro gráfico y a la coordinación con el tabular (Duval, 2004). En la Fig. 5 se puede ver que el estudiante E_5 asignó longitudes similares a los segmentos 0-116000 y 116000-128000; es decir, la secuencia que siguió en la marcación de los ejes no corresponde a una progresión aritmética como habría de esperarse. Además, en la resolución de este alumno se evidencia el uso de la función afín en lugar de la lineal. Los estudiantes tienen tendencia a hacer "pasar por el origen" a las representaciones gráficas de rectas.

Otro aspecto que cabe destacar es el relacionado con la continuidad de la gráfica. Aunque los valores del dominio son discretos, el estudiante E_5 los asumió como continuos, uniendo los puntos marcados hasta obtener una función continua como se muestra en la Fig. 5, quizás por esa "rara tendencia" que tienen los alumnos a unir todos los puntos de una función (Gatica, Tauber y Ruiz, 2002). Según estos autores, la graficación comprende acciones de interpretación y construcción. La interpretación se refiere a la habilidad de los estudiantes para leer y darle significado a una gráfica, mientras que la construcción se refiere a crear algo nuevo, elaborando una gráfica a partir de una regla funcional dada. En este caso, parece que ambas acciones se realizaron parcialmente: la interpretación porque no pudieron relacionar elementos de la función del registro tabular con sus equivalentes en el registro gráfico, confundiendo por ejemplo dominio con rango; la construcción porque no ubicaron los elementos que encontraron en el registro tabular en el lugar correspondiente en el registro gráfico. De esta manera las dos representaciones, tabular y gráfica, no resultaron congruentes. Además, para los estudiantes, la gráfica de la función depende de los puntos que se tomen para graficarla.

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación muestran que la transformación de registros de representación de una función es una actividad compleja para estudiantes de la media académica, a pesar de que en dos cursos previos habían trabajado con funciones. La misma no es espontánea y requiere una enseñanza intencionada que, en concordancia con Romiti, Sgreccia y Caligaris (2012), procure atender de manera equitativa a los diversos registros, tanto en actividades de tratamiento como de conversión.

Las dificultades de los estudiantes estuvieron relacionadas con la identificación del contenido de las representaciones, la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, el funcionamiento de los registros y la coordinación o conversión entre dichos registros.

En cuanto a la identificación del contenido de una función en el registro tabular, como registro de partida, la mayoría de los estudiantes pudo identificar algunos elementos, pero no los suficientes para hacer transformaciones acordes a las cuestiones solicitadas. Por ejemplo, muchos se dieron cuenta que la secuencia para los costos iba de 12000 en 12000 cuando el número de discos cambiaba de 1000 en 1000. Sin embargo, esto no fue suficiente para determinar el patrón de crecimiento de la situación. Trabajaron la función lineal como si fuera una función afín y para encontrar los resultados solicitados realizaron una regla de tres simple directa. Este hecho les impidió llenar correctamente la tabla, dar respuestas acertadas a las cuestiones planteadas, y realizar correctamente la gráfica. No obstante, los estudiantes identificaron en la situación rasgos característicos genuinos del concepto de función, lo que es un gran avance en su desarrollo de pensamiento variacional y un indicio claro de que algo se ha comprendido del concepto. Pero dio la impresión que fue una comprensión parcial, que se evidenció solo en algunas de las cuestiones planteadas, como si de una pregunta a otra se hubiera cambiado la muestra de estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior se plantea como una posibilidad de trabajo en el aula, para contribuir a mejorar estos desempeños estudiantiles, formular preguntas intermedias del tipo: *¿cómo está constituido el costo de producción de discos?, ¿hay costos fijos (independientes de la cantidad a producir) y costos variables (según la cantidad de discos que se produzcan)?, ¿podrías identificarlos: costo fijo: ....; costo de 1000 discos: ..., de 500 discos: ..., de 100 discos: ..., de 1 disco: ...?*

En la utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita, la dificultad estuvo en que la mayoría no pudo hallar una expresión algebraica que representara la situación, y los que la obtuvieron no establecieron la equivalencia entre esta y el valor numérico dado para los costos de producción, lo que los llevaría a la ecuación requerida. Teniendo en cuenta la dificultad al hacer conversiones entre los registros algebraico y coloquial -en ambos sentidos-, una posible guía para ello es: *sabemos que el costo fijo es 104000 dólares, que el costo por unidad es de 12 dólares y que se gastaron 314000 dólares en producción de discos:*

104000	+	*12*	*x*	=	*314000*
costo fijo		*costo de cada unidad*	*cantidad de discos producidos*		*lo que se gastó*

¿Puedes obtener la cantidad de discos producidos? Hazlo e indica otra/s forma/s posible/s de hallar dicha cantidad.

En el funcionamiento de los registros y la coordinación entre ellos fue posible apreciar que los estudiantes no reconocieron el registro tabular como apoyo válido para sustentar sus respuestas; necesitaron verificar sus respuestas en el registro algebraico analítico antes de darlas. Para fortalecer este aspecto (y sin ignorar el recurso de cálculos mentales) una propuesta es: *explicitar en la consigna "solo empleando la tabla"; solicitar "explicar con tus propias palabras qué información aporta la tabla"; ¿le agregarías o quitarías filas/columnas a la tabla?, ¿sí/no por qué?; ¿con qué prefieren trabajar las funciones: tablas, fórmulas, gráficos?, ¿por qué?*

En las transformaciones tipo conversión utilizaron como andamio el registro algebraico-analítico como paso previo hacia cualquier otro registro; incluso hasta en las transformaciones tipo tratamiento siempre acudieron al registro algebraico-analítico como paso obligado. Es decir, no se dieron tratamientos puros, siempre acudieron a este registro auxiliar para hacer modificaciones o verificar cualquier cuestión por la que se les indagara. Utilizando el registro tabular como registro principal hicieron las operaciones en el registro algebraico-analítico y volvieron a hacer otra conversión de regreso al tabular como registro principal, donde terminaron el tratamiento. Aquí surge la duda de si se violó el principio de autosuficiencia de los registros ante una transformación tipo tratamiento (Duval, 2004) o es que estos dos registros comparten algunas reglas.

Finalmente, coincidimos con D'Amore (2006) en que el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, conocimiento, comprensión del objeto así como su complejidad. Por ello robustecer el trabajo escolar en este sentido es una de nuestras tareas.

REFERENCIAS

Amaya, T. (2010). Errores de los estudiantes de octavo grado en el trabajo pre-algebraico. *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación, 6*(5), 225-244.

Amaya, T. y Barrera, J. (2009). Un estudio de la variación utilizando funciones en estudiantes de la media académica. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22* (pp.93-99). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Benítez, A. (2010). Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grado 2 y 3. *Educación Matemática, 22*(1), 5-29.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Brousseau, G. (1999). Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas. Traducido por Hernández y Villalba del original: Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Caligaris, M., Schivo, M.E., Romiti, M.R. y Sgreccia, N. (2013). *Naturalmente difícil*. Ponencia presentada en la XXXVI Reunión de Educación Matemática. Rosario, septiembre.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (11), 19-57.

Cordero, F. (1997). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 56-74.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 9*(1), 177-195.

Del Castillo, A. (2003). *La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural*. Recuperado el 9 de marzo de 2013, de http://www.semana.mat.uson.mx/Memorias/pupi.pdf.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 7*(3), 195-218.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012a). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2012b). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.14-17). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gallardo, J., González, J. y Quintanilla, V. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: apuntes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Revista Educación Matemática, 25*(2), 61- 88.

Gatica, N., Maz-Machado, A., May, G., Cosci, C., Echevarría, G. y Renaudo, J. (2010). Un acercamiento a la idea de continuidad de funciones en estudiantes de Ciencias Económicas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (22), 121-131.

Gatica, N., Tauber, L. y Ruiz, F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Alicante: Universidad de Alicante.

Godino, J., Font, V. y Batanero, C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003a). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-223.

Hitt, F. (2003b). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Kaput, J. (1987). Representation and mathematics. En C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp.19-26). Hillsdale: Erlbaum.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En C.Kieran & S. Wagner (Eds.). *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp.167-194). Reston: NCTM.

León, O. y Corredor, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas ¿una relación necesaria? Hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: Colciencias y Universidad de Valle.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), 221-271.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). *Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Ochoviet, C. y Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Revista Educación Matemática, 23*(3), 91-121.

Romiti, M.R., Sgreccia, N. y Caligaris, M. (2012). *Propuesta de mejora en el aprendizaje del concepto de límite de una función real*. X Conferencia Argentina de Educación Matemática. Buenos Aires, septiembre.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 11*(2), 267-296.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.). *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp.221-252). Madrid: Narcea.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 1*(10), 49-53.

UNESCO. (2005). *Hacia las sociedades del conocimiento. Informe mundial de la UNESCO*. Recuperado el 7 de enero de 2013, de http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001419/141908s.pdf.