

Formulación constitutiva y validación numérica del comportamiento mecánico de suelos no saturados

Ricardo Schiava

Escuela de Ingeniería Civil
FCEyT-UNSE Universidad Nacional de Santiago del Estero
Mendoza 446, 4200 Santiago del Estero, Argentina
Tel.: 54 385 421 3641; Fax: 54 385 427 2693
e-mail: schiava@unse.edu.ar

Guillermo Etse

CONICET
FCET-UNT Universidad Nacional de Tucumán
Muñecas 730, Dpto. 10A
4000 Tucuman, Argentina
Tel.: 54 381 436 40 93 ext. 7784; Fax: 54 381 422 6151
e-mail: getse@herrera.unt.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo constitutivo elastoplástico para suelos parcialmente saturados. El modelo se formula en el marco general de la teoría de medios porosos y de la teoría del flujo de la plasticidad. La formulación constitutiva se basa en el conocido modelo de MRS Lade en el que se incorpora la succión como componente adicional independiente del estado de tensiones. Consecuentemente, las superficies de fluencia de cono y capa del modelo así como la evolución de las variables internas de endurecimiento y ablandamiento muestran dependencias con el valor de la succión. Para el proceso de integración numérica de tensiones del modelo se propone el método de proyección al punto más cercano que es extendido en esta formulación para el caso de cuatro invariantes tensionales. Los resultados numéricos demuestran la capacidad de predicción del Modelo Extendido de MRS Lade para simular el comportamiento de los suelos parcialmente saturados tanto en régimen de prepico como en postpico bajo distintos niveles de saturación. Para la validación del modelo constitutivo formulado se realiza la simulación numérica de ensayos experimentales edométricos con succión controlada experimentales publicados por Gens *et al*¹ y ensayos de compresión triaxial convencional con succión controlada publicados por Macari *et al*².

Palabras clave: Medios porosos, elastoplasticidad, suelos parcialmente saturados.

CONSTITUTIVE FORMULATION AND NUMERICAL VALIDATION OF MECHANICAL BEHAVIOR OF UNSATURATED SOILS

Summary

In this work an elastoplastic constitutive theory for unsaturated soils is presented. The proposed material model is formulated in the general framework of the theory of porous media and of the flow theory of plasticity. The constitutive formulation is based on an extension of the well-known MRS Lade model whereby the suction is introduced as additional independent stress state components. Consequently the cap and cone yield conditions of the MRS Lade model both in hardening and softening as well as the internal evolution laws in these regimes are redefined to include the dependency on the suction. For the solution of the numerical stress integration of the model is proposed the closed point projection method, in this case extended for the four stress invariants. The numerical results demonstrate the predictive capability of the Extended MRS Lade Model for simulations of behavior of partially saturated soils in pre and post pick regimen. For the validation of constitutive models is carried on the numerical simulation of experimental oedometric test with controlled suction published for Gens *et al*¹ and conventional triaxial compression test with controlled suction published for Macari *et al*².

Keywords: Porous media, elastoplasticity, partial saturated soils.

INTRODUCCIÓN

El comportamiento mecánico de medios porosos parcialmente saturados presenta un grado de complejidad que excede a las que caracterizan a los materiales cuasi-frágiles clásicos, tales como hormigones maduros, cerámicos, suelos secos e incluso a los suelos saturados. Dependiendo del nivel de humedad los suelos parcialmente saturados pueden modificar su respuesta mecánica en forma dramática, pasando de comportamientos dúctiles a frágiles o fuertemente inestables. A esto se le agregan las características ya conocidas de los materiales cuasi-frágiles cohesivos friccionales tales como la marcada dependencia del comportamiento de pre y pospico y de su resistencia máxima en el nivel de confinamiento. Como es sabido, los subsuelos presentan una organización estratigráfica determinada por las condiciones geológicas del lugar y una de sus características fundamentales es la presencia o no de capa de agua. En los estratos de suelo ubicados por debajo de la capa de agua la presión de poros es positiva, mientras que por encima es negativa. El nivel de dicha capa de agua puede variar marcadamente y más aún presentar altas velocidades de cambio debido a factores diversos tales como acciones climáticas, mecánicas, hidráulicas, etc. Estas variaciones afectan sensiblemente la succión de suelos porosos y consiguientemente una de sus propiedades mecánicas más relevantes. De esta manera las estructuras del suelo pueden pasar de estables a fuertemente inestables bajo acciones mecánicas constantes y conducir a fallas frágiles y localizadas. La complejidad de los medios porosos parcialmente saturados y la necesidad de un entendimiento más acabado de sus comportamientos ante acciones mecánicas e hidráulicas arbitrarias ha conducido a una creciente concentración de la atención por parte de la comunidad científica internacional. En este sentido se han desarrollado a partir de comienzos del 90 destacadas investigaciones experimentales y teórico numéricas en suelos parcialmente saturados. Entre las contribuciones referidas a estudios experimentales se destacan entre otras, las de: V. Escario sobre ensayos de corte con succión controlada; E. Alonso, A. Lloret y A. Gens sobre el comportamiento de arcillas expansivas y suelos compactados; H. Rahardjo y D. Fredlund sobre la presión de poros y cambios volumétricos durante carga en condiciones drenadas y no drenadas, y P. Delage sobre comportamiento mecánico de los suelos parcialmente saturados y formulación de modelos conceptuales.

Si bien se realizaron propuestas anteriores podemos afirmar sin lugar a dudas que el primer tratamiento teóricamente consistente de los medios porosos parcialmente saturados es el propuesto por Alonso³, en el que se adopta la presión total en exceso sobre la presión del aire y la succión como variables independientes del estado tensional. Otros modelos constitutivos como los propuestos por Schrefler y Zhan⁴, Cui y otros⁵, Bolzon⁶, Wheeler y Sivakumar⁷ y Kohgo y otros⁸, presentan formulaciones similares. Una clara revisión también es propuesta por Gens⁹.

Recientemente, Khalili¹⁰ a propuesto también un modelo constitutivo basado en el concepto de presión efectiva. Finalmente, Loret y Khalili¹¹ incluyen la succión como variable independiente en las funciones de fluencia y de potencial plástico en adición a la presión efectiva y los parámetros de endurecimiento dependiendo de la succión.

En este trabajo se presenta un modelo constitutivo elastoplástico para medios porosos parcialmente saturados. La formulación de la condición de fluencia en régimen de pre y pos pico está basada en superficies de cono y capa, para incorporar la marcada dependencia friccional en régimen de bajo confinamiento. Las superficies de cono y capa del modelo propuesto son una extensión del conocido modelo MRS-Lade de Sture y otros¹², que a su vez es un desarrollo del modelo de tres invariantes propuesto por Lade. Esta extensión se basa en la incorporación de la succión como una variable tensional independiente de los invariantes de tensión. De esta manera, la forma de la capa y cono de la superficie de fluencia varían, en una representación meridional y desviática con la succión. El tratamiento numérico del modelo propuesto se basa en la consideración de la succión como un invariante adicional de

tensiones que es tenido en cuenta en forma consistente en la extensión del conocido método de proyección al punto más cercano. La segunda parte del trabajo se refiere a la validación del modelo mediante el estudio de sus propiedades predictivas de ensayos experimentales con suelos parcialmente saturados. Para este fin se estudia computacionalmente la predicción del modelo de ensayos edométricos con succión controlada publicados por Gens¹ y ensayos de compresión triaxial convencional con succión controlada publicados por Macari y otros². Los resultados demuestran la capacidad predictiva del modelo propuesto para simular el comportamiento de suelos parcialmente saturados en régimen de pre y pos pico.

TENSIONES CONSTITUTIVAS PARA SUELOS PARCIALMENTE SATURADOS

El comportamiento de los suelos no saturados es descripto convenientemente por medio del tensor de tensiones constitutivo o también llamado efectivo y la succión como variables dependiente e independiente del estado tensional, respectivamente, donde:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I}p_w = \boldsymbol{\sigma}_n + s\mathbf{I} \quad (1)$$

$$s = (p_a - p_w) \quad (2)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ tensor de tensiones totales; \mathbf{I} el tensor identidad de segundo orden; $\boldsymbol{\sigma}_n$ tensor de tensiones netas, es decir, la presión total en exceso o sobre la presión del aire en poros, a su vez, p_a y p_w la presión del aire y del agua en poros respectivamente, y s la succión.

El término presión efectiva es utilizado por Loret y Khalili¹¹; en cambio, Sheng¹³ propone el nombre de presión constitutiva para diferenciar el concepto de presión efectiva propuesto por Terzaghi para los suelos saturados. En muchos problemas geotécnicos, la presión del aire en poros permanece constante, por lo que la presión de agua en poros puede considerarse como variable constitutiva. De todos modos la formulación constitutiva está basada en la succión para una generalización del modelo.

FORMULACIÓN GENERAL CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA

El modelo consiste en un fragmento de superficie de fluencia curva alisada constituida por la superficie de fluencia móvil del cono hasta alcanzar la última superficie de falla y otra superficie extendida entre el cono y el eje hidrostático que también evoluciona con el trabajo plástico de endurecimiento. La superficie de fluencia tiene la forma de un cono asimétrico, con el vértice localizado a la izquierda del origen del espacio de tensiones, dependiendo de las características cohesivas del material y representada por la ecuación:

$$F(\boldsymbol{\sigma}'; s; \boldsymbol{\kappa}) \quad (3)$$

Cada superficie convexa de función de fluencia, en el caso de medios parcialmente saturados, está definida en función de la tensión efectiva, la succión y de un conjunto de variables de endurecimiento - ablandamiento $\boldsymbol{\kappa}_i$, donde $\boldsymbol{\kappa}_i$ representa un arreglo de variables que indica una medida del trabajo plástico o la deformación plástica desarrollada. La intersección del conjunto de esfuerzos definidos por $F_i \leq 0$ define el conjunto convexo $B\{\boldsymbol{\kappa}\}$ de tensiones plásticamente admisibles y de succiones s

$$F_i(\boldsymbol{\sigma}'; s; \boldsymbol{\kappa}) \leq 0 \quad (4)$$

en el espacio

$$B\{\kappa\} \quad (5)$$

de tensiones constitutivas plásticamente admisibles y succiones s , siendo

$$B\{\kappa\} = \{\boldsymbol{\sigma}', s | F_i(\boldsymbol{\sigma}', s, \kappa) \leq 0, i = 1, 2, \dots, U\} \quad (6)$$

Ecuación que puede expresarse de la forma

$$B_{\lambda_i}\{\kappa, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{s}\} = \{\boldsymbol{\sigma}', s | F_i\{\boldsymbol{\sigma}', s, \kappa\} \leq 0, \text{if } \lambda_i\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{s}\} > 0, i = 1, 2, \dots, U\} \quad (7)$$

que describe la carga plástica y descarga elástica, donde los parámetros $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, U$, definen las superficies activas. Siguiendo a Weihe¹⁴, la regla de fluencia se formula en término del espacio de las sub-diferenciales ∂F_λ , representando un conjunto de normales admisibles a las superficies de:

$$\partial F_{\lambda_i}\{\boldsymbol{\sigma}', \dot{s}, \kappa, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} = \{\mathbf{a} | (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'_o) : \mathbf{a} \geq 0, \forall \boldsymbol{\sigma}'_o \in B_{\lambda_i}\{\kappa, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{s}\}\} \quad (8)$$

Las ecuaciones constitutivas basadas en una regla de fluencia no asociada se expresan de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \quad (9)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'_\emptyset) : \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \geq 0, \forall \boldsymbol{\sigma}'_o \in B(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{s}, \kappa) \quad (10)$$

$$\dot{\kappa} = h(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \quad (11)$$

Donde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ representa la porción plástica de la tasa del tensor de deformaciones totales. La ecuación (10) expresa en general una regla de fluencia no asociada para las deformaciones plásticas y la (11) una ley de endurecimiento que gobierna la evolución de la variable plástica, y considerando que exista el tensor de transformación de cuarto orden \mathbf{A} . Si la regla de flujo es asociada para la tasa de las deformaciones plásticas $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ será $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ igual al tensor identidad de cuarto orden. La regla de flujo no asociada en ecuación (10) puede expresarse, alternativamente mediante la forma

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \sum_{i=1}^U \lambda_i \mathbf{m}_i^\sigma, \lambda_i \geq 0, F_i \lambda_i = 0 \quad (12)$$

donde

$$\mathbf{m}_i^\sigma = \mathbf{A}^{-1} : \mathbf{n}_i^\sigma \quad (13)$$

y

$$\mathbf{n}_i^\sigma = \frac{\partial F_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (14)$$

es la dirección del flujo plástico de la función de fluencia F_i . En la ecuación (13) los tensores de segundo orden

$$\mathbf{m}_i^\sigma, \mathbf{n}_i^\sigma \quad (15)$$

representan el gradiente de la función de potencial plástico G_i y de la superficie de fluencia F_i , respectivamente.

Condiciones de consistencia de medios porosos elastoplásticos parcialmente saturados

En el marco de una formulación constitutiva elastoplástica para medios porosos parcialmente saturados, la condición de consistencia para carga plástica viene dada por

$$\dot{F} = \mathbf{n}_i^\sigma : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + n_i^s \dot{s} + r_i \dot{\kappa} = 0, i = 1, 2, \dots, U \quad (16)$$

con

$$n_i^s = \frac{\partial F_i}{\partial s} \quad (17)$$

$$r_i = \frac{\partial F_i}{\partial \kappa_i} \quad (18)$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda}_i h_i(\mathbf{m}_i^\sigma) \quad (19)$$

Comparando con las condiciones de consistencia de modelos elastoplásticos clásicos la ecuación (17) incluye el término adicional que describe la evolución del gradiente de la función de fluencia con la succión. Reemplazando la relación constitutiva de la ecuación (9) en la ecuación (16), la expresión explícita del multiplicador plástico resulta:

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\mathbf{n}_i^\sigma : \mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{n}_i^\sigma : \dot{s} \mathbf{I}}{\mathbf{n}_i^\sigma : \mathbf{E} : \mathbf{m}_i^\sigma - r_i h_i} \quad (20)$$

Substituyendo la ecuación (20) en la regla de flujo expresada en forma de tasa y en la ecuación (9) se obtiene la relación constitutiva en forma compacta:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{D}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}' \quad (21)$$

donde y de acuerdo con Sheng y otros¹³, se ha introducido la tasa de deformaciones extendida, que incluye la tasa del tensor de deformaciones totales y la tasa de la succión.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{s} \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Por lo tanto, el operador material en ecuación (21) se define como

$$\mathbf{D}_{ep} = (\mathbf{E}_{ep} \mathbf{E}_s) \quad (23)$$

con

$$\mathbf{E}_{ep} = \mathbf{E} - \sum_{i=1}^U \left[\frac{\mathbf{E} : \mathbf{m}_i^\sigma \otimes \mathbf{n}_i^\sigma : \mathbf{E}}{\mathbf{n}_i^\sigma : \mathbf{E} : \mathbf{m}_i^\sigma + H} \right]_i \quad (24)$$

y

$$\mathbf{E}_s = - \sum_{i=1}^U \left[\frac{\mathbf{E} : \mathbf{m}_i^\sigma \otimes n_i^s \mathbf{I}}{\mathbf{n}_i^\sigma : \mathbf{E} : \mathbf{m}_i^\sigma + H} \right]_i \quad (25)$$

siendo $i = 1, 2, \dots, U$. El módulo de endurecimiento/ablandamiento H de la superficie de fluencia activa se define como

$$H_i = -r_i h_i(\mathbf{m}_i^g) \quad (26)$$

Reemplazando la ecuación (22) en la (1) obtenemos la evolución del tensor de tensiones totales:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \dot{p}_w \mathbf{I} = \begin{cases} \text{Caso General:} & : \mathbf{E}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + [-\mathcal{I} + \mathbf{E}_s] : \mathbf{I} \dot{s} \\ Si : \dot{p}_a = 0 & : \mathbf{E}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - [-\mathcal{I} + \mathbf{E}_s] : \mathbf{I} \dot{p}_w \\ Si : \dot{p}_a = \dot{p}_w = 0 & : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad (27)$$

donde \mathcal{I} es el tensor unitario y simétrico de cuarto orden .

MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO PARA SUELOS PARCIALMENTE SATURADOS

El modelo elastoplástico para suelos no saturados propuesto es una extensión del modelo de cono-capa MRS-Lade para suelos cohesivos friccionales¹⁵. Las principales consideraciones del modelo MRS-Lade son:

- Formulación de dos superficies de fluencia; una superficie curva aplanada correspondiente al cono que se intersecta con otra superficie curva de capa en el plano meridiano.
- Las variables de endurecimiento y ablandamiento de ambas superficies evolucionan con el trabajo plástico de disipación.
- Regla de flujo no asociada volumétrica en la región del cono o de baja presión de confinamiento y asociada en la región de capa de alto confinamiento.

Condición de fluencia

La condición de fluencia, ver¹², se define en términos del primer invariante del tensor de tensiones efectivo p' ; del segundo y tercer invariante del tensor de tensiones desviatórico q y θ respectivamente, y de las variables de endurecimiento/ablandamiento κ_{cono} , en la región del cono. Si definimos ahora la presión efectiva en términos de la presión neta p_n y de la succión s , la función de fluencia resulta

$$F_{cono}(p_n, q, \theta, s, \kappa_{cono}) = f(q, \theta) - \eta(\kappa_{cono})(p_n + s - p_c) = 0 \quad (28)$$

con

$$f(q, \theta) = q \left(1 + \frac{q}{q_a}\right)^m g(\theta) \quad (29)$$

donde m es una constante del material que controla la curvatura del cono en plano meridiano (p_n, q) , con $0 \leq m \leq 1$; y q_a es valor de referencia, η_{cono} el ángulo de fricción interna, $p_c = r_{pc}s$ la cohesión del material expresada en términos de la succión, y

$$p_n = \frac{I_{n1}}{3} \quad (30)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (31)$$

$$\cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2}} \quad (32)$$

En donde I_{n1} es el primer invariante del tensor de tensiones netas, y J_{2D} y J_{3D} el segundo y tercer invariantes del tensor de tensiones netas desviatórico, respectivamente. Finalmente, $g(\theta)$ es la función de Willam - Warnke¹⁶ que controla la variación continua de la resistencia cortante entre el meridiano de compresión y el de tracción, dando lugar a una superficie elíptica convexa en el plano desviatórico. El parámetro de excentricidad e debe cumplir la condición $1/2 \leq e \leq 1$. La Figura 1 muestra la proyección de la superficie de fluencia del modelo *Extendido de MRS-Lade* en el plano meridiano y su extensión para distintos valores de succión. La intersección de la superficie de fluencia con el plano $p - s$, define la curva Carga-Colapso (LC), que produce un incremento del régimen elástico con el aumento de la succión, mientras que se reduce a un mínimo cuando $s = 0$ (suelo saturado).

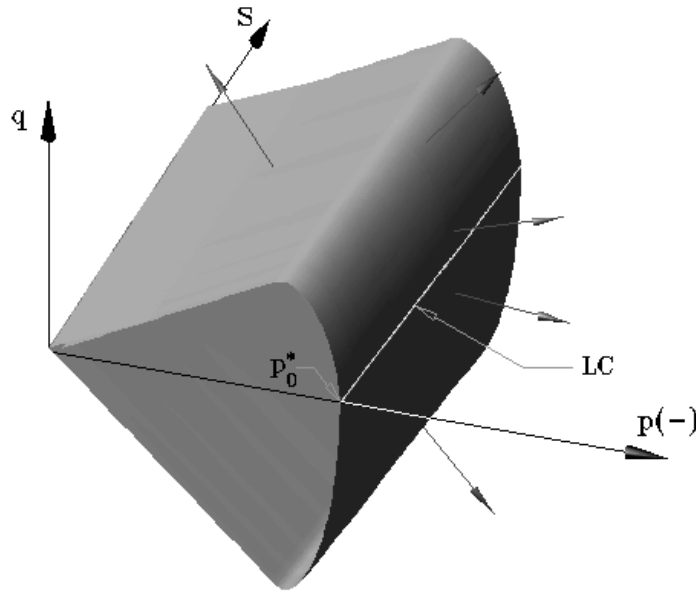


Figura 1. Superficie de falla del modelo extendido de MRS-Lade en plano meridiano de compresión

La superficie de capa, que involucra principalmente la respuesta volumétrica, viene dada por una superficie elíptica en plano meridiano expresada en termino de los invariantes de tensiones como

$$F_{capa}(p_n, q, \theta, s, \kappa_{capa}) = \left(\frac{(p_n - p_m)}{p_r} \right)^2 + \left(\frac{f(q, \theta)}{f_r} \right)^2 - 1 = 0 \quad (33)$$

donde se han introducido las variables

$$p_r = \frac{(1 - \alpha)[\varphi(1 - \alpha) + \alpha]}{2\varphi(1 - \alpha) + \alpha} p_{capa} \{ \kappa_{capa} \} \quad (34)$$

$$p_m = \frac{[\varphi(1 - \alpha^2)] + \alpha^2}{2\varphi(1 - \alpha) + \alpha} p_{capa} \{ \kappa_{capa} \} \quad (35)$$

$$f_r = \eta_{cono} [\varphi(1 - \alpha) + \alpha] \left[\frac{\alpha}{2\varphi(1 - \alpha) + \alpha} \right]^{1/2} p_{capa} \{ \kappa_{capa} \} \quad (36)$$

$$\varphi = \frac{\eta_{capa}}{\eta_{cono}} \quad (37)$$

$$-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)} < \varphi < n \quad (38)$$

El parámetro α determina la forma de la superficie elíptica y η_{capa} representa la inclinación de la superficie de capa en intersección con el cono. La presión de fluencia isotrópica p_{capa} es función del parámetro de endurecimiento y de la succión

$$p_{capa} \{\kappa_{cap}\} = p_{cap,0}(1 + (\kappa_{capa})^{1/r}) \quad (39)$$

con

$$p_{capa,0} = p_{0^*} + i \cdot s \quad (40)$$

donde la dependencia de la presión de preconsolidación con la succión, en la última ecuación, es debida a Schrefler & Bolzon¹⁷. El parámetro p_{0^*} en la ecuación (43) representa la presión de preconsolidación para la condición saturada, mientras que αp_{cap} es la correspondiente a la intersección entre ambas superficies de cono y capa e i es un parámetro que produce el incremento de dicha presión con el aumento de la succión.

Funciones de potencial plástico

La regla de flujo no asociada, correspondiente al comportamiento volumétrico expansivo, se representa por la función de potencial plástico de la manera

$$Q_{cono}(p_n, q, \theta, s, \kappa_{cono}) = f(q, \theta) - n \eta(\kappa_{cono})(p_n + s - p_c) = 0 \quad (41)$$

donde n es un parámetro que controla la tasa del flujo plástico.

La regla de flujo asociada gobierna el comportamiento volumétrico y desviatorio en la región de la capa, siendo por lo tanto

$$Q_{capa} = F_{capa} \quad (42)$$

Leyes de endurecimiento/ablandamiento

Los parámetros de endurecimiento y ablandamiento κ_{cono} de cono y de capa κ_{cono} se definen en término del trabajo plástico acumulado w^p que es disipado durante la carga en el actual camino de tensiones

$$\dot{w}^p = \int \boldsymbol{\sigma}_n : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n^p dt \quad (43)$$

expresado en tasa

$$\dot{\kappa}_{cono} = \frac{1}{c_{cono} p_a} \left(\frac{p_n + s - p_c}{p_a} \right)^{-l} \dot{w}^p \quad (44)$$

$$\dot{\kappa}_{cap} = \frac{1}{c_{capa} p_a} \left(\frac{p_{capa,0}}{p_a} \right)^r \dot{w}^p \quad (45)$$

donde c_{cono} , c_{capa} , p_a , l , r son parámetros materiales. Las variables de endurecimiento que influyen directamente a la superficie de fluencia se describen en¹⁵.

Sucintamente, las relaciones pueden expresarse como: $\eta_{cono} = \eta_{cono}(\kappa_{cono})$ y $p_{capa} = p_{capa}(\kappa_{capa})$

$$\eta_{cono}(\kappa_{cono}) = ae^{-b\kappa_{cono}}(k_1 + \kappa_{cono})^{1/\nu} + k_2\eta_{cono}\left(\frac{\kappa_{cono}}{\epsilon + \kappa_{cono}}\right) \quad (46)$$

acorde con ecuación (43), tal que la superficie exhibe una suave transición entre el régimen elástico y plástico.

INTEGRACIÓN DE TENSIONES (MPPC)

El Método de Proyección al Punto más cercano (MPPC) es una generalización del método de retorno de Euler para superficies de fluencias convexas arbitrarias. Asumiendo que la dirección de potencial plástico \mathbf{m} , se calcula en relación al gradiente de la función de fluencia \mathbf{n} via la transformación \mathbf{A} , puede expresarse como

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1} : \mathbf{n} \quad (47)$$

y considerando una variación volumétrica no asociada mediante la expresión

$$\mathbf{A} = \mathcal{I} + \frac{1}{3}\beta\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (48)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathcal{I} - \frac{\beta}{3(\beta + 1)}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (49)$$

donde β es el parámetro de dilatancia y \mathcal{I} es el tensor identidad de cuarto orden. La regla de fluencia asociada sera cuando $\beta = 0$, mientras que si $\beta > 0$ corresponde a flujo no asociado. Para una superficie de fluencia convexa y para un valor particular de las variables k de endurecimiento y ablandamiento y aplicando la condición de normalidad se obtiene la desigualdad variacional

$$({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'^*) : {}^{n+1}\mathbf{C}_A^e : ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}'^e - {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}') \geq 0 \quad (50)$$

$$\forall \boldsymbol{\sigma}'^*, \in B({}^{n+1}\kappa) \quad (51)$$

donde ${}^{n+1}\mathbf{C}_A^e = {}^{n+1}\mathbf{A} : \mathbf{C}^e$ es el tensor de elasticidad complementario: $\mathbf{C}^e = (\mathbf{D}^e)^{-1}$, transformado con la no asociatividad inherente en \mathbf{A} . Sustituyendo en ecuación (1)

$$(({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} + {}^{n+1}s\mathbf{I}) - ({}^*\boldsymbol{\sigma} + {}^*s\mathbf{I})) : {}^{n+1}\mathbf{C}_A^e : (({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^e + {}^{n+1}s^e\mathbf{I}) - ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} + {}^{n+1}s\mathbf{I})) \geq 0 \quad (52)$$

$\forall \boldsymbol{\sigma}^*, s^* \in B({}^{n+1}\kappa)$. Se puede observar que la solución a la desigualdad anterior, sujeta a la condición de consistencia plástica, se obtiene como un problema de encontrar la solución que satisfaga la condición de minimización:

$$\min E_A(\boldsymbol{\sigma}^*, s^*), \forall \boldsymbol{\sigma}^*, s^* \in B({}^{n+1}\kappa) \quad (53)$$

MPPC EN EL ESPACIO DE INVARIANTES DE TENSIONES Y SUCCIÓN

Para el caso especial aquí considerado de endurecimiento isotrópico, la expresión puesta en la forma invariante es conveniente. El conjunto se define como

$$B(\kappa) = \{(p_n, q, \theta, s) | F(p_n, q, \theta, s, \kappa) \leq 0\} \quad (54)$$

donde el tensor de tensiones neto es expresado en término de los invariantes de tensiones p , q y θ .

Para elasticidad isotrópica, la rigidez elástica y el módulo elástico complementario pueden expresarse en función del módulo volumétrico K y de corte G

$$\mathbf{D}^e = 2G\mathbf{I} + \left(K - \frac{2}{3}G\right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (55)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{1}{2G} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\right) + \frac{1}{9K}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (56)$$

la energía expresada en invariantes de tensiones es

$$2E(p, q, \theta, s) = \frac{1}{3G}(^{n+1}q^e - q^*)^2 + \frac{2}{3G} [1 - \cos(^{n+1}\theta - \theta^*)] (^{n+1}q^e q^*) \quad (57)$$

$$+ \frac{(1 + ^{n+1}\beta)}{K} (^{n+1}p^e - p^*)^2 + \alpha \frac{(1 + ^{n+1}\beta)}{K} (^{n+1}s^e - s^*)^2 \quad (58)$$

La solución de mín $E_A(p, q, \theta, s)$ sujeta a la condición de consistencia $F(p, q, \theta, s, ^{n+1}\kappa) \leq 0$ puede establecerse minimizando la nueva función Lagrangiana expresada con la condición de minimización

$$L = E(p, q, \theta, s) - \lambda F(p, q, \theta, s, ^{n+1}\kappa) = 0 \quad (59)$$

donde λ es el multiplicador Lagrangiano asociado a la condición de consistencia.

En correspondencia con el extremo de la condición del estado de carga plástica se obtiene

$$^{n+1}p = ^{n+1}p^e - ^{n+1}\mu ^{n+1}\phi \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) \quad (60)$$

$$^{n+1}q - ^{n+1}q^e \cos(^{n+1}\theta^e - ^{n+1}\theta) + ^{n+1}\mu \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0 \quad (61)$$

$$^{n+1}q^{e n+1} q \sin(\theta^e - ^{n+1}\theta) - ^{n+1}\mu \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = 0 \quad (62)$$

$$^{n+1}s - ^{n+1}s^e + ^{n+1}\mu ^{n+1}\phi \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right) = 0 \quad (63)$$

$$F(^{n+1}p, ^{n+1}q, \theta, ^{n+1}s, \kappa) = 0 \quad (64)$$

donde

$$\mu = 3G\lambda \quad (65)$$

es el multiplicador Lagrangiano modificado con la condición de consistencia y ϕ un escalar definido de la forma

$$\phi = \frac{K}{3G(1+\beta)} = \frac{2(1+\nu)}{9(1-2\nu)(1+\beta)} \quad (66)$$

En el presente trabajo se ha implementado la ley constitutiva en un código específico de elementos finitos que incluye la aproximación del transporte hidráulico en adición al problema de deformación. La solución de este problema dual permite actualizar la succión y las tensiones que resultan en cada paso o incremento.

ANÁLISIS NUMÉRICOS

Ensayos edométricos

Ensayos edométricos con succión controlada

Para estudiar la respuesta del modelo a nivel constitutivo se simula un ensayo edométrico de compresión confinada, con succión controlada, constante durante todo el ensayo y se compara con los ensayos realizados y publicados por Cui y Delage⁵. La simulación numérica se realiza con control de las deformaciones axiales e imponiendo deformaciones nulas en las otras direcciones y manteniendo el valor de la succión constante $s=200$ kPa. En la Figura 2 se compara la curva volumen específico-presión volumétrica de la simulación numérica con la del ensayo experimental. El comportamiento del material en estas condiciones es reproducido satisfactoriamente, observándose una ligera sobrestimación de las presiones volumétricas.

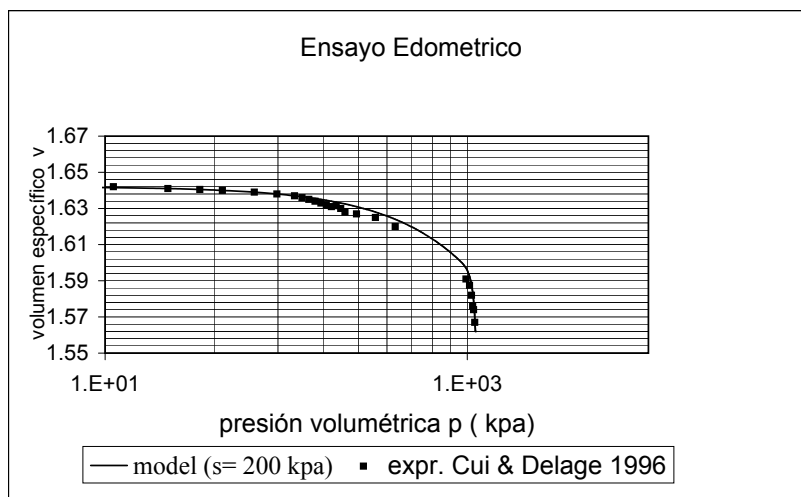


Figura 2. Ensayo edométrico: resultado experimental y predicción numérica

Ensayo edométrico con succión variable

En el caso previo, el material fue ensayado bajo la condición de succión constante en toda la prueba. En este caso la muestra es ensayada a compresión axialsimétrica confinada en edómetro con succión variable. El suelo, ensayado experimentalmente por Gens y otros⁹, es un limo de baja plasticidad, de Barcelona, con contenidos del 30 % de arena, 46 % de limo y

24 % de arcilla, con un límite líquido de 30.5 y un índice de plasticidad de 11.8. El suelo fue estáticamente compactado con diferentes valores de carga vertical. La Figura 3 muestra las curvas Densidad seca-humedad, correspondientes a las cargas verticales de 0.3 y 0.6 MPa, graficadas según ensayo Proctor. En ellas se puede observar que los puntos correspondientes a condiciones óptimas se acercan a la línea de saturación. Las líneas punteadas indican los valores de la succión que fueron determinados para cada muestra, después de compactada y para diferentes combinaciones de densidad seca y humedad. Como es de esperar, la succión

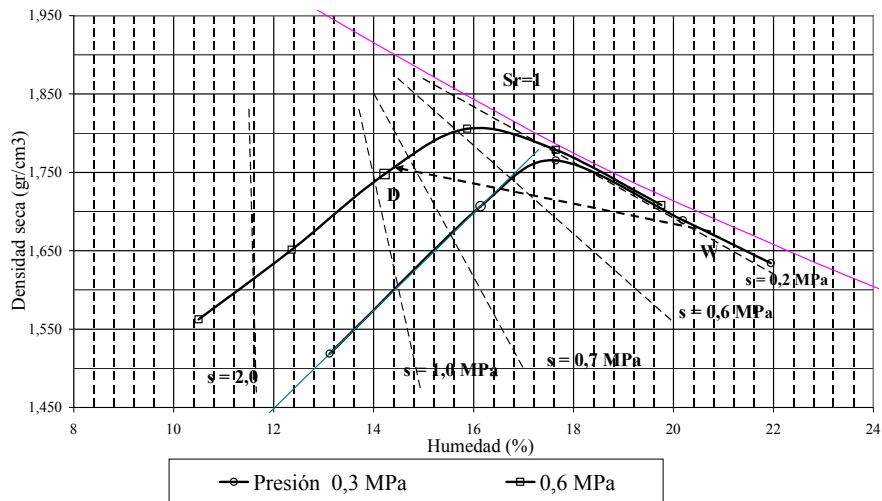


Figura 3. Curvas de compactación

aumenta fuertemente cuando la humedad de compactación decrece. Los ensayos edométricos convencionales se realizaron con control de succión¹ aplicando cargas verticales prescritas y al final de este estado la muestra fue saturada para observar el comportamiento de colapso por humedecimiento. Para identificar el efecto de la “estructura” producto de la conformación de las muestras, sobre comportamiento del suelo, es necesario comparar ambas compactadas “seca” y “húmeda” pero en idénticas condiciones iniciales para su ensayo. La Figura 3 muestra las dos condiciones de preparación de las muestras: una serie D fue compactada seca; la otra serie W fue compactada húmeda obteniéndose para esta última una menor densidad seca, utilizando en ambos casos un esfuerzo de compactación de 0.6 MPa. Después de la compactación, a las muestras de la serie W se incrementa su valor de succión hasta alcanzar el valor de la serie D. La Figura 4 muestra el camino de carga llevado en el proceso de secado. En este proceso, el suelo de la serie W experimenta reducción de su porosidad hasta alcanzar la densidad seca final de la serie D. Al final del proceso ambas muestras experimentan la misma succión (1.0 MPa), un contenido de humedad del 14 % y una densidad seca de 1.75 gr/cm³. La simulación numérica se realiza con control mixto aplicando pasos de cargas axiales e imponiendo deformaciones nulas en las otras dos direcciones, bajo succión constante y en el último paso de carga se reduce la succión (condición de $s = 250$ kPa). En la Figura 5 se visualiza la curva obtenida por el modelo material comparada con la experimental, observándose la correspondencia entre la modelación y los valores experimentales hasta el final del estado de deformaciones impuesto y luego el incremento de las deformaciones cuando el suelo experimenta el aumento del contenido de humedad (disminución del valor de succión). De la implementación numérica surge que para obtener la respuesta de su comportamiento y evidenciar las diferencias de conformación o “estructura” del suelo, sólo se deben modificar dos parámetros del modelo constitutivo: el de fricción del cono y el de dependencia de la presión i .

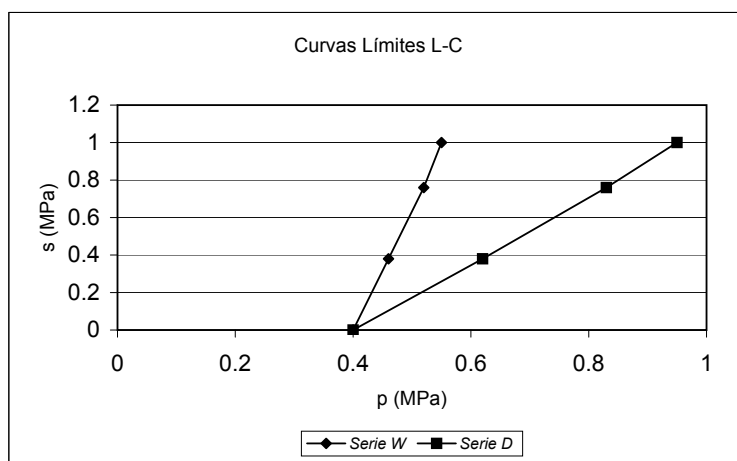


Figura 4. Superficie límite LC

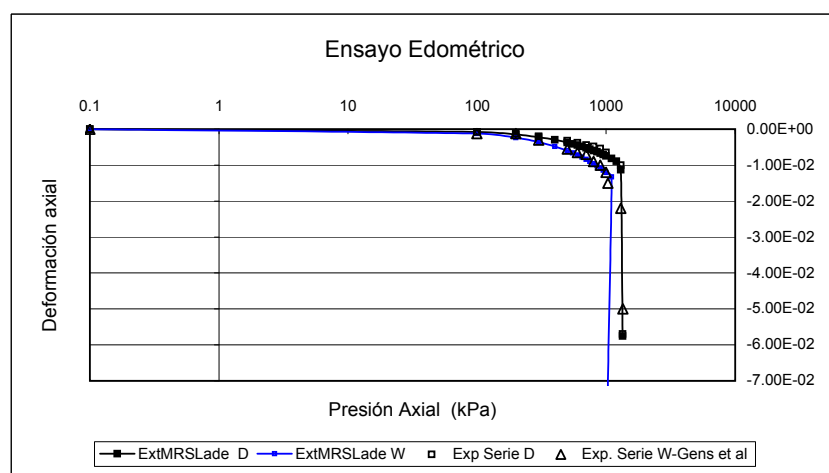


Figura 5. Deformaciones volumétricas durante carga y humedecimiento: experimento y simulación

Validación del modelo - Ensayos triaxiales

Para verificar la capacidad predictiva del modelo propuesto se consideraron una serie de ensayos convencionales de compresión triaxial (CTC) bajo succión constante llevados a cabo en un suelo arenoso limoso y publicados por E. Macari y otros². El material en estudio es una arena limosa con baja plasticidad (SM) con un contenido de humedad en su estado natural entre el 25% y 33%, dependiendo de las condiciones climáticas. Las fracciones que lo componen, son: arena 58.4%, limo 36.8% y arcilla 4.8%, con límites de Atterberg: límite líquido 28, límite plástico 24 e índice de plasticidad de 4 y con una relación de vacíos $e_o = 0.98$.

Descripción de los ensayos experimentales

El ensayo experimental sobre las muestras de suelo consiste en tres etapas: Etapa I, igualación del estado succional de las muestras después de la compactación mediante pisón; Etapa II, consolidación isotrópica hasta una presión de 400 kPa, y Etapa III, ensayos de compresión axialsimétricos. Las muestras fueron preparadas mediante compactación por

apisonado con una energía mucho menor a la correspondiente al ensayo Proctor estandar, con el que se obtuvo una densidad seca de 10.8 kN/m³, con un volumen específico de $\nu = (1+e) = 2.15$ y un grado de saturación de $S_r = 48\%$. Por otro lado, en el caso del ensayo Proctor estandar se logró una densidad seca de 16.1 kN/m³ para un contenido óptimo de humedad de 17%. La intención de los autores era lograr una muestra de suelo con límite de fluencia bajo de tal manera que fuera relativamente fácil la consolidación del suelo desde su estado virgen. A continuación, en la Etapa I, se continúa con la igualación de las presiones de agua y aire en los vacíos del suelo para un valor preestablecido de succión ($s = 50$ kPa, 100 kPa, 200 kPa) y se continúa con la Etapa II de consolidación isotrópica aplicando una presión neta de $p_o = -100$ kPa y $p_o = -400$ kPa con disipación de la presión de aire diluida en poros en exceso. Finalizada, se concluye con la Etapa III que es el ensayo de compresión axialsimétrico (CTC y TC) para valores de presión volumétrica de $p_{ini} = -100$ kPa y $p_{ini} = -400$ kPa. Para mayores detalles del ensayo se puede consultar en E. Macari y otros².

Respuesta del modelo extendido de MRSLade

La Tabla I muestra las constantes del modelo extendido MRS Lade utilizadas para reproducir la respuesta del suelo para consolidación isotrópica y ensayos de compresión axialsimétrico con control de succión.

$E = 10000$ kPa	$n = 0.002 + 2E^{-6} s$	$r_q = v_{cono} = 1,15$	$l = 1.0656$	$r_{pc} = 0.10$
$v = 0.3$	$\varphi = 0.00$	$k_1 = 0.05$	$c_{capa} = 0.00583$	$i = 1.50$
$e = 0,7$	$\alpha = 0,80$	$k_2 = 0,9673$	$r = 1,1025$	
$m = 0.03871$	$\eta_{cono} = 1.13$	$c_{cono} = 0.1337$	$p_o^* = 800$ kPa	

Tabla I. Resumen de parámetros del modelo extendido MRSLade

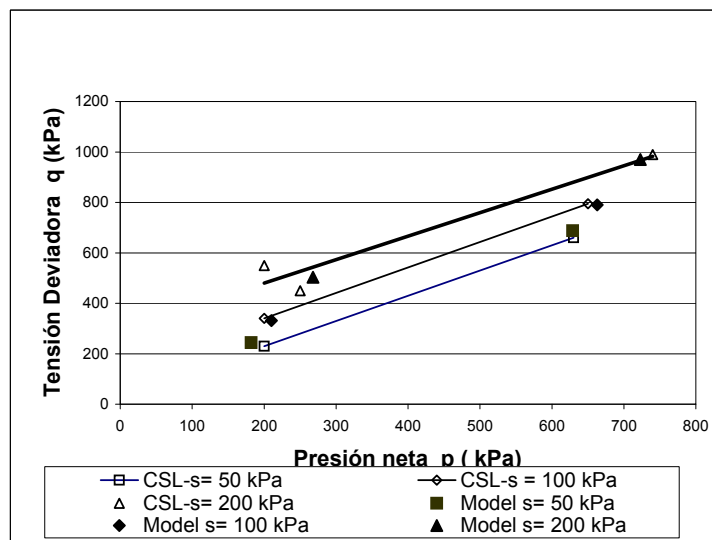


Figura 6. Respuesta experimental y predictiva q-p en estado límite para arena limosa compactada

La Figura 6 muestra los valores experimentales q-p (tensión desviadora- presión neta) comparados con la respuesta del modelo extendido de MRS Lade y la línea CSL del modelo de Barcelona para una arena limosa compactada.

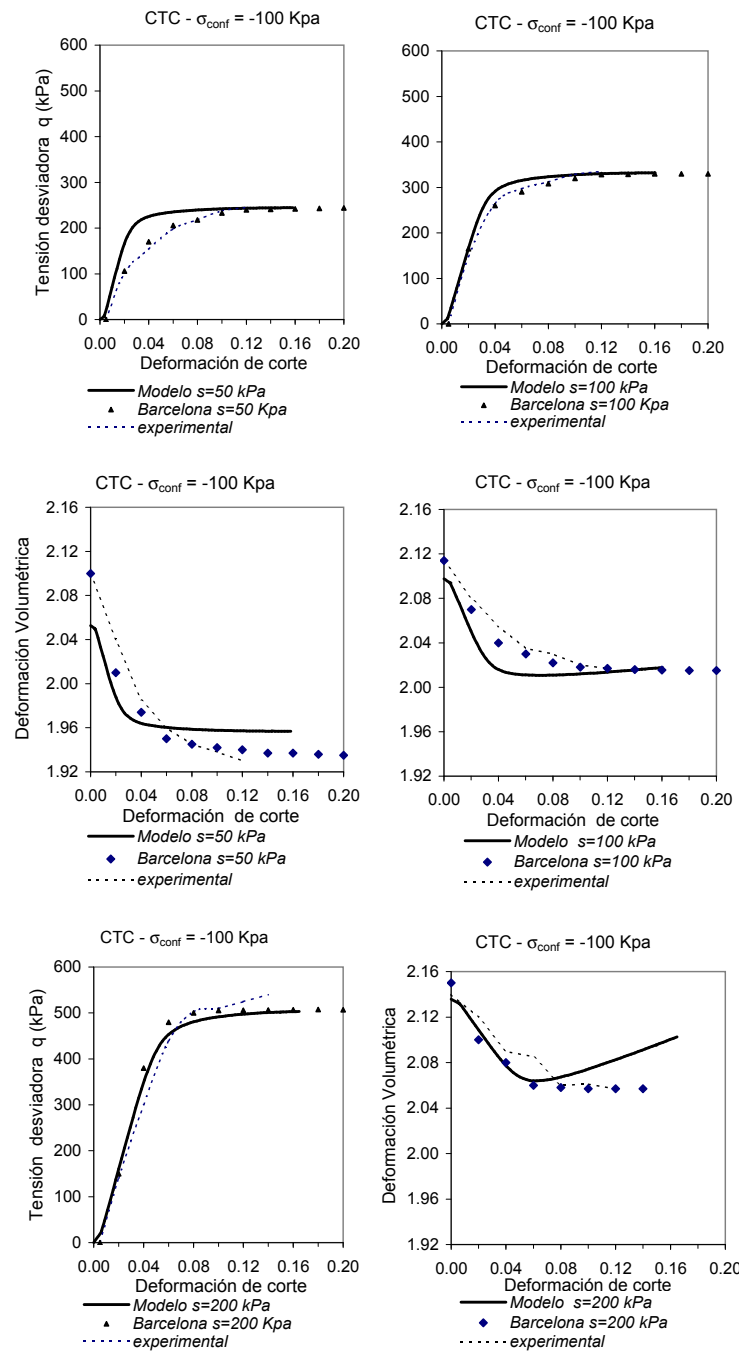


Figura 7. Curvas de predicción del modelo extendido de MRS Lade para $p_{ini} = 100 kPa$

Las Figuras 7 y 8 muestran las curvas de predicción del modelo para la serie de ensayos de compresión triaxiales (CTC) con succión constante ($s = 50$ kPa, $s = 100$ kPa y $s = 200$ kPa) y comparadas con las obtenidas experimentalmente y con las del modelo de Barcelona con integración explícita de la ecuación constitutiva, para dos diferentes valores de presión de confinamiento $p_{ini} = 100$ kPa y $p_{ini} = 400$ kPa. Puede observarse una satisfactoria predicción del modelo en términos de $q-\epsilon_q$. También se observa que el valor pico se obtiene

para una deformación de corte del 12 %, en concordancia con el modelo de Barcelona y los datos experimentales. Esto es indicativo de la apropiada definición y calibración de los parámetros de no asociatividad volumétrica del modelo. En cuanto a la predicción de las deformaciones volumétricas ν - ϵ_q propiamente dicha, el modelo presenta una leve disminución del volumen por dilatación para los valores de succión mayores.

CONCLUSIONES

Los desarrollos y resultados en este trabajo conducen a las siguientes conclusiones:

1. Se ha desarrollado una teoría elastoplástica para medios porosos parcialmente saturados, que incluye a la succión como cuarto invariante de tensiones. La formulación constitutiva de forma cono y capa describe la evolución de la superficie de fluencia en pre y postpico mostrando la fuerte dependencia con el grado de succión.

2. Se implementó computacionalmente la ley constitutiva del propuesto modelo extendido de MRSLade, con integración implícita mediante el Método de Proyección al Punto más cercano (MPPC).

3. La comparación entre predicción numérica y respuesta experimental ν - p y ϵ_v - σ_v para ensayos con estados de succión constante y variable, respectivamente, se considera satisfactoria. Además, los valores experimentales y predictivos de la línea Carga-Colapso (LC) son satisfactorios.

4. Es razonable la aproximación entre las curvas de respuesta q - ϵ_q y ν - ϵ_q en ensayos CTC con succión constante y la predicción numérica lograda.

5. Se considera aceptable la simulación numérica del modelo extendido de MRSLade, de respuesta q - p en estado crítico para la arena limosa compactada, comparada con el modelo de Barcelona y ensayos experimentales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento parcial de este trabajo a la Agencia Argentina de Promoción Científica y Tecnológica a través de los Proyectos PICTO 03-18616 y PICTO 669-6.

REFERENCIAS

- 1 A. Gens, E. Alonso, J. Suriol y A Lloret, "Effect of structure on the volumetric behaviour of a compacted soil", *Proc. 1st Int. Conf. On Unsaturated Soils*, Eds. E. Alonso and P. Delage Balkema-Rotterdam, Vol. **1**, pp. 83-88, (1995).
- 2 E. Macari, L. Hoyos y P.Arduino, "Constitutive modelling of unsaturated soil behavior under axisymmetric stress states using a stress/suctioncontrolled cubical cell test", *Int. J. of Plasticity*, Vol. **194**, pp. 1481-1515, (2003).
- 3 E. Alonso; A. Gens y A. Josa, "A constitutive model for partially saturated soils", *Geotechnique*, Vol. **40**, pp. 405-430, (1990).
- 4 B. Schrefler y X. Zhan, "A fully coupled model for water flow and airflow in deformable porous media", *Water Resources Research*, Vol. **29**, pp. 155-167, (1993).
- 5 Y. Cui, P. Delage y N. Sultan, "An elasto-plastic model for compacted soils", *Proc. 1st Int. Conf. On Unsaturated Soils*, Eds. E. Alonso and P. Delage, Balkema-Rotterdam, Vol. **2**, pp. 703-709, (1995).
- 6 G. Bolzon, B. Schrefler y O. Zienkiewicz, "Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated state", *Geotechnique*, Vol. **46**, pp. 279-289, (1996).

- 7 S. Wheeler y V. Sivakumar, "An elastoplastic critical state framework for unsaturated soil", *Geotechnique*, Vol. **45**, pp.35-53, (1995).
- 8 Y. Kohgo, Y. Nakano y T. Miyazaki, "Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils", *Soils and foundations*, Vol. **33**, pp. 49-63, (1993).
- 9 A. Gens, "Constitutive modelling: Application to compacted soils", *Proc. 1st Int. Conf. On Unsaturated Soils*, Eds. E. Alonso and P. Delage, Balkema-Rotterdam, Vol. **3**, pp. 1179-1200, (1995).
- 10 N. Khalili, "Application of the effective stress principle to volume change in unsaturated soils", *Unsaturated Soils for Asia*, Eds. H. Rahardjo *et al.*, Balkema-Rotterdam, pp.101-105, (2000).
- 11 B. LLoret y N. Khalili, "A three-phase models for unsaturated soils", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, *Geomechanics*, Vol. **24**, pp. 893-927, (2000).
- 12 S. Sture, K. Runesson y E. Macari-Pascualino, "Analysis and calibration of a three invariant plasticity model for granular materials", *Ingenieur Archiv*, Vol. **59**, pp. 253-266, (1989).
- 13 D. Sheng, D.Smith, S. Sloan y A. Gens, "Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Parte I: Theory", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. **27**, N° 9, pp. 745-765, (2003).
- 14 S. Weihe, "Implicit integration schemes for multi-surface yield criteria subjected to hardening/softening behaviour", Master Sc.Thesis, University of Colorado, Boulder,(1989).
- 15 R. Schiava, "Modelación elastoplástica de medios cohesivos friccionales parcialmente saturados", Tesis de Magister, Universidad Nacional de Santiago del Estero, Argentina, (2001).
- 16 K. Willam y E. Warnke, "Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete", *Int. Assoc. Bridge Struct. Engng. Proc.*, Vol. **19**, pp. 1-30, (1975).
- 17 B. Schrefler y G. Bolzon, "Compaction in gas reservoirs due to capillary effects", *Computational Plasticity*, CIMNE - Barcelona, Section Plasticity approaches geotechnics, pp. 1625-1630, (1997).
- 18 J. Boris, "Implicit integration rules in plasticity: Theory and implementation, Master Science thesis, University of Colorado, (1994).