

Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura



Tesis Doctoral

**COTAS FINALES PROBABILÍSTICAS
EN DISEÑO DE CONTROL Y DETECCIÓN DE FALLAS**

Lic. Noelia Pizzi

Director: Dr. Ernesto Kofman
Co-Directora: Dra. María Marta Seron
Consejera de Estudio: Dra. María Cristina Sanziel

*Tesis presentada en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y
Agrimensura, en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al título de
Doctora en Matemática*

Año 2018

Resumen

En esta tesis se desarrollan y extienden herramientas de análisis y diseño de sistemas de control con perturbaciones. Un problema central del estudio de estos sistemas es garantizar la estabilidad de los puntos de equilibrio, lo que en presencia de ciertos tipos de perturbaciones no puede lograrse, por lo que se busca asegurar la convergencia de las trayectorias del sistema a ciertas regiones acotadas denominadas *cotas finales*. Estas regiones, si son calculadas de cierta forma, resultan además *conjuntos invariantes*. Cuando las perturbaciones no son acotadas, como en el caso del ruido blanco Gaussiano, estos conjuntos (cotas finales e invariantes) en general no existen, lo que motivó recientemente el desarrollo de los conceptos de *cota final probabilística* (PUB- Probabilistic Ultimate Bound) y *conjunto invariante probabilístico* (PIS- Probabilistic Invariant Set).

Esta tesis propone entonces utilizar estos conceptos novedosos y en torno a los mismos desarrollar tanto técnicas de diseño de control como estrategias de detección de fallas y de reconfiguración de controladores frente a las mismas, garantizando en todos los casos la existencia de cotas finales probabilísticas. Además, se extienden las nociones de PUB y PIS para sistemas no lineales y se desarrollan herramientas de caracterización de los mismos y técnicas de diseño de control no lineal con garantías de cota final probabilística.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Ernesto, mi director, principalmente por su confianza, dedicación y comprensión no sólo en el ámbito académico sino también en lo personal. Además, va mi agradecimiento para mi codirectora, Marimar, y para José De Doná, quienes desde la distancia siempre estuvieron presentes ayudándome cuando lo necesité. No puedo dejar de agradecerle a Cristina Sanziel por su predisposición y ayuda no sólo en esta etapa sino también a lo largo de mis estudios en la licenciatura. También les agradezco a mis compañeros del instituto, especialmente a Mónica, Fede, Joaquín, Franco, Gustavo, Mario y Pablo, también a mis compañeros de la facultad, Lucho, Gerardo, Pablo, Eva y muchos más, por hacer más ameno este trayecto compartiendo charlas y lindos momentos.

No puedo olvidarme de agradecer al jurado de esta Tesis, Hernán Haimovich, Pablo Lotito y Alejandro González que con sus comentarios y revisiones hicieron de éste un mejor trabajo.

En el plano familiar, quiero agradecer a mis padres, Beatriz y Juan, por acompañarme siempre, a Luciano, a mis hermanos, sobrinos y cuñadas que con su compañía me permitieron relajarme un poco en los momentos de mayor presión. Y en este sentido, también agradezco infinitamente los encuentros con mis amigas de la vida que estuvieron y están siempre presentes.

Por último, mi mayor agradecimiento es para la persona que me enseña cada día a valorar las cosas más simples de la vida, mi hija, Ámbar.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Motivación y estado del arte	3
1.2. Organización de la Tesis	6
1.3. Contribuciones originales	7
1.4. Publicaciones	7
2. Preliminares	9
2.1. Sistemas con perturbaciones	9
2.1.1. Perturbaciones evanescentes y no evanescentes	10
2.1.2. Estima de cota final por Lyapunov	11
2.2. Conjuntos por descomposición modal	15
2.2.1. Análisis con la forma de Jordan	16
2.2.2. Comparación con Lyapunov	20
2.3. Diseño de control lineal con garantía de cota final	22
2.3.1. Control en realimentación	22
2.3.2. Diseño de control para sistemas lineales	24
2.4. Control no lineal con garantía de cota final	30
2.4.1. Linealización exacta por realimentación	31
2.4.2. Diseño de control no lineal	34
2.5. Detección de fallas basada en conjuntos	40
2.5.1. Esquema de detección y reconfiguración	40
2.5.2. Módulo de diagnóstico y aislamiento de falla	41
2.5.3. Criterio de detección de fallas	42
2.6. Cotas finales y conjuntos invariantes probabilísticos	44
2.6.1. Movimiento Browniano. Ruido blanco Gaussiano	45
2.6.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	46
2.6.3. Definición de PUB y γ -PIS	49
2.6.4. Algunas propiedades de PUB y γ -PIS	50
2.6.5. Caracterización de PUB y γ -PIS	51
3. Diseño con Cota Final Probabilística	55
3.1. Planteo del problema	55
3.2. Asignación de covarianza	56
3.3. Diseño del control	60

3.4. Ejemplo	64
4. PUB y γ-PIS para sistemas no lineales	67
4.1. Definiciones de PUB y γ -PIS para sistemas no lineales	68
4.2. Caracterización de conjuntos probabilísticos	69
4.3. Control por Linealización exacta	72
4.3.1. Planteo del problema	73
4.3.2. Cota para la covarianza del sistema linealizado	74
4.3.3. Cálculo de PUB para el sistema linealizado	75
4.4. Diseño de control no lineal	77
4.4.1. Diseño de control con garantía de PUB	77
4.4.2. Algoritmo para diseño de control	78
4.5. Ejemplo	80
5. Control tolerante a fallas	83
5.1. Diagnóstico de fallas sin reconfiguración	84
5.1.1. Formulación del problema	84
5.1.2. Esquema para la detección de fallas	86
5.1.3. Ejemplo	89
5.2. Diagnóstico de fallas con reconfiguración	91
5.2.1. Formulación del problema	91
5.2.2. Esquema para la detección de fallas	93
5.2.3. Reconfiguración del control	99
5.2.4. Ejemplo	104
6. Conclusiones	109
6.1. Conclusiones Generales	109
6.2. Trabajo a Futuro	110

Lista de símbolos y notación

$\mathbb{R}_{+,0}$	conjunto de los números reales no negativos.
\mathbb{R}_+^n	conjunto de vectores de \mathbb{R}^n con componentes positivas.
$\mathbb{R}_{+,0}^n$	conjunto de vectores de \mathbb{R}^n con componentes no negativas.
$\mathbb{R}_{+,0}^{m \times m}$	conjunto de matrices con entradas no negativas.
$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	matriz diagonal cuyas entradas principales son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
$\lambda_{\min}(\cdot)$	mínimo autovalor de una matriz real simétrica.
$\lambda_{\max}(\cdot)$	máximo autovalor de una matriz real simétrica.
$\rho(\cdot)$	radio espectral de una matriz cuadrada, es decir, el máximo entre las magnitudes de sus autovalores.
$\mathbf{1}_n$	vector columna n -dimensional con todas sus componentes iguales a 1.
$\mathbf{Re}(A)$	matriz cuyas entradas son $\mathbf{Re}(a_{i,j})$, donde $a_{i,j}$ son los elementos de la matriz A .
$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$	familia de funciones a valores reales dos veces continuamente diferenciables definidas en \mathbb{R}^n .
$\mathcal{C}^{2,1}(D \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	familia de las funciones $V(x, t) : D \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ que son dos veces continuamente diferenciables para $x \in D$ y una vez diferenciables para $t \in \mathbb{R}_+$.
$\mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$	familia de procesos $\{f(t)\}_{a \leq t \leq b}$ \mathcal{F}_t -adaptados tales que $\int_a^b f(t) ^2 dt < \infty$ casi seguramente y $E \int_a^b f(t) ^2 dt < \infty$.
$M > 0$	matriz cuadrada definida positiva.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y estado del arte

Cuando se trabaja con sistemas dinámicos continuos, el estudio cualitativo es, en muchos casos, la única herramienta con la que se cuenta para tener algún conocimiento acerca de sus trayectorias. Esto no es un inconveniente ya que, en ciertas ocasiones, suele ser más útil conocer el comportamiento de las soluciones alrededor de algún punto de equilibrio que tener una expresión explícita de las mismas.

Una característica cualitativa importante de los sistemas dinámicos es su estabilidad, la cual está relacionada directamente con el comportamiento de las trayectorias del sistema cuando su estado inicial se encuentra cerca de un equilibrio.

La estabilidad es importante pues pueden aparecer perturbaciones que afecten al sistema y tiendan a separarlo del equilibrio; si el sistema es estable los efectos de estas alteraciones serán acotados.

Varias situaciones y procesos de la vida real modelados por sistemas dinámicos incluyen los efectos de perturbaciones, es decir, de acciones externas que modifican su estado estacionario. Estas modificaciones pueden deberse a errores de modelado, parámetros desconocidos, incertidumbre en la dinámica, etc.. Estos efectos sobre el sistema deben tenerse en cuenta si se quiere contar con un análisis realista del mismo.

También es muy importante dentro del estudio de sistemas dinámicos, la teoría de control, la cual permite, mediante la manipulación de las entradas, conseguir un comportamiento deseado del sistema en estudio, por ejemplo, mantener su estabilidad frente a distintas perturbaciones o si ocurriera alguna falla en su funcionamiento.

El diseño y análisis de sistemas de control bajo hipótesis realistas debe tener en cuenta los distintos efectos de las perturbaciones sobre el desempeño del sistema a lazo cerrado. La principal motivación de esta tesis es contribuir en la construcción de una nueva teoría para dichos sistemas de control que brinde

herramientas más simples y eficientes que las existentes en la actualidad.

En general, el valor exacto de una variable de perturbación es desconocido, pero es usual que se disponga de una cota para la misma. Esta cota muchas veces depende del valor de los estados del sistema, y en algunos casos la cota tiende a cero cuando el estado se aproxima a un punto de equilibrio (en este caso se habla de perturbaciones *evanescentes* [21]). En otros casos, como por ejemplo en presencia de efectos de cuantificación en convertidores analógico/digital y digital/analógico [23], señales de perturbación desconocidas [45], dinámica no modelada [40], limitaciones de la tasa de transmisión en sistemas de control distribuido [57, 58], errores en métodos numéricos [24], etc., las perturbaciones pueden no desaparecer cuando el estado se aproxima a un punto de equilibrio.

En presencia de perturbaciones no evanescentes, la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio no es posible en general. Dos nociones que juegan un rol fundamental en diversos problemas de la teoría de control asociados a la presencia de este tipo de perturbaciones son los conceptos de cota final e invariancia.

Una cota final es una región acotada en torno al punto de equilibrio en la cual las trayectorias de un sistema quedan confinadas a partir de cierto instante de tiempo [6, 21]. La cota final puede verse como una medida del desempeño de un sistema perturbado en estado estacionario. Particularmente, una cota final *pequeña*, puede asociarse con una buena “atenuación” de los efectos de las perturbaciones.

El procedimiento clásico para estimar la cota final de un sistema se basa en el uso de funciones de Lyapunov [21]. Otro enfoque muy relacionado al de Lyapunov se basa en las propiedades de *Estabilidad Entrada-Estado* de los sistemas con perturbaciones [51]. Por esto, la mayor parte de los métodos de análisis y diseño de control en sistemas perturbados utilizan el análisis de Lyapunov como herramienta básica [2, 56, 8, 40]. El problema de este enfoque, además de la dificultad de encontrar una función de Lyapunov adecuada, es que las cotas estimadas suelen ser excesivamente conservadoras. Esto se debe a que la metodología genérica del análisis conlleva la pérdida de la estructura del sistema y de la perturbación.

Una alternativa para estimar la cota final de sistemas perturbados sin recurrir al análisis de Lyapunov fue presentada en [25]. La idea básica de este nuevo enfoque es la de analizar el problema en las coordenadas modales, llegando a una expresión de la cota final por componentes que es función de los autovalores y autovectores del sistema. En muchos casos, esta expresión es significativamente menos conservadora que expresiones análogas obtenidas del análisis con función cuadrática de Lyapunov.

Este enfoque de análisis en coordenadas modales, originalmente concebido para sistemas lineales y estacionarios en tiempo continuo con perturbaciones acotadas independientemente del estado, fue posteriormente extendido. En [27] se consideran perturbaciones dependientes del estado, sistemas no lineales y sistemas de tiempo discreto, también se demuestra que las cotas finales estimadas a su vez definen conjuntos invariantes.

En base a estos resultados, se propuso una metodología sistemática de estimación de cota final en sistemas muestreados con cuantificación [18] y se desarrolló una metodología de diseño de control para garantizar una cota final predefinida [28], considerando también diseño robusto no lineal [26].

Un área de la teoría de control de gran importancia en la cual se aplican los conceptos de cota final y conjuntos invariantes es el análisis y diseño de sistemas de control tolerantes a fallas. Cuando ocurren fallas en alguno de los componentes de un sistema, el desempeño del mismo normalmente se deteriora e incluso puede llegar a haber consecuencias graves. La detección temprana de fallas en el funcionamiento del sistema, y el diagnóstico correcto de su origen, son críticos para tomar las medidas necesarias para acomodar, o reconfigurar, el sistema con vistas a adaptarse a la nueva situación.

Desde la introducción de las primeras técnicas de diagnóstico de fallas en la década de 1970, se han propuesto muchas metodologías de detección e identificación de fallas que pueden consultarse, por ejemplo, [13, 41, 3, 5, 15]. Gran parte de estas técnicas están basadas en el uso de observadores, los cuales generan señales (comúnmente llamadas ‘residuos’) que actúan como indicadores de la presencia de fallas. En operación sin fallas, los residuos normalmente tienen valores pequeños causados por perturbaciones y otros tipos de incertidumbres. Cuando ocurre una falla, los valores de los residuos crecen y la falla es detectada si se supera cierto “umbral” que se determina previamente en base a ciertas hipótesis sobre el sistema y señales externas.

Otra metodología de diagnóstico de fallas se basa en verificar durante la operación del sistema la “pertenencia” de los residuos a determinados “conjuntos”. Un método que utiliza los conceptos de *conjuntos invariantes* y *cotas finales* fue desarrollado en [7] y es la base del trabajo sobre control tolerante a fallas presentado en el Capítulo 5 de esta Tesis. La característica más novedosa de este método es la posibilidad de proveer garantías de detección y diagnóstico, ya que los residuos (u otras señales de interés) convergen a estos conjuntos y permanecen en ellos indefinidamente si no hay cambios en la situación de fallas. Otros trabajos que explotan las características de invariancia de los conjuntos estimados mediante descomposición modal para desarrollar técnicas de detección y diseño de control tolerante a fallas son [50, 14, 39, 48, 46, 47, 49].

Uno de los objetivos de esta Tesis es desarrollar técnicas de diseño y establecer propiedades para sistemas perturbados que están bajo la influencia de ruido blanco Gaussiano, lo que lleva a considerar modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas. En la literatura, hay varios tipos de resultados de estabilidad para sistemas estocásticos dependiendo de la noción de convergencia estocástica que se esté utilizando. Por ejemplo, en los trabajos [55, 33, 34, 54] se consideran la estabilidad (asintótica) en probabilidad, la estabilidad casi segura (asintótica) y la estabilidad del p -ésimo momento (asintótico). Sin embargo, todas estas nociones requieren que el efecto del ruido sobre el conjunto de equilibrios se desvanezca o, al menos, disminuya con el tiempo, es decir, sólo son aplicables en presencia de perturbaciones evanescentes. Para poder tratar con perturbaciones no evanescentes, como el ruido blanco Gaussiano,

se deben definir nociones relacionadas con acotación final para sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales estocástica, en este sentido, en [60, 37] se desarrolla el concepto de acotación final de los momentos asociados a la solución del sistema. Otros resultados que no involucran los momentos del estado para definir cotas finales y conjuntos invariantes pueden encontrarse en [30, 31], allí se presentan los conceptos de *Cota Final Probabilística* y *Conjunto Invariante Probabilístico*. Una cota final probabilística es un conjunto hacia el cual el estado converge y permanece con cierta probabilidad (de manera análoga se definen los conjuntos invariantes probabilísticos). Estos nuevos conceptos constituyen la contraparte estocástica de las cotas finales e invariantes determinísticos, y la metodología de análisis en coordenadas modales puede aplicarse de manera natural.

Por otro lado, al igual que para sistemas determinísticos, cuando las perturbaciones son no evanescentes, las técnicas de Lyapunov son ampliamente utilizadas en el diseño de controles que permitan estabilizar los sistemas estocásticos. En este contexto, existe un concepto denominado *Noise to State Stability* [10, 11] que recientemente fue utilizado para acotar la covarianza de una función de Lyapunov de los estados [35, 36]. Otro resultado relacionado a sistemas no lineales con perturbaciones estocásticas no evanescentes es el control por realimentación estocástica exacta, cuyos principales lineamientos pueden encontrarse en [53].

Esta tesis presenta entonces una continuación del desarrollo de la teoría sobre cota final probabilística comenzada en [30, 31], extendiéndola a sistemas no lineales y ampliando su aplicación a problemas de diseño de control con garantía de cota final (tanto para el caso lineal como para el caso no lineal vía linealización exacta) y de diagnóstico de fallas con reconfiguración.

1.2. Organización de la Tesis

Este primer capítulo presenta un breve análisis del estado del arte y un resumen del trabajo realizado. En el capítulo 2 se describen algunos conceptos básicos relacionados al tema de estudio y los resultados previos que permiten contextualizar el trabajo realizado en esta Tesis.

El capítulo 3 presenta una técnica de diseño de control que garantiza la existencia de una cota final probabilística para las trayectorias del sistema.

Los resultados previos respecto de PUB y PIS en el capítulo anterior son válidos para sistemas lineales. En el capítulo 4 se extienden los conceptos de cota final probabilística y conjunto invariante probabilístico para sistemas estocásticos no lineales, dando fórmulas que permiten caracterizar dichos conjuntos. También se presenta una estrategia de diseño de control mediante linealización exacta que asegura la existencia de una cota final probabilística para sistemas no lineales alineados con la entrada.

A lo largo del capítulo 5 se desarrolla una de las contribuciones más importantes de esta Tesis, el diagnóstico de fallas en base a conjuntos probabilísticos. Los métodos de diagnóstico de fallas por conjuntos se basan en evaluar

la pertenencia de ciertas variables (denominadas *residuos*) a determinados conjuntos, que en general se calculan como invariantes o cotas finales. Una limitación de las técnicas usuales de detección es que requieren que las perturbaciones sean acotadas dejando afuera, por ejemplo, al ruido blanco Gaussiano. Motivados por este hecho se planteó un esquema de diagnóstico que permite detectar la ocurrencia de fallas en el sistema filtrando las funciones indicatrices de las cotas finales probabilísticas asociadas a los residuos. Una vez realizada la detección es necesario reconfigurar el sistema para que siga operando aun en presencia de fallas, para ello se presenta una estrategia de reconfiguración.

Finalmente, el último capítulo presenta las conclusiones generales de la Tesis y los lineamientos de futuros trabajos.

1.3. Contribuciones originales

A partir del capítulo 3 en adelante los resultados presentados son originales. La principal contribución es la extensión a sistemas con perturbaciones estocásticas de las herramientas de descomposición modal desarrolladas en [27, 26] tanto para sistemas lineales como no lineales utilizando como base los conceptos de PUB y PIS presentados en [30, 31]. En este sentido, se proporciona un diseño de control que garantiza una cota final deseada para sistemas lineales (Capítulo 3) y se establecen fórmulas para caracterizar los conjuntos probabilísticos para sistemas no lineales que se basan en la existencia de una función del tipo Lyapunov (Capítulo 4).

Por otro lado, se consiguió ampliar el campo de aplicación de los sistemas de control tolerantes a fallas al caso de perturbaciones no acotadas mediante una técnica de detección de fallas que explota la pertenencia de ciertos residuos a determinados PUBs calculados en función de la falla que pueda ocurrir.

1.4. Publicaciones

Parte de los resultados incluidos en esta Tesis ya fueron publicados en revistas y en memorias de conferencias, mientras que el resto están bajo revisión en segunda instancia o forman parte de un artículo en preparación.

El primer resultado publicado se refiere al diseño de un control que garantiza la existencia de una cota final probabilística para sistemas con una sola entrada, éste fue incluido en actas de un congreso de carácter internacional, [29] y, su generalización para sistemas con múltiples entradas forma parte de una revista internacional, [32].

Posteriormente, los primeros trabajos sobre detección de fallas basada en conjuntos PUB se publicaron en actas de un congreso local, [42], y luego fueron incluidos en una revista indexada, [43]. Estos resultados sólo tienen en cuenta el diagnóstico y detección de fallas sin reconfiguración. Un esquema

completo que permita reconfigurar el control una vez detectada la falla fue presentado, y se encuentra en la segunda ronda de revisión, en la revista ISA Transactions.

Los resultados referidos a control no lineal con garantía de cota final forman parte de un artículo en preparación que próximamente será enviado para su revisión.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo reúne las definiciones y resultados más relevantes existentes en la literatura actual del tema de estudio, necesarios para permitir una lectura lo más autocontenida posible de esta tesis. Comenzamos presentando los sistemas dinámicos perturbados y sus principales características referidas a estabilidad (según Lyapunov). Introducimos el concepto de cota final y cómo se utilizan las conocidas técnicas de Lyapunov para estimar dicha cota. Las definiciones y resultados fueron extraídos de [21]. Luego, en las secciones 2.2 y 2.3, presentamos los resultados desarrollados en [25] y [27] acerca de un método alternativo para estimar cotas finales para sistemas lineales invariantes en el tiempo que permite, además, diseñar un control que garantiza la existencia de tales cotas. La sección siguiente presenta un control con garantía de cota final para el caso de sistemas no lineales, el diseño para este control se basa en la linealización exacta, los detalles pueden consultarse en [26]. En la sección 2.5 se muestra la aplicación del concepto de cota final para la detección de fallas para sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo, existen varios artículos referidos a este tema para el caso determinista, aquí seguimos el desarrollo realizado en [7], el cual fue la base de nuestro trabajo para el caso probabilístico. Finalmente, la última sección presenta el concepto de cota final probabilística, a partir del cual surgieron los resultados originales de esta tesis.

2.1. Sistemas con perturbaciones

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \quad (2.1)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ son seccionalmente continuas en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times D$, y $D \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. Pensamos a (2.1) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.2)$$

El término de perturbación $g(t, x)$ puede provenir de errores de modelado, envejecimiento, incertidumbres en la dinámica, etc.. En general, no conocemos el término $g(t, x)$ pero sí tenemos alguna información sobre él, como por ejemplo una cota superior de $\|g(t, x)\|$. La representación aditiva de la perturbación en (2.1) modela, por ejemplo, perturbaciones que no modifican el orden del sistema.

2.1.1. Perturbaciones evanescentes y no evanescentes

Cuando la perturbación se anula en el origen decimos que se trata de una *perturbación evanescente*, en este caso si $x = 0$ es un punto de equilibrio del sistema nominal también lo es del perturbado y existen resultados que permiten obtener información sobre la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema perturbado a partir del conocimiento de estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema original.

En el caso de las *perturbaciones no evanescentes*, es decir aquellas que no se anulan en el origen, puede ocurrir que éste no sea un punto de equilibrio del sistema perturbado (2.1) y, por lo tanto, las conclusiones que podamos sacar sobre la estabilidad del origen para el sistema nominal no pueden trasladarse directamente al sistema perturbado. Lo más que podemos esperar es que si el término de perturbación $g(t, x)$ es chico en algún sentido, entonces la trayectoria $x(t)$ esté *finalmente acotada* por una cota pequeña, es decir, que $\|x(t)\|$ sea pequeña para t suficientemente grande. En lo que sigue definiremos el concepto de cota final, necesario cuando se trata con perturbaciones no evanescentes.

Cota Final

Las soluciones de $\dot{x} = f(t, x)$ se dicen *uniformemente finalmente acotadas* si existen una norma vectorial $\|\cdot\|$ y constantes positivas b y c , tales que, para cada $\alpha \in (0, c)$, existe una constante positiva $\tau = \tau(\alpha)$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + \tau \quad (2.3)$$

Se dicen *globalmente uniformemente finalmente acotadas* si (2.3) vale para α arbitrariamente grande.

La constante b en (2.3) se denomina *cota final* (ver Fig. 2.1). En el caso de sistemas autónomos no necesitamos usar el término “uniforme” ya que la solución depende sólo de $t - t_0$.

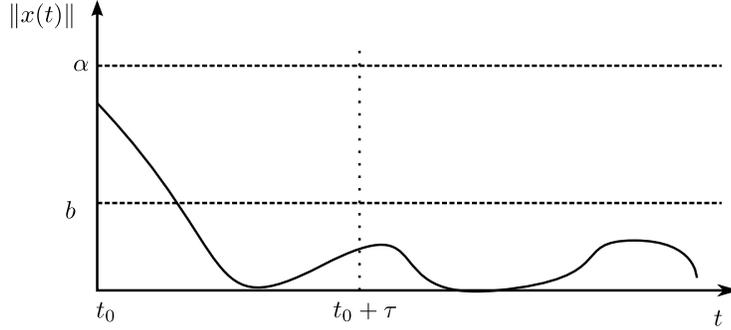


Figura 2.1: Cota Final.

2.1.2. Estima de cota final por Lyapunov

En esta subsección se muestra de qué manera las técnicas de Lyapunov son utilizadas para estimar cotas finales. Primero se enuncian varios resultados extraídos de [21] que determinan cuándo un sistema de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ tiene trayectorias finalmente acotadas y proporcionan cotas para dichas soluciones. Luego, se considera el caso particular de sistemas lineales estacionarios y se realiza un análisis basado en Lyapunov para estimar cotas finales, los detalles de esto último pueden ser consultados en [25].

Cuando se trabaja con la teoría de estabilidad de Lyapunov, unas funciones muy utilizadas son las llamadas funciones de comparación, que son funciones escalares definidas de la siguiente manera:

1. Una función continua $\alpha : \mathbb{R}_{+,0} \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$ es de *clase \mathcal{K}* si es estrictamente creciente y $\alpha(0) = 0$.
2. Una función $\beta \in \mathcal{K}$ es de *clase \mathcal{K}_∞* si es no acotada.
3. Una función continua $\mu : \mathbb{R}_{+,0} \times \mathbb{R}_{+,0} \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$ es de *clase \mathcal{KL}* si, para cada $t \geq 0$ fijo, $\mu(\cdot, t) \in \mathcal{K}$, y para cada $s \geq 0$ fijo, $\mu(s, \cdot)$ es decreciente y $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(s, t) = 0$.

Esta clase de funciones definen cotas finales, como se prueba en el siguiente teorema “estilo Lyapunov” y en sus corolarios.

Teorema 2.1. (Solución finalmente acotada) . Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen y sea $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x . Sea $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (2.5)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$, donde $W_i(x)$ son funciones continuas definidas positivas en D . Tomemos $r > 0$ tal que $B_r \subset D$ y supongamos que μ es lo suficientemente pequeña tal que

$$\eta \triangleq \max_{\|x\| \leq \mu} W_2(x) < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$$

Tomemos ρ tal que $\eta < \rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$. Entonces, existe un tiempo finito t_1 (dependiente de $x(t_0)$ y μ) y una función $\beta(\cdot, \cdot)$ de clase \mathcal{KL} tales que $\forall x(t_0) \in \{x \in B_r : W_2(x) \leq \rho\}$, las soluciones de $\dot{x} = f(t, x)$ satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 \quad (2.6)$$

$$x(t) \in \{x \in B_r : W_1(x) \leq \eta\}, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + t_1. \quad (2.7)$$

Más aún, si $D = \mathbb{R}^n$ y $W_1(x)$ es radialmente no acotada, entonces (2.6) y (2.7) valen para todo estado inicial $x(t_0)$ y todo μ .

Corolario 2.1. (Cota final). Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, sean $\alpha_1(\cdot)$ y $\alpha_2(\cdot)$ funciones clase \mathcal{K} definidas en $[0, r]$ tales que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \text{ y } W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall x \in D.$$

Supongamos que $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ y $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$. Entonces, las soluciones de $\dot{x} = f(t, x)$ están uniformemente finalmente acotadas con cota final $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$.

Corolario 2.2. Bajo las hipótesis del Corolario 2.1, las soluciones de $\dot{x} = f(t, x)$ satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$$

Corolario 2.3. Supongamos que las hipótesis del Teorema 2.1 se satisfacen con

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \quad W_3(x) \geq k_3 \|x\|^c$$

para ciertas constantes positivas k_i y c . Supongamos además que $\mu < r(k_1/k_2)^{1/c}$ y $\|x(t_0)\| < r(k_1/k_2)^{1/c}$. Entonces, (2.6) y (2.7) toman la forma

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq k \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, & \forall t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 \\ \|x(t)\| &\leq \mu k, & \forall t_0 \leq t \leq t_0 + t_1 \end{aligned}$$

donde $k = (k_2/k_1)^{1/c}$ y $\gamma = k_3/(k_2c)$.

Es importante notar que la cota final obtenida en el Corolario 2.1 es una función clase \mathcal{K} de μ , porque cuanto más chico sea μ , más chica va a ser la cota final. Cuando $\mu \rightarrow 0$, la cota final también tiende a cero.

Cota final por Lyapunov en sistemas lineales y estacionarios

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI-Linear Time-Invariant) nominal:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.8)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz¹, $u \in \mathbb{R}^m$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. El objetivo ahora es estudiar los efectos de perturbaciones acotadas y entradas del sistema (2.8) y estimar la cota final para el sistema perturbado.

Ya mencionamos que una de las consecuencias más importantes de la presencia de perturbaciones no evanescentes es la desaparición de la estabilidad asintótica dejando lugar a la acotación final de las soluciones.

El problema principal es entonces estimar una relación cuantitativa entre la cota de las perturbaciones y la cota final resultante.

Vamos a suponer que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema no perturbado (2.8) y que la entrada u es constante.

Debido a la linealidad y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u(t) = 0$. Luego, en presencia de perturbaciones generales de entrada y de estado, el sistema (2.8) puede escribirse como

$$\dot{x}(t) = A(x(t) + \Delta x(t)) + B\Delta u(t) \quad (2.9)$$

Se asumirá que las componentes de la perturbación satisfacen:

$$|\Delta x_i(t)| \leq \Delta x_{max_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.10)$$

$$|\Delta u_j(t)| \leq \Delta u_{max_j}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (2.11)$$

donde Δx_{max_i} y Δu_{max_j} son constantes no negativas.

Para simplificar las ecuaciones que siguen, vamos a introducir una nueva notación que utilizaremos desde ahora y a lo largo de toda la tesis:

Notación 2.1. El símbolo $|\cdot|$ indicará el módulo por componentes de una matriz o vector. Si T es una matriz con componentes $T_{1,1}, \dots, T_{n,m}$, luego $|T|$ será una nueva matriz de la misma dimensión que T con componentes $|T_{1,1}|, \dots, |T_{n,m}|$.

Para vectores x, y de la misma dimensión, la expresión $x \preceq y$ ($x \prec y$) implica que $x_i \leq y_i$ ($x_i < y_i$) para cada componente de x e y . Análogamente se define $x \succeq y$ ($x \succ y$) y en el caso cuando x, y son matrices. Notar que $x \not\preceq y$ no necesariamente implica que $x \succeq y$.

De acuerdo a estas definiciones, las siguientes propiedades se satisfacen:

$$\begin{aligned} |x + y| &\preceq |x| + |y|, \quad |T \cdot x| \preceq |T| \cdot |x|, \\ |x| \preceq |y| &\Rightarrow |T| \cdot |x| \preceq |T| \cdot |y|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

¹Una matriz es Hurwitz si todos sus autovalores tienen parte real negativa.

Utilizando estas notaciones, las desigualdades (2.10) y (2.11) pueden reescribirse como

$$|\Delta x(t)| \leq \Delta x_{max} \quad (2.13)$$

$$|\Delta u(t)| \leq \Delta u_{max} \quad (2.14)$$

De acuerdo a esto, el problema es encontrar una cota final para el sistema (2.9) donde las perturbaciones satisfacen (2.13) y (2.14).

Para hallar dicha cota vamos a realizar un análisis basado en Lyapunov, dicho análisis será hecho considerando norma ℓ_2 ², el mismo análisis puede hacerse considerando la norma ℓ_∞ ³.

Sea, entonces, $U(x) = x^T P x$ donde $P = P^T > 0$ (es decir U es definida positiva) satisface

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.15)$$

con $Q = Q^T > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= [A(x + \Delta x) + B \Delta u]^T P x + x^T P [A(x + \Delta x) + B \Delta u] \end{aligned}$$

y, haciendo cuentas, resulta

$$\dot{U}(x) = -x^T Q x + 2x^T P A \Delta x + 2x^T P B \Delta u \quad (2.16)$$

Los dos últimos términos pueden ser acotados de la siguiente manera:

$$x^T P A \Delta x \leq 2 \|x\| \|P A\| \|\Delta x_{max}\| \quad (2.17)$$

$$x^T P B \Delta u \leq 2 \|x\| \|P B\| \|\Delta u_{max}\| \quad (2.18)$$

Hasta aquí el análisis es el mismo para ambas normas. Ahora, continuaremos considerando las propiedades particulares de la norma ℓ_2 .

Para la norma ℓ_2 vale que

$$x^T Q x \geq \|x\|_2^2 \lambda_{min}(Q) \quad (2.19)$$

Luego, si

$$\|x\|_2 > \rho \triangleq \frac{2}{\lambda_{min}(Q)} (\|P A\|_2 \|\Delta x_{max}\|_2 + \|P B\|_2 \|\Delta u_{max}\|_2) \quad (2.20)$$

resulta de (2.17) y (2.18) que

$$x^T Q x \geq \|x\|_2^2 \lambda_{min}(Q) > 2x^T P A \Delta x + 2x^T P B \Delta u$$

²Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, la norma ℓ_2 , o norma euclídea, se define como $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

³Dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, la norma ℓ_∞ se define como $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

y de (2.16) se tiene que

$$\dot{U}(x) < 0$$

Sea

$$c \triangleq \max_{\|x\|_2=\rho} U(x) = \rho^2 \lambda_{max}(P) \quad (2.21)$$

Luego, puede asegurarse que las trayectorias finalizarán dentro de la superficie de nivel dada por

$$U(x) = c = \rho^2 \lambda_{max}(P)$$

y la cota final será μ_2 tal que

$$\min_{\|x\|_2=\mu_2} U(x) = \mu_2^2 \lambda_{min}(P) = c$$

esto es

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{c}{\lambda_{min}(P)}}$$

Utilizando (2.21) y (2.20) en la última ecuación se llega a la cota final

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} \cdot \frac{2}{\lambda_{min}(Q)} (\|PA\|_2 \|\Delta x_{max}\|_2 + \|PB\|_2 \|\Delta u_{max}\|_2)$$

El análisis en norma ℓ_∞ es casi idéntico al de norma ℓ_2 . La única diferencia es que la cota inferior dada por (2.19) no es válida en norma ℓ_∞ (ver [25]).

Hasta aquí se resumieron los resultados que permiten estimar cotas finales utilizando el análisis de Lyapunov, en la siguiente sección se presenta el enfoque alternativo que tiene en cuenta la descomposición modal de la matriz del estado del sistema.

2.2. Cotas finales y conjuntos invariantes por descomposición modal

En los últimos años se ha desarrollado una metodología para estimar cotas finales de sistemas con perturbaciones no evanescentes que presenta un enfoque alternativo al análisis de Lyapunov. Este método está basado en la utilización de la estructura del sistema y la geometría de las perturbaciones, permitiendo obtener cotas finales menos conservadoras que las dadas por el método clásico de Lyapunov. La clave de dicho enfoque es el análisis componente a componente en coordenadas modales del estado, es decir, considerando la descomposición de la matriz de estado en su forma canónica de Jordan⁴.

⁴Recordemos que dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, existen una matriz $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y una matriz $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible, tales que $A = PJP^{-1}$. La matriz J es llamada la *forma canónica de Jordan* de A , y P es llamada la *matriz de cambio de base de Jordan*.

En los artículos [25] y [27] se desarrollan las características de esta metodología basada en descomposición modal, en el primero se consideran sistemas lineales estacionarios en tiempo continuo con perturbaciones acotadas independientemente del estado, mientras que en [27] se extiende dicha metodología a sistemas con perturbaciones dependientes del estado, sistemas no lineales y sistemas de tiempo discreto. En esta sección se resumen dichos resultados.

2.2.1. Análisis con la forma de Jordan

Comenzamos planteando la estima de una cota final usando descomposición modal para un sistema lineal de primer orden, con el objetivo de exponer el método de manera simple. Luego, se presentan los análisis correspondientes para sistemas lineales de orden n y para sistemas no lineales que satisfacen cierta condición.

Sistema lineal de primer orden

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + u(t),$$

con $\lambda < 0$ y $|u(t)| < u_m$, donde $u_m \in \mathbb{R}$. Si tenemos que

$$|x| > \frac{u_m}{|\lambda|},$$

entonces, si, además, $x > 0$ resulta $\dot{x} = \lambda x + u < 0$, y en el caso $x < 0$ tenemos que $\dot{x} > 0$, con lo cual una vez que la solución de la ecuación diferencial entra en el intervalo $\left[-\frac{u_m}{|\lambda|}, \frac{u_m}{|\lambda|}\right]$ permanece allí para todo tiempo futuro.

Luego, $|x(t)| \leq \frac{u_m}{|\lambda|}$ determina una región invariante y $b = \frac{u_m}{|\lambda|}$ es una cota final para el sistema.

Una consecuencia inmediata de este análisis es la generalización al caso de un sistema de orden n cuya matriz de evolución es una matriz diagonal. en efecto, sea el sistema

$$\dot{x}(t) = \Lambda x(t) + u(t),$$

con $x, u \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_i < 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, y supongamos, además, que

$$|u(t)| \preceq u_m,$$

donde $u_m \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, tenemos n ecuaciones diferenciales de primer orden desacopladas y, realizando el razonamiento anterior para cada una de estas ecuaciones, resulta

$$|x(t)| \preceq |\Lambda^{-1}| \cdot u_m.$$

Lo anterior puede generalizarse al caso de una ecuación diferencial compleja.

Lema 2.1. *Sea*

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) + v(t), \quad (2.22)$$

donde $\lambda, z(t), v(t) \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{Re}(\lambda) < 0$. Supongamos que existe $\tau \in \mathbb{R}_{+,0}$ tal que

$$|v(t)| \leq v_m, \quad \forall 0 \leq t \leq \tau$$

donde $v_m \in \mathbb{R}$. Si $|z(0)| \leq |\mathbf{Re}(\lambda)^{-1}|v_m$, entonces

$$|z(t)| \leq |\mathbf{Re}(\lambda)^{-1}|v_m, \quad \forall 0 \leq t \leq \tau.$$

Esto significa que las soluciones del sistema escalar (2.22) son finalmente acotadas.

Sistemas lineales

A continuación se exponen los resultados demostrados en [27] relacionados con la existencia de cotas finales para sistemas de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n Hurwitz, no necesariamente diagonalizable, y el vector de entradas está acotado componente a componente.

Otra vez, la idea principal será descomponer la matriz A de manera de simplificar las ecuaciones y aplicar los resultados previos. No es necesario que la matriz de evolución sea diagonalizable para obtener una manera sencilla de reescribirla. El Teorema de Jordan (ver nota al pie de página al comienzo de la sección) asegura que para cualquier matriz cuadrada existe una descomposición que permite escribir el sistema en una forma “casi diagonal”. Basándonos en esta descomposición modal se prueba que es posible estimar cotas finales para cada componente del estado en función de las acotaciones de la perturbación.

Primero supongamos que la perturbación está acotada por constantes, esto nos va a permitir encontrar una región invariante y una cota final para las trayectorias del sistema mientras la perturbación se mantenga acotada.

Teorema 2.2. *(Cota constante) Sea*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t), \quad (2.23)$$

donde $x(t), u(t) \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz con forma canónica de Jordan $\Lambda = V^{-1}AV$. Supongamos que existen $\tau \in \mathbb{R}_{+,0}$, $u_m \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|u(t)| \leq u_m, \quad \forall 0 \leq t \leq \tau$$

y definimos

$$S \triangleq |\mathbf{Re}(\Lambda)^{-1}| |V^{-1}| \quad (2.24)$$

entonces,

(i) *Invariancia.* Si $|V^{-1}x(0)| \preceq Su_m$, entonces para todo $0 \leq t \leq \tau$

$$(a) |V^{-1}x(t)| \preceq Su_m.$$

$$(b) |x(t)| \preceq |V|Su_m.$$

(ii) *Convergencia.* Si $\tau = \infty$, entonces dada cualquier condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$, existe un tiempo finito $t_f = t_f(\epsilon, x(0))$ tal que, para todo $t \geq t_f$,

$$(a) |V^{-1}x(t)| \preceq Su_m + \epsilon.$$

$$(b) |x(t)| \preceq |V|Su_m + |V|\epsilon.$$

El resultado anterior proporciona una estimación de la cota final componente a componente de sistemas LTI cuando la cota de la perturbación es constante, es decir, cuando no depende del estado. En el próximo teorema obtenemos, a partir del Teorema 2.2, una expresión para la cota final de sistemas lineales en los cuales la perturbación se encuentra acotada por una función continua que depende del estado y satisface cierta condición de monotonía.

Teorema 2.3. *(Cota dependiente del estado)* Sea

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t), \quad (2.25)$$

donde $x(t), u(t) \in \mathbb{R}^n$, y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz con forma canónica de Jordan $\Lambda = V^{-1}AV$. Supongamos que

$$|u(t)| \preceq \delta(x(t)), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.26)$$

donde $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$ es una aplicación continua que verifica

$$|x_1| \preceq |x_2| \Rightarrow \delta(x_1) \preceq \delta(x_2) \quad (2.27)$$

Consideremos la aplicación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$ definida por

$$T(x) \triangleq |V|S\delta(x) \quad (2.28)$$

con S como en (2.24). Supongamos que existe $x_m \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_m) \prec x_m$. Entonces,

(i) $b \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(x_m)$ existe y satisface $0 \preceq b \prec x_m$.

(ii) Si $|V^{-1}x(0)| \preceq S\delta(x_m)$ entonces, dado cualquier vector positivo $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$, existe un tiempo finito $t_f = t_f(\epsilon, x_m)$ tal que, para todo $t \geq t_f$,

$$(a) |V^{-1}x(t)| \preceq S\delta(b) + \epsilon$$

$$(b) |x(t)| \preceq b + |V|\epsilon.$$

El Teorema anterior da una expresión simple para la cota final y muestra que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : |V^{-1}x| \preceq S\delta(x_m)\}$ es una estimación de la región de atracción para la cota final.

El problema que surge en el uso del teorema es que requiere encontrar un punto x_m que satisfaga $T(x_m) \prec x_m$, aunque chequear esta condición analíticamente puede hacerse, no se puede garantizar éxito en todos los casos. Para solucionar este inconveniente en [27] se plantea el siguiente algoritmo numérico que permite encontrar dicho punto.

Algoritmo 2.1. Considerar una aplicación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$.

1. Elegir un escalar $c > 0$.
2. Definir la aplicación $T_c(x) \triangleq T(x) + c\mathbf{1}_n$ e iterar desde $x = 0$.

En [27] se prueba que el vector al cual converge la iteración en el paso 2 del algoritmo es el punto x_m buscado. De esta manera las hipótesis del Teorema 2.3 son satisfechas y podemos obtener cotas finales para sistemas LTI con perturbaciones acotadas, componente a componente, por funciones que dependen del estado.

Los resultados anteriores permiten extender para ciertos sistemas no lineales la estimación de cotas finales, como puede verse en lo que sigue.

Sistemas no lineales

Consideremos ahora un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (2.29)$$

donde $f(0,0) = 0$ y $A \triangleq (\partial f / \partial x)|_{(0,0)}$ es una matriz Hurwitz. Reescribimos (2.29) como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + [f(x(t), u(t)) - Ax(t)].$$

Si podemos encontrar una función continua $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$ de modo tal que

$$|f(x(t), u(t)) - Ax(t)| \preceq \delta(x(t)), \text{ para todo } t \geq 0,$$

y se satisfaga (2.27), entonces podemos analizar la aplicación definida en (2.28) y esperar que sea posible aplicar el Teorema 2.3 para estimar una cota final y una región de atracción.

Notemos que el sistema (2.30) es un ejemplo de esta reescritura, considerando el sistema no lineal:

$$\dot{x}(t) = f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - 10x_2 + \tau(t) \end{bmatrix}.$$

2.2.2. Comparación con Lyapunov

Para mostrar la eficacia de los resultados relacionados al análisis por descomposición modal vamos a aplicar el teorema 2.3 a un sistema continuo particular y luego compararemos los resultados con los que se obtienen realizando un análisis de Lyapunov.

El sistema

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - \sin(x_1) + \tau(t) \end{bmatrix}}_{=u(t)} \quad (2.30)$$

representa la dinámica de un péndulo con fricción, donde $x = [x_1 \ x_2]^T$ y $\tau(t)$ representa una perturbación debida al torque, que verifica $|\tau(t)| \leq 0.1$. La matriz A es Hurwitz con forma canónica de Jordan $\Lambda = V^{-1}AV$, donde

$$V = \begin{bmatrix} 0.9949 & -0.1005 \\ -0.1005 & 0.9949 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -0.1010 & 0 \\ 0 & -9.8990 \end{bmatrix}$$

El término $u(t)$ en (2.30) puede ser acotado por

$$|u(t)| \leq \delta(x) \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{|x_1|^3}{6} + 0.1 \end{bmatrix}$$

Notar que δ satisface (2.27). La aplicación T , definida en (2.28), es $T(x) = |V|S\delta(x)$, donde $S \triangleq |\mathbf{Re}(\Lambda)^{-1}||V^{-1}|$.

Eligiendo $c = 0.5$, el algoritmo 2.1 converge al punto $[0.6484 \ 0.5297]^T$, desde el cual la iteración de la aplicación T converge a $b = [0.1023 \ 0.0205]^T$. Luego, del Teorema 2.3 concluimos que si $|V^{-1}x(0)| \preceq S\delta([0.6484 \ 0.5297]^T) = [0.1477 \ 0.0149]^T$ entonces dado cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}_+^2$, existe un tiempo finito $t_f = t_f(\epsilon, x_m)$ tal que, para todo $t \geq t_f$,

$$|V^{-1}x(t)| \preceq \begin{bmatrix} 0.1017 \\ 0.0103 \end{bmatrix} + \epsilon \quad (2.31)$$

$$|x(t)| \preceq \begin{bmatrix} 0.1023 \\ 0.0205 \end{bmatrix} + |V|\epsilon \quad (2.32)$$

Observemos que a partir del Teorema 2.3 y mediante el uso del algoritmo 2.1 obtenemos de manera sistemática las cotas finales para las trayectorias del sistema. Comparemos ahora estos resultados con los obtenidos realizando un análisis de Lyapunov. Como en este caso la perturbación es no lineal, no es sencillo extender lo hecho al final de la sección 2.1. Por otro lado, puede verse que si analizamos este sistema siguiendo las ideas del ejemplo 9.2 de [21], considerando como función de Lyapunov la función cuadrática $U = x^T Px$, con P a determinar y acotando $u(t)$ por $\|u(t)\| \leq |x_1|^3/6 + 0.1$, para los valores de los parámetros en este ejemplo, tal método no da información útil pues las

diferentes restricciones involucradas no se satisfacen. Con lo cual vemos que no se puede emplear un método de Lyapunov sistemático en este ejemplo. Veamos, entonces, otra manera de realizar el análisis de Lyapunov:

Vamos a considerar la función $U(x) = x^T P x$, con $P > 0$ tal que satisfaga la ecuación de Lyapunov $A^T P + P A = -Q$ con $Q > 0$ y lo que hacemos es calcular los posibles valores de $\dot{U}(x)$, para todos los valores de $\tau(t)$ (recordemos que $|\tau(t)| \leq 0.1$), sobre las superficies de nivel de $U(x)$. Es decir, numéricamente buscamos para qué superficies de nivel resulta que el máximo valor de \dot{U} es menor que cero. Computacionalmente encontramos que está garantizada la convergencia de las trayectorias del sistema en el conjunto limitado por la superficie de nivel $U(x) = 0.0378$ (ver figura 2.2). Para cualquier x dentro de este conjunto, tenemos que $|x_1| \leq 0.1076$ y $|x_2| \leq 0.1181$. Estas cotas son más conservadoras que las dadas por (2.32). Para obtener una cota más estricta para x_2 , encontramos, vía prueba y error, la función de Lyapunov $U_1(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_1x_2$, la cual asegura convergencia en el conjunto limitado por la superficie de nivel $U_1(x) = 0.0205$, también mostrada en la figura 2.2. Para cualquier x dentro de este conjunto, tenemos que $|x_1| \leq 0.1076$ y $|x_2| \leq 0.0657$, aún más grande que (2.32).

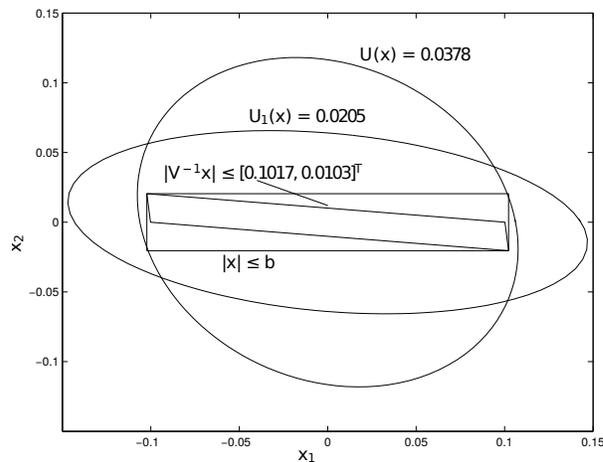


Figura 2.2: Diferentes cotas finales en el sistema del péndulo.

Este ejemplo muestra que el método de Lyapunov usando funciones cuadráticas puede ser más conservativo, y hallar una función de Lyapunov adecuada puede ser una tarea complicada. Además, si el método visto al final de la sección 2.1 es demasiado conservador uno debe resolver el tedioso y complicado procedimiento de evaluar la derivada temporal de la función de Lyapunov a lo largo de las superficies de nivel. Por otro lado, el procedimiento desarrollado mediante el análisis de Jordan visto en la subsección anterior nos da un método sistemático para obtener cotas finales que puede ser fácilmente implementado en un código computacional. Más aún, vimos en este ejemplo

que dicho método proporciona cotas más estrictas.

Resumiendo los resultados plasmados en esta sección, se tiene una alternativa al análisis de Lyapunov para el problema de estimar una cota final. Este enfoque se basa en analizar el problema en las coordenadas modales, obteniendo así una expresión de la cota final por componentes que es función de los autovalores y autovectores del sistema. Esto, a su vez, permite desarrollar una metodología sistemática de diseño de control, como se muestra en la siguiente sección.

2.3. Diseño de control lineal con garantía de cota final

Aquí se expone el diseño de control desarrollado en [28] para sistemas LTI perturbados con múltiples entradas que asegura alcanzar ciertas cotas finales en un tiempo finito.

Primero se establecen definiciones y resultados referidos a la teoría de control que son necesarios para entender los resultados posteriores.

2.3.1. Control en realimentación

Muchas tareas de control requieren el uso de control por realimentación. En general, un objetivo básico de un sistema de control es hacer que alguna salida se comporte de manera deseada mediante la manipulación de alguna entrada. Los objetivos más simples son: tratar de mantener la salida cercana a algún punto de equilibrio, lo que se conoce como *estabilización*, o bien, dada una señal de entrada de referencia, tratar de mantener la diferencia entre la salida y dicha señal lo suficientemente pequeña, lo que recibe el nombre de *seguimiento*. Pero también pueden requerirse objetivos de diseño adicionales, como por ejemplo condiciones especiales sobre la respuesta transitoria de la salida o restricciones en los valores de la entrada de control. Un objetivo de control importante es el de mantener los objetivos básicos de estabilización o seguimiento ante la presencia de incertidumbres en el modelo matemático del sistema, que, como hemos mencionado anteriormente, se caracteriza como una perturbación de un modelo nominal.

Estabilización por realimentación de estados

El problema de estabilización para el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

es el problema de diseñar una ley de control

$$u = \gamma(t, x)$$

tal que el origen $x = 0$ sea un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)).$$

Una vez que sabemos como resolver este problema, podemos estabilizar el sistema respecto de un punto p arbitrario mediante traslación del origen con el cambio de variable $\xi = x - p$. Más aún, p no tiene que ser un punto de equilibrio del sistema a lazo abierto, basta que exista q tal que $f(t, p, q) = 0 \forall t$.

La ley de control en realimentación $u = \gamma(t, x)$ se llama *realimentación estática*, pues u es una función estática de x . Por otro lado, también puede usarse una ley de control dinámica

$$u = \gamma(t, x, z)$$

$$\dot{z} = g(t, x, z)$$

donde z es la solución de un sistema dinámico cuya entrada es x .

Obviamente, el problema de estabilización por realimentación se simplifica cuando el sistema es lineal e invariante en el tiempo,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

El control $u = Kx$ preserva la linealidad del sistema, y el origen del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

es exponencialmente estable si $A + BK$ es Hurwitz. La teoría de control lineal (ver, por ejemplo, [9]) establece que si el par (A, B) es *controlable*, se pueden asignar arbitrariamente todos los autovalores de $A + BK$ mediante una adecuada elección de K . Si (A, B) es *estabilizable*, sólo pueden asignarse los autovalores controlables, pero los autovalores de A que no son (A, B) -controlables deben tener parte real negativa.

Definiciones y propiedades de la Teoría de control

Enumeramos ahora algunas definiciones y resultados de la teoría de control lineal que nos resultarán útiles más adelante. Para más detalles y demostraciones consultar [9].

Definición de controlabilidad. La ecuación de estados $\dot{x} = Ax + Bu$, o el par (A, B) , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier estado final $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe una entrada u que transfiere el estado x de x_0 a x_1 en un tiempo finito. En el caso contrario, la ecuación $\dot{x} = Ax + Bu$, o el par (A, B) , se dice *no controlable*.

Proposición 2.1. (*Test de controlabilidad*). El par (A, B) , con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, es controlable si la matriz de controlabilidad

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], C \in \mathbb{R}^{n \times np},$$

es de rango n .

Proposición 2.2. (Invariancia de la controlabilidad respecto a realimentación). El par $(A + BK, B)$, para cualquier matriz $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, es controlable sii el par (A, B) es controlable.

Proposición 2.3. (Controlabilidad y asignación de autovalores). Todos los autovalores de $A + BK$, pueden asignarse arbitrariamente (siempre y cuando los autovalores no reales se asignen en pares complejos conjugados) eligiendo la matriz constante real K sii (A, B) es controlable.

Definición de índices de controlabilidad. Si (A, B) es controlable, la matriz de controlabilidad \mathcal{C} tiene rango n (n de las np columnas son l.i.). Sea b_i la i -ésima columna de B , así se puede reescribir

$$\mathcal{C} = [b_1 \cdots b_p \quad Ab_1 \cdots Ab_p \quad \cdots \quad A^{n-1}b_1 \cdots A^{n-1}b_p].$$

Busquemos columnas linealmente independientes de izquierda a derecha (notemos que si $A^i b_m$ depende de las columnas de la izquierda, también lo hará $A^{i+1} b_m$). Sea μ_m la cantidad de columnas l.i. asociadas a la columna b_m , es decir

$$b_m \quad Ab_m \quad \cdots \quad A^{\mu_m-1} b_m.$$

son columnas l.i. de \mathcal{C} y $A^{\mu_m+i} b_m$ son l.d. para $i = 0, 1, \dots$. Es claro que si el rango de \mathcal{C} es n entonces

$$\mu_1 + \cdots + \mu_p = n.$$

Los enteros μ_1, \dots, μ_p son llamados *índices de controlabilidad* y $\mu = \max_{i=1, \dots, p} \mu_i$ se llama *índice de controlabilidad de (A, B)* .

2.3.2. Diseño de control para sistemas lineales

Consideremos el sistema lineal perturbado de entrada múltiple

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hw(t) \quad (2.33)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $H \in \mathbb{R}^{n \times k}$ son matrices constantes. Además, el par (A, B) es controlable, B tiene rango columna completo, y la perturbación $w(t) \in \mathbb{R}^k$ satisface:

$$|w(t)| \preceq F\theta(t) + \bar{w}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (2.34)$$

con $F \in \mathbb{R}_{+,0}^{k \times n}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}_{+,0}^k$ y $\theta(t) \in \mathbb{R}_{+,0}^n$ definida como

$$\theta(t) \triangleq \max_{t-\bar{\tau} \leq \tau \leq t} |x(\tau)|, \quad (2.35)$$

donde $\bar{\tau} \geq 0$ y el máximo está tomado por componentes. Utilizando la notación 2.1, la desigualdad (2.34) expresa una cota para cada componente de la perturbación $w(t)$, esto es

$$|w_i(t)| \leq (F\theta(t))_i + \bar{w}_i, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k.$$

Dado un vector $b^* \in \mathbb{R}_+^n$, nuestro objetivo es diseñar un control lineal en realimentación de estados $u(t) = Kx(t)$, con $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tal que las soluciones de $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Hw(t)$, donde $w(t)$ está acotada como en (2.34) y (2.35), estén finalmente acotadas por componentes con cota final b^* , es decir que se satisfaga

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \preceq b^*.$$

En lo que sigue vamos a dar una condición suficiente para conseguir cualquier cota final deseada y un método para calcular la matriz de realimentación K correspondiente.

Análisis de cota final por componentes

Cuando se aplica un control en realimentación de estados $u(t) = Kx(t)$ al sistema (2.33), el sistema a lazo cerrado resultante tiene la forma

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + Hw(t) \quad (2.36)$$

donde $\bar{A} = A + BK$. Vamos a mostrar en el siguiente teorema una expresión para una cota final del sistema (2.36) cuando la perturbación $w(t)$ está acotada como en (2.34) y (2.35).

Teorema 2.4. *Consideremos el sistema (2.36) donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}^k$, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $H \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Sea \bar{A} una matriz Hurwitz con forma canónica de Jordan $\Lambda = V^{-1}\bar{A}V$. Supongamos que (2.34) y (2.35) valen con $F \in \mathbb{R}_{+,0}^{k \times n}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}_{+,0}^k$ y $\bar{\tau} \in \mathbb{R}_0^+$. Definimos la matriz*

$$R \triangleq |V| |(\mathbf{Re} \Lambda)^{-1}| |V^{-1}H| \quad (2.37)$$

y suponemos que $\rho(RF) < 1$, y sea $b \in \mathbb{R}_{+,0}^n$ dado por

$$b \triangleq (I - RF)^{-1}R\bar{w}. \quad (2.38)$$

Entonces,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \preceq b.$$

Demostración: Sea la aplicación $T : \mathbb{R}_{+,0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$ definida por $T(x) \triangleq R(Fx + \bar{w})$. Para cada $\gamma \in \mathbb{R}_{+,0}^n$ y $l \in \mathbb{N}_0$, consideremos la aplicación $T_\gamma^l : \mathbb{R}_{+,0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$ definida por

$$T_\gamma^0(x) \triangleq T(x) + |V|\gamma, \quad T_\gamma^{l+1}(x) \triangleq T_\gamma^l(T_\gamma^l(x)). \quad (2.39)$$

La prueba requiere de las siguientes cuestiones demostradas en [28]:

- (1) Para todo $\theta(0) \in \mathbb{R}_{+,0}^n$ (ver (2.35)), existe $\bar{x} \in \mathbb{R}_{+,0}^n$ tal que $|x(t)| \preceq \bar{x}$, para todo $t \geq -\bar{\tau}$.

- (2) Supongamos que $|x(t)| \preceq \bar{x}$, para todo $t \geq -\bar{r}$. Entonces, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}_+^n$ y $l \in \mathbb{N}_0$, existe un tiempo finito $\bar{t} = \bar{t}(l, \gamma) \geq 0$ tal que $|x(t)| \preceq T_\gamma^{l+1}(\bar{x})$, para todo $t \geq \bar{t}$.
- (3) Supongamos que $|x(t)| \preceq \bar{x}$, para todo $t \geq -\bar{r}$. Entonces, para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$ existe $l = l(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$, y $\gamma = \gamma(\epsilon) \in \mathbb{R}_+^n$ tal que $T_\gamma^{l+1}(\bar{x}) \prec b + \epsilon$.

La afirmación (1) muestra que para cada condición inicial $\theta(0)$, $x(t)$ permanece acotada con una cota que puede depender de la condición inicial $\theta(0)$. Las otras dos afirmaciones combinadas muestran que, siempre que $x(t)$ permanezca acotada, puede acotarse $x(t)$ componente a componente con una cota que se acerca arbitrariamente a b cuando $t \rightarrow \infty$. Esto ya implica el resultado. En efecto, de (1) y (3) resulta que para cualquier $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$, existe $l = l(\epsilon) \in \mathbb{N}_0$, y $\gamma = \gamma(\epsilon) \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$T_\gamma^{l+1}(\bar{x}) \prec b + \epsilon.$$

Para estos valores de l y γ , tenemos, de (2), que existe $\bar{t} = \bar{t}(l, \gamma) \geq 0$ tal que $|x(t)| \preceq T_\gamma^{l+1}(\bar{x}) \prec b + \epsilon$, para todo $t \geq \bar{t}$. Con lo cual resulta,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \preceq b. \quad \square$$

Observemos que este teorema nos proporciona por un lado, una cota final b para el caso en que la perturbación esté acotada por una función que puede depender de los valores pasados del estado, y por otro, una condición suficiente (\bar{A} Hurwitz y $\rho(RF) < 1$) para que el sistema (2.36) sea finalmente acotado cuando la perturbación está acotada como en (2.34) y (2.35).

Control lineal

La cota final b definida en (2.38) depende de las matrices Λ y V que definen la matriz del sistema a lazo cerrado $\bar{A} = V\Lambda V^{-1} = A + BK$, la cual depende, a su vez, de la matriz de realimentación K . Estas dependencias serán las que nos van a permitir desarrollar un procedimiento de diseño de control que garantice cualquier cota final por componentes para sistemas con perturbaciones alineadas.

Para entender de qué manera influye que la cota final dependa de las matrices Λ y V que definen la matriz del sistema a lazo cerrado, consideremos el caso particular de un sistema lineal con una entrada dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + v(t)),$$

donde $u(t)$ es la entrada de control y $v(t)$ es una perturbación acotada.

Dado un vector positivo b_0 , el objetivo es encontrar una matriz de realimentación K de manera que las soluciones del sistema a lazo cerrado con $u(t) = Kx(t)$ satisfagan

$$|x(t)| \preceq b_0 \quad \forall t \geq t_f.$$

2.3. DISEÑO DE CONTROL LINEAL CON GARANTÍA DE COTA FINAL 27

Por simplicidad supongamos que el sistema está en su forma canónica de controlabilidad, es decir:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c(u(t) + v(t)), \quad (2.40)$$

El sistema a lazo cerrado, con $u = K_c x_c$, es

$$\dot{x}_c(t) = \underbrace{(A_c + B_c K_c)}_{=\bar{A}_c} x_c(t) + B_c v(t)$$

Por estar en su forma de controlabilidad, sabemos que

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & -a_n \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son los coeficientes del polinomio característico de la matriz de evolución del sistema.

Supongamos que K_c fue diseñada de manera tal que los autovalores a lazo cerrado sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces una posible matriz de autovectores tal que $\bar{A}_c = V_c \Lambda_c V_c^{-1}$, con $\Lambda_c \triangleq \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, es

$$V_c = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Notemos que podemos expresar los autovalores a lazo cerrado como $\lambda_k = \mu \tilde{\lambda}_k$ para ciertas constantes $\tilde{\lambda}_k \in \mathbb{C}$ y $\mu > 0$, donde $\text{Re}(\tilde{\lambda}_k) < 0$ y $\tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j$ cuando $i \neq j$.

Luego, la matriz de autovectores puede reescribirse como

$$\begin{aligned} V_c &= \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \mu & \tilde{\lambda}_2 \mu & \dots & \tilde{\lambda}_n \mu \\ \tilde{\lambda}_1^2 \mu^2 & \tilde{\lambda}_2^2 \mu^2 & \dots & \tilde{\lambda}_n^2 \mu^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_1^n \mu^n & \tilde{\lambda}_2^n \mu^n & \dots & \tilde{\lambda}_n^n \mu^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\lambda}_2 & \dots & \tilde{\lambda}_n \\ \tilde{\lambda}_1^2 & \tilde{\lambda}_2^2 & \dots & \tilde{\lambda}_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{\lambda}_1^n & \tilde{\lambda}_2^n & \dots & \tilde{\lambda}_n^n \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{R}(\mu) \mathcal{E}. \end{aligned}$$

y la matriz diagonal de autovalores es

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\lambda}_n \mu \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix} = \mu \tilde{\Lambda}$$

Así, la inversa de la matriz de autovectores es $V_c^{-1} = \mathcal{E}^{-1}\mathcal{R}^{-1}(\mu)$ y, como $\mathcal{R}^{-1}(\mu)B_c = \frac{1}{\mu^n}B_c$, resulta

$$|V_c^{-1}B_c| = \frac{1}{\mu^n}|\mathcal{E}^{-1}B_c|$$

Por otro lado, tenemos que $\mathbf{Re}(\Lambda_c)^{-1} = \mu^{-1}\mathbf{Re}(\tilde{\Lambda})^{-1}$, y como $\mathcal{R}(\mu)$ es diagonal con entradas positivas en la diagonal, resulta

$$|V_c\mathbf{Re}(\Lambda_c)^{-1}| = \frac{1}{\mu}\mathcal{R}(\mu)|\mathcal{E}\mathbf{Re}(\tilde{\Lambda})^{-1}|$$

y entonces,

$$|V_c\mathbf{Re}(\Lambda_c)^{-1}| \cdot |V_c^{-1}B_c| = \frac{1}{\mu^{n+1}}\mathcal{R}(\mu)|\mathcal{E}\mathbf{Re}(\tilde{\Lambda})^{-1}| \cdot |\mathcal{E}^{-1}B_c|$$

Notar que, como $\mathbf{Re}(\Lambda_c)^{-1}$ es diagonal, podemos escribir

$$R_\mu \triangleq |V_c| \cdot |\mathbf{Re}(\Lambda_c)^{-1}V_c^{-1}B_c| = |V_c\mathbf{Re}(\Lambda_c)^{-1}| \cdot |V_c^{-1}B_c|$$

Así, definiendo $\bar{R} \triangleq |\mathcal{E}\mathbf{Re}(\tilde{\Lambda})^{-1}| \cdot |\mathcal{E}^{-1}B_c|$, con componentes $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)$, resulta que

$$R_\mu = \begin{bmatrix} \frac{\bar{r}_1}{\mu^n} \\ \frac{\bar{r}_2}{\mu^{n-1}} \\ \vdots \\ \frac{\bar{r}_n}{\mu} \end{bmatrix}$$

Luego, como \bar{R} sólo depende de $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$, una vez elegida la configuración normalizada $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$, podemos hallar μ de manera que R_μ sea menor que cualquier cota positiva dada.

Esta misma idea es la que se utiliza en el Teorema 2.6, cuya demostración puede consultarse en [28], para encontrar la matriz de realimentación K en el caso más general de entrada múltiple, es decir, cuando consideramos el sistema perturbado definido en (2.33)-(2.35).

Sea $x = Ux_c$ la transformación que lleva el sistema (2.33) a su forma canónica de controlabilidad:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t) + U^{-1}Hw(t), \quad (2.41)$$

con $A_c = U^{-1}AU$ y $B_c = U^{-1}B$. Definimos

$$\theta_c(t) \triangleq \max_{t-\bar{\tau} \leq \tau \leq t} |x_c(\tau)|, \quad (2.42)$$

y sea $w(t)$ acotado como sigue:

$$|w(t)| \leq F|U|\theta_c(t) + \bar{w}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (2.43)$$

Veamos un resultado que nos muestra que encontrar una cota final para el sistema transformado (2.41) nos da una cota para el sistema en las coordenadas originales.

Lema 2.2. *Consideremos el sistema (2.41)-(2.43) y supongamos que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x_c(t)| \leq b_c.$$

cuando se aplica un control en realimentación de estados de la forma $u(t) = K_c x_c(t)$. Entonces,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq |U|b_c,$$

donde $x(t)$ es el estado del sistema (2.33)-(2.35) con el control en realimentación $u(t) = K_c U^{-1}x(t)$.

El siguiente Teorema proporciona una manera de elegir los autovalores y autovectores del sistema a lazo cerrado en la forma canónica de controlabilidad y, para dicha elección, el cálculo de la correspondiente matriz de realimentación K_c . La prueba de este teorema puede verse en [28].

Teorema 2.5. *Elegimos una matriz de autovalores $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, satisface $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, y si $\lambda_i \notin \mathbb{R}$, entonces $\lambda_{i-1} = \bar{\lambda}_i$ ó $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$. Sean d_i , $i = 1, \dots, p$, los índices de controlabilidad del sistema y sean $e_{i,j} \in \mathbb{C}$, con $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$ tal que $e_{i,j+1} = \bar{e}_{i,j}$ cuando $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j$ y tal que la matriz*

$$V \triangleq \begin{bmatrix} V_{1,1} & \cdots & V_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p,1} & \cdots & V_{p,n} \end{bmatrix}, \quad V_{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} e_{i,j} \lambda_j^{-(d_i-1)} \\ e_{i,j} \lambda_j^{-(d_i-2)} \\ \vdots \\ e_{i,j} \lambda_j^{-1} \\ e_{i,j} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

tiene columnas linealmente independientes. Sean A_c , B_c las matrices del sistema (2.41) en la forma canónica de controlabilidad y sea

$$K_c = B_c^\dagger (V \Lambda V^{-1} - A_c), \quad (2.45)$$

donde $B_c^\dagger \triangleq (B_c^T B_c)^{-1} B_c^T$. Entonces,

$$A_c + B_c K_c = V \Lambda V^{-1}.$$

Vamos a utilizar estos resultados para hallar una matriz de realimentación que nos permita alcanzar la cota final deseada b^* para el sistema (2.33)- (2.35).

Teorema 2.6. *Sea el sistema (2.33)-(2.35), donde (A, B) es un par controlable y $H = BG$ para alguna $G \in \mathbb{R}^{p \times k}$. Para cada $\mu > 0$ consideremos la matriz de autovalores $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_i = \mu \tilde{\lambda}_i$, con $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, \dots, n$, satisfacen $\tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j$ si $i \neq j$, $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i) < 0$, y si $\tilde{\lambda}_i \notin \mathbb{R}$, entonces $\tilde{\lambda}_{i-1} = \overline{\tilde{\lambda}_i}$ ó $\tilde{\lambda}_{i+1} = \overline{\tilde{\lambda}_i}$. Elegimos $e_{i,j} \in \mathbb{C}$, con $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$, como en el Teorema 2.5 y consideramos la correspondiente matriz V como en (2.44). Sea $x = Ux_c$ la transformación de la variable de estado que lleva el sistema (2.33) a su forma canónica de controlabilidad (2.41) con matrices $A_c = U^{-1}AU$ y $B_c = U^{-1}B$, y definimos*

$$R_\mu \triangleq |V| |(\text{Re} \Lambda)^{-1}| |V^{-1}U^{-1}H|, \quad (2.46)$$

donde el subíndice μ indica la dependencia de la matriz R_μ del escalar μ . Entonces,

- (a) *Si μ es tal que $\rho(R_\mu F|U|) < 1$, entonces el estado del sistema a lazo cerrado (2.33)-(2.35) bajo la realimentación $u(t) = Kx(t)$, con $K = K_c U^{-1}$ y K_c como en (2.45), satisface $\limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \preceq b_\mu$, donde*

$$b_\mu \triangleq |U| |(I - R_\mu F|U|)^{-1}| R_\mu \bar{w}. \quad (2.47)$$

- (b) *El producto $\mu \rho(R_\mu F|U|)$ es una función no creciente de μ . Luego, existe $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho(R_\mu F|U|) < 1$ para todo $\mu > \bar{\mu}$.*
- (c) *Para $\mu > \bar{\mu}$, el producto μb_μ , con b_μ como en (2.47), es una función de μ no creciente componente a componente. Además, para $\mu > \bar{\mu}$, la cota final b_μ en (2.47) satisface*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} b_\mu = 0.$$

La parte (a) del teorema anterior nos da una cota final para el sistema (2.33) -(2.35) junto con la correspondiente matriz de realimentación para diferentes valores escalados del factor μ . Las propiedades que se establecen en las partes (b) y (c) permiten desarrollar un método sistemático de diseño para calcular una adecuada matriz de realimentación para alcanzar cualquier cota final deseada.

2.4. Diseño de control no lineal con garantía de cota final

Hasta aquí los resultados expuestos se aplican a sistemas lineales, en esta sección se muestra un diseño de control para sistemas no lineales que pueden ser representados mediante una transformación de coordenadas, y una ley de control por realimentación, como un sistema lineal (en las nuevas coordenadas) para el cual son válidos los resultados presentados en la sección

anterior. Las demostraciones y detalles de este diseño pueden encontrarse en [26]. Se asumirá que tanto el sistema a lazo abierto como el sistema re-alimentado tienen un punto de equilibrio en el origen. Primero, se brinda una breve explicación de la linealización exacta por realimentación, que representa una herramienta primordial en la teoría del análisis geométrico de sistemas no lineales de control y es la base del diseño no lineal propuesto.

2.4.1. Linealización exacta por realimentación

Consideramos sistemas no lineales *afines en la entrada de control*, es decir, de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.48)$$

y nos preguntamos qué condiciones se necesitan para que exista una *realimentación de estados*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

y un *cambio de variables*

$$z = T(x)$$

que transformen el sistema no lineal a una *forma lineal equivalente*. Esta linealización no se refiere a la linealización aproximada del sistema, sino que convierte “exactamente” al sistema en lineal.

Veamos algunas definiciones:

- **Difeomorfismo:** Una aplicación biyectiva T definida en un dominio D_x es un difeomorfismo si tanto T como T^{-1} son continuamente diferenciables en D_x y $D_z = T(D_x)$, respectivamente.
- **Sistema linealizable Entrada-Estado:** Un sistema no lineal de la forma (2.48) con f, g definidas en un dominio $D_x \subset \mathbb{R}^n$ y suficientemente suaves, es *linealizable entrada-estado* si existe un difeomorfismo $T : D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $D_z = T(D_x)$ contiene al origen y funciones de realimentación $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, con β no singular en D_x , tales que, el cambio de variables $z = T(x)$ transforma (2.48) en

$$\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] \quad (2.49)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y el par (A, B) es controlable.

Tomando $\alpha_0(z) = \alpha(T^{-1}(z))$, $\beta_0(z) = \beta(T^{-1}(z))$ nos queda el sistema expresado en las nuevas coordenadas:

$$\dot{z} = Az + B\beta_0^{-1}(z)[u - \alpha_0(z)]$$

Así, cuando el sistema tiene la estructura anterior, podemos considerar el control

$$u = \alpha_0(z) + \beta_0(z)v$$

para obtener la ecuación lineal

$$\dot{z} = Az + Bv$$

Luego, para estabilizar el sistema podemos simplemente calcular $v = Kz$ tal que la matriz $A+BK$ sea Hurwitz. El control estabilizante completo es no lineal y tiene la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kz = \alpha(x) + \beta(x)KT(x)$$

Ahora, en virtud de la definición de sistema linealizable, la pregunta es: ¿cuándo será posible encontrar un difeomorfismo que lleve un sistema dado a la forma (2.49)? Derivando la ecuación $z = T(x)$, resulta

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x}[f(x) + g(x)u]$$

e igualándola a (2.49), concluimos que el difeomorfismo T debe satisfacer las condiciones:

$$\frac{\partial T}{\partial x}f(x) = AT(x) - B\beta^{-1}(x)\alpha(x) \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}g(x) = B\beta^{-1}(x).$$

Así, determinar si un sistema no lineal dado es linealizable exactamente por realimentación se reduce a resolver las ecuaciones en derivadas parciales (2.50). Veamos cómo simplificar la resolución de estas ecuaciones.

Cuando un sistema es linealizable entrada-estado, la transformación $z = T(x)$ no es única, por ejemplo, si consideramos la transformación lineal $\zeta = Mz$, con M no singular, obtenemos un sistema con la misma estructura que (2.49) pero con matrices A y B diferentes. Esta falta de unicidad de la transformación T nos va a permitir simplificar las ecuaciones (2.50). Consideremos el caso de una sola entrada ($p = 1$). Dado cualquier par (A, B) controlable, existe M no singular que lo transforma a la *forma canónica de controlabilidad*, es decir, $MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda^T$, $MB = B_c$, con

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (A_c + B_c\lambda^T)\zeta + B_c\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)] \\ &= A_c\zeta + B_c\beta^{-1}(x)[u - \tilde{\alpha}(x)] \end{aligned}$$

donde $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x) - \beta(x)\lambda^T MT(x)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que A y B están en la forma canónica de controlabilidad A_c y B_c . Sea

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que

$$A_c T(x) - B_c \beta^{-1}(x) \alpha(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\alpha(x)/\beta(x) \end{bmatrix}, \text{ y que } B_c \beta^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\beta(x) \end{bmatrix}.$$

Usando estas expresiones en las ecuaciones en derivadas parciales (2.50) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) &= T_2(x), & \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) &= 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) &= T_3(x), & \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) &= T_n(x), & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) &= 0 \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) &= -\alpha(x)/\beta(x), & \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &= 1/\beta(x) \end{aligned}$$

Las primeras $n-1$ ecuaciones de la izquierda muestran que las componentes T_2 a T_n de T son funciones de la componente T_1 . Con lo cual, combinando todas las ecuaciones, el problema se reduce a hallar una función $T_1(x)$ que satisfaga

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

donde

$$T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Las funciones α y β están dadas por

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}, \quad \alpha(x) = -\frac{(\partial T_n / \partial x) f(x)}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}. \tag{2.52}$$

Finalmente, para simplificar los cálculos en las nuevas variables, vamos a imponerle a $T_1(x)$ la condición adicional de que $T_1(x^*) = 0$, donde x^* es un punto de equilibrio del sistema a lazo abierto en las coordenadas originales ($f(x^*) = 0$) con respecto al cual queremos estabilizar al sistema. Un ejemplo de la aplicación del método de linealización exacta puede verse en [21, pág. 526, ejemplo 13.13].

2.4.2. Diseño de control no lineal

En lo que sigue se extiende a sistemas no lineales linealizables entrada-estado, el diseño sistemático de control que garantiza la existencia de una cota final para el sistema a lazo cerrado. Luego de plantear las ecuaciones correspondientes al modelo sobre el cual se va a trabajar, se realiza el análisis por descomposición modal y se establece una expresión para las cotas finales que va a permitir realizar el diseño del control que combina linealización exacta con una matriz de realimentación calculada por medio de los autovalores y autovectores como se hizo para el caso lineal. Este procedimiento de diseño se desarrolló en [26].

Se considera el sistema continuo no lineal con n estados, p entradas, y k variables de perturbación descrito por:

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x)u_i + \sum_{j=1}^k h_j(x)w_j, \quad (2.53)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$, y tal que $f, g_1, \dots, g_p, h_1, \dots, h_k$ son campos vectoriales C^∞ definidos sobre un conjunto abierto $U_x \in \mathbb{R}^n$, que contiene al origen. Las variables w_1, \dots, w_k se suponen acotadas de la siguiente manera:

$$|w_j(t)| \leq \theta_j(x(t)), \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.54)$$

donde $\theta_j(x(t)) \geq 0$ para todo $x \in U_x$. Escribimos (2.54) en forma compacta como sigue:

$$|w(t)| \preceq \theta(x(t)), \quad \text{para todo } t \geq 0 \quad (2.55)$$

con $w = \text{col}(w_1, \dots, w_k)$, $\theta = \text{col}(\theta_1, \dots, \theta_k)$. También, escribimos $u = \text{col}(u_1, \dots, u_p)$, $g = [g_1 | \dots | g_p]$ y $h = [h_1 | \dots | h_k]$.

Asociamos con (2.53) su sistema nominal:

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u. \quad (2.56)$$

El sistema nominal (2.56) se supone linealizable entrada-estado en U_x , esto es, existen un difeomorfismo $z = \Phi(x)$ y un par de funciones de realimentación $\alpha(x)$ y $\beta(x)$, todos definidos sobre U_x , con $\beta(x)$ no singular para todo $x \in U_x$ y

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = A_0 z, \quad (2.57)$$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} (g(x)\beta(x)) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} = B_0, \quad (2.58)$$

donde

$$A_0 = \text{diag}(A_1, \dots, A_p), \quad B_0 = \text{diag}(b_1, \dots, b_p), \quad (2.59)$$

con $A_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{d_i \times 1}$,

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

para $i = 1, \dots, p$, y $\sum_{i=1}^p d_i = n$. Luego, la aplicación a este caso de la ley de realimentación de estado $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ al sistema (2.53), donde $v = \text{col}(v_1, \dots, v_p)$ es una nueva entrada, junto con el cambio de coordenadas $z = \Phi(x)$, resulta en

$$\dot{z} = A_0 z + B_0 v + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} w. \quad (2.61)$$

Aplicando la ley de realimentación de estados $v = Kz$ a (2.61), o equivalentemente, el control no lineal

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K\Phi(x) \quad (2.62)$$

a (2.53), resulta

$$\dot{z} = (A_0 + B_0 K)z + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} w. \quad (2.63)$$

Cuando las perturbaciones presentes en el sistema de Ec. (2.53) son perturbaciones alineadas con la entrada, esto es, $h(x) = g(x)\gamma(x)$, para alguna matriz $\gamma(x)$ de funciones continuamente diferenciables definidas sobre U_x , la aplicación del control (2.62) resulta en el sistema a lazo cerrado:

$$\dot{z} = (A_0 + B_0 K)z + B_0 \left[\beta^{-1}(x)\gamma(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(z)} w. \quad (2.64)$$

Para este sistema se pueden encontrar condiciones suficientes que aseguren que sus trayectorias, bajo una ley de realimentación de la forma (2.62), están finalmente acotadas y puede hallarse una expresión para esa cota final. Esto es lo que se expone a continuación.

Análisis de cota final por componentes

Vamos a necesitar la siguiente versión modificada del Teorema 2.3 visto en la Sección 2.2.

Teorema 2.7. *Sea*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Hv(t), \quad (2.65)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $v(t) \in \mathbb{R}^k$, y $H \in \mathbb{R}^{n \times k}$, y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz con forma canónica de Jordan (compleja) $\Lambda = V^{-1}AV$. Supongamos que

$$|v(t)| \preceq \delta(x(t)), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.66)$$

de estados donde $\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^k$ es una aplicación continua que verifica

$$|x_1| \preceq |x_2| \Rightarrow \delta(x_1) \preceq \delta(x_2) \quad (2.67)$$

Consideremos la aplicación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}^n$ definida por

$$T(x) \triangleq |V|S_H\delta(x) \quad (2.68)$$

donde

$$S_H \triangleq |\mathbf{Re}(\Lambda)^{-1}||V^{-1}H|. \quad (2.69)$$

Supongamos que existe $x_m \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(x_m) \prec x_m$. Entonces,

(1) $b \triangleq \lim_{r \rightarrow \infty} T^r(x_m)$ existe y satisface $0 \leq b \prec x_m$.

(2) Si $|V^{-1}x(0)| \preceq S_H\delta(x_m)$ entonces,

(a) $|V^{-1}x(t)| \preceq S_H\delta(x_m)$ para todo $t \geq 0$.

(b) Dado cualquier vector positivo $\epsilon \in \mathbb{R}_+^n$, existe un tiempo finito t_f tal que, para todo $t \geq t_f$,

(i) $|V^{-1}x(t)| \preceq S_H\delta(b) + \epsilon$.

(ii) $|x(t)| \preceq b + |V|\epsilon$.

La prueba de este teorema es casi idéntica a la del Teorema 2.3, la única diferencia es la presencia de la matriz H .

El teorema que sigue da condiciones suficientes para asegurar la acotación final de las trayectorias de un sistema perturbado bajo linealización entrada-estado; también muestra cómo calcular una cota final.

Teorema 2.8. *Consideremos el sistema (2.53), donde la perturbación $w(t)$ satisface (2.55). Supongamos que el sistema nominal asociado (2.56) es li-
nealizable entrada-estado, y sea $z = \Phi(x)$ la transformación de coordenadas, y $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ las funciones de realimentación, de modo que (2.53) es trans-
formado en (2.61) mediante la aplicación del control en realimentación (2.62).
Sea K elegida de modo que $A \triangleq A_0 + B_0K$ es Hurwitz, y sea $\Lambda = V^{-1}AV$*

la forma canónica de Jordan (compleja) de A . Consideremos S_I , definida en (2.69) con $H = I$, y sea $R \triangleq |V|S_I$. Definamos

$$\delta(z) \triangleq \sup_{\zeta: |\zeta| \leq |z|} \left[\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x) \right| \theta(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(\zeta)} \quad (2.70)$$

y sea $T(z) \triangleq R\delta(z)$. Sea $U_z \triangleq \Phi(U_x)$ y supongamos que $T(z_m) \prec z_m$ para algún $z_m \in U_z$. Además, sea $B_m \triangleq \{z : |V^{-1}z| \leq S_I\delta(z_m)\}$ y supongamos que $B_m \subset U_z$. Entonces,

(i) $b_z \triangleq \lim_{r \rightarrow \infty} T^r(z_m)$ existe y si $x(0) \in \Phi^{-1}(B_m)$, las trayectorias del sistema a lazo cerrado (2.53) y (2.62) están finalmente acotadas en la región

$$|x| \leq b \triangleq \sup_{z: |V^{-1}z| \leq S_I\delta(b_z)} |\Phi^{-1}(z)|. \quad (2.71)$$

(ii) Si, además, $h(x) = g(x)\gamma(x)$, entonces (i) vale también si reemplazamos S_I por S_{B_0} , B_0 definido como en (2.58), y δ por δ_m , definida como

$$\delta_m(z) \triangleq \sup_{\zeta: |\zeta| \leq |z|} \left[|\beta^{-1}(x)\gamma(x)| \theta(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(\zeta)} \quad (2.72)$$

Demostración: Definiendo

$$v(t) \triangleq \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(z(t))} w(t), \quad (2.73)$$

podemos escribir el sistema (2.63) como

$$\dot{z}(t) = Az(t) + v(t). \quad (2.74)$$

De (2.55) y de (2.70), se sigue que $|v(t)| \leq \delta(z(t))$, donde $\delta(z)$ verifica (2.67). Si, además, $h(x) = g(x)\gamma(x)$, entonces $v(t) = B_0 s(t)$ (ver (2.64)), donde

$$s(t) = \left[\beta^{-1}(x)\gamma(x) \right]_{x=\Phi^{-1}(z(t))} w(t) \quad (2.75)$$

satisface $|s(t)| \leq \delta_m(z(t))$, ver (2.72), y δ_m también verifica (2.67). Entonces, la parte (1) del Teorema 2.7, establece la existencia de b_z . Luego, aplicando la parte (2)(a) del mismo teorema al sistema (2.74), concluimos que cualquier trayectoria que comience desde una condición inicial $z(0) \in B_m$ no abandona la región $B_m \subset U_z$. Más aún, se sigue de la parte (2)(b)(i) del Teorema 2.7, que $z(t)$ está finalmente acotada en la región $B_z = \{z : |V^{-1}z| \leq S_I\delta(b_z)\} \subset B_m \subset U_z$. Un argumento similar aplicado al caso de perturbaciones alineadas con la entrada muestra que $z(t)$ está finalmente acotada en la región $B_z = \{z : |V^{-1}z| \leq S_{B_0}\delta_m(b_z)\} \subset B_m \subset U_z$.

Teniendo en cuenta que $x = \Phi^{-1}(z(t))$ con Φ un difeomorfismo definido sobre U_z , y que $z(t)$ no puede abandonar U_z , se sigue que $x(t)$ es finalmente acotada en la región $B_x = \Phi^{-1}(B_z)$. Entonces, tomando b como el supremo de $|x|$ en B_x obtenemos la cota final de la ecuación (2.71). \square

Diseño de control no lineal

Como vimos en el caso lineal, lo importante es contar con un método de diseño de control que garantice que cualquier cota final deseada puede alcanzarse.

Mantenemos las hipótesis que las perturbaciones son alineadas con la entrada, y el sistema es linealizable entrada-estado. Es decir, que el sistema a lazo cerrado es de la forma (2.64).

En primer lugar, enunciaremos un resultado que reformula los Teoremas 2.5 y 2.6 para este caso.

Teorema 2.9. *Sea $\mu > 0$, elegimos una matriz de autovalores $\Lambda_\mu = \mu\tilde{\Lambda} = \mu \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$, donde $\tilde{\lambda}_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, satisfice $\tilde{\lambda}_i \neq \tilde{\lambda}_j$ si $i \neq j$, $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i) < 0$, y si $\tilde{\lambda}_i \notin \mathbb{R}$, entonces $\tilde{\lambda}_{i-1} = \overline{\tilde{\lambda}_i}$ ó $\tilde{\lambda}_{i+1} = \overline{\tilde{\lambda}_i}$. Elegimos $e_{i,j} \in \mathbb{C}$, con $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n$, tal que $e_{i,j+1} = \bar{e}_{i,j}$, cuando $\tilde{\lambda}_{j+1} = \overline{\tilde{\lambda}_j}$ y tal que la matriz*

$$V \triangleq \begin{bmatrix} V_{1,1} & \cdots & V_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p,1} & \cdots & V_{p,n} \end{bmatrix}, V_{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} e_{i,j}(\mu\tilde{\lambda}_j)^{-(d_i-1)} \\ \vdots \\ e_{i,j}(\mu\tilde{\lambda}_j)^{-1} \\ e_{i,j} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

tiene columnas linealmente independientes, donde d_i , $i = 1, \dots, p$, son las dimensiones de A_i y b_i definidas en (2.60). Definimos

$$R_\mu \triangleq |V| |(\text{Re}\Lambda_\mu)^{-1}| |V^{-1}B_0|, \quad (2.77)$$

y

$$K_\mu = (B_0^T B_0)^{-1} B_0^T (V\Lambda_\mu V^{-1} - A_0). \quad (2.78)$$

Entonces,

- (i) Las entradas de la matriz μR_μ son funciones no creciente de μ .
- (ii) $A_0 + B_0 K_\mu = V\Lambda_\mu V^{-1}$.

El próximo resultado establece condiciones de diseño para alcanzar una cota final deseada en un sistema perturbado con linealización entrada-estado bajo la hipótesis de perturbaciones alineadas.

Teorema 2.10. *Consideremos el sistema (2.53), donde la perturbación $w(t)$ satisfice (2.55). Supongamos que el sistema nominal asociado (2.56) es linealizable entrada-estado, y sea $z = \Phi(x)$ la transformación de coordenadas, y $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ las funciones de realimentación, de manera que (2.57)-(2.60) se satisfacen. Supongamos también que $h(x) = g(x)\gamma(x)$. Elegimos V y Λ_μ de acuerdo al Teorema 2.9, calculamos R_μ de (2.77), y consideramos δ_m como se definió en (2.72) y*

$$T_\mu(z) \triangleq R_\mu \delta_m(z). \quad (2.79)$$

Sea $z_c \in U_z = \Phi(U_x)$, $z_c \succ 0$, tal que $\{z : |z| \preceq z_c\} \subset U_z$. Entonces,

- (i) Las componentes del vector $\mu T_\mu(z_c)$ son funciones no crecientes de μ para $\mu > 0$.
- (ii) Sea $\mu > 0$, $T_\mu(z_c) \prec z_c$. Entonces, la ley de realimentación (2.62) con $K = K_\mu$ dada en (2.78) asegura que el sistema a lazo cerrado (2.64) está finalmente acotado en la región

$$|x| \preceq b \triangleq \sup_{z: |V^{-1}z| \preceq S_{B_0} \delta_m(b_z)} |\Phi^{-1}(z)|, \quad (2.80)$$

donde S_{B_0} y δ_m están definidas como en el Teorema 2.8 (b) y

$$b_z \triangleq \lim_{r \rightarrow \infty} T_\mu^r(z_c) \prec z_c.$$

Demostración: (i) De la parte (i) del teorema anterior se sigue que las componentes del vector $T_\mu(z_c)$ decrecen con μ .

- (ii) Definiendo $v(z, w) \triangleq \beta^{-1}(\Phi^{-1}(z))\gamma(\Phi^{-1}(z))w$, el sistema a lazo cerrado (2.63) bajo perturbaciones alineadas y con $K = K_\mu$ se convierte en

$$\dot{z}(t) = (A_0 + B_0 K_\mu)z(t) + B_0 v(z(t), w(t)). \quad (2.81)$$

Por la parte (ii) del Teorema 2.9, $A_\mu \triangleq A_0 + B_0 K_\mu = V\Lambda_\mu V^{-1}$, lo cual asegura que A_μ es Hurwitz, pues $\Lambda_\mu = \mu \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$ y $\text{Re}(\tilde{\lambda}_i) < 0$.

De (2.55) y (2.72), se sigue que $|v(z, w)| \preceq \delta_m(z)$. También es fácil verificar que δ_m satisface (2.67). Luego, tomando $H = B_0$ y aplicando la parte (2)(b)(ii) del Teorema 2.7 al sistema (2.81), concluimos que cualquier trayectoria tal que $|V^{-1}z(0)| \preceq S_{B_0} \delta(z_c)$ no puede abandonar la región $B_c = \{z : |V^{-1}z| \preceq S_{B_0} \delta(b_z)\}$. Notemos que B_c está enteramente contenida en la región $\{z : |z| \preceq z_c\} \subset U_z$ y entonces $B_c \subset U_z$. Finalmente, aplicando el Teorema 2.8 resulta que x está finalmente acotada en la región (2.80). \square

El teorema anterior, establece en la parte (i) que las componentes del vector $T_\mu(z_c)$ decrecen con μ . Luego, la condición $T_\mu(z_c) \prec z_c$ puede alcanzarse siempre eligiendo μ suficientemente grande. La parte (ii) del teorema se puede aplicar para diseñar la matriz de realimentación K en (2.62) de manera que el sistema a lazo cerrado tenga una cota final arbitraria.

2.5. Detección de fallas basada en conjuntos

Muchas veces en los sistemas de control automatizados de la industria moderna ocurren fallas en alguno de los componentes del sistema, con lo cual el desempeño del mismo normalmente se deteriora e incluso puede llegar a haber consecuencias drásticas a causa de esto. La detección temprana de fallas en el funcionamiento del sistema, y el diagnóstico correcto de su origen, son esenciales para tomar las medidas necesarias para reconfigurar el sistema de manera que se adapte a la nueva situación.

Desde la introducción de las primeras técnicas de diagnóstico de fallas en la década de 1970, se han propuesto muchas metodologías de detección e identificación de fallas que pueden consultarse, por ejemplo, en los libros y trabajos de revisión literaria [13, 41, 3, 20, 5, 17, 15]. Gran parte de estas técnicas están basadas en el uso de observadores que proveen “redundancia analítica”. Estos observadores generan señales (comúnmente llamadas ‘residuos’) que actúan como indicadores de la presencia de fallas. En operación sin fallas, los residuos normalmente tienen valores pequeños causados por perturbaciones y otros tipos de incertidumbres. Cuando ocurre una falla, los valores de los residuos crecen y la falla es detectada si se supera cierto “umbral” que se determina previamente en base a ciertas hipótesis sobre el sistema y señales externas.

Una metodología relacionada al principio de diagnóstico mediante residuos y umbrales se basa en verificar durante la operación del sistema la “pertenencia” de los residuos a determinados “conjuntos” que representan valores del estado consistentes con las mediciones del sistema [44, 19]. Teniendo en cuenta esta metodología de diagnóstico de fallas en base a conjuntos, en lo que sigue se muestra un método basado en los conceptos de *conjuntos invariantes* y *cotas finales* que fue desarrollado en [7] y es la base del trabajo sobre control tolerante a fallas presentado en el Capítulo 5 de esta Tesis. La característica más novedosa de este método es la posibilidad de proveer garantías de detección y diagnóstico, ya que los residuos (u otras señales de interés) convergen a estos conjuntos y permanecen en ellos indefinidamente si no hay cambios en la situación de fallas.

2.5.1. Esquema de detección y reconfiguración

La estrategia propuesta para el control tolerante a fallas (FTC, *Fault-Tolerant Control*) del actuador se basa en el cálculo de conjuntos invariantes. El esquema consiste de un banco de observadores que coinciden con las diferentes situaciones de falla que pueden ocurrir en la planta. Cada uno de estos observadores tiene un error de estimación asociado que tiene un comportamiento distintivo cuando el observador coincide con la situación de falla actual en la planta. Con esta información de cada observador, un módulo de diagnóstico y aislamiento (FDI, *Fault Diagnosis and Isolation*) puede reconfigurar el lazo de control seleccionando el controlador de estabilización apro-

piado de un banco de leyes de control precalculadas, cada una de ellas consiste de una ganancia de realimentación de estado y una señal de referencia exógena relacionada con uno de los modelos de fallas considerados. El módulo FDI también selecciona la estimación del estado apropiada para construir una señal de realimentación que consiste de la ganancia de realimentación seleccionada multiplicando la diferencia entre la estimación del estado dada por el observador y la señal de referencia exógena seleccionada. Los criterios de decisión de FDI se basan en el cálculo de los conjuntos hacia los cuales convergen los errores de estimación. Estos conjuntos se calculan para cada escenario de falla considerado, para cada observador y para cada configuración de control.

Una propiedad clave para el diagnóstico correcto de fallas en el esquema propuesto es la separación de los conjuntos que caracterizan la operación saludable de los que caracterizan la operación defectuosa. La redundancia de componente inherente que se requiere para un esquema FTC de actuador proporciona, en muchas aplicaciones, suficiente flexibilidad para lograr la separación de conjunto antes mencionada. Además, la técnica propuesta es particularmente adecuada para problemas de seguimiento de referencia cuando la señal de referencia contiene un componente de desplazamiento. En esos casos, la señal de referencia proporciona un mecanismo adicional para lograr la separación del conjunto deseado. Bajo ciertas condiciones, se puede garantizar la estabilidad del sistema de control tolerante a fallas resultante.

El esquema de detección y reconfiguración considerado aparece en la Figura 2.3. Los detalles de cada una de las partes que forman dicho esquema, con sus respectivas características, así como el cálculo de los conjuntos invariantes correspondientes pueden consultarse en [7].

2.5.2. Módulo de diagnóstico y aislamiento de falla

El módulo FDI recibe la salida de la planta $y(t)$ y los errores de estimación $\hat{x}_{i,j}^j(t)$ obtenidos desde los observadores, donde los subíndices i, j representan la situación de falla actual y el control en uso, respectivamente. Como muestra la Fig. 2.3, este módulo consta de dos subsistemas. El primero de ellos corresponde al cálculo de los errores de estimación de la salida, $e_{i,j}^k$, con $k = 0, \dots, m$.

El segundo subsistema es el módulo de decisión, el cual implementa el algoritmo de detección que se describe más adelante. Una vez que la falla es detectada y aislada usando la estimación de la salida calculada, el módulo FDI selecciona el índice j apropiado tanto para la ley de control como para el exosistema, y este índice es utilizado para implementar la entrada de control correspondiente dada por $u_j(t) \triangleq K_j \hat{z}_{i,j} + u_{r,j}(t)$.

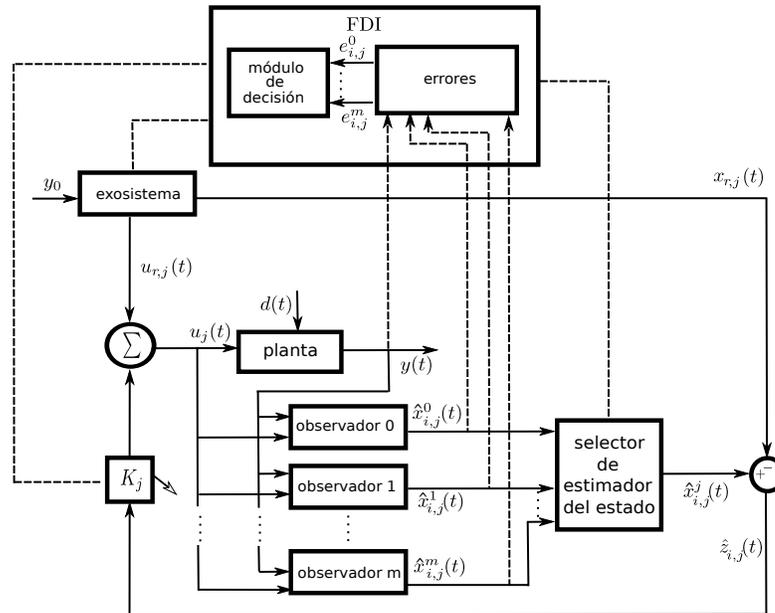


Figura 2.3: Esquema de detección de falla y reconfiguración.

2.5.3. Criterio de detección de fallas

La estrategia de diagnóstico y aislamiento de falla considera bolas \mathcal{B}_{r_k} centradas en el origen del espacio del error de estimación de la salida para cada observador. Los radios de estas bolas, denotados por r_k , son determinados de manera que la k -ésima bola contenga al conjunto invariante correspondiente al observador que coincide con la situación de falla actual (ver Sección 4.1 de [7]) y tal que no se superponga con ninguno de los conjuntos que corresponden a los observadores que no coinciden con la situación de falla de la planta.

El módulo de decisión de FDI está constantemente comprobando que las trayectorias que están dentro de la bola correspondiente \mathcal{B}_{r_k} para cada espacio del error de estimación de salida. Si ocurre una falla, las trayectorias cambiarán entre los conjuntos o permanecerán en ellos. En particular, la falla será detectada cuando la (única) trayectoria del error de estimación de salida que estaba dentro de su bola asociada abandone la bola. Para evitar cambios abruptos debido a algún comportamiento transitorio, se debe esperar un cierto tiempo t_s para asegurar que todas las trayectorias hayan convergido a los nuevos conjuntos. Después de este tiempo t_s , todo el sistema se verifica nuevamente y sólo una de las trayectorias de $e_{i,j}^k(t)$ -la que está relacionada con el observador que coincide con el comportamiento de la planta- debe estar dentro de la bola correspondiente. Esto determina el nuevo índice $j \in \{0, \dots, m\}$. Notar que el hecho de esperar un tiempo t_s antes de cambiar la decisión del

FDI previene las oscilaciones no deseadas en las decisiones del FDI y en el comportamiento a lazo cerrado. Resumiendo, el criterio de detección de fallas implementado por el módulo FDI es el siguiente:

Algoritmo 2.2. (Criterio de detección)

1. Mientras $e_{i,j}^k(t)$, para algún $k \in \{0, \dots, m\}$, esté dentro de la bola \mathcal{B}_{r_k} correspondiente, mantener la ley de control K_j , con $j = k$;
2. Si $e_{i,j}^k(t)$ deja la bola \mathcal{B}_{r_k} correspondiente, esperar t_s unidades de tiempo;
3. Chequear todas las trayectorias $e_{i,j}^k(t)$ con $t \geq t_s$, para $k = 0, \dots, m$. Elegir la ley de control $K_{\tilde{j}}$, con $\tilde{j} = \tilde{k}$, correspondiente a la trayectoria $e_{i,\tilde{j}}^{\tilde{k}}(t)$ que está dentro de la bola $\mathcal{B}_{r_{\tilde{k}}}$.

El funcionamiento del esquema de detección de falla es ilustrado en la Figura 2.4. Allí, se representan conceptualmente los espacios de los errores de estimación de salida de tres observadores⁵ ($k = 0, 1, 2$).

⁵Las componentes de los vectores en los espacios del error de estimación son denotados por e_1 y e_2 .

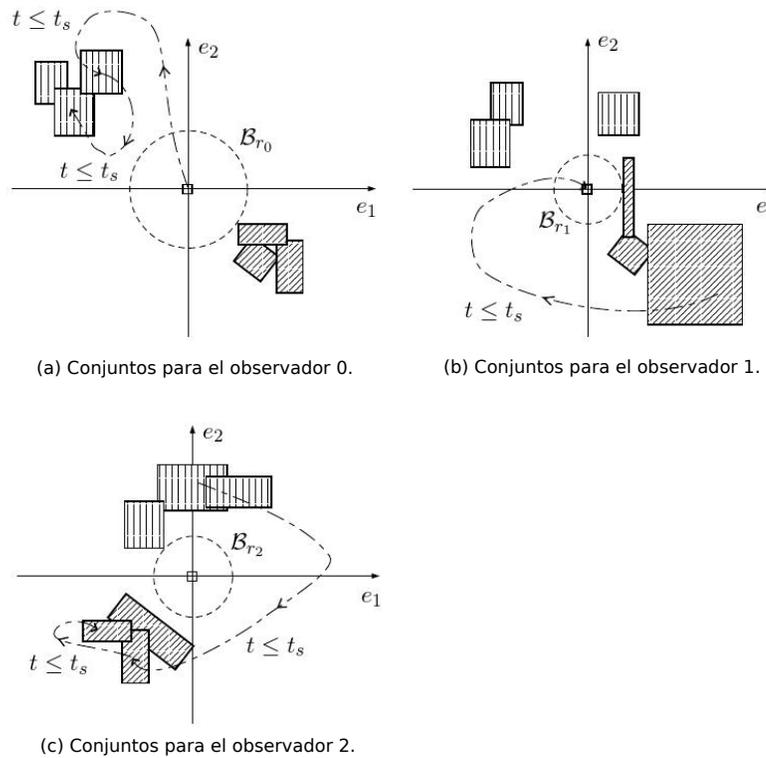


Figura 2.4: Esquema conceptual de la detección basada en conjuntos.

2.6. Cotas finales y conjuntos invariantes probabilísticos

Como vimos al comienzo de este capítulo, cuando un sistema dinámico se encuentra bajo la influencia de perturbaciones no evanescentes, no es posible, en general, alcanzar estabilidad asintótica pero, bajo ciertas condiciones, se puede garantizar la existencia de conjuntos invariantes dentro de los cuales las trayectorias quedan confinadas conforme el tiempo evoluciona.

Una condición necesaria para asegurar la existencia de cotas finales y conjuntos invariantes es que las perturbaciones deben ser acotadas. Sin embargo, en teoría de sistemas, las perturbaciones son frecuentemente representadas por señales no acotadas tales como ruido blanco Gaussiano, en estos casos no pueden obtenerse cotas finales y conjuntos invariantes en un sentido clásico ya que se tratan de perturbaciones estocásticas no acotadas. Para resolver este problema, en [30, 31] se introdujeron las nociones de *cota final probabilística* y *conjunto invariante probabilístico*, como conjuntos hacia los cuales

2.6. COTAS FINALES Y CONJUNTOS INVARIANTES PROBABILÍSTICOS 45

las trayectorias del sistema dinámico estocástico convergen y permanecen en él con una probabilidad dada.

Antes de definir formalmente estos conceptos, repasamos brevemente cuestiones referidas a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas que nos permiten crear un marco de trabajo.

De acá en adelante vamos a considerar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, el cual tiene asociado una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, esto es, una familia de sub σ -álgebras de \mathcal{F} tal que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$ para cualesquiera $0 \leq t < s < \infty$. Se supone que esta filtración es continua a derecha, es decir que $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$, $\forall t \geq 0$, y que \mathcal{F}_0 contiene todos los subconjuntos de Ω de probabilidad cero. En este contexto, en las primeras dos subsecciones se presentan el movimiento browniano y las ecuaciones diferenciales estocásticas definidas a partir del mismo.

2.6.1. Movimiento Browniano. Ruido blanco Gaussiano

Se define un movimiento Browniano 1-dimensional $B : \Omega \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como un proceso estocástico \mathcal{F}_t -adaptado (i.e., B_t es \mathcal{F}_t -medible, $\forall t \geq t_0$) que satisface:

- $\Pr(\{\omega \in \Omega : B(\omega, t_0) = 0\}) = 1$.
- $B(\omega, \cdot) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, llamado camino muestral, es continuo también con probabilidad uno.
- Los incrementos $B(\cdot, t) - B(\cdot, s) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son independientes de \mathcal{F}_s para $t_0 \leq s < t < \infty$ (i.e., si se define el conjunto $S_b \triangleq \{\omega \in \Omega : B(\omega, t) - B(\omega, s) \in (-\infty, b)\}$, para cualquier $b \in \mathbb{R}$, se tiene que $\Pr(A \cap S_b) = \Pr(A)\Pr(S_b)$, $\forall A \in \mathcal{F}_s$). Además, dichos incrementos tienen distribución normal de esperanza 0 y varianza $t - s$.

Un movimiento Browniano m -dimensional $B : \Omega \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ está dado por

$$B(\omega, t) = [B_1(\omega, t), \dots, B_m(\omega, t)]^T,$$

donde cada B_i es un movimiento Browniano 1-dimensional y, para cada $t \geq t_0$, las variables aleatorias $B_1(t), \dots, B_m(t)$ son independientes.

Observación 2.1. *Las condiciones que aparecen en la definición del movimiento Browniano son consecuencia directa de las observaciones del fenómeno físico que modela, registrado por primera vez por el botánico **Robert Brown**, sin embargo la existencia de un proceso estocástico que satisfaga tales condiciones fue demostrada por el matemático **Norbert Wiener**. Por esta razón suele llamarse a este proceso como proceso de Wiener y se lo denota por $\{w(\omega, t) : t \geq t_0\}$. En sentido estricto el movimiento Browniano es el fenómeno físico mientras que su modelo matemático es el proceso de Wiener.*

Observación 2.2. *Para simplificar la notación omitiremos la dependencia de los procesos estocásticos sobre la variable ω .*

Ruido blanco Gaussiano

En muchas aplicaciones (ingeniería, física, finanzas, etc.) el tipo de proceso estocástico $\xi(\cdot)$ que se necesita para modelar correctamente el sistema en estudio es uno que tenga las siguientes propiedades:

1. Las variables aleatorias $\{\xi(t) : t \in \mathbb{R}\}$ son independientes.
2. $\xi(\cdot)$ es estacionario, es decir, dados $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, la distribución del vector aleatorio $(\xi(t + t_1), \xi(t + t_2), \dots, \xi(t + t_n))$ no depende de t .
3. $E[\xi(t)] = 0, \forall t$.

Lamentablemente, no existe un proceso estocástico "razonable" que satisfaga tales características, si se definiera no tendría trayectorias medibles. Sin embargo, es posible representar $\xi(\cdot)$ como un proceso estocástico "generalizado" llamado *ruido blanco Gaussiano*. Que el proceso sea generalizado significa que puede construirse como una medida de probabilidad sobre el espacio de las distribuciones temperadas. Puede probarse que el único proceso con trayectorias continuas que permite representar de alguna manera la acción del ruido blanco es el proceso de Wiener, cuya derivada generalizada resulta ser el ruido blanco Gaussiano (ver [38]).

2.6.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Se considera la ecuación diferencial estocástica n-dimensional:

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dw(t) \quad (2.82)$$

donde $x(\omega, t) \in \mathbb{R}^n$ es una realización en el tiempo t de la v.a. $x(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $t \in [t_0, \infty)$. La condición inicial está dada por $x(\omega, t_0) = x_0$ con probabilidad uno para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Las funciones $f : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ son medibles, y $\{w(t)\}$ es un proceso de Wiener m-dimensional.

La forma integral de la Ec. (2.82) está dada por

$$x(\omega, t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\omega, s), s)ds + \int_{t_0}^t g(x(\omega, s), s)dw(\omega, s), \quad (2.83)$$

donde la segunda integral es una integral estocástica conocida como *integral de Itô*. Dado un proceso adaptado $h(t)$, su integral de Itô, $I(t) = \int_{t_0}^t h(s)dw(s)$, se define teniendo en cuenta la no diferenciabilidad con respecto al tiempo del Movimiento Browniano, para más detalles ver, por ejemplo, [34].

Propiedades de la integral estocástica y fórmula diferencial de Itô

El siguiente teorema muestra algunas de las propiedades más importantes y útiles de la integral de Itô, que serán necesarias a lo largo de esta tesis, la prueba del mismo puede encontrarse en [34].

2.6. COTAS FINALES Y CONJUNTOS INVARIANTES PROBABILÍSTICOS 47

Teorema 2.11. Sean $f, g \in \mathcal{M}^2([a, b], \mathbb{R})$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. $\int_a^b f(t)dw(t)$ es \mathcal{F}_b -medible,
2. $E[\int_a^b f(t)dw(t)] = 0$,
3. $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)]dw(t) = \alpha \int_a^b f(t)dw(t) + \beta \int_a^b g(t)dw(t)$.

La definición básica de las integrales estocásticas no es muy conveniente para evaluar una integral dada, en lo que sigue veremos una fórmula que permite facilitar los cálculos. Al proceso $x(t)$ que satisface la Ec. (2.83) se lo llama *proceso de Itô*, para dicho proceso es posible establecer una versión estocástica de la regla de la cadena conocida como la *fórmula de Itô*, la cual tiene un rol muy importante en el análisis estocástico. El siguiente teorema cuya demostración puede hallarse en [34] enuncia dicha regla.

Teorema 2.12. Sea $x(\cdot)$ un proceso de Itô con diferencial estocástico (2.82) y consideremos el proceso $y(t) = V(x(t), t) \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, entonces $y(\cdot)$ es también un proceso de Itô y vale:

$$dV(x(t), t) = \left[\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x} f(x(t), t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(g^T(x(t), t) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t) g(x(t), t) \right) \right] dt + \frac{\partial V}{\partial x} g(x(t), t) dw. \quad (2.84)$$

Solución de una EDE

Un proceso estocástico $\{x(t)\}_{t \geq t_0}$ es una *solución* de (2.82) con valor inicial x_0 si

- (i) es \mathcal{F}_t -adaptado, continuo con probabilidad uno, y $x(t_0) = x_0$ casi seguramente;
- (ii) los procesos $\{f(x(t), t)\}_{t \geq t_0}$ y $\{g(x(t), t)\}_{t \geq t_0}$ son \mathcal{F}_t -adaptados y satisfacen, respectivamente, que

$\int_{t_0}^T \|f(x(s), s)\|_2 ds < \infty$ y $\int_{t_0}^T |g(x(s), s)|_{\mathcal{F}}^2 ds < \infty$ casi seguramente para todo $T > t_0$, donde $|\cdot|_{\mathcal{F}}$ es la norma de Frobenius⁶

Una solución $\{x(t)\}_{t \geq t_0}$ de (2.82) es única si para cualquier otra solución $\{\bar{x}(t)\}_{t \geq t_0}$ con $\bar{x}(t_0) = x_0$ se tiene que $\Pr(\{\bar{x}(t) = x(t), \forall t \geq t_0\}) = 1$.

⁶Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la norma de Frobenius se define como $|A|_{\mathcal{F}} \triangleq \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\text{tr}(A A^T)}$.

Condiciones de regularidad

Se hacen las siguientes suposiciones sobre las funciones que definen la EDE (2.82):

(S1) Para $T > t_0$ y $n \geq 1$ se supone que $\exists K_{T,n} > 0$ tal que para casi todo $t \in [t_0, T]$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ con $\max\{\|x\|_2, \|y\|_2\} \leq n$, vale:

$$\max\{\|f(x, t) - f(y, t)\|_2^2, |g(x, t) - g(y, t)|_{\mathcal{F}}^2\} \leq K_{T,n}\|x - y\|_2^2.$$

(S2) Para $T > t_0$, $\exists K_T > 0$ tal que para casi todo $t \in [t_0, T]$ y $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$x^T f(x, t) + \frac{1}{2}|g(x, t)|_{\mathcal{F}}^2 \leq K_T(1 + \|x\|_2^2).$$

Estas condiciones son suficientes para garantizar existencia global y unicidad de soluciones para cada condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (ver Theorem 3.6, pág. 58 de [34]).

Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

En lo que sigue, consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales de la forma:

$$dx(t) = Ax(t)dt + dw(t) \quad (2.85)$$

con $x(t), w(t) \in \mathbb{R}^n$. Suponemos que A es una matriz Hurwitz.

Suposición 2.1. *La perturbación $w(t)$ es un proceso estocástico estacionario cuyos incrementos son no correlacionados, con valores medios nulos (es decir, $w(t)$ es un proceso de Lévy, que en el caso de una distribución normal se reduce a un proceso de Wiener). Asumimos también que $w(t)$ tiene matriz de covarianza incremental $\Sigma_w dt \triangleq \text{cov}dw(t) = E[dw(t)dw^T(t)]$, siendo Σ_w una matriz de covarianza finita.*

La caracterización de conjuntos probabilísticos invariantes y cotas finales está basada en las propiedades estocásticas de la solución $x(t)$ de la Ec.(2.85), como su valor esperado y su covarianza, veamos que características tienen estos parámetros.

Dado un tiempo t , la covarianza de la solución está definida como

$$\Sigma_x(t) \triangleq \text{cov}[x(t)] = E[(x(t) - E[x(t)])(x(t) - E[x(t)])^T] \quad (2.86)$$

Tanto Σ_w como $\Sigma_x(t)$ son matrices simétricas y semidefinidas positivas. El valor esperado $\mu_x(t) = E[x(t)]$ puede calcularse (ver, por ejemplo, [1], Teorema 6.1, pág. 66) como la solución de $\dot{\mu}_x(t) = A\mu_x(t)$. Asumimos que el estado inicial $x(t_0)$ es conocido, entonces $\mu_x(t_0) = x(t_0)$ y la ecuación previa tiene como solución

$$\mu_x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0). \quad (2.87)$$

2.6. COTAS FINALES Y CONJUNTOS INVARIANTES PROBABILÍSTICOS 49

La matriz de covarianza $\Sigma_x(t)$ verifica (ver, e.g., [1], Teorema 6.1, pág. 66) la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\Sigma}_x(t) = A\Sigma_x(t) + \Sigma_x(t)A^T + \Sigma_w \quad (2.88)$$

con $\Sigma_x(t_0) = 0$ (pues $x(t_0)$ es conocido). Como A es una matriz Hurwitz, la última expresión converge cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, definiendo $\Sigma_x \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_x(t)$ tenemos de la Ec.(2.88) que Σ_x puede obtenerse de la ecuación de Lyapunov

$$A\Sigma_x + \Sigma_x A^T = -\Sigma_w. \quad (2.89)$$

2.6.3. Definición de PUB y γ -PIS

Ahora podemos presentar los conceptos de cota final probabilística y conjunto invariante probabilístico, definidos y desarrollados en [29]. En lo que sigue, $\Pr[\cdot]$ representa la medida de probabilidad definida sobre \mathbb{R}^n inducida por el proceso estocástico $\{w(\tau)|t_0 \leq \tau \leq t\}$ vía la solución, en el tiempo t , de la ecuación diferencial estocástica (2.85) con condición inicial conocida $x(t_0)$ en el tiempo t_0 .

Definición 2.1 (Cota Final Probabilística). *Sea $p \in (0, 1]$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que S es una cota final probabilística (en inglés, ‘probabilistic ultimate bound’, o PUB) con probabilidad p para el sistema (2.85) si para todo estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $T = T(x_0) \in \mathbb{R}$ tal que la probabilidad $\Pr[x(t) \in S] \geq p$, para cada $t \geq t_0 + T$.*

Para poder definir un conjunto invariante probabilístico para sistemas estocásticos continuos, debemos considerar el producto de un escalar $\gamma \geq 0$ y un conjunto S definido como $\gamma S \triangleq \{\gamma x : x \in S\}$. Notar que, cuando $0 \leq \gamma \leq 1$, y siempre que S sea un *dominio estrellado con respecto al origen*,⁷ se sigue que $\gamma S \subseteq S$.

Definición 2.2 (Conjunto Invariante Probabilístico). *Sea $0 < p \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un dominio estrellado con respecto al origen. Decimos que S es un conjunto invariante probabilístico (en inglés, ‘probabilistic invariant set’, o γ -PIS) con probabilidad p para el sistema (2.85) si para cualquier $x(t_0) \in \gamma S$ la probabilidad $\Pr[x(t) \in S] \geq p$ para cada $t > t_0$.*

Observación 2.3. *En [31] se pueden encontrar las definiciones de estos conjuntos probabilísticos para el caso de tiempo discreto. Las definiciones de PUB para sistemas continuos y discretos son completamente análogas. Sin embargo, los conjuntos PIS para sistemas discretos fueron definidos para asegurar*

⁷Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio estrellado, con respecto al origen si $x \in S \Rightarrow \gamma x \in S$ para todo $0 \leq \gamma \leq 1$

que cualquier trayectoria que comienza en el conjunto permanezca en dicho conjunto con una probabilidad dada. Eligiendo un conjunto suficientemente grande, la contractividad de la dinámica del sistema en la frontera domina al ruido y la probabilidad de que la trayectoria deje el conjunto en el próximo paso puede hacerse arbitrariamente pequeña. En tiempo continuo, sin embargo, esto no es posible. Independientemente de la contractividad, cuando una trayectoria comienza en el tiempo t_0 en la frontera del conjunto, tomando t suficientemente cercano a t_0 , la dinámica está siempre dominada por el ruido blanco debido a su ancho de banda infinito. Así, para $t \rightarrow t_0^+$ la probabilidad de que $x(t)$ deje el conjunto S sólo depende del ruido y resulta independiente del tamaño de S . A fin de resolver esta dificultad fundamental, los estados iniciales de un PIS son restringidos en la Definición 2.2 a un subconjunto γS , con γ menor que uno.

La observación anterior puede ser fácilmente ilustrada por la solución del caso escalar de la Ec. (2.85) con $w(t)$ un proceso de Wiener y $A = -\lambda$, en tal caso $x(t) = e^{-\lambda(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)}dw(\tau)$. Entonces, puede mostrarse que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \Pr[|x(t)| > |x(t_0)|] = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \Pr\left[\int_{t_0}^t dw(\tau) > 0\right] = 0.5$ independientemente de $x(t_0)$ y λ (pues $\int_{t_0}^t dw(\tau)$ es un proceso Gaussiano de media cero). Esto es, no importa cuán contractivo sea el término $e^{-\lambda t}$ ni que tan grande sea la condición inicial $|x(t_0)|$, la probabilidad de confinamiento en $|x(t)| \leq |x(t_0)|$ está dominada por el ruido.

2.6.4. Algunas propiedades de PUB y γ -PIS

Presentamos aquí algunas propiedades básicas de los conjuntos PUB y γ -PIS que son análogas a las de cotas finales y conjuntos invariantes deterministas. Estas propiedades corroboran que las definiciones de PUB y γ -PIS dadas arriba son consistentes con su contraparte determinística. Sus demostraciones pueden encontrarse en [31] y en [32].

Lema 2.3. Si S es un PUB (γ -PIS) con probabilidad p para (2.85), también es un PUB (γ -PIS) con probabilidad $\tilde{p} \geq 0$ para cualquier $\tilde{p} < p$.

Lema 2.4 (γ -PIS \Rightarrow PUB). Sea $S_0 \subset \mathbb{R}^n$ un γ -PIS para (2.85) con probabilidad p . Dado $\varepsilon > 0$ se define $S_\varepsilon = \{x : \text{dist}(x, S_0) \leq \varepsilon\}$. Entonces, S_ε es un PUB para (2.85) con probabilidad p .

Proposición 2.4 (Intersección y unión de PUB). Sea $\{S_i\}_{i=1}^r$ una colección de PUB para el sistema (2.85) con probabilidades p_i , $i = 1, \dots, r$, respectivamente, entonces

- El conjunto $S_\cap = \cap_{i=1}^r S_i$ es un PUB con probabilidad $p = \sum_{i=1}^r p_i - (r-1)$ siempre que $\sum_{i=1}^r p_i > (r-1)$.
- El conjunto $S_\cup = \cup_{i=1}^r S_i$ es un PUB con probabilidad $p = \max\{p_i : i = 1, \dots, r\}$.

2.6. COTAS FINALES Y CONJUNTOS INVARIANTES PROBABILÍSTICOS⁵¹

Proposición 2.5 (Intersección y unión de γ -PIS). Sea $\{S_i\}_{i=1}^r$ una colección de γ_i -PIS para el sistema (2.85) con probabilidades $p_i, i = 1, \dots, r$, respectivamente, entonces

- Siempre que $\sum_{i=1}^r p_i > (r-1)$, el conjunto $S_\cap = \cap_{i=1}^r S_i$ es un γ -PIS con probabilidad $p = \sum_{i=1}^r p_i - (r-1)$ donde $\gamma = \min\{\gamma_i : i = 1, \dots, r\}$.
- El conjunto $S_\cup = \cup_{i=1}^r S_i$ es un γ -PIS con probabilidad $p = \min\{p_i : i = 1, \dots, r\}$ donde $\gamma = \min\{\gamma_i : i = 1, \dots, r\}$.

2.6.5. Caracterización de PUB y γ -PIS

En [31] se desarrolló un método para caracterizar y calcular cotas finales probabilísticas y conjuntos invariantes para (2.85) basados en la desigualdad de Chebyshev⁸, la cual puede ser usada para cualquier proceso de Wiener arbitrario $w(t)$. Los resultados, resumidos en los Teoremas 2.13 y 2.14, también dan cotas más estrictas para el caso especial de perturbaciones Gaussianas.

Dado un parámetro (probabilidad) p tal que $0 < p < 1$, el método considera n parámetros arbitrarios \tilde{p}_i elegidos de manera que

$$0 < \tilde{p}_i < 1, i = 1, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p \quad (2.90)$$

Teorema 2.13. (Caracterización de PUB) Consideremos el sistema (2.85). Asumimos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz Hurwitz y supongamos que $w(t)$ es un proceso estocástico con incrementos no correlacionados y valores medios nulos y con matriz de covarianza incremental $\Sigma_w dt$. Sean $0 < p < 1$ y $\tilde{p}_i, i = 1, \dots, n$, que satisfagan Ec. (2.90). Entonces, cualquier conjunto de la forma $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$ con $\varepsilon > 0$ ⁹ es un PUB para el sistema con probabilidad p , con

$$b_i \triangleq \sqrt{\frac{[\Sigma_x]_{i,i}}{\tilde{p}_i}}; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.91)$$

y Σ_x la solución de la ecuación de Lyapunov (2.89).

Además, cuando $w(t)$ es un proceso de Wiener, la Ec. (2.91) puede ser reemplazada por

$$b_i \triangleq \sqrt{2[\Sigma_x]_{i,i} \operatorname{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_i)}; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.92)$$

donde erf es la función de error: $\operatorname{erf}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\zeta^2} d\zeta$.

⁸Sean X una variable aleatoria integrable con varianza no nula y $\lambda > 0$, entonces $\Pr\{|X - E[X]| \geq \lambda\} \leq \frac{\operatorname{var}[X]}{\lambda^2}$.

⁹El único rol de $\varepsilon > 0$ es asegurar que $T(x_0)$ en la Definición 2.1 es finito (para más detalles, consultar la prueba del Teorema 12 en [31]).

La prueba del Teorema 2.13 se sigue de las del Teorema 12 en [31] (caso general) y del Teorema 1 en [30] (caso Gaussiano) para sistema de tiempo discreto. La única diferencia es que Σ_x es ahora calculada a partir de la versión continua de la ecuación Lyapunov (2.89).

Notar que la cota dada por la Ec. (2.92) es más estricta que la de la Ec. (2.91) pero sólo es válida para ruido con distribución Gaussiana.

Teorema 2.14. (Caracterización de γ -PIS) Consideremos el sistema (2.85), donde la matriz A se asume Hurwitz y diagonalizable¹⁰. Supongamos que $w(t)$ es un proceso estocástico con incrementos no correlacionados y valores medios nulos y con matriz de covarianza incremental $\Sigma_w dt$. Sea $0 < p < 1$ y $\tilde{p}_i, i = 1, \dots, n$, que satisfagan Ec. (2.90). Entonces, el conjunto $S = \{x : |V^{-1}x| \preceq b\}$ es un γ -PIS para el sistema con probabilidad p , donde V es una transformación de semejanza tal que $\Lambda = \text{mathrmdiag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = V^{-1}AV$ es la descomposición diagonal de Jordan de la matriz A , y las componentes de $b = [b_1 \dots b_n]^T$ son calculadas de acuerdo a

$$b_i \triangleq \sqrt{\frac{[\Sigma_v]_{i,i}}{2|\text{Re}(\lambda_i)|(1-\gamma^2)\tilde{p}_i}}; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.93)$$

con $\Sigma_v = V^{-1}\Sigma_w(V^{-1})^*$, donde $(V^{-1})^*$ denota la transpuesta conjugada de V^{-1} .

Además, cuando $w(t)$ es un proceso de Wiener y los parámetros \tilde{p}_i que satisfacen (2.90) son elegidos con la restricción de que para cada par de autovalores complejos conjugados $\lambda_i, \lambda_j = \bar{\lambda}_i$ de la matriz A tomamos $\tilde{p}_i = \tilde{p}_j$, la Ec. (2.93) puede ser reemplazada por

$$b_i \triangleq \sqrt{\frac{[\Sigma_v]_{i,i}}{|\text{Re}(\lambda_i)|(1-\gamma^2)}} \text{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_i); \quad i = 1, \dots, n \quad (2.94)$$

Demostración. Seguimos la idea de las pruebas de los Teoremas 15 y 16 en [31]: Con la transformación lineal $x(t) = Vz(t)$, el sistema (2.85) se convierte en

$$dz(t) = \Lambda z(t)dt + V^{-1}dw(t) \quad (2.95)$$

con $z \in \mathbb{C}^n$, $w(t) \in \mathbb{R}^n$, $V^{-1} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, y $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz diagonal. Definiendo $v(t) \triangleq V^{-1}w(t)$, la covarianza incremental de $v(t)$ satisface $\Sigma_v dt = V^{-1}\Sigma_w(V^{-1})^* dt$, y la i -ésima componente de (2.95) es

$$dz_i(t) = \lambda_i z_i(t)dt + dv_i(t) \quad (2.96)$$

¹⁰En un importante número de aplicaciones, la matriz A en (2.85) está dada por alguna *matriz a lazo cerrado*, por ejemplo, $\tilde{A} - \tilde{B}K$ o $\tilde{A} - L\tilde{C}$ [donde $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ está en el sistema a lazo abierto y K es una ganancia de realimentación, L es una ganancia del observador, etc.]. Bajo condiciones estándares de controlabilidad y observabilidad sobre $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ el diseño de K, L , etc., puede hacerse por técnicas de asignación de polos de modo que las suposiciones sobre A hechas aquí se satisfagan, sin pérdida de generalidad.

2.6. COTAS FINALES Y CONJUNTOS INVARIANTES PROBABILÍSTICOS⁵³

El valor esperado de la variable aleatoria¹¹ $z_i(t)$ entonces verifica $E[z_i(t)] = e^{\lambda_i(t-t_0)}z_i(t_0)$, pues asumimos que $z_i(t_0)$ es conocido. La varianza de $z_i(t)$ puede ser calculada desde (2.96) como

$$\text{var}[z_i(t)] = \frac{1 - e^{2\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}}{2|\text{Re}(\lambda_i)|} [\Sigma_v]_{i,i}$$

Supongamos que $x(t_0) \in \gamma S$, i.e., $|V^{-1}x(t_0)| \leq \gamma b$ con b definida por Ec.(2.93). Así, $|z(t_0)| = |V^{-1}x(t_0)| \leq \gamma b$ y $|z_i(t_0)| \leq \gamma b_i$. Entonces, para todo $t > t_0$ resulta (ver, e.g., Ecuación (6.6) de [1], Pág. 66) que

$$|E[z_i(t)]| = |e^{\lambda_i(t-t_0)}z_i(t_0)| \leq e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}\gamma b_i \quad (2.97)$$

De la desigualdad (2.97), se sigue que

$$\begin{aligned} \Pr[|z_i(t)| \geq b_i] &= \Pr[|z_i(t)| - e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}\gamma b_i \geq b_i(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})] \\ &\leq \Pr[|z_i(t)| - |E[z_i(t)]| \geq b_i(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})] \\ &\leq \Pr[|z_i(t) - E[z_i(t)]| \geq b_i(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})] \end{aligned}$$

La desigualdad de Chebyshev establece que

$$\begin{aligned} \Pr[|z_i(t) - E[z_i(t)]| \geq b_i(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})] \\ \leq \frac{\text{var}[z_i(t)]}{b_i^2(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})^2} \end{aligned} \quad (2.98)$$

y entonces resulta

$$\begin{aligned} \Pr[|z_i(t)| \geq b_i] &\leq \frac{\text{var}[z_i(t)]}{b_i^2(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})^2} \\ &= \frac{1 - e^{2\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}}{2|\text{Re}(\lambda_i)|b_i^2(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})^2} [\Sigma_v]_{i,i} \end{aligned}$$

La expresión

$$\frac{1 - e^{2\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}}{(1 - \gamma e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})^2} \quad (2.99)$$

es máxima cuando $e^{\text{Re}(\lambda_i)(t-t_0)} = \gamma$. Entonces, resulta que $\Pr[|z_i(t)| > b_i] \leq \Pr[|z_i(t)| \geq b_i] \leq \frac{[\Sigma_v]_{i,i}}{2|\text{Re}(\lambda_i)|b_i^2(1-\gamma^2)} = \tilde{p}_i$ para todo $t > t_0$. Así, la probabilidad

$$\Pr[|z(t)| \not\leq b] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[|z_i(t)| > b_i] \leq \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$$

¹¹ $E[z_i(t)]$ se refiere al valor esperado de la variable aleatoria $z_i \in \mathbb{C}$ en el tiempo t con respecto a la medida de probabilidad definida al comienzo de la Subsección 2.6.3.

para todo $t > t_0$, y luego,

$$\Pr[|z(t)| \leq b] = \Pr[|V^{-1}x(t)| \leq b] = \Pr[x(t) \in S] \geq p$$

lo cual prueba que S es un γ -PIS con probabilidad p .

Cuando $w(t)$ es un proceso de Wiener y λ_i es real, reemplazamos la desigualdad de Chebyshev de la Ec.(2.98) por la siguiente expresión válida para distribuciones Gaussianas

$$\begin{aligned} \Pr \left[|z_i(t) - \mathbf{E}[z_i(t)]| \geq b_i(1 - \gamma e^{\mathbf{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}) \right] \\ = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{b_i(1 - \gamma e^{\mathbf{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})}{\sqrt{2\operatorname{var}[z_i(t)]}} \right) \end{aligned}$$

y entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \Pr[|z_i(t)| > b_i] \\ \leq 1 - \operatorname{erf} \left(b_i \sqrt{\frac{(1 - \gamma e^{\mathbf{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})^2 |\mathbf{Re}(\lambda_i)|}{(1 - e^{2\mathbf{Re}(\lambda_i)(t-t_0)}) [\Sigma_v]_{i,i}}} \right) \\ \leq 1 - \operatorname{erf} \left(b_i \sqrt{\frac{(1 - \gamma^2) |\mathbf{Re}(\lambda_i)|}{[\Sigma_v]_{i,i}}} \right) = \tilde{p}_i \end{aligned} \quad (2.100)$$

En el último paso usamos el hecho de que $\operatorname{erf}(\cdot)$ es una función monótonamente creciente y maximizamos la expresión de la Ec.(2.99).

En el caso de autovalores complejos, la Ec.(2.96) puede ser separada en sus partes real e imaginaria $z_i(t) = \mathbf{Re}[z_i(t)] + j\mathbf{Im}[z_i(t)]$, donde ambas componentes son procesos Gaussianos y la varianza puede escribirse como $\operatorname{var}[z_i(t)] = \operatorname{var}[\mathbf{Re}[z_i(t)]] + \operatorname{var}[\mathbf{Im}[z_i(t)]]$. Entonces, la prueba se sigue del Teorema 2 en [30] para sistemas de tiempo discreto, reemplazando $t_0 + N$ por t y $b_i(1 - |\lambda_i|^N)$ por $b_i(1 - \gamma e^{\mathbf{Re}(\lambda_i)(t-t_0)})$. \square

Observación 2.4. *Notar que b_i en la Ec.(2.93) y en la Ec.(2.94) tiende a infinito cuando γ tiende a uno. Esto es consistente con el hecho de que un PIS no puede ser definido sin considerar un factor γ menor que uno para restringir los estados iniciales debido a la naturaleza de ancho de banda infinito de la perturbación de ruido blanco continuo (ver, e.g., las discusiones en [1] sobre ruido blanco continuo).*

Capítulo 3

Diseño de control con Cota Final Probabilística

Este capítulo presenta una aplicación del concepto de cota final probabilística al diseño de una estrategia de control que permite garantizar que un sistema continuo lineal bajo la influencia de ruido blanco tenga, dada una probabilidad p , un cierto PUB preestablecido. Esto extiende los resultados conocidos para sistemas lineales determinísticos que fueron compilados en la Sección 2.3 del Capítulo 2.

Primero se formula el problema sobre el cual se trabaja, presentando las principales características del mismo, luego, en la Sección 3.2 se muestran resultados relacionados al problema de asignación de covarianza del estado que nos van a permitir desarrollar la estrategia de diseño. La Sección 3.3 presenta la técnica de diseño en sí misma y, finalmente, en la Sección 3.4 se ilustra el procedimiento a través de un ejemplo de aplicación.

3.1. Planteo del problema

Se considera un sistema LTI de tiempo continuo dado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + Hdv(t) \quad (3.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, y $v(t) \in \mathbb{R}^q$. Asumimos que el par (A, B) es controlable, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, esta última matriz corresponde a las m entradas de control. Vamos a considerar perturbaciones que están *alineadas*¹ con la entrada de control, es decir, la matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$ es de la forma $H = BG$, para alguna matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times q}$. Asumimos también que $v(t)$ tiene covarianza incremental $\Sigma_v dt$ con Σ_v una matriz de covarianza finita.

¹La hipótesis de perturbaciones alineadas es usual en aplicaciones de control robusto.

El problema aquí es, dados un vector $b \in \mathbb{R}_+^n$, y una probabilidad $p \in (0, 1)$, hallar una ganancia de control K tal que el sistema a lazo cerrado

$$dx(t) = (A + BK)x(t)dt + BGdv(t) \quad (3.2)$$

tenga un PUB $S = \{x : |x| \preceq b + \varepsilon\}$ con probabilidad p para cualquier $\varepsilon > 0$.

El teorema 2.13 muestra que el PUB depende de las entradas diagonales de la matriz de covarianza del estado Σ_x . Así, éste es un problema de *asignación de covarianza del estado*, el cual consiste en hallar una ganancia de realimentación que asigne una covarianza del estado a lazo cerrado específica, [16], similar al problema tratado en [52].

Entonces, antes de presentar los procedimientos de diseño de control para obtener un conjunto PUB deseado, primero derivamos algunos resultados auxiliares referidos a asignación de covarianza.

3.2. Asignación de covarianza en forma canónica de controlabilidad

Cuando la matriz A está en su forma canónica de controlabilidad, y el sistema tiene una entrada simple, la matriz de covarianza que resuelve Ec. (2.89) tiene una *estructura de Xiao* [59].

Definición 3.1 (matriz de Xiao). *Dado un vector $0 \preceq z \in \mathbb{R}^k$, definimos la matriz de Xiao $\mathcal{X}(z) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ como*

$$\mathcal{X}(z) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & -z_2 & 0 & z_3 & \cdots & \cdot \\ 0 & z_2 & 0 & -z_3 & 0 & \cdots & \cdot \\ -z_2 & 0 & z_3 & 0 & -z_4 & \cdots & \cdot \\ 0 & -z_3 & 0 & z_4 & 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_k \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para el caso de múltiples entradas, derivamos el siguiente Lema:

Lema 3.1. *Consideramos el sistema de Ec. (3.2) y asumimos que el par (A, B) está en su forma canónica de controlabilidad, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; y sean $d_j, j = 1, \dots, m$, índices de controlabilidad de (A, B) . Además, definimos*

$$\Sigma \triangleq G\Sigma_v G^T \quad (3.4)$$

y asumimos que el par $(A, B\Sigma^{1/2})$ es controlable. Entonces, la matriz de Xiao bloque diagonal

$$\Sigma_x = \text{diag}(\Sigma_x^1, \dots, \Sigma_x^m) \quad (3.5)$$

donde $\Sigma_x^j \in \mathbb{R}^{d_j \times d_j}$ para $j = 1, \dots, m$ son matrices de Xiao definidas positivas, es una matriz de covarianza asignable para el sistema bajo la ley de realimentación $u = Kx$ con

$$K = -B^\dagger(A\Sigma_x + \Sigma_x A^T + B\Sigma B^T)(I - BB^\dagger/2)\Sigma_x^{-1} \quad (3.6)$$

donde B^\dagger es la inversa de Moore-Penrose de la matriz B . Más aún, la matriz a lazo cerrado $A + BK$ es Hurwitz.

Demostración. Sea $\Sigma_v dt$ la matriz de covarianza incremental de v . Definiendo $w(t) \triangleq Hv(t)$, la covarianza de $w(t)$ está dada por

$$\Sigma_w = H\Sigma_v H^T = BG\Sigma_v G^T B^T = B\Sigma B^T$$

donde $\Sigma = G\Sigma_v G^T$ es la covarianza de $Gv(t)$. Sustituyendo $A + BK$ por A en (2.89) tenemos que la matriz de covarianza del estado a lazo cerrado Σ_x satisface la ecuación de Lyapunov

$$(A + BK)\Sigma_x + \Sigma_x(A + BK)^T = -B\Sigma B^T. \quad (3.7)$$

Notar que Σ_x resulta definida positiva debido a su estructura diagonal en bloques, y sus bloques diagonales son definidos positivos por hipótesis. Por Corolario 4.6 de [16], la ecuación (3.7) tiene una solución K (una tal solución está dada por (3.6)) si y sólo si

$$(I - BB^\dagger)(A\Sigma_x + \Sigma_x A^T + B\Sigma B^T)(I - BB^\dagger) = 0 \quad (3.8)$$

En lo que sigue analizamos la forma de la condición (3.8) cuando (A, B) está en la forma canónica de controlabilidad, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

donde las submatrices $A_{ii} \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{d_i \times m}$, para $i = 1, \dots, m$, tienen la forma

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde *'s representan entradas no determinadas, y $A_{ij} \in \mathbb{R}^{d_i \times d_j}$, para $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$, tienen ceros en todas las entradas excepto posibles elementos no nulos en la última fila. Primero hallamos $(I - BB^\dagger)$. Notar que la matriz B en (3.9), (3.10) tiene sólo m filas no nulas de la forma $[0 \dots 0 \ 1 \ * \ \dots \ *]$, donde los 1's están en la i -ésima posición. Así, eliminando las filas redundantes que contienen sólo ceros, podemos expresar $B^T B = \tilde{B}^T \tilde{B}$, donde $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal principal. Entonces, cálculos simples muestran que $BB^\dagger = B(B^T B)^{-1} B^T = \tilde{B} \tilde{B}^{-1} \tilde{B}^{-T} B^T$ tiene todas sus entradas nulas excepto 1's en las posiciones (σ_i, σ_i) , donde $\sigma_i \triangleq \sum_{j=1}^i d_j$, para $i = 1, \dots, m$. Se sigue que $(I - BB^\dagger)$ tiene la forma

$$(I - BB^\dagger) = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 0) \quad (3.11)$$

Luego, $(I - BB^\dagger)B = 0$, $B^T(I - BB^\dagger) = 0$ y en la multiplicación $(I - BB^\dagger)A$ tenemos que las filas de A con entradas no determinadas *'s son multiplicadas por cero mientras que las filas restantes son multiplicadas por uno. Así, concluimos que $\bar{A} \triangleq (I - BB^\dagger)A$ tiene la forma

$$\bar{A} = \text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m), \quad \Gamma_i \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i} \quad (3.12)$$

Basados en los cálculos anteriores podemos reescribir (3.8) como

$$\bar{A}\bar{\Sigma} + \bar{\Sigma}^T \bar{A}^T = 0, \quad \text{donde } \bar{\Sigma} \triangleq \Sigma_x(I - BB^\dagger). \quad (3.13)$$

Debido a la estructura de Σ_x en (3.5) y usando (3.11), podemos escribir $\bar{\Sigma} = \text{diag}(\bar{\Sigma}_1, \dots, \bar{\Sigma}_m)$, donde $\bar{\Sigma}_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$, $i = 1, \dots, m$, es igual a la matriz de Xiao Σ_x^i con ceros en la última columna. Por lo tanto, (3.13) lleva a las m ecuaciones

$$\Gamma_i \bar{\Sigma}_i + \bar{\Sigma}_i^T \Gamma_i^T = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.14)$$

De la forma de Γ_i en la Ec. (3.12) y la de $\bar{\Sigma}_i$ recién discutida, es fácil ver que (3.14) (equivalentemente, (3.8)) se satisfacen y por lo tanto, Σ_x en (3.5) es una matriz de covarianza a lazo cerrado para el sistema en forma canónica de controlabilidad (A, B) , asignable por realimentación de estado con ganancia (3.6). De la suposición que el par $(A, B\Sigma^{1/2})$ es controlable y del hecho que Σ_x es definida positiva, se sigue (ver [21], Capítulo 4) que $A + BK$, que satisface la ecuación de Lyapunov (3.7), es Hurwitz. \square

El Lema siguiente relaciona la construcción de una matriz de Xiao definida positiva con la elección de las probabilidades \tilde{p}_i en el Teorema 2.13. Este resultado será usado más adelante para construir una matriz de covarianza asignable cuyas entradas diagonales sean las requeridas por el Teorema 2.13 para asegurar que el sistema a lazo cerrado tenga una cota final probabilística deseada.

Lema 3.2. *Sea $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función estrictamente decreciente con $\text{Im}(g) = [a, \infty)$ para alguna constante $a \geq 0$. Sea $b \succ 0$ un vector en \mathbb{R}^n y $0 < p < 1$. Entonces, existen n constantes $0 < \tilde{p}_i < 1$ para $i = 1, \dots, n$ tal que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$ y la matriz de Xiao*

$$\Sigma_x = \mathcal{X} \left(\begin{bmatrix} \frac{(b_1)^2}{g(\tilde{p}_1)^2} & \frac{(b_2)^2}{g(\tilde{p}_2)^2} & \dots & \frac{(b_n)^2}{g(\tilde{p}_n)^2} \end{bmatrix}^T \right)$$

es definida positiva.

Demostración. Vamos a suponer que existe $0 < \tilde{p}_i^{(k)} < 1$ para $i = 1, \dots, n$ con $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i^{(k)} = 1 - p$ tal que la matriz

$$\Sigma_k \triangleq \mathcal{X} \left(\begin{bmatrix} \frac{(b_1)^2}{g(\tilde{p}_1^{(k)})^2} & \frac{(b_2)^2}{g(\tilde{p}_2^{(k)})^2} & \dots & \frac{(b_n)^2}{g(\tilde{p}_n^{(k)})^2} \end{bmatrix}^T \right) \quad (3.15)$$

es definida positiva. Probaremos que existe $0 < \tilde{p}_i^{(k+1)} < 1$ para $i = 1, \dots, n$ con $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i^{(k+1)} = 1 - p$ tal que la matriz

$$\Sigma_{k+1} \triangleq \mathcal{X} \left(\left[\frac{(b_1)^2}{g(\tilde{p}_1^{(k+1)})^2} \quad \frac{(b_2)^2}{g(\tilde{p}_2^{(k+1)})^2} \quad \cdots \quad \frac{(b_{k+1})^2}{g(\tilde{p}_{k+1}^{(k+1)})^2} \right]^T \right) \quad (3.16)$$

es también definida positiva. Primero formamos la matriz

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{k+1} &= \mathcal{X} \left(\left[\frac{(b_1)^2}{g(\tilde{p}_1^{(k)})^2} \quad \frac{(b_2)^2}{g(\tilde{p}_2^{(k)})^2} \quad \cdots \quad \frac{(b_{k+1})^2}{g(\tilde{p}_{k+1}^{(k)})^2} \right]^T \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_k & c_k \\ c_k^T & \frac{(b_{k+1})^2}{g(\tilde{p}_{k+1}^{(k)})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_k & c_k \\ c_k^T & \tilde{d}_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si el producto $c_k^T (\Sigma_k)^{-1} c_k < \tilde{d}_{k+1}$ entonces $\tilde{\Sigma}_{k+1} > 0$ y podemos elegir $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)}$, para $i = 1, \dots, n$, y la matriz Σ_{k+1} definida como en la Ec.(3.16) es definida positiva.

Por otro lado, si $c_k^T (\Sigma_k)^{-1} c_k \geq \tilde{d}_{k+1}$, primero calculamos

$$r_{k+1} = \frac{c_k^T (\Sigma_k)^{-1} c_k}{\tilde{d}_{k+1}} \quad (3.18)$$

y elegimos una constante $\alpha > 1$ para calcular

$$[\Sigma_{k+1}]_{i,i} = \frac{[\Sigma_k]_{i,i}}{\alpha r_{k+1}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq k \quad (3.19)$$

Luego, notando que

$$\frac{b_i}{\sqrt{[\Sigma_{k+1}]_{i,i}}} = \frac{b_i \sqrt{\alpha r_{k+1}}}{\sqrt{[\Sigma_k]_{i,i}}} > \frac{b_i}{\sqrt{[\Sigma_k]_{i,i}}} = g(\tilde{p}_i^{(k)})$$

resulta que

$$\frac{b_i}{\sqrt{[\Sigma_{k+1}]_{i,i}}} \in \text{Im}(g)$$

y podemos tomar

$$\tilde{p}_i^{(k+1)} = \begin{cases} g^{-1} \left(\frac{b_i}{\sqrt{[\Sigma_{k+1}]_{i,i}}} \right) & \text{para } 1 \leq i \leq k \\ \frac{\tilde{p}_i^{(k)} (1 - p - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j^{(k+1)})}{1 - p - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j^{(k)}} & \text{para } i > k \end{cases} \quad (3.20)$$

resultando $\tilde{p}_i^{(k+1)} < \tilde{p}_i^{(k)}$ para $1 \leq i \leq k$, lo cual implica que $\tilde{p}_i^{(k+1)} > \tilde{p}_i^{(k)} > 0$ para $k+1 \leq i \leq n$. Así, los parámetros definidos en Ec.(3.20) satisfacen

$\tilde{p}_i^{(k+1)} > 0$ y $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i^{(k+1)} = 1 - p$ ya que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i^{(k)} = 1 - p$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} &= \mathcal{X} \left(\left[\frac{(b_1)^2}{g(\tilde{p}_1^{(k+1)})^2} \quad \frac{(b_2)^2}{g(\tilde{p}_2^{(k+1)})^2} \quad \cdots \quad \frac{(b_{k+1})^2}{g(\tilde{p}_{k+1}^{(k+1)})^2} \right]^T \right) \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_k & c_k \\ \alpha r_{k+1} & \alpha r_{k+1} \\ c_k^T & \frac{(b_{k+1})^2}{g(\tilde{p}_{k+1}^{(k+1)})^2} \\ \alpha r_{k+1} & d_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_k & c_k \\ \alpha r_{k+1} & \alpha r_{k+1} \\ c_k^T & \\ \alpha r_{k+1} & d_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con $d_{k+1} > \tilde{d}_{k+1}$, esto vale pues $\tilde{p}_{k+1}^{(k+1)} > \tilde{p}_{k+1}^{(k)}$ y g es estrictamente decreciente. Así, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{c_k^T}{\alpha r_{k+1}} \left(\frac{\Sigma_k}{\alpha r_{k+1}} \right)^{-1} \frac{c_k}{\alpha r_{k+1}} &= \frac{c_k^T (\Sigma_k)^{-1} c_k}{\alpha r_{k+1}} \\ &= \frac{\tilde{d}_{k+1}}{\alpha} < d_{k+1} \end{aligned}$$

donde hemos usado en la última desigualdad el hecho que $\alpha > 1$. Luego, Σ_{k+1} es definida positiva.

La prueba por inducción entonces concluye observando que Σ_1 es definida positiva para cualquier elección de los parámetros $\tilde{p}_i^{(1)} > 0$ tales que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i^{(1)} = 1 - p$. Inicialmente podemos tomar, en particular, $\tilde{p}_i^{(1)} = \frac{1-p}{n}$. \square

3.3. Diseño del control

Haciendo uso del Lema 3.1 y 3.2, el siguiente teorema establece que una ganancia por realimentación K puede ser calculada de manera que el sistema a lazo cerrado de Ec.(3.2) tenga un PUB prestablecido arbitrariamente.

Teorema 3.1 (PUB Assignment). *Dado un sistema*

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + BGdv(t) \quad (3.21)$$

donde el par (A, B) es controlable, el vector de perturbación $v(t)$ es un proceso estocástico estacionario de esperanza cero con incrementos no correlacionados y covarianza incremental $\Sigma_v dt$, y el par $(A, B\Sigma^{1/2})$ con Σ definida en (3.4) es controlable, y dado un vector $b > 0$ y una probabilidad $0 < p < 1$, existe una ley de control $u(t) = Kx(t)$ tal que cualquier conjunto de la forma $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$ con $\varepsilon > 0$, es un PUB con probabilidad p del sistema a lazo cerrado (3.2).

Demostración. Dada una matriz de control K tal que $A + BK$ es Hurwitz, si encontramos ciertas constantes $\tilde{p}_i > 0$ sujetas a $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$, entonces, de acuerdo al Teorema 2.13, el conjunto $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$ sería

un PUB con probabilidad p para el sistema a lazo cerrado de Ec.(3.2) siempre que

$$b_i = \sqrt{[\Sigma_x]_{i,i}} g(\tilde{p}_i)$$

con

$$g(\tilde{p}_i) = \begin{cases} 1/\sqrt{\tilde{p}_i} & \text{distribución general} \\ \sqrt{2}\text{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_i) & \text{distribución Gaussiana} \end{cases} \quad (3.22)$$

y donde Σ_x es la solución de la ecuación de Lyapunov (3.7).

Vamos a suponer primero que el par (A, B) está en su forma canónica de controlabilidad. Notar que en ambos casos (distribución general y Gaussiana), la función $g(\cdot)$ verifica las hipótesis del Lema 3.2 (con $a = 1$ y $a = 0$, respectivamente).

Entonces, tomando m constantes $q_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, tales que $\sum_{j=1}^m q_j = 1$, y definiendo σ_j para $j = 1, \dots, m$ como en la prueba del Lema 3.1, podemos usar el resultado del Lema 3.2 y, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, hallar d_j constantes \tilde{p}_i , con $i = \sigma_j - d_j + 1, \dots, \sigma_j$ tales que

$$\sum_{i=\sigma_j-d_j+1}^{\sigma_j} \tilde{p}_i = q_j(1-p) = 1 - \hat{p}_j$$

y la matriz de Xiao

$$\Sigma_x^j = \mathcal{X}(\{b_i^2/g(\tilde{p}_i)^2; i = \sigma_j - d_j + 1, \dots, \sigma_j\})$$

resulta definida positiva.

Luego, de acuerdo al Lema 3.1, la matriz $\Sigma_x = \text{diag}(\Sigma_x^1, \dots, \Sigma_x^m)$ es una matriz de covarianza definida positiva asignable bajo la ley de control $u = Kx$ con K calculada desde la Ec.(3.6), y la matriz a lazo cerrado $A + BK$ es Hurwitz.

Notar que las n entradas diagonales de Σ_x son $b_i^2/g(\tilde{p}_i)^2$, y

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=\sigma_j-d_j+1}^{\sigma_j} \tilde{p}_i = \sum_{j=1}^m q_j(1-p) = 1-p$$

Entonces, usando el Teorema 2.13, el conjunto $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, es un PUB con probabilidad p del sistema a lazo cerrado (3.2).

En el caso que el par (A, B) no esté en la forma canónica de controlabilidad, existe una transformación lineal U que lo lleva a tal forma. Bajo esta transformación, el sistema de Ec.(3.21) se convierte en

$$dx_c(t) = A_c x_c(t) dt + B_c u(t) dt + B_c G dv(t) \quad (3.23)$$

con $A_c = U^{-1}AU$, y $B_c = U^{-1}B$.

Sea $\tilde{\Sigma}_c$ un bloque diagonal de la matriz de Xiao que de acuerdo al Lema 3.1 es una matriz de covarianza asignable para el par (A_c, B_c) . Definimos $\tilde{\Sigma}_x \triangleq U\tilde{\Sigma}_cU^T$ y sea $\mu > 0$ un número que también verifica

$$\mu \leq \mu_{\max} \triangleq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i^2}{(a + \delta)^2 [\tilde{\Sigma}_x]_{i,i}}$$

con $a = g(1)$, $g(\cdot)$ definida en Ec.(3.22), y $\delta \triangleq g(1 - p) - a > 0$. Notar que

$$\frac{b_i}{\sqrt{\mu [\tilde{\Sigma}_x]_{i,i}}} \geq \frac{b_i}{\sqrt{\mu_{\max} [\tilde{\Sigma}_x]_{i,i}}} \geq a + \delta$$

lo que implica que el primer término del lado izquierdo de la última desigualdad está en $\text{Im}(g) = [a, \infty)$. Definimos

$$\check{p}_i(\mu) \triangleq g^{-1} \left(\frac{b_i}{\sqrt{\mu [\tilde{\Sigma}_x]_{i,i}}} \right), i = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

Notar que cada función $\check{p}_i(\mu)$ crece monótonamente con μ , tomando valores en el intervalo $(0, \check{p}_i(\mu_{\max})]$. Más aún, existe al menos una función $\check{p}_{i^*}(\mu)$ donde

$$i^* = \arg \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i^2}{(a + \delta)^2 [\tilde{\Sigma}_x]_{i,i}}$$

que asume valores en el intervalo $(0, 1 - p]$. Se define entonces

$$s(\mu) \triangleq \sum_{i=1}^n \check{p}_i(\mu) \quad (3.25)$$

y notar que la función continua $s(\mu)$ crece monótonamente con μ y puede tomar cualquier valor desde 0 hasta $s_{\max} \geq 1 - p$. Así, existe un valor $\bar{\mu}$ tal que $s(\bar{\mu}) = 1 - p$.

Luego, tomando $\Sigma_c = \bar{\mu} \tilde{\Sigma}_c$, resulta que Σ_c es una matriz de covarianza asignable del sistema (3.23) bajo la ley de control $u(t) = K_c x_c(t)$ con

$$K_c = -B_c^\dagger (A_c \Sigma_c + \Sigma_c A_c^T + B_c \Sigma B_c^T) (I - B_c B_c^\dagger / 2) \Sigma_c^{-1} \quad (3.26)$$

Entonces, la matriz de covarianza del sistema (3.21) bajo el control $u(t) = Kx(t)$ con $K = K_c U^{-1}$ resulta

$$\Sigma_x = U \Sigma_c U^T = U \bar{\mu} \tilde{\Sigma}_c U^T = \bar{\mu} \tilde{\Sigma}_x$$

Tomando $\tilde{p}_i = \check{p}_i(\bar{\mu})$ para $i = 1, \dots, n$, de la Ec.(3.24) resulta que

$$b_i = g(\tilde{p}_i) \sqrt{\bar{\mu} [\tilde{\Sigma}_x]_{i,i}} = g(\tilde{p}_i) \sqrt{[\Sigma_x]_{i,i}}$$

con $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$. Luego, de acuerdo al Teorema 2.13, el conjunto $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$ es un PUB con probabilidad p para el sistema a lazo cerrado (3.2). \square

Del Teorema 3.1 y los Lemas 3.1 y 3.2 se puede desarrollar el siguiente algoritmo para hallar una matriz de covarianza asignable Σ_x y la correspondiente ley de control $u(t) = Kx(t)$ tal que el sistema (3.21) tenga una PUB de tamaño b con probabilidad p . Consideramos que el sistema tiene m entradas y que los correspondientes índices de controlabilidad son d_j con $j = 1, \dots, m$. También definimos los índices acumulativos $\sigma_i \triangleq \sum_{j=1}^i d_j$, para $i = 1, \dots, m$ como en la prueba del Lema 3.1.

Algoritmo 3.1. *Diseño de PUB – Forma Canónica de Controlabilidad*

1. Elegir m constantes q_j tales que² $\sum_{j=1}^m q_j = 1$.
2. Para cada j en $1, \dots, m$,
 - a) Calcular $\hat{p}_j = 1 - q_j(1 - p)$.
 - b) Tomar $b^j = [b_{\sigma_j - d_j + 1}, \dots, b_{\sigma_j}]$.
 - c) Tomar $k = 1$ y $\tilde{p}_i^{(1)} = (1 - \hat{p}_j)/d_j$ para $i = 1, \dots, d_j$.
 - d) Usando b^j en lugar de b , formar Σ_k de la Ec. (3.15). Si $k = d_j$ ir al paso 2i).
 - e) Usando b^j en lugar de b formar $\tilde{\Sigma}_{k+1}$ de la Ec.(3.17).
 - f) Si $\tilde{\Sigma}_{k+1} > 0$, tomar $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)}$ e ir al paso (2h).
 - g) Si no, elegir $\alpha > 1$ y calcular $\tilde{p}_i^{(k+1)}$ desde las Ecs.(3.18)–(3.20).
 - h) Hacer $k := k + 1$ y volver al paso (2d).
 - i) Tomar $\Sigma_x^j = \Sigma_k > 0$.
3. Calcular el bloque diagonal de Xiao Σ_x desde la Ec.(3.5).
4. Calcular $\Sigma = G\Sigma_v G^T$ y hallar K a partir de Ec.(3.6).

Cuando el par (A, B) no está en su forma canónica de controlabilidad, el siguiente algoritmo puede ser desarrollado para hallar una ley de control tal que el sistema a lazo cerrado tenga un PUB de tamaño b con probabilidad p .

Algoritmo 3.2. *Diseño de PUB – Forma General*

1. Calcular la matriz U que lleva el sistema (3.21) en su forma canónica de controlabilidad.
2. Elegir un vector positivo \tilde{b}_c y usando el Algoritmo 3.1 hasta el paso (3), calcular una matriz de covarianza asignable $\tilde{\Sigma}_c$ para el sistema en su forma canónica de controlabilidad.
3. Hallar $\bar{\mu}$ tal que $s(\bar{\mu}) = 1 - p$, con $s(\cdot)$ definida en Ecs.(3.24)–(3.25).
4. Calcular $\Sigma_c = \bar{\mu}\tilde{\Sigma}_c$ y K_c desde la Ec.(3.26).
5. Calcular la ganancia de control $K = K_c U^{-1}$.

²Una elección razonable sería $q_j = d_j/n$, que asigna una probabilidad de salida proporcional a la dimensión de cada subespacio de controlabilidad.

3.4. Ejemplo

Consideramos un sistema descrito por la Ec.(3.21) con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.27)$$

$G = [1 \ 1]^T$, y $v(t)$ es un proceso de Wiener con covarianza incremental $\Sigma_v dt = 0.01dt$. Queremos que este sistema tenga un PUB $S = \{x : |x_i| \leq b_i + \varepsilon; i = 1, \dots, n\}$, con $b = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$, para todo $\varepsilon > 0$ con probabilidad $p = 0.9$. Seguimos el algoritmo 3.2:

1. La matriz que lleva el sistema a su forma canónica de controlabilidad es

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2. El vector positivo \tilde{b}_c es elegido aquí como $\tilde{b}_c = b$. Entonces, siguiendo el algoritmo 1 con $q_1 = 3/5$, $q_2 = 2/5$, obtenemos la siguiente matriz de covarianza asignable para el sistema en su forma canónica de controlabilidad:

$$\tilde{\Sigma}_c = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.9239 & 0 & -0.9239 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9239 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9239 & 0 & 2.783 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.848 \end{bmatrix}$$

3. Calculando $\tilde{\Sigma}_x = U\tilde{\Sigma}_cU^T$ y $\tilde{p}_i(\mu)$ desde la Ec.(3.24), el valor $\bar{\mu}$ tal que $s(\bar{\mu}) = 1 - p$ en la Ec.(3.25) es $\bar{\mu} = 0.4911$. Entonces, las probabilidades de salida $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(\bar{\mu})$ resultan $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_4 = 0.0189$, $\tilde{p}_2 = 0.000003$, $\tilde{p}_3 = 0.055597$, y $\tilde{p}_5 = 0.0067$.

4. Calculamos $\Sigma_c = \bar{\mu}\tilde{\Sigma}_c$ y

$$K_c = \begin{bmatrix} -16.4396 & -7.0118 & -15.4396 & -1 & -8.0102 \\ -16.9308 & 1 & -16.9308 & 0 & -4.5102 \end{bmatrix}$$

5. Calculamos la ganancia de control para el sistema en las coordenadas originales:

$$K = \begin{bmatrix} -30.8792 & 1.9984 & 15.4396 & -1 & 22.8689 \\ -33.8616 & 5.5102 & 16.9308 & 0 & 29.3513 \end{bmatrix}$$

Esta ganancia asegura que el sistema (3.2) tiene el PUB deseado con probabilidad $p = 0.9$. Este hecho puede comprobarse aplicando el Teorema 2.13 al sistema a lazo cerrado de la Ec.(3.2) con los valores de \tilde{p}_i calculados en el paso 3.

A fin de verificar los resultados, realizamos 5,000 simulaciones del sistema con condición inicial $x(t_0) = 10 \cdot b$ (fuera de S) y para cada instante de tiempo $t_k = 0.01k$, con $k = 0, \dots, 120,000$, evaluamos la *razón de salida* e como el número de veces que $x(t_k)$ está fuera del PUB dividido por 5,000. Encontramos que para cualquier $t_k \geq 1,050$, entre 7.14% y 10% de las simulaciones estaban fuera del PUB calculado, lo cual coincide con la probabilidad teórica máxima $(1 - p)$ de 10%. La razón de salida calculada como una función del tiempo es ilustrada en la Figura 3.1.

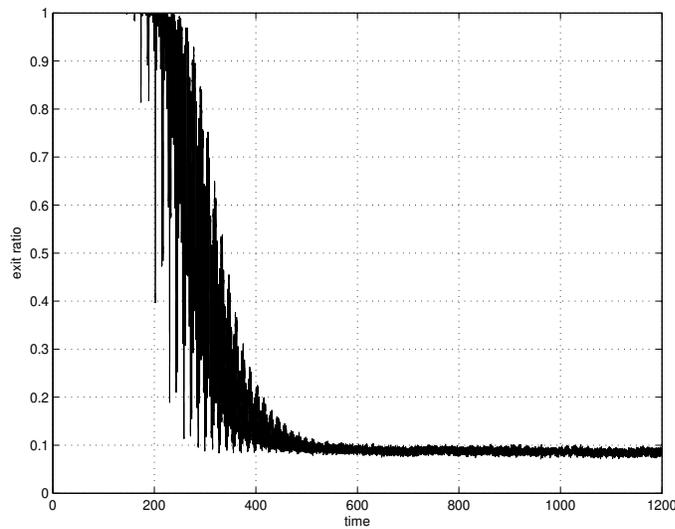


Figura 3.1: Razón de salida vs. t para el PUB

Capítulo 4

Conjuntos probabilísticos PUB y γ -PIS para sistemas no lineales

Los resultados referentes a conjuntos PUB y PIS se establecieron para sistemas con perturbaciones estocásticas que están representados mediante ecuaciones diferenciales lineales. A fin de completar la teoría de los sistemas de control es necesario extender las herramientas actuales para calcular conjuntos invariantes y cotas finales probabilísticas para sistemas estocásticos no lineales. Para ello, en la primera sección de este capítulo se presentan las definiciones de los conjuntos probabilísticos, luego, en la sección 4.2 se proporcionan fórmulas que permiten caracterizar a dichos conjuntos en base a funciones de Lyapunov, estos resultados se relacionan con el concepto de Noise to State Stability, principalmente con el trabajo desarrollado en [36].

Por otro lado, a lo largo de la sección 4.3 se extienden los resultados de diseño de control vistos en el capítulo 3 a sistemas no lineales estocásticos que son afines a la entrada de control y linealizables por realimentación estática. En este caso, el sistema transformado es lineal en el estado pero no lineal en la entrada del ruido y entonces es posible calcular una cota final que no dependa de una función de Lyapunov. Así, se establecen fórmulas para obtener cotas finales para estos sistemas particulares y un algoritmo que resume los resultados de diseño de control y permite determinar la ley de control necesaria para que un conjunto arbitrario sea un PUB para el sistema no lineal.

Finalmente, en la sección 4.5 se plantea un ejemplo de aplicación de los resultados obtenidos.

4.1. Definiciones de PUB y γ -PIS para sistemas no lineales

Aquí se presentan las nociones de cota final probabilística (PUB- Probabilistic Ultimate Bound) y la de conjunto invariante probabilístico (PIS- Probabilistic Invariant Set) para sistemas no lineales. Estos conceptos son completamente análogos a los definidos para sistemas estocásticos lineales vistos en la sección 2.6 del Capítulo 2 los cuales fueron desarrollados en [31, 29].

Consideremos un sistema de la forma

$$dx(t) = f(x)dt + h(x)dw(t) \quad (4.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ son campos continuamente diferenciables, y la perturbación $w(t)$ es un movimiento Browniano vectorial con covarianza incremental $cov[dw(t)] = I_{k \times k}dt$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar $cov[dw(t)] = I_{k \times k}dt$, esto es posible ya que el efecto de una perturbación con covarianza incremental $\Sigma_w dt$ puede modelarse de forma equivalente reemplazando $h(x)$ por $\tilde{h}(x) \triangleq h(x)\sqrt{\Sigma_w}$.

Definición 4.1 (Cota Final Probabilística). *Un conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ es un PUB para el sistema (4.1) con probabilidad $p > 0$ si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $T = T(x_0) > 0$ tal que*

$$\Pr[x(t) \in S] \geq p$$

para cada $t \geq t_0 + T$.

Como se consideran sistemas estocásticos continuos, las observaciones hechas en el Sección del Capítulo 2 respecto a los conjuntos invariantes y su relación con la dinámica del ruido blanco son válidas también para el caso no lineal y deben ser tenidas en cuenta al momento de su definición (ver Observación 2.3).

Definición 4.2 (Conjunto Invariante Probabilístico). *Dado $0 < \gamma < 1$, un conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ es un γ -PIS para el sistema (4.1) con probabilidad $p > 0$ si la condición $x(t_0) \in \gamma S$ implica que*

$$\Pr[x(t) \in S] \geq p$$

para cada $t \geq t_0$.

Con estas definiciones en mente, la siguiente sección determina expresiones para caracterizar los conjuntos probabilísticos de manera de extender los resultados obtenidos en el caso estocástico lineal. La diferencia principal entre ambos casos es que mientras para sistemas lineales es posible conocer la matriz de covarianza de los estados y ésta permite calcular conjuntos invariantes, cuando el sistema es no lineal, esto ya no es posible en general y

deben considerarse otras herramientas para el cálculo de los conjuntos. Por este motivo, se plantean expresiones que involucran funciones tipo Lyapunov. El uso de estas funciones no es arbitrario, es bien conocido que, al igual que para los sistemas no lineales determinísticos, las técnicas basadas en funciones de Lyapunov son ampliamente utilizadas en el análisis de la estabilidad de sistemas estocásticos, ejemplos de esto son [22], [12] y [36].

4.2. Caracterización de conjuntos probabilísticos

Una noción de estabilidad que se utiliza cuando aparecen perturbaciones no evanescentes en sistemas estocásticos es la *estabilidad ruido-estado* (ver [12],[35], [36]). Para un sistema con esta propiedad es posible garantizar una región, que depende de la covarianza del ruido y de la condición inicial, tal que la probabilidad de que el estado salga de dicha región se puede hacer arbitrariamente pequeña. Una herramienta que se considera en [36] para poder asegurar la existencia de dicha región es aplicar una función escalar definida positiva V y hallar cotas sobre el valor esperado de dicha función, basándonos en esta idea presentamos una caracterización de conjuntos PUB y γ -PIS para sistemas no lineales.

Antes de describir las fórmulas que permiten caracterizar las cotas finales y los conjuntos invariantes definimos el siguiente operador.

Definición 4.3. *Dada una función $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definida positiva se define el generador de (4.1) que actúa sobre la función V como la aplicación $\mathcal{L}[V] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathcal{L}[V](x) \triangleq \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h(x) \right).$$

Los próximos resultados expresan los conjuntos PUB y γ -PIS en base a una función de Lyapunov cuyo generador $\mathcal{L}[V]$ satisface cierta condición que permite probar que una vez que las trayectorias del sistema (4.1) entran en un conjunto determinado por V permanecen allí para todo tiempo con una probabilidad preestablecida.

Teorema 4.1 (Caracterización de PUB). *Sea $0 < p < 1$ una probabilidad y sea $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una función definida positiva con $V(0) = 0$. Supongamos que existen una función convexa $\alpha : \mathbb{R}_{+,0} \rightarrow \mathbb{R}_{+,0}$ de clase \mathcal{K}_∞^1 y una constante $\beta > 0$ tales que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{L}[V](x) \leq -\alpha(V(x)) + \beta. \quad (4.2)$$

Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1-p} \right\}$$

¹Recordemos que una función $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es de clase \mathcal{K}_∞ si es continua, estrictamente creciente, no acotada y $f(0) = 0$.

es un PUB con probabilidad p para el sistema de Ec. (4.1).

Demostración. Usando la regla de Itô (Ec. (2.84)) en la Ec. (4.1) para $V(x(t))$, obtenemos

$$dV(x(t)) = \left[\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} h(x) \right) \right] dt + \frac{\partial V}{\partial x} h(x) dw(t)$$

de donde,

$$V(x(t)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}[V](x(s)) ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial V}{\partial x}(x(s)) h(s) dw(s)$$

Calculamos la esperanza a ambos lados de la ecuación anterior, usando la Ec. (4.2) y teniendo en cuenta que $w(t)$ es un proceso de Wiener, y por lo tanto valen las propiedades vistas en el Teorema 2.11, resulta

$$\begin{aligned} E[V(x(t))] &= E[V(x(t_0))] + E \left[\int_{t_0}^t \mathcal{L}[V](x(s)) ds \right] \\ &\leq E[V(x(t_0))] + E \left[- \int_{t_0}^t \alpha(V(x(s))) ds + \int_{t_0}^t \beta ds \right] \\ &= E[V(x(t_0))] - \int_{t_0}^t E[\alpha(V(x(s)))] ds + \int_{t_0}^t \beta ds. \end{aligned}$$

En la última igualdad aplicamos el hecho de que el valor esperado y la integración pueden intercambiarse para un proceso no negativo (resultado derivado del Teorema de Fubini). Como α es convexa, por la desigualdad de Jensen resulta

$$E[V(x(t))] \leq E[V(x(t_0))] + \int_{t_0}^t (-\alpha(E[V(x(s))]) + \beta) ds. \quad (4.3)$$

Supongamos que $E[V(x(t))] > \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$. Por ser α continua y estrictamente creciente, existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\alpha(\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon) = \beta + \tilde{\varepsilon}$. Entonces, volviendo a la desigualdad (4.3), resulta

$$\begin{aligned} E[V(x(t))] &\leq E[V(x(t_0))] + \int_{t_0}^t (-(\beta + \tilde{\varepsilon}) + \beta) ds \\ &= V(x(t_0)) - \tilde{\varepsilon}(t - t_0), \end{aligned}$$

que para t suficientemente grande resulta más pequeño que $\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, contradiciendo la suposición inicial y mostrando que la condición $E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$ es alcanzada. Luego, existe $t_1 > t_0$ para el cual $E[V(x(t_1))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$.

Tomamos $\varepsilon_1 > 0$ y suponemos ahora que existe $t_3 > t_1$ para el cual $E[V(x(t_3))] > \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon + \varepsilon_1$. Sea t_2 el último tiempo de salida de $E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, es decir,

$$t_2 = \sup\{t < t_3 : E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon\}$$

Entonces, en el período (t_2, t_3) tenemos que $E[V(x(t))] \geq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$, y usando la Ec. (4.2) y un razonamiento análogo al hecho anteriormente, resulta

$$\begin{aligned} E[V(x(t))] &\leq E[V(x(t_2))] + \int_{t_2}^t (-\alpha(E[V(x(s))]) + \beta) ds \\ &= E[V(x(t_2))] - \tilde{\varepsilon}(t - t_2) \end{aligned}$$

contradiciendo la suposición $E[V(x(t_3))] \geq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon + \varepsilon_1$.

Luego, tenemos que $E[V(x(t))] \leq \alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon$ para todo $t \geq t_1$. Usando la desigualdad de Markov², obtenemos

$$\Pr \left[V(x) \geq \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1 - p} \right] \leq \frac{E[V(x)]}{\frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon}{1 - p}} \leq 1 - p$$

y, por lo tanto,

$$\Pr[x(t) \in S] = \Pr \left[V(x) \leq \frac{\alpha^{-1}(\beta) + \varepsilon_1}{1 - p} \right] \geq p$$

completando la prueba. \square

Teorema 4.2 (Caracterización de PIS). *Sea $0 < p < 1$ una probabilidad y sea $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definida positiva con $V(0) = 0$. Supongamos que existen una función convexa $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ de clase \mathcal{K}_∞ y una constante $\beta > 0$ tales que $\mathcal{L}[V](x) \leq -\alpha(V(x)) + \beta$. Sea $0 < \gamma < 1$ constante y supongamos que existe $V_0 > \alpha^{-1}(\beta)$ tal que*

$$V \left(\frac{x}{\gamma} \right) \leq \frac{V_0}{1 - p} \implies V(x) \leq V_0 \quad (4.4)$$

Entonces, el conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq \frac{V_0}{1 - p} \right\}$$

es un γ -PIS con probabilidad p para el sistema de Ec. (4.1).

Demostración. Asumimos que $x(t_0) = x_0 \in \gamma S$. Entonces,

$$V \left(\frac{x_0}{\gamma} \right) \leq \frac{V_0}{1 - p} \implies V(x_0) \leq V_0$$

De la Ec.(4.3), con $E[V(x_0)] = V_0$ y usando el hecho que α es estrictamente creciente y $V_0 > \alpha^{-1}(\beta)$ (lo que es equivalente a $\alpha(V_0) > \beta$) y siguiendo un razonamiento análogo a la prueba del teorema anterior, resulta que $E[V(x(t))] \leq V_0$ para todo $t \geq t_0$. Luego, usando la desigualdad de Markov,

$$\Pr \left[V(x) \geq \frac{V_0}{1 - p} \right] \leq \frac{E[V(x(t))]}{\frac{V_0}{1 - p}} \leq 1 - p$$

²Dada una variable aleatoria X no negativa, $\forall \lambda > 0$, resulta $\Pr[X \geq \lambda] \leq \frac{E[X]}{\lambda}$.

Entonces,

$$\Pr[x(t) \in S] = 1 - \Pr[x(t) \notin S] = 1 - \Pr\left[V(x) \geq \frac{V_0}{1-p}\right] \geq p$$

lo que concluye la prueba. \square

Veamos un ejemplo de aplicación de los resultados anteriores. Supongamos que queremos obtener un conjunto PUB con probabilidad $p = 0.9$ para el siguiente sistema:

$$dx = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ -x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} dw \quad (4.5)$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener.

Consideramos la función $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, y calculamos el generador de (4.5) que actúa sobre V ,

$$\mathcal{L}[V](x) = -x_1^4 - x_2^4 + \frac{1}{2}x_2^2 = -2V(x) - x_2^4 + \frac{3}{2}x_2^2.$$

Maximizando la función $-x_2^4 + \frac{3}{2}x_2^2$ se obtiene la siguiente desigualdad

$$\mathcal{L}[V](x) \leq -2V(x) + \frac{9}{16}.$$

Luego, tomando $\alpha(V) = 2V$ y $\beta = \frac{9}{16}$, podemos asegurar por Teorema 4.1 que el conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq \frac{45}{16} + \varepsilon \right\}$$

es el PUB deseado.

Teniendo en cuenta la fórmula para caracterizar cota final probabilística no lineal provista por el Teorema 4.1 nos interesa extender para sistemas no lineales la metodología de diseño de control que garantiza la existencia de un PUB con una cierta probabilidad. En este sentido, un primer resultado, que forma parte de esta Tesis, es el diseño de una estrategia de control mediante linealización exacta por realimentación, el cual es explicado en la siguiente sección.

4.3. Control por Linealización exacta

La idea de esta metodología es llevar, mediante una transformación de coordenadas, un sistema no lineal a una forma lineal equivalente sobre la cual se puedan aplicar los resultados del Capítulo 3. Este diseño sigue el desarrollo realizado en [26], cuyos resultados fueron expuestos en la sección 2.4 del Capítulo 2.

Antes de presentar las características del diseño, se extiende el concepto de linealización exacta para sistemas no lineales estocásticos afines en la entrada de control. En la literatura, existen varios trabajos que plantean las bases de esta estrategia de control, uno de ellos, cuyos lineamientos son seguidos aquí, es [53].

4.3.1. Planteo del problema

Sea el sistema no lineal con perturbaciones estocásticas descrito por:

$$dx(t) = f(x)dt + g(x)u dt + h(x)dw(t) \quad (4.6)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$ son campos continuamente diferenciales, $u \in \mathbb{R}^m$ la entrada de control, y la perturbación $w(t)$ un movimiento Browniano vectorial con covarianza incremental $cov[dw(t)] = I_{k \times k} dt$, y sea $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ el estado inicial.

Asumimos que existe un campo matricial continuamente diferenciable $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times k}$, tal que $h(x) = g(x)\gamma(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (esto se conoce como "condición de matching").

El objetivo es encontrar una ley de control $u(t) = \kappa(x)$ tal que el sistema a lazo cerrado resultante tenga una cota final deseada definida por un conjunto S_x dado.

Definición 4.4. *El sistema (4.6) se dice linealizable por realimentación exacta estocástica si existen un difeomorfismo dos veces continuamente diferenciable $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\phi(0) = 0$, un campo vectorial $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y un campo matricial $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, con β no singular para todo $x \in \mathbb{R}^n$, tales que, si*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

y $z = \phi(x)$, entonces

$$dz = A_0 z dt + B_0 v dt + H(z) dw(t), \quad (4.7)$$

con $z(0) = z_0 \triangleq \phi(x_0)$. También, $A_0 = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ y $B_0 = \text{diag}(b_1, \dots, b_m)$, con $A_i \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i}$ y $b_i \in \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, \dots, m$, dados por

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ y } b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con d_i , $i = 1, \dots, m$, (i.e., los índices de controlabilidad de A_0) que satisfacen $\sum_{i=1}^m d_i = n$.

La diferencia principal con el caso determinístico radica en el hecho que al considerar la derivada de la transformación $z = \phi(x) \in \mathbb{R}^n$ debemos aplicar, a cada componente, la fórmula de Itô (Ec. (2.84)) por tratarse de una función definida sobre un proceso estocástico. De esto se deriva que:

$$[A_0 z]_i = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} (f(x) + g(x)\alpha(x)) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(h^T(x) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} h(x) \right) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}$$

y

$$B_0 = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (g(x)\beta(x)) \right]_{x=\phi^{-1}(z)}.$$

De acuerdo a la condición de matching resulta,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} h(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} = \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x)\gamma(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ &= B_0 \beta^{-1}(x)\gamma(x) \Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \triangleq B_0 G(z). \end{aligned}$$

Supondremos además que $G(z)$ es acotada de tal manera que exista $\bar{G} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ tal que, para todo z ,

$$G(z)G^T(z) \leq \bar{G}\bar{G}^T. \quad (4.8)$$

Si consideramos la ley de control $v = Kz$ en (4.7), o equivalentemente,

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K\phi(x) \quad (4.9)$$

en (4.6), obtenemos el siguiente sistema linealizado

$$dz = (A_0 + B_0 K)z dt + H(z)dw = Az dt + H(z)dw. \quad (4.10)$$

El problema de encontrar una ley de control $u(t) = \kappa(x)$ para el sistema (4.6) lo reduciremos entonces a encontrar una matriz K tal que el sistema (4.10) tenga una cota final S_z que garantice la cota final S_x en las coordenadas originales a través de la transformación inversa $x = \phi^{-1}(z)$.

4.3.2. Cota para la covarianza del sistema linealizado

Como vimos en el Capítulo 3, el diseño que asegura una cota final probabilística para el sistema estocástico lineal está intrínsecamente ligado al cálculo de la matriz de covarianza de los estados. Para el caso del sistema (4.10), debido al término no lineal $H(z)$, no es posible determinar esta matriz. Sin embargo, veremos en lo que sigue que puede hallarse una cota superior para Σ_z en base a la cual realizaremos la estrategia de diseño.

Lema 4.1. *Para el sistema (4.10) donde $A = A_0 + B_0 K$ es Hurwitz, resulta*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)] = 0, \quad (4.11)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Sigma_z(t) \leq \Sigma, \quad (4.12)$$

donde Σ_z es la matriz de covarianza de $z(t)$ y Σ es la solución positiva única de

$$A\Sigma + \Sigma A^T + \bar{H}\bar{H}^T = 0. \quad (4.13)$$

siendo $\bar{H} \triangleq B_0\bar{G}$, donde \bar{G} satisface la condición (4.8).

Demostración. La solución de (4.10) está dada por

$$z(t) = e^{At}z_0 + \int_0^t M(t,s)dw(s),$$

donde $M(t,s) = e^{A(t-s)}H(z(s))$.

Usando [62, p. 60, ec. (5.17)], tenemos que

$$\begin{aligned} E[z_i(t)] &= [e^{At}z_0]_i + \sum_{l=1}^n E \left[\int_0^t [M(t,s)]_{i,l} d[w(s)]_l \right] \\ &= [e^{At}z_0]_i, \end{aligned}$$

de donde $E[z(t)] = e^{At}z_0$, lo que prueba la Ec. (4.11).

Por otro lado, usando [62, ecs. (5.10) y (6.9)] y teniendo en cuenta que $H(z) = B_0G(z)$, resulta

$$\begin{aligned} \Sigma_z(t) &= E \left\{ \int_0^t M(t,s)M^T(t,s)ds \right\} \\ &= E \left[\int_0^t e^{A(t-s)}H(z(s))H^T(z(s)) \left(e^{A(t-s)} \right)^T ds \right] \\ &\leq E \left[\int_0^t e^{A(t-s)}B_0\bar{G}\bar{G}^TB_0^T \left(e^{A(t-s)} \right)^T ds \right] \triangleq \Sigma(t), \end{aligned}$$

Esta última desigualdad surge de la propiedad: $G(z)G^T(z) \leq \bar{G}\bar{G}^T \Rightarrow \Phi G(z)G^T(z)\Phi^T \leq \Phi\bar{G}\bar{G}^T\Phi^T$, para cualquier matriz Φ semidefinida positiva.

Notar además que $\Sigma(t)$ es la covarianza del proceso $\bar{z}(t)$ definido por

$$d\bar{z} = A\bar{z}dt + \bar{H}d\bar{w}, \quad (4.14)$$

siendo \bar{w} un proceso de Wiener con matriz de covarianza igual a la matriz identidad.

La prueba concluye observando que la covarianza de $\bar{z}(t)$ en la Ec. (4.20) con $t \rightarrow \infty$ puede ser calculada a partir de la ecuación de Lyapunov (4.13). \square

4.3.3. Cálculo de PUB para el sistema linealizado

El siguiente resultado, basado en la cota de la covarianza dada por Lema 4.1, permite calcular cotas finales probabilísticas para el sistema linealizado de Ec. (4.10).

Lema 4.2. Para cualquier $0 < p < 1$, y $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ con $0 \prec \tilde{p}$, que satisfacen

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p, \quad (4.15)$$

el conjunto $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R} : |z_i| \leq b_i + \varepsilon\}$, con

$$b_i = \sqrt{\frac{[\Sigma]_{i,i}}{\tilde{p}_i}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

y Σ definida como en (4.13), es un PUB con probabilidad p para el sistema (4.10).

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. De la desigualdad de Chebyshev (ver nota al pie de página 7), se tiene que

$$\Pr \left[|[z(t) - \mathbb{E}[z(t)]]_i| \geq b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq \frac{[\Sigma_z(t)]_{i,i}}{(b_i + \frac{\varepsilon}{2})^2}.$$

Luego, de (4.12), existe $T_{\varepsilon,i} \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t > T_{\varepsilon,i}$,

$$\Pr \left[|[z(t) - \mathbb{E}[z(t)]]_i| > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \leq \frac{[\Sigma]_{i,i}}{b_i^2} = \tilde{p}_i \quad (4.17)$$

También, de la Ec. (4.11), existe $\tilde{T}_{\varepsilon,i} \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $t > \tilde{T}_{\varepsilon,i}$

$$|\mathbb{E}[z(t)]_i| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.18)$$

Así, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.17) y (4.18), para todo $t > \max \{T_{\varepsilon,i}, \tilde{T}_{\varepsilon,i}\}$,

$$\begin{aligned} \Pr [|[z(t)]_i| > b_i + \varepsilon] &= \Pr \left[|[z(t)]_i| - \frac{\varepsilon}{2} > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \Pr \left[|[z(t)]_i| - |\mathbb{E}[z(t)]_i| > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \Pr \left[|[z(t)]_i - \mathbb{E}[z(t)]_i| > b_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\leq \tilde{p}_i. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Sea $\mathcal{S} = \{z : |z| \preceq b + \varepsilon \mathbf{1}\}$, con $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ un vector de unos. Entonces, para todo $t > T_\varepsilon \triangleq \max \{T_{\varepsilon,i}, \tilde{T}_{\varepsilon,i} : i = 1, \dots, n\}$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \Pr [z(t) \notin \mathcal{S}] &\leq \sum_{i=1}^n \Pr [|[z(t)]_i| > b_i + \varepsilon] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\Pr [z(t) \in \mathcal{S}] \geq p.$$

y se concluye el resultado. \square

4.4. Diseño de control no lineal

Como se muestra en el lema 4.2 es posible calcular un PUB del sistema (4.10) a partir de la covarianza Σ de la solución del sistema lineal

$$d\tilde{z} = (A_0 + B_0K)\tilde{z}dt + \tilde{H}dw. \quad (4.20)$$

La estrategia es, entonces, diseñar una matriz de realimentación K que asigne Σ al sistema (4.20) lo que impondrá un PUB para el sistema (4.10). Este PUB en $z(t)$ a su vez deberá resultar en el PUB deseado para las coordenadas originales $x(t)$ de la Ec. (4.6).

4.4.1. Diseño de control con garantía de PUB

El siguiente lema asegura que, dada una probabilidad p y un vector $b \succ 0$, pueden definirse las probabilidades de escape \tilde{p}_i de forma tal que satisfagan la condición (4.15) y la Ec.(4.16) y de manera que la matriz Σ pueda ser una matriz de covarianza para el sistema (4.20).

Lema 4.3. *Para cualquier $b \succ 0$, existe $\tilde{p} \succ 0$ que satisface (4.15), tal que $\Sigma_{\tilde{p},b} = \text{diag}(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$ es una matriz definida positiva con*

$$\Sigma_i = \mathcal{X}(\tilde{p}_j b_j^2 : j = \sigma_i - d_i + 1, \dots, \sigma_i), \quad (4.21)$$

para $i = 1, \dots, m$, y donde d_i los índices de controlabilidad de A_0 y $\sigma_i = \sum_{j=1}^i d_j$.

Demostración. De acuerdo al Lema 3.2, dado $b^j \succ 0$ y $\hat{p}_j \in (0, 1)$, se puede hallar un vector \tilde{p}^j que satisface $\sum_{i=1}^{d_j} \tilde{p}_i^j = 1 - \hat{p}_j$ tal que $\mathcal{X}(y^j) > 0$ con $y_i^j = \frac{[b^j]_i^2}{g(\tilde{p}_i^j)^2}$, donde $g(\tilde{p}_i^j)$ es una función estrictamente decreciente con imagen en el intervalo $[a, \infty)$ para alguna constante $a \geq 0$.

Luego, definiendo $g(\tilde{p}_i^j) = \frac{1}{\tilde{p}_i^j}$ (la cual es estrictamente decreciente), podemos elegir $\hat{p}_j \in (0, 1)$, para $j = 1, \dots, m$, tal que $\sum_{j=1}^m \hat{p}_j = p + m - 1$.

Consideramos $b^j = [b_{\sigma_j - d_j + 1}, \dots, b_{\sigma_j}]^T$ y hallamos m vectores \tilde{p}^j tales que $\mathcal{X}(y^j)$ sea definida positiva para todo j .

Entonces, tomando $\tilde{p} = [\tilde{p}^1, \dots, \tilde{p}^m]^T$, resulta que $\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = 1 - p$ y el hecho de que $\mathcal{X}(y^j) > 0$, para $j = 1, \dots, m$, implica que el bloque diagonal resultante $\Sigma_{\tilde{p},b}$ es definido positiva, completando la prueba. \square

Como ya se mencionó, la metodología de diseño propuesta se basa en hallar una ley de control que asegure que el sistema linealizado (4.10) tenga cierto PUB de la forma $\mathcal{S}_b = \{z : |z| \leq b\}$, que a su vez deberá implicar que el sistema original de la Ec. (4.6) tenga un PUB \mathcal{S}_x deseado. Dado entonces \mathcal{S}_x , la existencia de \mathcal{S}_b está garantizada debido a que el cambio de coordenadas ϕ es un homeomorfismo con $\phi(0) = 0$.

Teniendo en cuenta esto, el teorema que sigue asegura la existencia y brinda la expresión de una ley de control bajo la cual una región arbitraria S_x se convierte en un PUB del sistema no lineal de ecuación (4.6).

Teorema 4.3 (Diseño de control). *Consideremos el sistema (4.6). Sea $S_x \subset \mathbb{R}^n$ con $0 \in \text{int}(S_x)$ y sea $0 < p < 1$. Entonces, para cualquier $b > 0$ tal que $\phi^{-1}(S_b) \subset S_x$ y $\tilde{p} > 0$ que satisface (4.15), para el cual $\Sigma_{\tilde{p},b} > 0$, la ley de control*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K_{\tilde{p},b}\phi(x), \quad (4.22)$$

con

$$K_{\tilde{p},b} = -B_0^\dagger(A_0\Sigma_{\tilde{p},b} + \Sigma_{\tilde{p},b}A_0^T + B_0\bar{G}\bar{G}^TB_0^T) \left(I - \frac{1}{2}B_0B_0^\dagger \right) \Sigma_{\tilde{p},b}^{-1} \quad (4.23)$$

hace que la región S_x sea un PUB con probabilidad p .

Demostración. Con la ley de control de Ec.(4.22) y el cambio de coordenadas $z = \phi(x)$, el sistema (4.1) se transforma en

$$dz = (A_0 + B_0K_{\tilde{p},b})zdt + B_0G(z)dw(t), \quad (4.24)$$

De Lema 3.1, la matriz $K_{\tilde{p},b}$ definida en la Ec. (4.23) implica que $A = A_0 + B_0K_{\tilde{p},b}$ es Hurwitz y la solución Σ de

$$(A_0 + B_0K_{\tilde{p},b})\Sigma + \Sigma(A_0 + B_0K_{\tilde{p},b})^T + B_0\bar{G}\bar{G}^TB_0^T = 0$$

está dada por $\Sigma_{\tilde{p},b}$, que verifica la Ec. (4.21). Esto es,

$$[\Sigma]_{i,i} = \tilde{p}_i b_i^2.$$

Luego, el Lema 4.2 asegura que el conjunto $S_b = \{z : |z| \preceq b\}$ es un PUB para el sistema (4.24) y el hecho de que $\phi^{-1}(S_b) \subset S_x$ implica que S_x es un PUB para el sistema (4.6), concluyendo la prueba. \square

4.4.2. Algoritmo para diseño de control

El Teorema 4.3 proporciona una expresión para la ley de control que asegura que el sistema no lineal de Ec. (4.6) tiene un PUB deseado S_x . Dicha expresión depende de encontrar un vector \tilde{p} tal que la matriz $\Sigma_{\tilde{p},b}$ sea definida positiva.

El siguiente algoritmo extiende el Algoritmo 1 de [32] y permite completar el procedimiento de diseño.

Algoritmo 4.1 (Procedimiento de diseño de control).

1. Encontrar el cambio de coordenadas $z = \phi(x)$, junto con las funciones de realimentación $\alpha(x)$ y $\beta(x)$, que lleva al sistema (4.1) en (4.10).

2. Tomar $b \in \mathcal{C}_{S_x} = \{b > 0 : \phi^{-1}(S_b) \subset S_x\}$, donde $S_b = \{z : |z| \leq b + \varepsilon\}$.
3. Elegir m probabilidades $\hat{p}_j \in (0, 1)$ tales que³ $\sum_{j=1}^m \hat{p}_j = p + m - 1$.
4. Para cada j en $1, \dots, m$,
 - a) Tomar $b^j = [b_{\sigma_j - d_j + 1}, \dots, b_{\sigma_j}]$.
 - b) Tomar $k = 1$ y $\tilde{p}_i^{(1)} = (1 - \hat{p}_j)/d_j$ para $i = 1, \dots, d_j$.
 - c) Formar $\Sigma_k \triangleq \mathcal{X} \left(\begin{bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} b_1^2 & \tilde{p}_2^{(k)} b_2^2 & \dots & \tilde{p}_k^{(k)} b_k^2 \end{bmatrix}^T \right)$. Si $k = d_j$ ir al paso (4h).
 - d) Formar $\tilde{\Sigma}_{k+1} \triangleq \mathcal{X} \left(\begin{bmatrix} \tilde{p}_1^{(k)} b_1^2 & \tilde{p}_2^{(k)} b_2^2 & \dots & \tilde{p}_{k+1}^{(k)} b_{k+1}^2 \end{bmatrix}^T \right) = \begin{bmatrix} \Sigma_k & c_k \\ c_k^T & \tilde{p}_{k+1}^{(k)} b_{k+1}^2 \end{bmatrix}$.
 - e) Si $\tilde{\Sigma}_{k+1} > 0$, tomar $\tilde{p}_i^{(k+1)} = \tilde{p}_i^{(k)}$ e ir al paso (4g).
 - f) Si no, elegir $\alpha > 1$ y calcular, para $1 \leq i \leq k$,

$$[\tilde{\Sigma}_{k+1}]_{i,i} = \frac{[\Sigma_k]_{i,i}}{\alpha r_{k+1}}, \quad \text{donde } r_{k+1} = \frac{c_k^T (\Sigma_k)^{-1} c_k}{\tilde{p}_{k+1}^{(k)} b_{k+1}^2},$$

$$\text{y tomar } \tilde{p}_i^{(k+1)} = \begin{cases} \frac{[\tilde{\Sigma}_{k+1}]_{i,i}}{b_i^2} & \text{para } 1 \leq i \leq k \\ \tilde{p}_i^{(k)} \frac{1 - p - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j^{(k+1)}}{1 - p - \sum_{j=1}^k \tilde{p}_j^{(k)}} & \text{para } i > k \end{cases}.$$

- g) Sea $k := k + 1$ y regresar al paso (4c).
 - h) Tomar $\Sigma_j = \Sigma_k > 0$.
5. Calcular el bloque diagonal de Xiao $\Sigma_{\tilde{p},b}$ de la Ec.(4.21).
 6. Obtener \bar{G} que verifique la condición (4.8) y calcular $K_{\tilde{p},b}$ usando la Ec. (4.23).
 7. Calcular la ley de realimentación $u(t)$ a partir de la Ec. (4.22).

El paso 1 del algoritmo anterior está basado en el hecho de que la planta es linealizable por realimentación exacta estocástica. La existencia de S_b en el paso 2 está asegurada por el Lema ???. La elección de \hat{p}_j en el paso 3 se sigue de la construcción de $\Sigma_{\tilde{p},b} > 0$ en el Lema 4.3.

Luego, el paso 4 es un procedimiento para encontrar \tilde{p}^j de manera que la matriz de Xiao sea definida positiva, siguiendo la prueba del Lema 3.2. El resto del algoritmo sigue la prueba del Teorema 4.3.

³Una elección razonable sería $\hat{p}_j = 1 - (1 - p)d_j/n$, que asigna una probabilidad de salida proporcional a la dimensión de cada subespacio de controlabilidad.

En la siguiente sección se muestra la aplicación de los resultados de diseño, mediante el uso del Algoritmo 4.1, a un sistema estocástico no lineal particular. En la Figura 4.1 puede verse cómo las trayectorias del sistema permanecen dentro del PUB deseado, a partir de cierto tiempo, con una probabilidad fijada.

4.5. Ejemplo

Sea el sistema estocástico no lineal cuya dinámica está dada por

$$dx = \begin{bmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2} \\ \frac{2x_1x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u dt + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} dw \quad (4.25)$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener con covarianza unitaria y $a = \sqrt{0.001}$.

Queremos que el conjunto $S_x = \{x : |x_i| \leq \tilde{b}_i, i = 1, 2\}$, con $\tilde{b} = [0.01 \ 0.1]^T$, sea un PUB con probabilidad $p = 0.9$ para tal sistema.

La aplicación $z = \phi(x)$, donde

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{1+x_1^2} \end{bmatrix},$$

junto con las funciones de realimentación

$$\alpha(x) = \frac{x_2}{1+x_1^2}$$

$$\beta(x) = \frac{1}{1+x_1^2}$$

transforman al sistema (4.25) en un sistema lineal de la forma

$$dz = A_0 z dt + B_0 v dt + H(z) dw(t),$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ \frac{1}{1+z_1^2} \end{bmatrix} = g(z)B_0G, \text{ donde}$$

$$g(z) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+z_1^2} \end{bmatrix} \text{ y } G = a = 1/\sqrt{1000}.$$

El objetivo es diseñar una matriz de realimentación $K_{\tilde{p},b}$ en (4.22) de modo que el sistema a lazo cerrado (4.10) sea Hurwitz. Para esto, seguimos el algoritmo 4.1.

El paso (1) del Algoritmo 4.1 fue desarrollado arriba. En el Paso (2), b puede elegirse de muchas maneras. Una posible selección es

$$b = [0.01 \quad 0.09]^T. \quad (4.26)$$

Ahora, tomamos $q_1 = 1$ del Paso (3), luego, de acuerdo al Paso (4), obtenemos la siguiente matriz de covarianza asignable

$$\Sigma_{\tilde{p},b} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1 b_1^2 & 0 \\ 0 & \tilde{p}_2 b_2^2 \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.405 \end{bmatrix}.$$

Entonces, siguiendo el paso 6, observamos que tomando $\bar{G} = a$ se cumple la condición (4.8) y luego calculamos la ganancia del control:

$$K_{\tilde{p},b} = [-81 \quad -1.2346].$$

Finalmente, del paso 7 resulta que la ley de control

$$u(t) = \alpha(x) + \beta(x)K_{\tilde{p},b}\phi(x)$$

asegura que el sistema (4.25) tiene el PUB deseado con probabilidad $p = 0.9$.

La Figura 4.1 muestra la región S_x en el espacio de estado y resultados de simulación para las trayectorias del sistema a lazo cerrado a partir de cierta condición inicial, corroborando que la región S_x es un PUB. Este resultado de simulación muestra también que el diseño es conservador ya que no se observa que la trayectoria escape frecuentemente de dicha región. La causa de esto último puede atribuirse en parte a que la cota final se obtiene a partir de la desigualdad de Chebyshev, que es conservadora ya que sólo tiene en cuenta la covarianza del proceso.

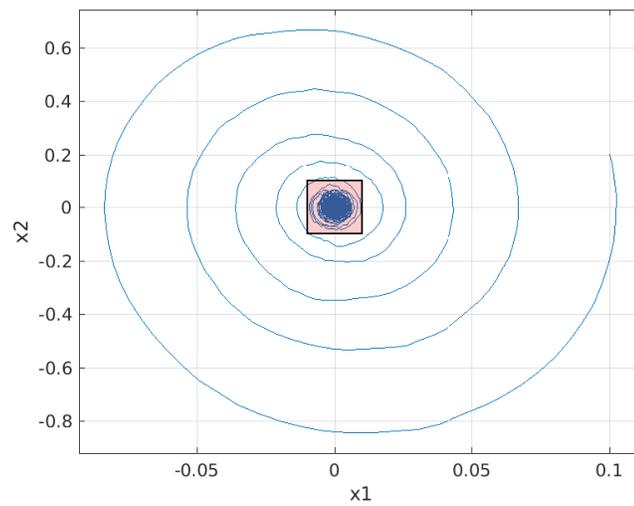


Figura 4.1: Cota Final Probabilística y trayectorias del sistema a lazo cerrado no lineal.

Capítulo 5

Control tolerante a fallas basado en conjuntos probabilísticos

Como se mencionó en la Sección 2.5 del Capítulo 2, la detección temprana de fallas en el funcionamiento de sistemas automáticos de control, su correcto diagnóstico y la consecuente reconfiguración, son necesarios para mantener la operación segura y eficiente de tales sistemas. En dicha sección se expuso una metodología de diagnóstico y reconfiguración basada en la pertenencia de ciertas señales (denominadas residuos) a determinados conjuntos que representan valores del estado consistentes con las mediciones del sistema. Este método considera a las perturbaciones y otras fuentes de incertidumbre en forma determinística, asumiendo sólo que las perturbaciones son acotadas, sin tener en cuenta que éstas pueden seguir alguna distribución de probabilidad.

Sin embargo, en muchas aplicaciones de la teoría de sistemas y control es más adecuado representar las perturbaciones como señales no acotadas, como por ejemplo el ruido blanco Gaussiano. En estos casos no es posible obtener cotas finales y conjuntos invariantes usando las técnicas determinísticas tradicionales [4].

Con el objetivo general de brindar herramientas que completen la teoría de los sistemas de control, en este capítulo se propone un mecanismo de diagnóstico de falla en actuadores basado en cotas finales probabilísticas y un esquema de reconfiguración del control. De esta manera, se presenta una estrategia de control tolerante a fallas que permite considerar la presencia de ruido blanco Gaussiano, el cual es no acotado.

Este capítulo se divide en dos secciones, en la primera se presentan los resultados referidos a la detección de fallas en actuadores sin reconfigurar el control, es decir, sólo se plantea una técnica de diagnóstico basada en la pertenencia o no de los residuos a ciertos conjuntos PUB. Luego, en la sección siguiente se desarrolla el esquema de reconfiguración teniendo en cuenta la

correspondiente falla. La estrategia diseñada permite detectar y diagnosticar las diferentes fallas en las diferentes configuraciones de control, con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña.

5.1. Diagnóstico de fallas sin reconfiguración del control

Para que pueda comprenderse la técnica de detección y diagnóstico desarrollada, primero es presentada sin tener en cuenta la reconfiguración del control. Se comienza describiendo los modelos matemáticos involucrados en el diagnóstico de falla en actuadores. Luego, se expone el esquema basado en conjuntos probabilísticos que permite una correcta detección de la falla producida en el sistema. Finalmente, se ilustra esta estrategia mediante un ejemplo.

5.1.1. Formulación del problema

Se considera un sistema lineal perturbado invariante en el tiempo de la forma:

$$\begin{aligned} dx_p(t) &= Ax_p(t)dt + BPu(t)dt + Fdw(t), \\ y_p(t) &= Cx_p(t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, $w(t)$ es un proceso estocástico de Wiener con matriz de covarianza incremental Σ_w , $y_p(t) \in \mathbb{R}^q$ es la salida del sistema y A , B , C y F son matrices constantes de dimensiones adecuadas.

La matriz P es usada para modelar la ocurrencia de fallas en los actuadores. De la misma manera vista en la Sección 2.5 del Capítulo 2, se define P como sigue,

$$P \triangleq \text{diag}\{P_1, P_2, \dots, P_m\}, \quad P_i \in \{0, 1\},$$

Esto es, $P_i = 1$ significa que no hay falla en el i -ésimo actuador, mientras que $P_i = 0$ modela la existencia de falla total en el i -ésimo actuador. En ausencia de falla, P es la matriz identidad.

Para tener presente la situación de falla actual, y suponiendo que sólo puede fallar un actuador por vez, reescribimos $P = P^i$, para $i = 0, \dots, m$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P^0 &= I, \\ P^i &= \text{diag}\{1, \dots, \underbrace{0}_i, \dots, 1\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Por otro lado, consideramos que la planta sigue un sistema de referencia dado por

$$\begin{aligned} dx_r(t) &= Ax_r(t)dt + Bu_r(t)dt, \\ y_r(t) &= Cx_r(t), \end{aligned} \quad (5.3)$$

con la entrada $u_r(t) = \bar{u}_r$ constante, de manera tal que la salida $y_r(t)$ del sistema (5.3) siga exponencialmente una señal externa constante y_0 .

Para obtener una estima del estado e implementar el control y detectar fallas en los actuadores, utilizamos un observador de la forma:

$$dx_o(t) = Ax_o(t)dt + Bu(t)dt + L(y_p(t) - Cx_o(t))dt, \quad (5.4)$$

con lo que el control en (5.1) será,

$$u(t) = K(x_o(t) - x_r(t)) + u_r(t), \quad (5.5)$$

donde K es la matriz de realimentación de estado.

Definiendo el error de seguimiento para la estimación del estado (que luego se utilizará como residuo) como

$$e_{or}(t) \triangleq x_o(t) - x_r(t), \quad (5.6)$$

reescribimos la ley de control (5.5) como sigue:

$$u(t) = Ke_{or} + u_r(t). \quad (5.7)$$

Definimos también el error de estimación del estado como

$$e_{po}(t) \triangleq x_p(t) - x_o(t). \quad (5.8)$$

Vamos a estudiar las dinámicas de los errores (5.6) y (5.8) cuando se aplica la entrada de control (5.7).

Considerando el sistema a lazo cerrado con (5.7), y utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.4), la dinámica del error de seguimiento para el estado observado e_{or} puede escribirse como

$$\begin{aligned} de_{or}(t) &= dx_o - dx_r = \\ &= (A + BK)e_{or}(t)dt + LCe_{po}(t)dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Análogamente, utilizando las ecuaciones (5.1) y (5.4), la dinámica del error de estimación e_{po} puede escribirse como

$$\begin{aligned} de_{po}(t) &= dx_p - dx_o = \\ &= (A - LC)e_{po}(t)dt + B(P - I)Ke_{or}(t)dt + \\ &+ B(P - I)u_r(t)dt + Fdw. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Luego, combinando (5.9) y (5.10) y definiendo el vector

$$e(t) \triangleq \begin{bmatrix} e_{or}(t) \\ e_{po}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} de(t) &= \begin{bmatrix} A + BK & LC \\ B(P - I)K & A - LC \end{bmatrix} e(t)dt + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ B(P - I) \end{bmatrix} u_r(t)dt + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} dw(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Observación 5.1. Para asegurar la estabilidad del sistema a lazo cerrado (5.12) bajo cualquier situación de falla considerada, debemos pedir que el control por realimentación K y la matriz L del observador en (5.4) sean tales que las matrices de lazo cerrado

$$A_l^i = \begin{bmatrix} A + BK & LC \\ B(P^i - I)K & A - LC \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

sean Hurwitz para $i = 0, \dots, m$, notar que para la matriz P consideramos la notación dada por la Ec. (5.2).

5.1.2. Esquema para la detección de fallas

Aquí se propone la técnica de detección de fallas, siguiendo, en parte, el esquema determinístico desarrollado en [7], cuyas principales características fueron expuestas en la Sección 2.5 del Capítulo 2. En dicho esquema se consideran conjuntos invariantes para conseguir la detección de fallas, la estrategia desarrollada más abajo reemplaza el empleo de tales conjuntos por cotas finales probabilísticas. De esta manera, es posible contemplar la presencia de ruido blanco no acotado.

El esquema en cuestión, similar al de la referencia citada pero sin reconfiguración del control, se encuentra representado en la Fig.5.1. En el mismo, hay un sistema de control diseñado para que la planta siga la dinámica de un sistema de referencia. Dicho control utiliza un observador para realizar una realimentación de estados. El estado de la planta (medido por el observador) y el del sistema de referencia son comparados por el sistema de detección para determinar la eventual presencia de fallas. El sistema de detección en cuestión, que describiremos más adelante, hace uso de las cotas finales probabilísticas y sus propiedades para diagnosticar si ocurre alguna falla y determinar cuál es ésta.

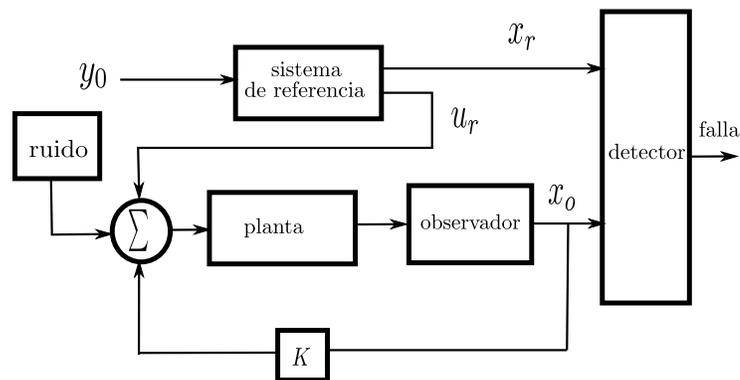


Figura 5.1: Esquema propuesto

Cálculo de Cotas Finales Probabilísticas

Como dijimos antes, se consideran cotas finales probabilísticas para esta técnica de detección. Por lo tanto, debemos calcular los conjuntos PUB para las trayectorias del estado del sistema a lazo cerrado descrito en (5.12) que nos ayuden a diagnosticar la falla actual del sistema.

Suponiendo que el sistema está bajo la i -ésima situación de falla ($i = 0, \dots, m$), el sistema (5.12) puede reescribirse como

$$de(t) = [A_\ell^i e(t) + B_\ell^i u_r(t)] dt + G dw(t), \quad (5.14)$$

con A_ℓ^i definida en la Ec.(5.13) y con

$$B_\ell^i \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ B(P^i - I) \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Definimos entonces,

$$\tilde{e}^i = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{or}^i \\ \tilde{e}_{po}^i \end{bmatrix} \triangleq -(A_\ell^i)^{-1} B_\ell^i \bar{u}_r, \quad (5.16)$$

notar que $(A_\ell^i)^{-1}$ existe dado que las matrices A_ℓ^i son Hurwitz. Considerando el cambio de variable $\tilde{e}^i(t) = e(t) - \bar{e}^i$, el sistema (5.14), con $u_r(t) = \bar{u}_r$ constante, puede expresarse como

$$d\tilde{e}^i(t) = A_\ell^i \tilde{e}^i(t) dt + G dw(t). \quad (5.17)$$

De acuerdo a la Observación 5.1, la matriz A_ℓ^i en (5.17) es Hurwitz y como $w(t)$ es un proceso estocástico de Wiener con matriz de covarianza incremental Σ_w , podemos utilizar el Teorema 16 de [29] (el cual se enunció en la Sección 2.6.5 del Capítulo 2) para calcular la cota final probabilística, para $0 < p < 1$, como

$$\tilde{S}^i = \{\tilde{e}^i \in \mathbb{R}^{2n} : |\tilde{e}_j^i| \leq b_j^i + \varepsilon; j = 1, \dots, 2n\} \quad (5.18)$$

donde

$$b_j^i \triangleq \sqrt{2[\Sigma_x^i]_{j,j} \text{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_j)}; \quad j = 1, \dots, 2n \quad (5.19)$$

con $\tilde{p}_j \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{j=1}^{2n} \tilde{p}_j = 1 - p, \quad (5.20)$$

y siendo Σ_x^i la solución de la ecuación de Lyapunov

$$A_\ell^i \Sigma_x^i + \Sigma_x^i (A_\ell^i)^T = -G \Sigma_w G^T.$$

Volviendo a las variables originales $e(t)$, los conjuntos \tilde{S}^i se transforman en

$$S^i = \{e \in \mathbb{R}^{2n} : |e_j - \bar{e}_j^i| \leq b_j^i + \varepsilon; j = 1, \dots, 2n\}$$

que constituyen los PUB del sistema (5.12) en presencia de cada situación de falla.

Diagnóstico de fallas

En la Ec. (5.11) definimos el vector de error $e(t) \triangleq [e_{or}(t)^T \ e_{po}(t)^T]^T$, pero, dado que la componente $e_{po}(t)$ no puede ser medida, estaremos interesados en la dinámica del error de seguimiento para el estado observado $e_{or}(t)$.

Si el sistema permanece en la i -ésima situación de falla a lo largo del tiempo, $e_{or}(t)$ convergerá, en el sentido PUB, al conjunto

$$S_{or}^i = \{e_{or} \in \mathbb{R}^n : |e_{or} - \bar{e}_{or}^i| \leq b_{or}^i + \varepsilon\}, \quad (5.21)$$

donde $b_{or}^i \triangleq [b_1^i, \dots, b_n^i]^T$, de acuerdo a (5.19).

La técnica de diagnóstico de fallas propuesta se basa en la pertenencia o no de las trayectorias a los conjuntos S_{or}^i . Antes de presentar este resultado se establece un lema que asegura que los conjuntos S_{or}^i son conjuntos PUB.

Lema 5.1. *Supongamos que a partir de t_f^i el sistema se encuentra en la i -ésima situación de falla. Entonces, dado $p \in (0, 1)$, existe $T > 0$ tal que la probabilidad $\Pr[e_{or}(t) \in S_{or}^i] \geq p$, $\forall t \geq t_f^i + T$.*

Demostración. Como S^i es un PUB con probabilidad p , para todo estado inicial $e(t_f^i) = e_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, existe $T = T(e_0)$ tal que la probabilidad

$$\Pr[e(t) \in S^i] \geq p, \quad \forall t \geq t_f^i + T.$$

Además, si $e(t) \in S^i$ resulta $e_{or}(t) \in S_{or}^i$, y entonces,

$$\Pr[e_{or}(t) \in S_{or}^i] \geq \Pr[e(t) \in S^i] \geq p, \quad \forall t \geq t_f^i + T.$$

□

En un contexto determinístico, asumiendo que los conjuntos de cota final son disjuntos, el hecho de que $e_{or}(t)$ converja a S_{or}^i implica que ha ocurrido la i -ésima falla. Esta es, en efecto, la idea usada en [7] para desarrollar el diagnóstico de falla.

Sin embargo, en el caso probabilístico, $e_{or}(t)$ podría alcanzar un conjunto sin la ocurrencia de la correspondiente falla. También, $e_{or}(t)$ podría dejar el correspondiente conjunto PUB con cierta probabilidad. Así, para decidir si una falla ha ocurrido necesitamos chequear que el residuo correspondiente pertenece al conjunto correspondiente la mayor parte del tiempo (i.e., en un sentido de “promedio“, de acuerdo a la probabilidad p del conjunto PUB).

A fin de tener en cuenta esta observación, la estrategia de diagnóstico de falla se basa en filtrar las funciones indicatrices de cada conjunto. El siguiente teorema muestra que esta idea puede reducir la probabilidad de errores en la detección de de falla a un valor arbitrariamente pequeño, dado que éste es un caso particular del Teorema 5.2, que se prueba en la próxima sección, se omite su demostración.

Teorema 5.1. Sea

$$d^k(t) \triangleq \mathbb{1}_{S_{or}^k}(e_{or}(t)); \quad k = 0, \dots, m \quad (5.22)$$

donde $\mathbb{1}_S$ denota la función indicatriz del conjunto S . Consideramos además las ecuaciones diferenciales

$$\dot{d}_f^k(t) = -\lambda [d_f^k(t) - d^k(t)]; \quad k = 0, \dots, m. \quad (5.23)$$

con $d_f^k(t_f^i) \in [0, 1]$. Supongamos que a partir de t_f^i el sistema se encuentra en la i -ésima situación de falla y que $S_{or}^i \cap S_{or}^j = \emptyset$, para $i \neq j$. Entonces, si $p > p^*$ y existe $\lambda^* > 0$ tal que $0 < \lambda < \lambda^*$, dado $\hat{\delta} > 0$, existe $\hat{T} > 0$ tal que

$$\Pr[d_f^i(t) < d_f^j(t)] < \hat{\delta} \quad \forall t > \hat{T},$$

donde $p^* \approx 0.8133$ es la solución de

$$\sup_{\gamma > 0} [1 - 2e^{-\gamma} - 2\gamma(1 - p)] = 0. \quad (5.24)$$

El Teorema 5.1 dice que aplicando un filtrado de primer orden sobre las funciones indicatrices de los distintos conjuntos y esperando cierto tiempo \hat{T} , la probabilidad de que la señal filtrada correspondiente al estado de falla actual sea menor que la de cualquier otra puede hacerse arbitrariamente pequeña. Por lo tanto, tomando como estado de falla al que tiene el mayor valor d_f^k , la probabilidad de error se torna arbitrariamente pequeña.

En base a esta idea, el esquema propuesto de detección es el de la Fig.5.2.

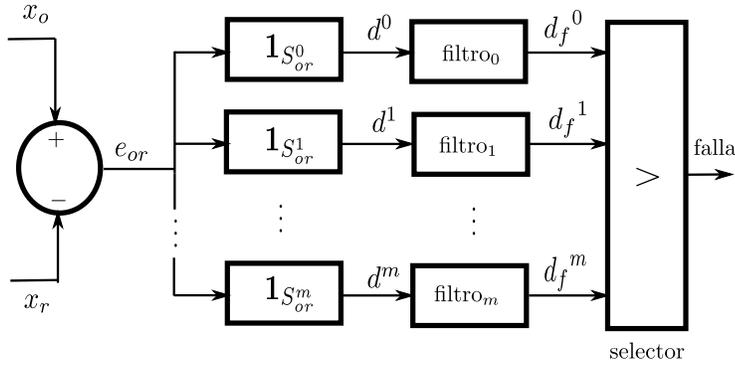


Figura 5.2: Esquema de detección propuesta.

Veamos un ejemplo de aplicación de estos resultados.

5.1.3. Ejemplo

Consideramos el sistema descrito por (5.1) con las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad y \quad F = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

donde $w(t)$ es un proceso de Wiener con covarianza incremental $\Sigma_w dt = 1dt$. La matriz de salida del sistema viene dada por $C = [-0.1 \ 0.5]$.

Para este ejemplo tenemos tres posibles situaciones de falla (una por cada entrada y la restante cuando no hay falla).

La matriz del observador de la ecuación (5.4) se tomó como $L = [4, 6.8]^T$ y la ganancia de control por realimentación considerada en (5.32) se adoptó según

$$K = \begin{bmatrix} -4.5 & 0 \\ -1 & -14 \end{bmatrix}.$$

Tomando $p = 0.9$, y la entrada de referencia $u_r(t) = \bar{u}_r = [100, 50]^T$ los conjuntos S_{or}^i a los que converge la componente $e_{or}(t)$ del vector de estado $e(t)$ del sistema a lazo cerrado (5.14), en el sentido PUB, para cada situación de falla pueden verse en la Figura 5.3.

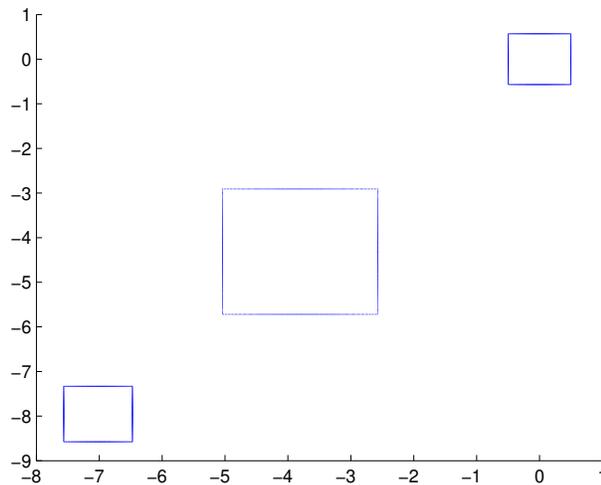


Figura 5.3: PUBs para cada situación de falla

El bloque de diagnóstico, siguiendo el esquema de la Fig.5.2, se completó tomando como parámetro de los filtros pasabajos un tiempo de respuesta $T_r = 1/\lambda = 10$.

Para ensayar el esquema, se simuló el sistema durante 300 segundos, variando la situación de falla entre las 3 posibilidades mencionadas ($i = 0, 1$, o 2) como se muestra en la curva punteada de la Fig.5.7. En la misma figura, puede verse también en línea sólida la salida del bloque de diagnóstico, el cual detecta correctamente la falla tras un lapso de tiempo del orden del tiempo de respuesta de los filtros utilizados.

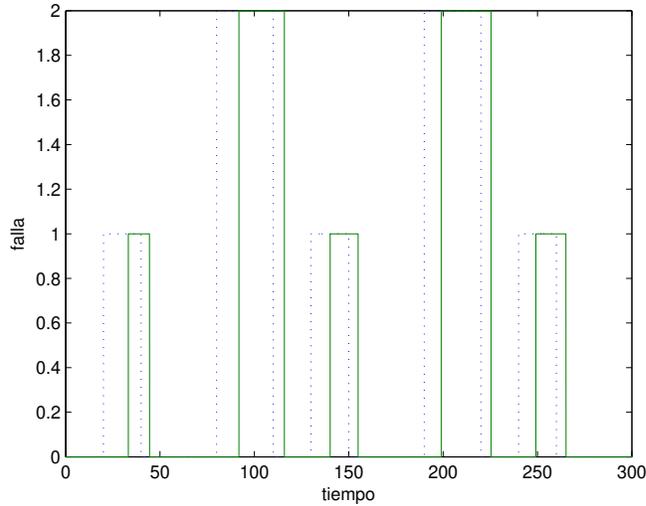


Figura 5.4: Situación de falla (línea punteada) y su correspondiente detección (línea sólida).

5.2. Diagnóstico de fallas con reconfiguración del control

En la sección anterior se planteó un esquema que sólo realiza la detección de cierta falla en los actuadores de la planta, pero no tiene en cuenta la posibilidad de mantener en funcionamiento el sistema una vez detectada la misma. La idea, entonces, en esta sección, es completar los resultados descritos anteriormente para conseguir un sistema de control tolerante a fallas.

Cuando se pretende reconfigurar el control para que la planta siga operando aun en presencia de fallas, algunos modelos vistos en la sección anterior deben ser modificados ligeramente, con lo cual, primero reformulamos el problema para poder incluir tal reconfiguración.

5.2.1. Formulación del problema

Para la planta se mantiene el modelo dado por la Ec. (5.1), es decir

$$\begin{aligned} dx_p(t) &= Ax_p(t)dt + BPu(t)dt + Fdw(t), \\ y_p(t) &= Cx_p(t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Suponiendo que sólo puede fallar un actuador en un tiempo dado, reescri-

bimos $P = P^i$, para $i = 0, \dots, m$, como sigue:

$$\begin{aligned} P^0 &= I, \\ P^i &= \text{diag}\{1, \dots, \underbrace{0}_i, \dots, 1\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

En lo que sigue asumiremos que el sistema (5.26) es estabilizable para todos los posibles valores de $P = P^i$, con $i = 0, \dots, m$, como se definió en (5.27).

A fin de enfatizar la situación de falla actual del sistema (determinada por la matriz $P = P^i$) empleamos la siguiente notación para la dinámica del sistema:

$$\begin{aligned} dx_p(t) &= Ax_p(t)dt + BP^i u(t)dt + Fdw(t), \\ y_p(t) &= Cx_p(t). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Debido a la reconfiguración que se hace sobre el control, tanto el sistema de referencia como el observador cambian con la configuración de la situación de falla.

Exosistema para seguimiento de referencia

El sistema de referencia calcula las trayectorias de referencia correspondientes a la entrada y al estado del sistema, $u_r(t)$ y $x_r(t)$, respectivamente. Bajo la j -ésima situación de falla (para $j = 0, \dots, m$), estas trayectorias de referencia satisfacen las ecuaciones del modelo sin perturbaciones

$$\begin{aligned} dx_r(t) &= Ax_r(t)dt + BP^j u_r(t)dt, \\ y_r(t) &= Cx_r(t). \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde la entrada

$$u_r(t) = \bar{u}_r^j + \Delta u_r(t) \quad (5.30)$$

es calculada mediante alguna ley de control que asegure que $y_r(t)$ sigue exponencialmente la salida de referencia constante y_0 . La señal y_0 es un valor de referencia que deseamos que finalmente siga la salida de la planta $y_p(t)$ en (5.28) bajo toda situación de falla posible.

La entrada de referencia $u_r(t)$ está compuesta de una parte constante \bar{u}_r^j y otra parte variable $\Delta u_r(t)$. Asumiremos que $\lim_{t \rightarrow \infty} u_r(t)$ existe y por lo tanto tomamos $\bar{u}_r^j \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} u_r(t)$; esto implica entonces que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u_r(t) = 0$.

Modelo del observador

Como se mencionó antes, el modelo para el observador debe tener en cuenta la configuración de falla actual a fin de obtener una estimación del estado de la planta, la cual será utilizada para implementar el control, detectar y aislar las fallas del actuador. Así, se propone un observador que está adaptado

a la situación de falla diagnosticada, bajo el diagnóstico de la j -ésima falla la dinámica del observador está caracterizada por

$$dx_o(t) = Ax_o(t)dt + BP^j u(t)dt + L(y_p(t) - Cx_o(t))dt, \quad (5.31)$$

para $j = 0, \dots, m$.

Control por realimentación

Dado que se debe tener en cuenta la configuración del sistema respecto de la situación de falla, la ley de control propuesta en (5.28), basada en el observador de estado (5.31) y en las señales de referencia (5.29), (5.30), tiene la forma

$$u(t) = K_j(x_o(t) - x_r(t)) + u_r(t), \quad (5.32)$$

donde K_j representa la ganancia de realimentación de estado diseñada para el escenario de la j -ésima falla ($j = 0, \dots, m$).

5.2.2. Esquema para la detección de fallas

En esta sección se describe una estrategia de control tolerante a fallas, inspirada en el esquema determinístico propuestos en [7]. El diagrama que muestra el esquema propuesto está representado en la Figura 5.5.

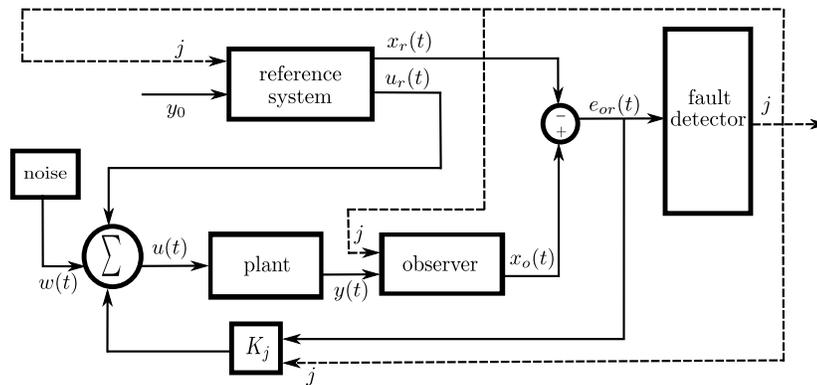


Figura 5.5: Esquema propuesto.

La principal diferencia estructural con el esquema presentado en [7] (ver Figura 2.3 del Capítulo 2) es que el banco de observadores (de parámetros fijos) es reemplazado por un único observador, adaptable a la situación de falla diagnosticada. La estrategia de control utiliza ese observador, que proporciona estimaciones del estado, para implementar una ley por realimentación de estado.

Los estados del observador y del sistema de referencia son comparados para determinar la posible presencia de fallas. El principio de detección, que se describirá más adelante, utiliza cotas finales probabilísticas y sus propiedades para diagnosticar fallas. Una vez que la falla ha sido detectada y aislada, una reconfiguración es hecha ajustando el sistema de referencia, la ganancia de realimentación del controlador y los parámetros del observador, para que coincida con la situación de falla diagnosticada. Luego, después de cierto tiempo, el proceso de diagnóstico se reinicia.

Dinámicas a lazo cerrado

Asumimos que el sistema está configurado para la j -ésima situación de falla pero que la planta está bajo la ocurrencia de la i -ésima falla (i y j podrían ser diferentes una de la otra).

Al igual que en la sección anterior, $e_{or}(t)$ es el error de seguimiento para la estimación del estado y $e_{po}(t)$ representa el error de estimación del estado (ver Ecs. (5.6) y (5.8), respectivamente). Nuevamente, se considera a $e_{or}(t)$ como residuo, es decir, como la señal para la cual se determina su pertenencia (en probabilidad) o no a determinado conjunto.

Un análisis completamente análogo al realizado en la Sección 5.1 considerando la entrada de control $u(t) = K_j e_{or}(t) + u_r(t)$, y usando las Ecs. (5.28), (5.29) y (5.31), permite obtener el siguiente sistema a lazo cerrado,

$$de(t) = \begin{bmatrix} A + BP^j K_j & LC \\ B(P^i - P^j)K_j & A - LC \end{bmatrix} e(t)dt + \begin{bmatrix} 0 \\ B(P^i - P^j) \end{bmatrix} u_r(t)dt + \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} dw(t). \quad (5.33)$$

donde $e(t)$ se define como en la Ec. (5.11).

Observación 5.2. Como se hizo para el caso sin reconfiguración, a fin de asegurar la estabilidad del sistema a lazo cerrado (5.33) bajo cada configuración de control y situación de falla consideradas, las ganancias del control por realimentación K_j y la matriz del observador L en (5.31) deben ser tales que las matrices de lazo cerrado

$$A_\ell^{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} A + BP^j K_j & LC \\ B(P^i - P^j)K_j & A - LC \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

para $i = 0, \dots, m$ y $j = 0, \dots, m$, sean Hurwitz.

Cabe aclarar que esta hipótesis no asegura la estabilidad del sistema conmutado que resulta luego de una sucesión arbitraria de fallas y reconfiguraciones, más adelante veremos un resultado que permite garantizar dicha estabilidad.

Cálculo de Cotas Finales Probabilísticas

Para el cálculo de los conjuntos PUB correspondientes se procede de la misma manera que en el caso sin reconfiguración, sólo cambian las diferentes ecuaciones involucradas debido a que, como se viene trabajando a lo largo de esta sección, asumimos que el sistema está bajo la ocurrencia de falla del i -ésimo actuador ($i \in \{0, \dots, m\}$), y configurado para la j -ésima situación de falla.

Así, la Ec. (5.33) puede reescribirse como

$$de(t) = \left[A_\ell^{i,j} e(t) + B_\ell^{i,j} u_r(t) \right] dt + Gdw(t), \quad (5.35)$$

con $A_\ell^{i,j}$ definida en la Ec. (5.34) y con

$$B_\ell^{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ B(P^i - P^j) \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Notar que la diferencia principal de esta ecuación con la Ec. (5.14) está en la matriz de entrada $B_\ell^{i,j}$ la cual debe tener en cuenta tanto la situación de falla actual como la configuración en la que se encuentra el sistema.

Al igual que en la sección anterior, usando el término constante de la entrada de referencia en $u_r(t) = \bar{u}_r^j + \Delta u_r(t)$ y teniendo en cuenta que las matrices $A_\ell^{i,j}$ son Hurwitz, y por lo tanto admiten inversa, se define

$$\bar{e}^{i,j} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{or}^{i,j} \\ \bar{e}_{po}^{i,j} \end{bmatrix} \triangleq -(A_\ell^{i,j})^{-1} B_\ell^{i,j} \bar{u}_r^j, \quad (5.37)$$

y se considera el cambio de coordenadas

$$\tilde{e}^{i,j}(t) = e(t) - \bar{e}^{i,j}.$$

De esta forma, el sistema en (5.35) puede expresarse como

$$d\tilde{e}^{i,j}(t) = A_\ell^{i,j} \tilde{e}^{i,j}(t) dt + Gdw(t) + B_\ell^{i,j} \Delta u_r(t) dt. \quad (5.38)$$

Notar que el último término tiende a cero pues $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta u_r(t) = 0$. Así, puede ser ignorado para el cálculo del PUB.

De manera análoga a lo hecho para el caso sin reconfiguración se puede mostrar que el conjunto

$$S^{i,j} = \{e \in \mathbb{R}^{2n} : |e_k - \bar{e}_k^{i,j}| \leq b_k^{i,j} + \varepsilon; k = 1, \dots, 2n\}, \quad (5.39)$$

donde

$$b_k^{i,j} \triangleq \sqrt{2[\Sigma_x^{i,j}]_{k,k} \text{erf}^{-1}(1 - \tilde{p}_k)}; \quad k = 1, \dots, 2n, \quad (5.40)$$

con $\Sigma_x^{i,j}$ solución de la ecuación $A_\ell^{i,j} \Sigma_x^{i,j} + \Sigma_x^{i,j} (A_\ell^{i,j})^T = -G \Sigma_w G^T$, y $\tilde{p}_k \in (0, 1)$ tales que

$$\sum_{k=1}^{2n} \tilde{p}_k = 1 - p, \quad (5.41)$$

es un PUB para el sistema en las coordenadas originales bajo la i -ésima situación de falla considerando la j -ésima configuración.

La idea básica para detectar la ocurrencia de una falla es chequear si el error $e(t)$ evoluciona dentro de un conjunto PUB $S^{i,j}$. Pero, como la única componente que puede medirse es $e_{or}(t)$, sólo consideramos los siguientes conjuntos PUB,

$$S_{or}^{i,j} = \{e_{or} \in \mathbb{R}^n : |e_{or} - \bar{e}_{or}^{i,j}| \leq b_{or}^{i,j} + \bar{\varepsilon}\}, \quad (5.42)$$

donde $\bar{\varepsilon} \triangleq [\varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$, y $b_{or}^{i,j} \triangleq [b_1^{i,j}, \dots, b_n^{i,j}]^T$, definido por la Ec. (5.40).

Diagnóstico de fallas

Teniendo en cuenta la estrategia de diagnóstico de falla desarrollada en la Sección 5.1, la cual se basa en verificar la convergencia del residuo $e_{or}(t)$ hacia los conjuntos PUBs $S_{or}^{i,j}$, presentamos los resultados para el caso más general que tiene en cuenta la reconfiguración del control una vez detectada la falla. Primero enunciamos un lema similar al Lema 5.1, y luego se prueba el resultado central de este capítulo.

Lema 5.2. *Dada una configuración $j \in \{0, \dots, m\}$, asumimos que el sistema está en la i -ésima situación de falla en el tiempo t_f^i . Entonces, dado $p \in (0, 1)$, existe $T > 0$ tal que $\Pr[e_{or}(t) \in S_{or}^{i,j}] \geq p, \forall t \geq t_f^i + T$.*

La prueba de este lema es completamente análoga a la del Lema 5.1.

El siguiente teorema constituye el fundamento teórico de la estrategia de detección de fallas basada en conjuntos probabilísticos y generaliza al Teorema 5.1.

Teorema 5.2. *Supongamos que el sistema a lazo cerrado está bajo una configuración $j \in \{0, \dots, m\}$, y que la planta está bajo la ocurrencia de falla en el i -ésimo actuador desde el instante t_f^i . Asumimos que los conjuntos PUB son disjuntos, esto es, $S_{or}^{i,j} \cap S_{or}^{k,j} = \emptyset$, para $i \neq k$, y definimos*

$$d^{k,j}(t) \triangleq \mathbf{1}_{S_{or}^{k,j}}(e_{or}(t)); \quad k = 0, \dots, m, \quad (5.43)$$

donde $\mathbf{1}_S$ es la función indicatriz del conjunto S . Además, consideramos el filtro pasa bajos definido por las ecuaciones diferenciales

$$\dot{d}_f^{k,j}(t) = -\lambda [d_f^{k,j}(t) - d^{k,j}(t)]; \quad k = 0, \dots, m. \quad (5.44)$$

con condiciones iniciales $d_f^{k,j}(t_f^i) \in [0, 1]$.

Entonces, si la probabilidad $p > p^*$ del conjunto PUB y existe $\lambda^* > 0$ tal que $0 < \lambda < \lambda^*$, dado $\hat{\delta} > 0$, existe $\hat{T}^{i,j} > 0$ tal que

$$\Pr[d_f^{i,j}(t) < d_f^{k,j}(t)] < \hat{\delta} \quad \forall t > \hat{T}^{i,j}, \quad i \neq k,$$

donde $p^* \approx 0.8133$ es la solución de

$$\sup_{\gamma > 0} [1 - 2e^{-\gamma} - 2\gamma(1 - p)] = 0. \quad (5.45)$$

Demostración. Dado $t_0 \gg t_f^i$, para cada $\tau \geq t_0$, $e_{or}(\tau)$ es un proceso Gaussiano estacionario uniformemente ergódico. Sea $C^{i,j} \triangleq \mathbb{R}^n \setminus S_{or}^{i,j}$ el complemento de $S_{or}^{i,j}$ y tomemos $t_1 \geq t_0$. Entonces, resulta que

$$\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_1+t} \mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(\tau)) d\tau \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(t_1))]$$

uniformemente en t_1 . En particular, dado $\delta > 0$, y $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ independiente de t_1 tal que $\forall t > T$,

$$\Pr \left[\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^{i,j}(\tau)] d\tau \geq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(t_1))] + \epsilon \right] < \delta,$$

donde usamos el hecho de que $\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(\tau)) = 1 - d^{i,j}(\tau)$.

Como $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{C^{i,j}}(e_{or}(t_1))] = \Pr[e_{or}(t_1) \notin S_{or}^{i,j}] = 1 - \Pr[e_{or}(t_1) \in S_{or}^{i,j}] \leq 1 - p$ (Lema 5.2 y la nota al pie 1), entonces, para todo $t > T$,

$$\Pr \left[\frac{1}{t} \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^{i,j}(\tau)] d\tau \geq 1 - p + \epsilon \right] < \delta,$$

Luego, dado $\lambda > 0$,

$$\Pr \left[\lambda \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^{i,j}(\tau)] d\tau \geq \lambda t(1 - p + \epsilon) \right] < \delta. \quad (5.46)$$

Notar que, siempre que $\tau < t + t_1$, resulta que $0 < e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} < 1$. También, como $d^{i,j} \in \{0, 1\}$ se tiene que $[1 - d^{i,j}(\tau)] \geq 0, \forall \tau$. Así, de la Ec.(5.46) obtenemos

$$\Pr \left[\lambda \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^{i,j}(\tau)] e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} d\tau > \lambda t(1 - p + \epsilon) \right] < \delta \quad (5.47)$$

Por otro lado, resolviendo la Ec.(5.44) con $k = i$, obtenemos

$$\begin{aligned} d_f^{i,j}(t_1 + t) &= e^{-\lambda t} d_f^{i,j}(t_1) + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} d^{i,j}(\tau) d\tau = \\ &= e^{-\lambda t} d_f^{i,j}(t_1) + (1 - e^{-\lambda t}) - \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} [1 - d^{i,j}(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Usando lo anterior en la Ec.(5.47) y el hecho que $d_f^{i,j}(t_f^i) \geq 0 \Rightarrow d_f^{i,j}(t_1) \geq 0$, resulta que

$$\Pr \left[d_f^{i,j}(t_1 + t) < 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t(1 - p + \epsilon) \right] < \delta \quad (5.48)$$

¹En particular t_0 tiene que ser tal que $t_0 - t_f^i$ sea mayor que el tiempo en el que $e_{or}(t)$ está en el conjunto $S_{or}^{i,j}$ con probabilidad mayor o igual a p , de acuerdo al Lema 5.2 (tal tiempo es una función del estado inicial $e_{or}(t_f^i)$ —ver definición de PUB).

para todo $t > T$. Ahora, resolviendo la Ec.(5.44) con $k \neq i$, y teniendo en cuenta que $d_f^{k,j}(t_f^i) \leq 1 \Rightarrow d_f^{k,j}(t_1) \leq 1$ y $S_{or}^{i,j} \cap S_{or}^{k,j} = \emptyset \Rightarrow d^{k,j}(\tau) \leq 1 - d^{i,j}(\tau)$, se sigue que

$$\begin{aligned} d_f^{k,j}(t_1 + t) &= e^{-\lambda t} d_f^{k,j}(t_1) + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} d^{k,j}(\tau) d\tau \\ &\leq e^{-\lambda t} + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} e^{-\lambda(t+t_1-\tau)} [1 - d^{i,j}(\tau)] d\tau \\ &\leq e^{-\lambda t} + \lambda \int_{t_1}^{t_1+t} [1 - d^{i,j}(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

Considerando la última desigualdad y la Ec.(5.46), resulta que

$$\Pr \left[d_f^{k,j}(t_1 + t) > e^{-\lambda t} + \lambda t(1 - p + \epsilon) \right] < \delta. \quad (5.49)$$

A partir de las Ecs.(5.48)–(5.49) y propiedades probabilísticas simples² obtenemos

$$\Pr \left[d_f^{i,j}(t_1 + t) - d_f^{k,j}(t_1 + t) < 1 - 2e^{-\lambda t} - 2\lambda t(1 - p + \epsilon) \right] < 2\delta,$$

para cualquier $t_1 \geq t_0$ y todo $t > T$.

Notar que la condición $\alpha(t_1 + t) > \beta(t)$ para todo $t_1 \geq t_0$ y para todo $t > T$ implica que $\alpha(t_0 + t) > \sup_{\tau > T} \beta(\tau)$ para cada $t \geq T_s \triangleq \arg(\sup_{\tau > T} \beta(\tau))$, y, por lo tanto $\Pr[\alpha(t_1 + t) < \beta(t)] \geq \Pr[\alpha(t_0 + t) < \sup_{\tau > T} \beta(\tau)]$. Usando este razonamiento en la última desigualdad, se sigue que

$$\Pr \left[d_f^{i,j}(t_0 + t) - d_f^{k,j}(t_0 + t) < \sup_{\tau > T} [1 - 2e^{-\lambda\tau} - 2\lambda\tau(1 - p + \epsilon)] \right] < 2\delta,$$

para todo $t \geq T_s^{i,j}$. Sea $\gamma \triangleq \lambda T_s$,

$$\Pr \left[d_f^{i,j}(t_0 + t) - d_f^{k,j}(t_0 + t) < \sup_{\gamma > \lambda T} [1 - 2e^{-\gamma} - 2\gamma(1 - p + \epsilon)] \right] < 2\delta. \quad (5.50)$$

Sea p^* la solución de (5.45) y calculamos $\gamma^* \approx 1.6783$ tal que $1 - 2e^{-\gamma^*} - 2\gamma^*(1 - p^*) = 0$. Así, asumiendo que p y λ fueron elegidos tales que $p > p^* + \epsilon$ y $\lambda < \frac{\gamma^*}{T}$, el supremo en la Ec.(5.50) resulta mayor que cero y entonces

$$\Pr \left[d_f^{i,j}(t_0 + t) < d_f^{k,j}(t_0 + t) \right] < 2\delta, \quad \forall t > T_s^{i,j}.$$

y la prueba concluye tomando $\hat{T}^{i,j} = t_0 + T_s^{i,j}$ y $\hat{\delta} = 2\delta$. \square

²Dadas dos variables aleatorias $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, y dos números reales a, b , los sucesos $\{(x, y) : x < a\}$, $\{(x, y) : y > b\}$ y $\{(x, y) : x + b < y + a\}$ satisfacen $\{x + b < y + a\} \subset \{x < a\} \cup \{y > b\}$. Luego, $\Pr[x + b < y + a] \leq \Pr[x < a] + \Pr[y > b]$.

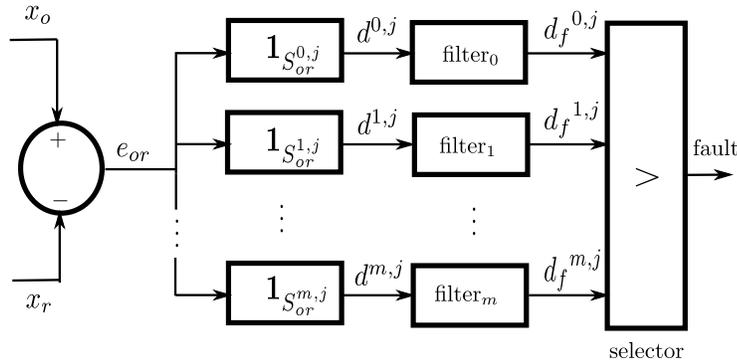


Figura 5.6: Esquema de detección propuesto.

El Teorema 5.2 muestra que si el sistema está configurado para coincidir con la j -ésima configuración de falla y ocurre la i -ésima falla en el tiempo t_f^i , entonces, aplicando filtros de primer orden sobre las funciones indicatrices de los diferentes conjuntos, después de algún tiempo $\hat{T}^{i,j}$, la señal filtrada correspondiente a la i -ésima situación de falla tiene una probabilidad arbitrariamente pequeña de ser más pequeña que cualquier otra señal filtrada.

Luego, podemos detectar la i -ésima falla de acuerdo a $i = \arg(\max_k d_f^{k,j}(t))$, con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña.

De acuerdo a esta idea, el esquema de detección propuesto es ilustrado en la Fig. 5.6.

Una vez que la falla es detectada, debemos reconfigurar el control como se explica en lo que sigue.

5.2.3. Reconfiguración del control

En el modo de operación normal (con o sin falla) deberíamos tener que $j = \arg(\max_k d_f^{k,j}(t))$, es decir, que la situación de falla detectada sea igual a la situación de falla actual.

Cuando esta situación cambia, i.e., cuando $j \neq i = \arg(\max_k d_f^{k,j}(t))$, reconfiguramos el esquema tomando $j = i$. Después de este paso de reconfiguración, sabemos que durante cierto tiempo no podemos confiar en el módulo de diagnóstico (Teorema 5.2 sólo garantiza la detección correcta de fallas con una probabilidad de error arbitrariamente pequeña después de algún tiempo $\hat{T}^{i,j}$). Por lo tanto, bajo la detección de la i -ésima situación de falla en el instante t_d^i procedemos de la siguiente manera:

- Reconfiguramos el control, el observador y el sistema de referencia de acuerdo a la nueva situación de falla tomando $j = i$.
- Esperamos algún tiempo hasta que el residuo $e_{or}(t)$ llegue al conjunto $S_{or}^{i,i}$, donde debería permanecer (con probabilidad p) siempre que la

situación de falla no cambie otra vez.

- Reiniciamos los estados de filtro de acuerdo con $d_f^{i,i}(t) = 1$ y $d_f^{k,i}(t) = 0$ para $k \neq i$ para que comiencen a filtrarse desde un estado consistente con la situación de falla actual detectada.
- Reiniciamos el módulo de diagnóstico comparando nuevamente los estados del filtro.

Observación 5.3. *Notar que sólo pedimos que las diferentes configuraciones bajo las distintas situaciones de falla sean estables, es decir, que las matrices a lazo cerrado $A_\ell^{i,j}$ in (5.34) sean Hurwitz. Esta única condición no asegura la estabilidad del sistema conmutado que resulta después de la ocurrencia de una sucesión arbitraria de fallas y reconfiguraciones. Sin embargo, si se asume que un nuevo cambio en la situación de falla sólo puede ocurrir después que el estado llega a la cota final probabilística correspondiente, y que la subsiguiente reconfiguración sólo tiene lugar después de que el estado llega al nuevo conjunto probabilístico, entonces una sucesión de conmutación que inestabilice al sistema no puede ocurrir. Esto es, el estado siempre se moverá (con probabilidad) entre las cotas finales calculadas para las diferentes situaciones de falla y sus configuraciones.*

Mientras que la última observación dice que, en la práctica, la configuración permanece estable, el siguiente teorema proporciona una prueba formal de que las trayectorias permanecen (en probabilidad) en una región acotada.

Teorema 5.3. *Consideremos el sistema (5.35), y asumamos que las matrices $A_\ell^{i,j}$ son Hurwitz y que la señal de entrada de referencia $u_r(t)$ es acotada. Asumimos, también, que los intervalos de conmutación están acotados inferiormente por un tiempo $T > 0$ suficientemente grande de manera que $\|e^{A_\ell^{i,j}t}\|_2 < 1$ para todo $t \geq T$ y para todo i, j . Entonces, dada una probabilidad arbitraria $0 < p < 1$, existe un conjunto S que es un PUB con probabilidad p para el sistema (5.35).*

Demostración. Sea $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conmutación arbitraria con $\tau_1 \geq t_0 + T$, a partir de esto construimos la siguiente sucesión

$$t_{k+1} = \begin{cases} \tau_j & \text{si } t_k + T \leq \tau_j < t_k + 2T \\ t_k + T & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notar que la sucesión $\{t_k\}$ contiene a la sucesión de conmutación $\{\tau_j\}$, pero también puede tener más puntos, de modo que

$$T \leq t_{k+1} - t_k < 2T \quad (5.51)$$

Sea $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Como no hay conmutaciones en este intervalo, la solución de la Ec. (5.35) puede escribirse como

$$e(t) = e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} e(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) d\tau + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G dw(\tau) \quad (5.52)$$

Calculando esperanza a ambos lados de la solución, se obtiene

$$\begin{aligned} E[e(t)] &= E \left[e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} e(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) d\tau + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G dw(\tau) \right] \\ &= e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} E[e(t_k)] + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) d\tau \end{aligned}$$

donde el tercer término es nulo dado que el proceso $w(t)$ es un proceso de Wiener.

Tomando la norma ℓ_2 a ambos lados de la última ecuación, resulta

$$\begin{aligned} \|E[e(t)]\|_2 &= \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} E[e(t_k)] + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) d\tau \right\|_2 \\ &\leq \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \right\|_2 \|E[e(t_k)]\|_2 + \int_{t_k}^t \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} B_\ell^{i,j} \right\|_2 \|u_r(\tau)\|_2 d\tau \end{aligned} \quad (5.53)$$

Sean

$$\gamma \triangleq \max_{i,j} \sup_{\tau \geq T} \|e^{A_\ell^{i,j}\tau}\|_2; \quad v \triangleq \max_{i,j} \sup_{\tau \geq 0} \|e^{A_\ell^{i,j}\tau}\|_2, \quad (5.54)$$

notar que, por hipótesis, el hecho de que $\tau \geq T$ implica $\|e^{A_\ell^{i,j}\tau}\|_2 < 1$ y así $\gamma < 1$. También, como $A_\ell^{i,j}$ son matrices Hurwitz, v está acotada por alguna constante.

Definimos

$$\eta \triangleq \max_{i,j} \sup_{t \geq 0} \int_0^t \left\| e^{A_\ell^{i,j}\tau} B_\ell^{i,j} \right\|_2 \bar{u}_r d\tau \quad (5.55)$$

donde \bar{u}_r es una cota superior para la señal acotada $\|u_r(\tau)\|_2$ para todo $\tau \geq t_0$. Notar que η está acotada debido al hecho que las matrices $A_\ell^{i,j}$ son Hurwitz.

Usando las Ecs. (5.54)–(5.55) en la desigualdad (5.53) para $t = t_{k+1}$ obtenemos,

$$\|E[e(t_{k+1})]\|_2 \leq \gamma \|E[e(t_k)]\|_2 + \eta \quad (5.56)$$

Entonces la sucesión $\|E[e(t_k)]\|_2$ está superiormente acotada por una sucesión monótona que converge a $\frac{\eta}{1-\gamma}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E[e(t_{k+1})]\|_2 \leq \frac{\eta}{1-\gamma} \quad (5.57)$$

y luego, dado $\varepsilon > 0$, existe K_ε tal que

$$\|E[e(t_k)]\|_2 \leq \frac{\eta}{1-\gamma} + \varepsilon, \quad \forall k \geq K_\varepsilon. \quad (5.58)$$

Usando ahora las Ecs. (5.55) y (5.58) en la desigualdad (5.53), obtenemos

$$\|E[e(t)]\|_2 \leq \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \right\|_2 \left(\frac{\eta}{1-\gamma} + \varepsilon \right) + \eta \leq v \left(\frac{\eta}{1-\gamma} + \varepsilon \right) + \eta \triangleq \mu_\varepsilon \quad (5.59)$$

para todo $t > t_k$ con $k \geq K_\varepsilon$, donde hemos usado el hecho que $\|e^{A_\ell^{i,j}t}\|_2 \leq \nu$ para $t \geq 0$, de acuerdo a la Ec.(5.54).

Notar que $t_{k+1} - t_k < 2T$ en Ec. (5.51) implica que $t_k < t_0 + 2kT$. Luego, definiendo

$$T_\varepsilon \triangleq t_0 + 2K_\varepsilon T \quad (5.60)$$

la condición $t \geq T_\varepsilon$ implica que $t > t_k$ con $k = K_\varepsilon$, y

$$\|E[e(t)]\|_2 \leq \mu_\varepsilon \quad (5.61)$$

para todo $t \geq T_\varepsilon$.

La covarianza de $e(t)$ en la Ec.(5.52) está definida como $\Sigma_e(t) = E[(e(t) - E[e(t)])(e(t) - E[e(t)])^T]$.

Notar que el término $\int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} B_\ell^{i,j} u_r(\tau) d\tau$ de la Ec.(5.52) es determinístico, de modo que no contribuye a la covarianza, la cual puede ser calculada como $\Sigma_e(t) = \Sigma_z(t) = E[(z(t) - E[z(t)])(z(t) - E[z(t)])^T]$ con

$$z(t) = e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} z(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G dw(\tau)$$

y $z(t_k) = e(t_k)$. Esta última expresión es la solución de una ecuación diferencial estocástica lineal cuya varianza, siguiendo la Ec.(6.9) de [62], está dada por

$$\Sigma_z(t) = e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \Sigma_z(t_k) e^{A_\ell^{i,jT}(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G \Sigma_w G^T e^{A_\ell^{i,jT}(t-\tau)} d\tau$$

y entonces,

$$\Sigma_e(t) = e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \Sigma_e(t_k) e^{A_\ell^{i,jT}(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G \Sigma_w G^T e^{A_\ell^{i,jT}(t-\tau)} d\tau$$

Tomando norma ℓ_2 a ambos lados, resulta

$$\begin{aligned} \|\Sigma_e(t)\|_2 &\leq \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \Sigma_e(t_k) e^{A_\ell^{i,jT}(t-t_k)} \right\|_2 + \left\| \int_{t_k}^t e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G \Sigma_w G^T e^{A_\ell^{i,jT}(t-\tau)} d\tau \right\|_2 \\ &\leq \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \right\|_2^2 \|\Sigma_e(t_k)\|_2 + \int_{t_k}^t \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G \Sigma_w G^T e^{A_\ell^{i,jT}(t-\tau)} \right\|_2 d\tau \\ &\leq \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-t_k)} \right\|_2^2 \|\Sigma_e(t_k)\|_2 + \delta \end{aligned} \quad (5.62)$$

donde

$$\delta \triangleq \max_{i,j} \sup_{t \geq 0} \int_{t_k}^t \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t-\tau)} G \Sigma_w G^T e^{A_\ell^{i,jT}(t-\tau)} \right\|_2 d\tau \quad (5.63)$$

Usando la desigualdad (5.62) para $t = t_{k+1}$ se obtiene

$$\|\Sigma_e(t_{k+1})\|_2 \leq \left\| e^{A_\ell^{i,j}(t_{k+1}-t_k)} \right\|_2^2 \|\Sigma_e(t_k)\|_2 + \delta \leq \gamma^2 \|\Sigma_e(t_k)\|_2 + \delta \quad (5.64)$$

Si consideramos que el estado inicial $e(t_0)$ es determinístico (i.e. $\Sigma_e(t_0) = 0$), la última ecuación dice que la sucesión $\|\Sigma_e(t_k)\|$ está acotada superiormente por una sucesión monótona creciente que converge al valor $\frac{\delta}{1-\gamma^2}$. Así,

$$\|\Sigma_e(t_k)\|_2 \leq \frac{\delta}{1-\gamma^2} \quad (5.65)$$

para todo $k \geq 0$, y entonces, usando nuevamente la Ec.(5.62) se obtiene

$$\|\Sigma_e(t)\|_2 \leq \left\| e^{A_e^{i,j}(t-t_k)} \right\|_2^2 \|\Sigma_e(t_k)\|_2 + \delta \leq v^2 \frac{\delta}{1-\gamma^2} + \delta \triangleq \sigma^2 \quad (5.66)$$

mostrando que la norma de la covarianza de $e(t)$ está acotada por σ^2 para todo $t \geq t_0$.

Sea $e_i(t)$ la i -ésima componente de $e(t)$. Recordando que $\|E[e(t)]\|_2 \leq \mu_\varepsilon$, para $t \geq T_\varepsilon$ y $\|\Sigma_e(t)\|_2 \leq \sigma^2$, y que $e(t)$ es $2n$ -dimensional, resulta

$$|E[e_i(t)]| \leq \mu_\varepsilon, \quad \forall t \geq T_\varepsilon$$

y

$$[\Sigma_e(t)]_{i,i} \leq \|\Sigma_e(t)\|_\infty \leq \|\Sigma_e(t)\|_2 \sqrt{2n} \leq \sigma^2 \sqrt{2n}$$

Entonces, para $t \geq T_\varepsilon$, dado \tilde{p}_i tal que $0 < \tilde{p}_i < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \Pr \left[|e_i(t)| \geq \mu_\varepsilon + \sigma \sqrt{\frac{2n}{\tilde{p}_i^2}} \right] &\leq \Pr \left[|e_i(t)| \geq |E[e_i(t)]| + \sqrt{[\Sigma_e(t)]_{i,i}} \sqrt{\frac{1}{\tilde{p}_i}} \right] \\ &\leq \Pr \left[|e_i(t) - E[e_i(t)]| \geq \sqrt{\frac{[\Sigma_e(t)]_{i,i}}{\tilde{p}_i}} \right] \\ &\leq \tilde{p}_i \end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Chebyshev en el último paso.

Tomando $0 < \tilde{p}_i < 1$ para $i = 1, \dots, 2n$ tal que $\sum_{i=1}^{2n} \tilde{p}_i = 1 - p$, definimos la región

$$S = \left\{ e : |e_i| \leq \mu_\varepsilon + \sigma \sqrt{\frac{2n}{\tilde{p}_i^2}}; \quad i = 1, \dots, 2n \right\} \quad (5.67)$$

y observamos que

$$\Pr[e(t) \in S] = 1 - \Pr[e(t) \notin S] \geq 1 - \sum_{i=1}^{2n} \Pr \left[|e_i(t)| \geq \mu_\varepsilon + \sigma \sqrt{\frac{2n}{\tilde{p}_i^2}} \right] \geq 1 - \sum_{i=1}^{2n} \tilde{p}_i = p$$

para $t \geq T_\varepsilon$, mostrando que el conjunto acotado S es un PUB con probabilidad p para el sistema (5.35). \square

Este teorema prueba que las trayectorias convergen en probabilidad a una región acotada siempre que el intervalo mínimo T , como se calcula en el teorema, entre tiempos de conmutación sucesivos se satisfaga.

En la siguiente subsección se muestra la aplicación de la estrategia completa de diagnóstico y reconfiguración a un sistema que modela ciertas características de un avión a reacción.

5.2.4. Ejemplo

El siguiente ejemplo, tomado de [61], representa un sistema de control del ángulo del banco para un avión de transporte a reacción que vuela a velocidad 0.8 Mach, y a una altitud de 40,000 pies. Hay dos variables manipuladas: la posición del alerón y la posición del timón.

La representación de estados para este modelo puede escribirse como en la Ec.(5.26) con las siguientes matrices del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} -0.6358 & 1 & 0 & 0 \\ -0.9389 & 0 & 1 & 0 \\ -0.5116 & 0 & 0 & 1 \\ -0.0037 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.1476 & 10.7290 \\ -2.0036 & 2.3169 \\ 13.7264 & 10.2370 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \text{ y } F = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.1476 \\ -2.0036 \\ -13.7264 \end{bmatrix}.$$

Los escenarios de fallas son representados por las siguientes matrices:

$$P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde P^0 modela cuando ambos actuadores se encuentran operacionales, y P^1 y P^2 modelan fallas en el alerón y en el timón, respectivamente.

El observador para el estado está diseñado de acuerdo a la Ec.(5.31) con

$$L = [13.3642 \quad 70.0611 \quad 153.4884 \quad 119.9963]^T.$$

Las ganancias del control por realimentación K_j para cada escenario de falla (Ec.(5.32)) son diseñadas usando la metodología LQR, resultando:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.0833 & 0.0021 & 0.1427 & 0.1531 \\ 0.0105 & -0.0208 & -0.0212 & -0.0126 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0223 & -0.0085 & -0.0400 & -0.0579 \end{bmatrix}, \text{ y}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.1075 & 0.0249 & 0.1745 & 0.1704 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puede verificarse por cálculo directo que la Observación 5.2 es válida con estas matrices del control y del observador.

Para el sistema de referencia diseñamos una ley de control integral cuadrático lineal (LQI) de modo que la salida siga una referencia constante $y_0(t) = 1$. El uso de este controlador LQI en el sistema de Ec.(5.29) proporciona las señales de referencia para la entrada:

$$\bar{u}_{r,0} = [0.0648, 0.0873]^T, \bar{u}_{r,1} = [0.0885, 0.0004]^T, \text{ y } \bar{u}_{r,2} = [-0.0003, 0.1260]^T,$$

para cada escenario de configuración de falla.

Luego, los conjuntos PUB $S_{or}^{i,j} = \{e_{or} \in \mathbb{R}^4 : |e_{or} - \bar{e}_{or}^{i,j}| \leq b_{or}^{i,j} + \bar{\varepsilon}\}$, donde $\bar{\varepsilon} \triangleq [\varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$, fueron calculados para una probabilidad $p = 0.82$ y una covarianza incremental del ruido $\Sigma_w = 10^{-5} dt$. Tomamos $\tilde{p}_k = (1 - p - \delta)/4$ para $k = 1, \dots, 4$, y $\tilde{p}_k = \delta/4$, para $k = 5, \dots, 8$, con un valor muy pequeño para δ (elegimos $\delta = 10^{-4}$). Por lo tanto, la Ec.(5.41) se satisface y obtenemos un tamaño pequeño para $S_{or}^{i,j}$ en las direcciones de las variables medidas (las primeras 4 componentes de las $2n$ del vector de estado combinado $e(t) = [e_{or}(t) \quad e_{po}(t)]^T$).

Así, utilizando las ecuaciones (5.37) y (5.40) se obtuvieron los siguientes valores para $\bar{e}_{or}^{i,j}$ y $b_{or}^{i,j}$:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{or}^{0,0} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \bar{b}_{or}^{0,0} &= [0.1003 \quad 0.0995 \quad 0.1010 \quad 0.0610]^T, \\ \bar{e}_{or}^{1,0} &= [0.4349 \quad 0.2517 \quad 0.3492 \quad -0.0244]^T, \\ \bar{b}_{or}^{1,0} &= [0.2875 \quad 0.2772 \quad 0.1979 \quad 0.0967]^T, \\ \bar{e}_{or}^{2,0} &= [-0.2557 \quad -0.1480 \quad -0.2053 \quad 0.0144]^T, \\ \bar{b}_{or}^{2,0} &= [0.1320 \quad 0.1263 \quad 0.1272 \quad 0.0723]^T,\end{aligned}$$

para la configuración sin falla,

$$\begin{aligned}\bar{e}_{or}^{0,1} &= [-0.3564 \quad -0.2124 \quad -0.3923 \quad -0.0480]^T, \\ \bar{b}_{or}^{0,1} &= [0.1705 \quad 0.1655 \quad 0.1805 \quad 0.0738]^T, \\ \bar{e}_{or}^{1,1} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \bar{b}_{or}^{1,1} &= [0.1705 \quad 0.1655 \quad 0.1805 \quad 0.0738]^T, \\ \bar{e}_{or}^{2,1} &= [-35.306 \quad -21.043 \quad -38.866 \quad -4.7549]^T, \\ \bar{b}_{or}^{2,1} &= [1.4400 \quad 0.9002 \quad 1.5828 \quad 0.2394]^T,\end{aligned}$$

para la falla en el primer actuador, y

$$\begin{aligned}\bar{e}_{or}^{0,2} &= [0.3113 \quad 0.1836 \quad 0.2063 \quad 0.0129]^T, \\ \bar{b}_{or}^{0,2} &= [0.1274 \quad 0.1280 \quad 0.0996 \quad 0.0719]^T, \\ \bar{e}_{or}^{1,2} &= [33.7494 \quad 19.9005 \quad 22.3642 \quad 1.4026]^T, \\ \bar{b}_{or}^{1,2} &= [1.4393 \quad 0.8875 \quad 0.9417 \quad 0.1342]^T, \\ \bar{e}_{or}^{2,2} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \bar{b}_{or}^{2,2} &= [0.1274 \quad 0.1280 \quad 0.0996 \quad 0.0719]^T,\end{aligned}$$

para la falla en la configuración del segundo actuador. Puede verificarse que los conjuntos PUBs resultantes para las diferentes configuraciones son disjuntos, con lo cual satisfacen las hipótesis del Teorema 5.2.

A fin de implementar el esquema de diagnóstico de la Fig. 5.6, diseñamos los filtros (5.44) usando el parámetro $\lambda = 0.1$.

Para comprobar la eficiencia del esquema, el sistema fue simulado por 1000 segundos, variando la situación de falla entre los 3 escenarios posibles, como se muestra con líneas de puntos en la Fig. 5.7. En la misma figura, las líneas sólidas representan la salida del bloque de diagnóstico, el cual detecta correctamente la falla después de un lapso de tiempo que es del orden del tiempo de respuesta del filtro.

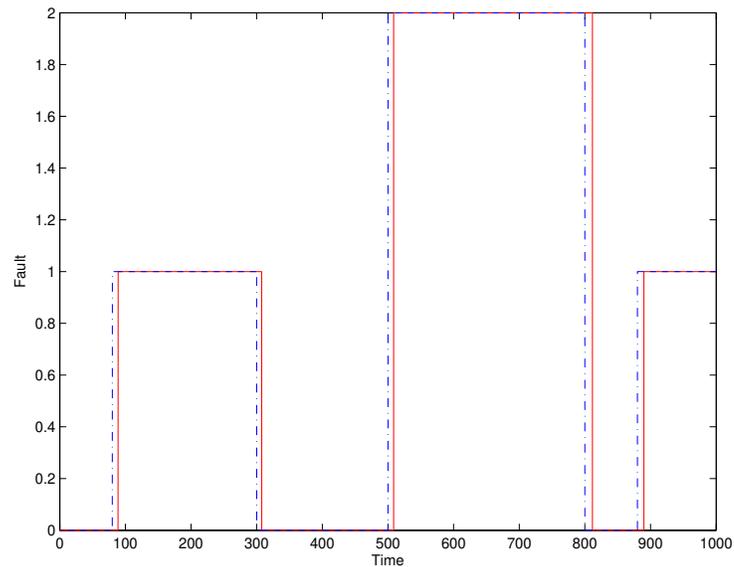


Figura 5.7: Situación de falla actual (línea de puntos) y la correspondiente detección (línea sólida).

Para la misma secuencia de fallas, la Figura 5.9 muestra la salida de la planta cuando se aplica el esquema de reconfiguración. Puede verse que la señal de referencia es seguida correctamente en todas las situaciones (excepto para algunos transitorios cortos debidos al tiempo que se requiere para un correcto diagnóstico de falla). La efectividad de la metodología propuesta se hace evidente cuando esta señal es comparada con la de la Figura 5.8, que muestra la salida de la planta bajo la misma secuencia de fallas pero sin haber realizado la reconfiguración.

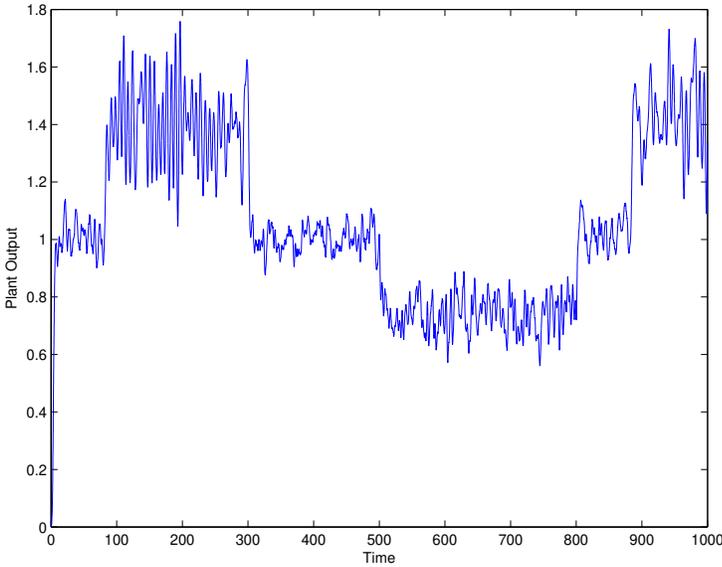


Figura 5.8: Salida de la planta sin reconfiguración.

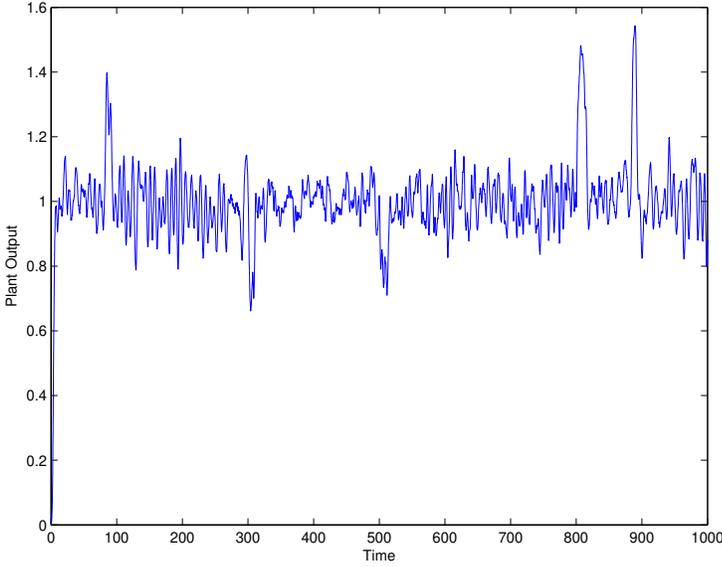


Figura 5.9: Salida de la planta con reconfiguración.

Capítulo 6

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones generales del trabajo desarrollado a lo largo de los capítulos anteriores.

También se comentan los lineamientos principales de futuros trabajos relacionados con los temas expuestos en esta Tesis.

6.1. Conclusiones Generales

Con el objetivo de brindar herramientas que contribuyan al análisis y diseño de sistemas de control bajo la influencia de perturbaciones estocásticas no evanescentes se presentaron diferentes resultados, los cuales son válidos siempre que la matriz de perturbación esté alineada con la entrada de control, esta condición si bien parece restrictiva es muy usual en aplicaciones de control robusto.

En primer lugar, motivados por la metodología de descomposición modal que permite estimar cotas finales y conjuntos invariantes para sistemas determinísticos, en el Capítulo 3 se desarrolló una estrategia de diseño sistemático de control que garantiza la existencia de una cota final probabilística para sistemas lineales. Este diseño se basa en el cálculo de las probabilidades de que cada componente del estado salga del PUB correspondiente, nuestra única hipótesis sobre ellas es que su suma sea igual a la probabilidad con la cual queremos asegurarnos que las trayectorias permanezcan en el conjunto deseado. Sin embargo podría ocurrir que exista alguna dependencia entre dichas probabilidades de salida, esta situación no es contemplada en el diseño y esa pérdida de información podría hacer un poco conservadores nuestros resultados. Sin embargo, el análisis componente a componente permite ajustar ciertos parámetros de manera de conseguir un diseño de control suficientemente robusto.

Por otro lado, en el Capítulo 4, se extendieron las definiciones de cota final y conjuntos invariantes probabilísticos, definidos en [29], a sistemas no lineales y se presentaron fórmulas para caracterizarlos. Esta caracterización conside-

ra funciones tipo Lyapunov que satisfacen cierta condición, de manera similar al trabajo realizado en [36]. Una primera dificultad que surge de este enfoque es la búsqueda de una función de Lyapunov adecuada que satisfaga los requerimientos necesarios, otro inconveniente es que los resultados obtenidos resultan algo conservadores debido en parte a la utilización de la desigualdad de Markov que sólo tiene en cuenta el valor esperado del proceso $V(x(t))$ sin considerar, por ejemplo, los momentos de orden superior que aportan más información sobre el proceso en cuestión.

Otro aporte de este capítulo es un diseño de control para sistemas linealizables por realimentación estocástica, teniendo en cuenta que en estos casos puede hallarse una cota para la matriz de covarianza del estado, aquí también el uso de desigualdades conservadoras en la obtención de la cota final afecta los resultados de diseño, además la necesidad de que tanto el difeomorfismo como las funciones de realimentación estén definidas globalmente restringe bastante el campo de aplicación de esta estrategia. Sin embargo, creemos que estos resultados representan un primer avance hacia la búsqueda de diseño de controles robustos para el caso no lineal.

Finalmente, en el Capítulo 5, se propuso una técnica de detección de fallas para sistemas con perturbaciones estocásticas basada en la pertenencia o no de los residuos a conjuntos PUBs y se planteó una reconfiguración del control una vez que la falla es detectada y aislada, de esta manera se obtuvo un diseño de control tolerante a fallas que permite tener en cuenta la presencia de ruido blanco no acotado en el modelo de la perturbación. En los ejemplos considerados se obtuvo una gran efectividad en la detección de las fallas y el esquema de reconfiguración aseguró el correcto seguimiento de la señal de referencia y la estabilidad del sistema a lazo cerrado. Si bien algunas cuestiones prácticas relacionadas a los modelos que constituyen el problema, como por ejemplo las ganancias de control utilizadas internamente, deben ser abordadas para cada ejemplo en particular, consideramos que los resultados teóricos obtenidos garantizan el éxito de nuestra técnica.

Por todo lo expuesto, nuestro trabajo presenta enfoques alternativos a los resultados existentes en la literatura, proporcionando diferentes metodologías de diseño basadas en la naturaleza estocástica de los sistemas en estudio.

6.2. Trabajo a Futuro

Como se dijo antes, en el Capítulo 4 se presentaron fórmulas que caracterizan conjuntos probabilísticos para sistemas no lineales mediante la utilización de funciones de Lyapunov, entonces, una primera línea de trabajo es conseguir un diseño de control no lineal que tenga en cuenta esta caracterización para asegurar la existencia de un PUB con una probabilidad preestablecida para sistemas lineales lo más generales posibles.

Siguiendo con sistemas no lineales, otra cuestión sobre la cual se quiere trabajar es en la extensión de la metodología de diseño de control tolerante a

fallas para el caso no lineal. En principio, la idea es diseñar un control por linealización exacta que permita estimar los conjuntos probabilísticos en ausencia y en presencia de fallas, y luego utilizar la misma estrategia desarrollada en el Capítulo 5, en la cual se filtra la función indicatriz de dichos conjuntos aplicada al residuo, lo que permite detectar con probabilidad arbitrariamente cercana a 1 la presencia de fallas.

Todo el trabajo realizado en esta Tesis tiene en cuenta sistemas continuos en el tiempo, sin embargo, es de esperar que estos resultados o similares puedan ser establecidos para sistemas a tiempo discreto. En este sentido, en [30, 31] se definen y caracterizan los conjuntos PUB y PIS para el caso discreto, así, otra línea de trabajo que nos interesa es presentar resultados que sean válidos para sistemas de tiempo discretos.

Bibliografía

- [1] K.J. Åström. *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- [2] B. Ross Barmish, Ian R. Petersen, and Arie Feuer. Linear ultimate boundedness control of uncertain dynamical systems. *Automatica*, 19(5):523–532, 1983.
- [3] M. Basseville and I.V. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes – Theory and Application*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [4] F. Blanchini and S. Miani. *Set-theoretic methods in control*. Birkhauser, 2007.
- [5] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [6] Mark L. Brockman and Martin Corless. Quadratic boundedness of nominally linear systems. *International Journal of Control*, 71(6):1105–1117, 1998.
- [7] C. Ocampo-Martínez, J. De Doná and M. Seron. Actuator fault-tolerant control based on set separation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 24(12):1070–1090, 2010.
- [8] Yong-Yan Cao and You-Xian Sun. Robust stabilization of uncertain systems with time-varying multistate delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(10):1484–1488, 1998.
- [9] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York, 3rd edition, 1999.
- [10] Hua Deng and Miroslav Krstić. Closed-form solutions of stochastic and deterministic nonlinear control problems. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(17):327–332, 1998.
- [11] Hua Deng and Miroslav Krstić. Output-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *Systems & Control Letters*, 39(3):173–182, 2000.

- [12] Hua Deng and Miroslav Krstić. Output-feedback stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance. *Systems & Control Letters*, 39(3):173–182, 2000.
- [13] S.X. Ding. *Model-based Fault Diagnosis Techniques*. Springer, 2008.
- [14] J. A. De Doná, M. M. Seron, and A. Yetendje. Multisensor fusion fault-tolerant control with diagnosis via a set separation principle. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China, 2009.
- [15] P. M. Frank and X. Ding. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of Process Control*, 7(6):403–424, 1997.
- [16] H. Fujioka and S. Hara. State covariance assignment problem with measurement noise: a unified approach based on a symmetric matrix equation. *Linear Algebra and its Applications*, 203–204:579–605, May–June 1994.
- [17] J.J. Gertler. Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. *IEEE Control Systems Magazine*, 8(6):3–11, 1988.
- [18] H. Haimovich, E. Kofman, and M. Seron. Systematic ultimate bound computation for sampled-data systems with quantization. *Automatica*, 43(6):1117–1123, 2007.
- [19] A. Ingimundarson, V. Puig, T. Alamo, J. Bravo, and P. Guerra. Robust fault detection using zonotope-based set-membership consistency test. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23(4):311–330, 2008.
- [20] R. Isermann. *Fault-Diagnosis Systems. An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer, 2006.
- [21] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 3rd edition, 2002.
- [22] Rafail Khasminskii. *Stochastic stability of differential equations*, volume 66. Springer Science & Business Media, 2011.
- [23] E. Kofman. Quantized-State Control. A Method for Discrete Event Control of Continuous Systems. *Latin American Applied Research*, 33(4):399–406, 2003.
- [24] E. Kofman. Discrete Event Simulation of Hybrid Systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(5):1771–1797, 2004.
- [25] E. Kofman. Non-conservative ultimate bound estimation in LTI perturbed systems. *Automatica*, 41(10):1835–1838, October 2005.

- [26] E. Kofman, F. Fontenla, H. Haimovich, and M. Seron. Control design with guaranteed ultimate bound for feedback linearizable systems. In *Proceedings of IFAC World Congress 2008*, Seoul, Korea, 2008.
- [27] E. Kofman, H. Haimovich, and M. Seron. A systematic method to obtain ultimate bounds for perturbed systems. *International Journal of Control*, 80(2):167–178, 2007.
- [28] E. Kofman, M. Seron, and H. Haimovich. Control Design with Guaranteed Ultimate Bound for Perturbed Systems. *Automatica*, 44(7):1815–1821, 2008.
- [29] Ernesto Kofman, Jose De Dona, Maria Seron, and Noelia Pizzi. Computation of continuous-time probabilistic invariant sets and ultimate bounds. In *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*, pages 6514–6519, Cape Town, South Africa, 2014.
- [30] Ernesto Kofman, José De Doná, and María Seron. Probabilistic Ultimate Bounds and Invariant Sets for LTI Systems with Gaussian Disturbances. In *Proc. of 2011 Australian Control Conference*, Melbourne, Australia, 2011.
- [31] Ernesto Kofman, José De Doná, and María Seron. Probabilistic Set Invariance and Ultimate Boundedness. *Automatica*, 48(10):2670–2676, 2012.
- [32] Ernesto Kofman, María Seron, José De Doná, and Noelia Pizzi. Continuous–Time Probabilistic Ultimate Bounds and Invariant Sets: Computation and Assignment. *Automatica*, 71:98–105, 2016.
- [33] Xuerong Mao. Stochastic versions of the lasalle theorem. *Journal of Differential Equations*, 153(1):175–195, 1999.
- [34] Xuerong Mao. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Woodhead, 2nd edition, 2011.
- [35] David Mateos-Núñez and Jorge Cortés. Stability of stochastic differential equations with additive persistent noise. In *American Control Conference (ACC), 2013*, pages 5427–5432. IEEE, 2013.
- [36] David Mateos-Núñez and Jorge Cortés. p th moment noise-to-state stability of stochastic differential equations with persistent noise. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(4):2399–2421, 2014.
- [37] Y Miyahara. Ultimate boundedness of the systems governed by stochastic differential equations, to appear in *nagoya math. J*, 47, 1972.
- [38] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 2nd edition, 2010.
- [39] S. Olaru, J. A. De Doná, M. M. Seron, and F. Stoican. Positive invariant sets for fault tolerant multisensor control schemes. *International Journal of Control*, 83(12):2622–2640, 2010.

- [40] Said Oucheriah. Robust Tracking and Model Following of Uncertain Dynamic Delay Systems by Memoryless Linear Controllers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44(7):1473–1477, 1999.
- [41] R.J. Patton, P.M. Frank, and R. Clark. *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer, 2000.
- [42] Noelia Pizzi, Ernesto Kofman, Maria Seron, and Jose De Dona. Diagnóstico de fallas en actuadores mediante cotas finales probabilísticas. In *Proc.of RPIC 2015*, Córdoba, Argentina, 2015.
- [43] Noelia Pizzi, Ernesto Kofman, María Seron, and José De Doná. Actuator Fault Diagnosis Using Probabilistic Ultimate Bounds. *IEEE Latin America Transactions*, 14(6):2548–2543, 2016.
- [44] V. Puig. Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches: application to real case studies. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 20(4):619–635, 2010.
- [45] A. Rapaport and A. Astolfi. Practical L_2 disturbance attenuation for nonlinear systems. *Automatica*, 38(1):139–145, 2002.
- [46] M. M. Seron and J. A. De Doná. Actuator fault tolerant multi-controller scheme using set separation based diagnosis. *International Journal of Control*, 83(11):2328–2339, 2010.
- [47] Maria M Seron, José A De Doná, and Sorin Olaru. Fault tolerant control allowing sensor healthy-to-faulty and faulty-to-healthy transitions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(7):1657–1669, 2012.
- [48] M.M. Seron, J.A. De Doná, and J. Richter. Fault tolerant control using virtual actuators and set-separation detection principles. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 22(7):709–742, 2012.
- [49] M.M. Seron, J.A. De Doná, and J. Richter. Set-based actuator fault diagnosis in Lure systems. In *8th IFAC International Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes (SAFEPROCESS 2012)*, National University of Mexico, Mexico City, 29–31 August 2012.
- [50] M.M. Seron, X.W. Zhuo, J.A. De Doná, and J.J. Martínez. Multisensor switching control strategy with fault tolerance guarantees. *Automatica*, 44(1):88–97, 2008.
- [51] E.D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, 24:351–359, 1995.
- [52] V Sreeram, W-Q Liu, and M Diab. Theory of state covariance assignment for linear single-input systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 143(3):289–295, 1996.

- [53] T. Lahdhiri, and T. Alouani. An Introduction to the Theory of Exact Stochastic Feedback Linearization for Nonlinear Stochastic Systems. In *IFAC World Congress 1996*, San Francisco, USA, 1996.
- [54] Takeshi Taniguchi. The exponential stability for stochastic delay partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331(1):191–205, 2007.
- [55] Uffe Høgsbro Thygesen et al. *A survey of Lyapunov techniques for stochastic differential equations*. Citeseer, 1997.
- [56] H. Trinh and M. Aldeen. Output tracking for linear uncertain time-delay systems. *IEE Proceedings, Control Theory and Applications*, 143(6):481–488, 1996.
- [57] G. Walsh, O. Beldiman, and L. Bushnell. Error Encoding Algorithms for Networked Control Systems. *Automatica*, 38:261–267, 2002.
- [58] W. S Wong and R. W. Brockett. Systems with finite communication bandwidth constraints – ii: stabilization with limited information feedback. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(5):1049–1053, 1999.
- [59] C-S Xiao, Z-M Feng, and X-M Shan. On the solution of the continuous-time Lyapunov matrix equation in two canonical forms. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 139(3):286–290, 1992.
- [60] Moshe Zakai. On the ultimate boundedness of moments associated with solutions of stochastic differential equations. *SIAM Journal on Control*, 5(4):588–593, 1967.
- [61] Q Zhao and J Jiang. Reliable state feedback control system design against actuator failures. *Automatica*, 34(10):1267–1272, 1998.
- [62] K. J. Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Academic Press, New York, 1st edition, 1970.