# Universidad Nacional del Sur

## Tesis de Doctor en Matemática

## Modelos Matemáticos en Social Choice: Identificación de Grupos, Inferencia y Competencia

**Lic. Federico Fioravanti**

**Director: Dr. Fernando A. Tohmé**

**Co-Director: Dr. Sheldy J. Ombrosi**

**Bahía Blanca** **Argentina**

2018

# Prefacio

Esta Tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Doctor en Matemática, de la Universidad Nacional del Sur. La misma no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones realizadas en el ámbito del Departamento de Matemática durante el período comprendido entre abril de 2014 y junio de 2018, bajo la dirección del Dr. Fernando A. Tohmé y la co-dirección del Dr. Sheldy J. Ombrosi.

Federico Fioravanti

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR
Secretaría General de Posgrado y Educación Continua

La presente tesis ha sido aprobada el .../.../..., mereciendo la calificación de ...(......).

*A la Abuela Emilia.*

# Agradecimientos

Un eterno agardecimiento a mi director el Dr. Fernando A. Tohmé, que desde un primer momento y sin dudar me alentó, me acompañó y me aconsejó para esta investigación, y no dudó en apoyar cualquier idea loca para trabajar que se me ocurriera. También agradezco enormemente a mi co-director el Dr. Sheldy J. Ombrosi, que me brindó incontables herramientas para poder llevar a cabo este proyecto.

Agradezco al Departamento de Matemática de la UNS, al Instituto de Matemática de Bahía Blanca, a la School of Economics de la UNSW y al Instituto de Matemática Aplicada de San Luis, lugares donde encontré excelentes profesionales que me ayudaron para este trabajo y muchas cosas más.

Al CONICET, que sigue apostando al desarrollo de investigadores a lo largo y ancho del país.

Por último y no menos importante, infinitas gracias a mi familia, a Pao y mis amigos, que me bancaron siempre en todo, pero absolutamente todo lo que decidí encarar en estos últimos años.

# Resumen

Este trabajo consta de tres partes, que en principio parecen ser bastante diferentes, pero tienen como hilo conductor la toma de decisiones que debe realizar una persona, un grupo de personas, un equipo, etc. Cada una de las partes de este trabajo es autocontenida.
La primera parte trata sobre tres diferentes enfoques del Problema de Identificación de Grupos. Este problema surge cuando un grupo de individuos debe identificar a un subgrupo del mismo como poseedor de alguna propiedad en particular.
En el primer caso, sea $N$ un conjunto finito de agentes cada uno teniendo una opinión sobre cuál de ellos debe pertenecer a un grupo específico, que llamaremos $J$. Llamamos *Función de Identidad Colectiva* (FIC) al agregador que mapea del conjunto de opiniones a un subconjunto de $N$. Kasher & Rubinstein (1997) caracterizan diferentes FICs de una forma axiomática. Consideramos versiones alternativas del axioma *liberal* que Kasher & Rubinstein incluyen en su trabajo, que son más naturales en ciertas situaciones. Esto nos permite caracterizar tres agregadores diferentes y probar que estas FICs son las únicas que verifican las correspondientes versiones del axioma. Más aún, hallamos un resultado de imposibilidad para una versión extrema del axioma *liberal*.
Luego, analizamos el mismo problema cuando el grupo de agentes es infinito. Este caso es relevante en casos en los cuales el grupo cambia en el tiempo y/o es sujeto a la incertidumbre. Trabajamos particularmente con las FICs Liberal y Oligárquica, caracterizadas por Kasher & Rubinstein. Mostramos que en el marco infinito el resultado liberal sigue siendo válido, pero el resultado no se mantiene para el caso oligárquico, dando una caracterización de todos los agregadores que verifican los mismo axiomas que la FIC Oligárquica.
Por último, volvemos a trabajar con un número finito de agentes, pero ahora las opiniones de los votantes son difusas. Cada agente $i$ tiene una opinión sobre el resto de los miembros de la sociedad, que consiste en una función $p_i : N \to [0, 1]$, que indica el grado de membresía de un agente al grupo $J$. Consideramos el problema de agregar esas funciones, satisfaciendo distintos conjuntos de axiomas y caracterizando nuevos agregadores. Mientras algunos resultados son análogos al caso binario, la versión difusa nos permite dejar de lado ciertas imposibilidades probadas por Kasher & Rubinstein.
La segunda parte del trabajo, presenta un proceso diferente al habitual en teoría de Social Choice. El procedimiento usual consiste en postular una serie de propiedades que se desean que un proceso de agregación verifique, y encontrar a partir de allí las características de la correspondiente función de elección social y los resultados que pueden surgir de cada posible perfil de

preferencias. Nosotros invertimos esta línea de razonamiento y a partir de lo que llamamos situaciones sociales (cada una de ellas consistiendo en un perfil de opiniones y el orden social asociado), obtenemos el criterio verificado por el proceso de agregación implícito. Este proceso de inferencia, que extrae información intensional de la extensional, puede ser visto como un ejercicio en estadística cualitativa.

La última parte de este trabajo, puede ser considerada dentro del área de Matemática del Deporte. Usando simples herramientas de teoría de juegos, comparamos el nivel de "ofensividad" que los equipos de rugby tienen bajo distintos sistemas de puntuación usualmente usados en algunos de los torneos más importantes del mundo. Comparamos tres sistemas de puntuación distintos. Un sistema otorga cuatro puntos al equipo ganador, dos a ambos equipos en caso de empate y ningún punto al equipo perdedor. El segundo sistema, además de otorgar los mismos puntos que el primero, da un punto extra al equipo que anota cuatro o más tries, y al equipo perdedor si es que pierde por menos de un try. El último sistema, da un punto extra si el equipo ganador anota tres tries más que el oponente, y al equipo perdedor si es que pierde por menos un try. Usando un modelo estático, mostramos que los equipos se vuelven más ofensivos cuando el punto extra se otorga por anotar cuatro o más tries. También mostramos que no otorgar punto extra hace a los equipos más ofensivos que darlo por anotar tres tries más que el rival.

Finalmente, usando un modelo dinámico en un ejemplo y ciertos resultados de Masso - Neme (1996), comparamos los conjuntos de pagos factibles y de equilibrio. Obtenemos ahora que el sistema que otorga un punto extra por anotar cuatro o más tries tiene una mayor y mejor región de pagos factibles y de equilibrio que los otros dos sistemas. A diferencia del modelo estático, en este caso es preferible el sistema que otorga un punto extra por anotar tres tries más que el rival al sistema que no otorga ningún punto extra.

# Abstract

This work has three parts, that at first sight seems to be different, but have as a background the decisions that an agent, a group of people, a team, etc, should take in many ocasions. Each part is self contained.
The first part deals with three different approaches of Group Identification Problems. These problems arise when a group of people have to identify a subgroup of themselves with some particular property.
On the first approach, let $N$ be a finite set of agents each one having an opinion of which of them should belong to a specific group, that we will call $J$. We call Choice Identity Function (CIF) the aggregator that maps from the set of opinions to a subset of $N$. Kasher & Rubinstein (1997) characterize three different CIFs in an axiomatic way. We consider alternative versions of the *liberal* axiom that Kasher & Rubinstein include in their work, that seem to be more natural in certain situations. This allow us to characterize new aggregators and prove that these CIFs are the only ones that verify the correspondent versions of these axioms. Moreover, we find an impossibility result for an extreme version of the *liberal* axiom.
Then, we analize the same problem when the number of agents is infinite. This case is relevant when the group change in time or is under uncertainty. We work with the Liberal and Oligarchic CIF, characterized by Kasher & Rubinstein. We show that in the infinite setting the liberal result remains valid, but this does not happen for the oligarchic case, finding a new characterization for this setting.
Finally, we work again with a finite number of agents, but this time the opinions are fuzzy. Each agent $i$ has an opinion about every other agent, that is a function $p_i : N \to [0, 1]$, that indicates the grade of membership of an agent to the group of $J$. We consider the problem of aggregate these functions, satisfying different sets of axioms and characterizing new aggregators. While some results are similar to the crisp setting, the fuzzy version of this problem allow us to leave aside some impossibility results found by Kasher & Rubinstein.
The second part of the work presents a process different to the usual in Social Choice. Usual procedure consists in postulating a set of properties that a social planner wish to verify in an aggregation process, and from there find the characteristics of the correspondent social choice function and the results that may arise from every possible preference profile. We invert this line of reasoning and from what we call social situations (each one consisting in a profile of opinions and an associated social order), we obtain the criteria verified for the implicit aggregation procedure. This inference process, that extract intensional information from the extensional, can be seen as an exer-

cise of cualitative statistics.
The last part of this work, can be considered within the field of Mathematics of Sport. Using simple tools of game theory, we compare the level of "offensiveness" that rugby teams have under some score systems usually used in the most importants tournaments around the world. We compare three different score systems. One system gives four points to the winner, two to each team for a tie and no points for losing. The second system, besides giving the same points as the first one, gives an extra point for the team that scores four or more tries, and to the losing team if it loses for just one try. The last system gives an extra point if the winning team scores three or more tries than the other team, and an extra point for the losing team if it loses for just one try. Using an static model we show that teams become more offensive if an extra point is awarded for scoring four or more tries. We also show that no giving an extra point makes the team more offensive than giving it for scoring three or more tries than the losing team. Finally, using a dynamic model in an example and some results from Masso - Neme (1996), we compare the sets of feasible and equilibrium payoffs. We now obtain that the system that gives an extra point for scoring four or more tries has a better set of feasible and equilibrium payoffs. Unlike the static model, in this model is preferable awarding an extra point for scoring three more tries than the losing team rather that not giving an extra point.

**Certifico que fueron incluidos los cambios y correcciones sugeridas por los jurados.**

Dr. Fernando A. Tohmé

DIRECTOR

# Índice general

# Parte I

# Problemas de Identificación de Grupos

# Introducción General al Problema

Personas, países y objetos inanimados, entre otras entidades, suelen ser clasificados en grupos. Algunas veces estas clasificaciones son simples y obvias, como por ejemplo organizar países de acuerdo al continente al que pertenecen. Sin embargo, si tratamos de identificar a los miembros de determinada comunidad o agrupar los países según su grado de "conciencia ecológica", la clasificación dista de ser evidente, y la opinión que tengan las naciones involucradas importa para el resultado final. Por ejemplo, Kasher (1993) y Kasher & Rubinstein (K-R)(1997) tratan con el problema de identidad colectiva de determinar quien es Judío y así acceder al derecho de la nacionalidad israelí bajo la "*Ley del retorno*".[1] Ellos analizan este tema ( "Who is a J?") usando un marco de la teoría de Social Choice, presentando el problema de definir funciones de agregación apropiadas sobre perfiles de opiniones. Se asume que cada persona en la sociedad tiene una opinión (representada como un subconjunto de agentes) sobre qué individuos, incluyéndose a si mismo, pertenecen o no a determinado grupo. La manera de determinar la identidad de los individuos es a través de una función que tome sus opiniones como entrada. K-R axiomatizan estas funciones de agregación, y las llaman Funciones de Identidad Colectiva (FICs). Caracterizan tres FICs diferentes, cada una de ellas representando una noción distinta de "justicia". La FIC "Liberal" que asigna como $J$ a cualquier individuo que se autoidentifique como $J$; la FIC "Dictatorial" en la que un solo individuo decide quién es un $J$, y la FIC "Oligárquica", en la que esta decisión depende de un grupo determinado. A partir de allí, existen nuevos estudios sobre este problema, que modifican los axiomas de K-R (Saporiti, 2012), encuentran nuevas caracterizaciones (Sung & Dimitrov, 2003), trabajan con la identificación de más de dos grupos (Cho & Ju, 2017) y tratan con los incentivos de los votantes (Cho & Saporiti, 2015).

[1] El 5 de Julio de 1950, el Knesset aprobó la *Ley del Retorno*. El Knesset es el parlamento o legislatura israelí. La Ley del Retorno le permite a todos los Judíos tener el derecho de vivir en Israel y obtener la ciudadanía (Caryl, 2014).

# Capítulo 1

# Diferentes Nociones de Liberalismo

## 1.1. Introducción

En este trabajo nos enfocamos en el agregador "Liberal", que K-R llaman FIC *Liberal Fuerte*. En su trabajo ellos caracterizan esta FIC axiomáticamente. Para realizar esto usan algunos axiomas clásicos de la literatura, Monotonía (más votos a un miembro que ya fue aceptado mantiene su posición), Consenso (si todos piensan que $i$ es un $J$ entonces es un $J$), Simetría (dos agentes similares son clasificados de la misma manera) e Independencia (solo importa la opinión sobre $i$ para clasificarlo). Además introducen un axioma, el Principio Liberal, que captura una noción específica de "liberalismo". Este establece que si alguien se considera parte del grupo, entonces el grupo no puede estar vacío. Y si alguien se considera fuera del grupo, entonces el grupo no puede ser todo el conjunto de agentes. Se espera que un agregador "justo" verifique todos estos axiomas. Nosotros trabajamos reemplazando el Principio Liberal por cuatro variantes que corresponden a diferentes nociones de "liberalismo". Estas nociones alternativas no difieren marcadamente de otras representaciones de liberalismo dentro de la literatura. Tres de los cuatro axiomas son una adaptación a nuestro marco de la noción de liberalismo de Sen (Sen, 1970). El axioma restante es una versión más fuerte de la noción de K-R.
Primero trabajamos con un axioma que permite que cada agente decida si otro agente pertenece o no al grupo. Luego trabajamos con versiones más débiles de este axioma, donde al menos dos agentes tienen permitido decidir si otro agente pertenece o no al grupo. Probamos que la FIC Liberal Fuerte es la única FIC que verifica los axiomas propuestos. El otro axioma establece

que al menos dos agentes pueden decidir si otro agente, o pertenece o no pertenece al grupo. En este caso encontramos que existen más FICs que verifican el conjunto de axiomas. Finalmente, consideramos una versión extrema del axioma liberal que usa K-R. Tiene una parte positiva, que establece que si existe un agente que piensa que alguien es parte del grupo, entonces el grupo no puede ser vacío. La parte negativa establece que si existe un agente que piensa que alguien no es parte del grupo, entonces el grupo no puede ser todo el conjunto de agentes. Probamos que no existe una FIC que verifique este axioma en su totalidad, pero encontramos resultados de unicidad de FICs que verifican partes del mismo.

## 1.2. Notación básica y axiomas

Consideramos un conjunto $N$ de individuos con $\mid N \mid < \infty$. Cada individuo $i$ tiene una "opinión" descripta por un conjunto $C_i \subseteq N$, tal que si $j \in C_i$, entonces $i$ piensa que $j$ merece ser un $J$. De manera opuesta, si $j \notin C_i$, entonces $i$ piensa que $j$ no debe ser un $J$. Un perfil de opiniones es una $n$-upla $C = (C_1, \ldots, C_N)$ donde $C_i \subseteq N$ para todo $i \in N$. Sea $P(N)$ el conjunto potencia de $N$ y sea $\mathbf{C}$ el conjunto de todos lo posibles perfiles de opiniones, es decir, $\mathbf{C} = P(N)^n$. Notamos con $J$ a la Función de Identidad Colectiva (FIC) $J : \mathbf{C} \to P(N)$. Esto es, una FIC es una función que asigna a cada perfil de opiniones un conjunto de agentes que son socialmente considerados $J$.

Ahora presentamos el conjunto de axiomas que K-R introducen, con la intención de capturar las propiedades que una FIC "justa" debe verificar.

El primero establece que si una FIC clasifica a $i$ como un $J$, entonces que haya más gente considerando a $i$ como un $J$ va a reforzar su status. Lo mismo es cierto si la FIC clasifica a un agente $j$ como que no es $J$, entonces "sustraerle" votos a $j$ lo va a mantener fuera del grupo de los $J$.

- **Monotonía**(MON): sea $i \in J(C)$ y $C'$ un perfil idéntico a $C$ excepto que existe un individuo $k$, tal que si $i \notin C_k$ e $i \in C'_k$; entonces $i \in J(C')$. Análogamente, si $i \notin J(C)$ y $C'$ es idéntico a $C$, excepto que existe un $k$ tal que si $i \in C_k$ e $i \notin C'_k$, entonces $i \notin J(C')$.

Si todos piensan que $i$ es un $J$, entonces la FIC lo debe clasificar como un $J$. Así mismo, si ninguno considera a $i$ como $J$, entonces la FIC lo excluye de ser un $J$.

- **Consenso**(C): si $j \in C_i$ para todo $i$, entonces $j \in J(C)$; si $j \notin C_i$ para todo $i$, entonces $j \notin J(C)$.

Si dos agentes son "similares", entonces la FIC los clasifica de la misma manera.

- **Simetría**(SIM): decimos que $j$ y $k$ son simétricos en el perfil $C$ si

  (i) $C_j - \{j,k\} = C_k - \{j,k\}$

  (ii) para todo $i \in N - \{j,k\}, j \in C_i$ si y sólo si $k \in C_i$

  (iii) $j \in C_j$ si y sólo si $k \in C_k$

  (iv) $j \in C_k$ si y sólo si $k \in C_j$

  Entonces $j \in J(C)$ si y sólo si $k \in J(C)$.

Para definir si el agente $i$ es o no un $J$, la FIC sólo debe tener en cuenta las opiniones sobre el agente $i$.

- **Independencia**(I): considerar dos perfiles $C$ y $C'$. Sea $i$ un individuo en $N$. Si para todo $k \in N$, $i \in C_k$ si y sólo si $i \in C'_k$, entonces $i \in J(C)$ si y sólo si $i \in J(C')$.[1]

Kasher y Rubinstein introducen el siguiente axioma para capturar la idea que la visión que un individuo tiene sobre sí mismo debe ser considerada importante.

- **Principio Liberal**(L): si existe un $i \in N$ tal que $i \in C_i$, entonces $J(C) \neq \emptyset$; y si existe un $i \in N$ tal que $i \notin C_i$, entonces $J(C) \neq N$.

Esto es, si alguien se considera $J$, entonces *alguien* debe ser $J$, y si alguien considera que no es un $J$, entonces *no todos* pueden ser $J$. Existen algunos casos en que otras versiones de liberalismo pueden ser más apropiadas. Por ejemplo, cuando una sociedad tiene que determinar quiénes son los individuos que satisfacen ciertos valores como ética, bondad o amistad; o en alguna situación en donde la opinión que una persona tenga sobre si mismo no lo haga acceder a cierto status. Está claro que lo que uno piense sobre sí mismo es importante, pero en cierto asuntos, son los otros los que pueden hacer un mejor juicio sobre nuestra persona. Con la idea de capturar esta intuición es que introducimos cuatro nuevos axiomas. Los tres primeros pueden ser vistos como una adaptación a nuestro marco de los axiomas liberales que usa Sen en su trabajo "The Impossibility of a Paretian Liberal"(1970). Ellos representan

[1] En su trabajo, K-R usan esta versión para caracterizar al agregador Dictatorial y Oligárquico, y usan una versión más débil para caracterizar el agregador Liberal. Nuestra versión asegura sus resultados. La usamos porque es una definición más comúnmente usada en la literatura de Teoría de Social Choice (Arrow, 1963; Rubinstein & Fishburn, 1986; Nicolas, 2007; Cho and Ju, 2017).

casos en donde las opiniones de los demás sobre un individuo son importantes para definir si es o no parte de un grupo. Cuando trabajamos con la noción de Sen de liberalismo, es necesario introducir la siguiente definición, que va a ser útil para el resto del capítulo:

**Definición 1.** *Decimos que* $i \in N$ *es* decisivo *sobre* $j \in N$*, si ocurre lo siguiente:* $j \in C_i$ *si y sólo si* $j \in J(C)$*. Decimos que* $i \in N$ *es* semidecisivo *sobre* $j \in N$*, si sólo ocurre uno de los siguientes: si* $j \in C_i$ *entonces* $j \in J(C)$ *o, si* $j \notin C_i$ *entonces* $j \notin J(C)$*.*

El objetivo de Sen es el de capturar la esencia de la libertad individual, un estado en el que cada individuo puede decidir sobre asuntos que son de su esfera privada. El muestra la imposibilidad de un agregador definido sobre un dominio irrestricto de opciones, que es Pareto eficiente y tal que cada individuo es decisivo o semidecisivo sobre alguna opción.[2] En situaciones como las descriptas más arriba, en las cuales todos quieren ser considerados personas de buenos valores, donde otros toman decisiones por un individuo específico, esta manera de representar el liberalismo parece sensible. El primer axioma que introducimos le permite a cada agente ser decisivo sobre cualquier otro agente (incluyéndose a si mismo). El segundo y tercer axioma son versiones más débiles del primero, permitiendo al menos a dos agentes ser decisivos o semidecisivos sobre cualesquiera otros dos agentes.
El axioma restante es una versión extrema del Principio Liberal usado por K-R. Establece la imposibilidad de que $J = \emptyset$ si existe alguien que opine que por lo menos un individuo merece ser considerado $J$. Similarmente, si existe un individuo que considera que alguien no es un $J$, entonces no todos pueden ser $J$. La idea que queremos capturar es que cada opinión debe ser considerada importante, con el objetivo de evitar casos extremos como que el conjunto de los $J$ sea vacío o sea todo el conjunto de agentes. Esto es, una simple opinión positiva es suficiente para que el grupo en consideración no sea vacío; y una simple opinión negativa alcanza para que no todos pertenezcan al grupo.
Ahora presentamos las definiciones formales de estos axiomas:

- **Liberalismo de Sen**(LS): para cada $i \in N$ existe un $j \in N$ tal que $i$ es decisivo sobre $j$.

- **Liberalismo Minimal**(LM): existen al menos cuatro individuos $\{i, j, k, l\} \subseteq N$, $i \neq j$ y $k \neq l$, tal que $i$ es decisivo sobre $k$ y $j$ es decisivo sobre $l$.

[2]En el trabajo de Sen, una función es Pareto eficiente si no elige una opción cuando existe otra que es preferida por todos.

- **Liberalismo Super Minimal**(LSM): existen al menos cuatro individuos $\{i, j, k, l\} \subseteq N$, $i \neq j$ y $k \neq l$, tal que $i$ es semidecisivo sobre $k$ y $j$ es semidecisivo sobre $l$.

- **Liberalismo Extremo**(LE) se caracteriza por:

  (i) Si existe un par $\{i, j\} \subseteq N$ tal que $j \in C_i$, entonces $J(C) \neq \emptyset$.

  (ii) Si existe un par $\{i, j\} \subseteq N$ tal que $j \notin C_i$, entonces $J(C) \neq N$.

## 1.3. La FIC Liberal Fuerte

Kasher & Rubinstein introducen en su trabajo la FIC Liberal Fuerte:

$$LibF(C) = \{i : i \in C_i\}$$

Este agregador clasifica como $J$ a cada agente que se considere a sí mismo como $J$. Ellos caracterizan a esta FIC como la única que satisface MON, C, SIM, I y L. Sung y Dimitrov (2003) refinan este resultado, y dan la caracterización de la FIC Liberal Fuerte como la única que verifica SIM, I y L. Debido a su unicidad, concluyen que si una FIC verifica estos tres axiomas, entonces también verifica MON y C. En esta sección cambiamos el axioma L por LS, LM o LSM, y exploramos qué FICs los verifican. Podemos pensar que estos axiomas capturan una noción diferente de liberalismo. El siguiente ejemplo muestra que si una FIC verifica L no necesariamente verifica LS.

**Ejemplo 1.** *Sea $J(C) = S \in P(N)$ para todo $C \in \boldsymbol{C}$ con $S \notin \{\emptyset, N\}$. Esta FIC verifica L porque su resultado es siempre diferente al conjunto vacío y a todo el grupo. Pero no verifica LS. Supongamos que* 1 *es decisivo sobre* 2 *y $S = \{1, 2\}$. Si $C = (\{1\}, \{2\})$, entonces $J(C) = \{1, 2\}$, contradiciendo que* 1 *es decisivo sobre* 2.

Otro ejemplo muestra que LS no implica a L.

**Ejemplo 2.** *Supongamos que $N = \{1, 2\}$ y $J$ es una FIC tal que* 1 *es decisivo sobre* 2 *y* 2 *decisivo sobre* 1. *Claramente verifica LS. Pero no verifica L, porque $J(\{1\}, \{2\}) = \emptyset$ a pesar que $i \in C_i$ para $i = 1, 2$.*

El hecho que LS y L no se impliquen mutuamente, muestra que este nuevo axioma captura un aspecto diferente de liberalismo al considerado por K-R. La unicidad de la FIC Liberal Fuerte aún es válida cuando reemplazamos L por LS. Más aún, podemos descartar uno de los axiomas para demostrar esto:

**Teorema 1.** *La FIC Liberal Fuerte es la única FIC que verifica SIM y LS.*

*Prueba.* Primero mostraremos que dos agentes no pueden ser decisivos sobre el mismo agente. Supongamos por el contrario, que $i$ y $j$ son decisivos sobre $k$. Si en el perfil $C$, tenemos $k \in C_i$ y $k \notin C_j$, entonces $i \in J(C)$ e $i \notin J(C)$. Por lo tanto obtenemos una contradicción. Como asumimos que el conjunto de votantes es finito, para las FICs que satisfacen LS, cada agente puede ser decisivo sobre sólo un agente. Sea $\sigma$ la permutación del conjunto $N$ de individuos. Si una FIC verifica que cada agente es decisivo sobre sólo un agente, debe ser de la siguiente forma:

$$J_\sigma(C) = \{\sigma(i) : \sigma(i) \in C_i\}$$

Si $\sigma$ es la permutación identidad obtenemos la FIC Liberal Fuerte que satisface ambos axiomas.
Ahora consideremos una permutación $\sigma$ tal que $\sigma(i) \neq i$ para algún $i$. Supongamos que $J_\sigma$ satisface SIM. Entonces para cada posible perfil $(C_1, \ldots, C_N)$, si existe un par $j, k$ de individuos simétricos, ocurre que $\{j,k\} \subseteq J_\sigma(C)$ o $\{j,k\} \nsubseteq J_\sigma(C)$. Pero un simple ejemplo muestra que éste no es necesariamente el caso. Supongamos que $N = \{1,2,3\}$ y $\sigma = (23)$ (la permutación que cambia al 2 y al 3, dejando al 1 fijo). Consideremos el perfil $C = (\{3\}, \{1,3\}, \{1\})$. Agentes 1 y 3 son simétricos. Por definición $J_\sigma(C) = \{3\}$, pero de acuerdo a SIM debería ser que $1 \in J_\sigma(C)$ si y sólo si $3 \in J_\sigma(C)$. Esto muestra que la FIC satisface LS pero no SIM. □

Como la FIC *LibF* verifica MON, C e I, el siguiente corolario es obtenido inmediatamente del Teorema 1.

**Corolario 1.** *Si una FIC satisface SIM y LS, también verifica MON, C e I.*

Más aún, podemos obtener un refinamiento de éste resultado.

**Proposición 1.** *Si una FIC verifica LS, también verifica MON, C e I.*

*Prueba.* Supongamos $j$ es decisivo sobre $i$.

- LS implica MON. Si tenemos que $i \in J(C)$, entonces debe ser que $i \in C_j$. Consideremos el perfil $C'$ idéntico a $C$ excepto que existe un individuo $k$ tal que $i \notin C_k$ e $i \in C'_k$. No existe cambio en la opinión de $j$, entonces por LS tenemos que $i \in J(C')$. Lo mismo ocurre si $i \notin J(C)$.

- LS implica C. Si $i \in C_k$ para todo $k \in N$, en particular $i \in C_j$. Entonces por LS, tenemos que $i \in J(C)$. Si $i \notin C_k$ para todo $k \in N$, en particular $i \notin C_j$. Nuevamente, por LS tenemos que $i \notin J(C)$.

- LS implica I. Sean $C, C' \in \mathbf{C}$ dos perfiles tales que para todo $k \in N$, $i \in C_k$ si y solo si $i \in C'_k$. Si ocurre que $i \in J(C)$, entonces debe ocurrir que $i \in C_j$, por lo tanto $i \in C'_j$. Entonces por LS tenemos $i \in J(C')$. Lo mismo ocurre si $i \notin J(C)$.

$\square$

Un ejemplo ilustra que SIM no implica ninguno de los otros axiomas.[3]

**Ejemplo 3.** *Definamos la siguiente FIC:*

$$J(C) = \begin{cases} LibF(C) & si \quad LibF(C) \in \{\emptyset, N\} \\ \\ N - LibF(C) & en\ otro\ caso \end{cases}$$

*Esta FIC verifica SIM, pero no MON, C, I y LS.*

Liberalismo Minimal es una versión más débil del Liberalismo de Sen, ya que solo requiere que al menos dos agentes sean decisivos. En la prueba del Teorema 1, no se usa el número de agentes que son decisivos. Por lo tanto debilitar el axioma no cambia el resultado. Obtenemos lo siguiente:

**Corolario 2.** *La FIC Liberal Fuerte es la única FIC que verifica SIM y LM.*

Los resultados del Corolario 1 y la Proposición 1 permanecen iguales si cambiamos LS por LM. Liberalismo Super Minimal es una versión más débil que Liberalismo Minimal, ya que solo requiere que al menos dos agentes sean semidecisivos. Cuando usamos una noción tan débil, encontramos más FICs que satisfagan SIM y LSM. Más aún, también verifican MON, C e I:

**Proposición 2.** *La FIC Liberal Fuerte no es la única FIC que verifica MON, C, SIM, I y LSM.*

*Prueba.* Es claro que la FIC Liberal Fuerte verifica los axiomas propuestos. Damos dos ejemplos de FICs que también los verifican. La FIC *Unanimidad* ($U$), que prescribe que $i$ es un $J$ si y sólo si todos piensan que $i$ es un $J$. Formalmente:

$$U(C) = \{i : i \in C_k \ para\ todo\ k \in N\}$$

Y la FIC *Inclusiva* ($In$), que indica que $i$ es un $J$ si alguien piensa que $i$ es un $J$:

$$In(C) = \{i : i \in C_k \ para\ algún\ k \in N\}$$

Ambas FICs satisfacen todos los axiomas. En $U$, cada agente es semidecisivo ya que si $i \notin C_j$ para algún $j \in N$, entonces $i \notin U(C)$. En $In$, cada agente es semidecisivo ya que si $i \in C_j$ para algún $j \in N$, entonces $i \in In(C)$. $\square$

[3]Este ejemplo es usado en Sung & Dimitrov (2003), para mostrar una FIC que verifica SIM y L pero no I.

## 1.4. Liberalismo Extremo

Recordemos la definición de este axioma:

(i) Si existe un par $\{i, j\} \subseteq N$ tal que $j \in C_i$, entonces $J(C) \neq \emptyset$.

(ii) Si existe un par $\{i, j\} \subseteq N$ tal que $j \notin C_i$, entonces $J(C) \neq N$.

De las definiciones, podemos ver que LE implica L. La idea que LE intenta capturar es que si alguien piensa que existe por lo menos un $J$, entonces el conjunto de gente socialmente aceptada como $J$ no puede ser vacío. De manera similar, si algún individuo piensa que existe alguien que no es $J$, entonces no todos pueden pertenecer al grupo de los $J$. El Principio Liberal L captura la idea que la opinión que un individuo tiene sobre sí mismo es importante. Liberalismo Extremo LE va más allá, sosteniendo que la opinión de un individuo sobre cualquier otro agente es importante. Cuando trabajamos con un concepto tan extremo de "liberalismo", obtenemos un resultado de imposibilidad. Para mostrar esto, probamos la unicidad de dos FICs que satisfacen la parte (i) y (ii) de LE por separado.

**Teorema 2.** *La FIC Inclusiva In es la única FIC que verifica MON, C, I y LE(i).*[4]

*Prueba.* Es claro que la FIC *In* satisface los axiomas propuestos. Consideremos una FIC diferente $J$ que también los verifique. Supongamos que existe un perfil $C$ tal que $i \in C_k$ para algún $k$ pero $i \notin J(C)$. Aplicando MON varias veces, podemos encontrar un perfil $C'$ identico a $C$ con la excepción que para todo $j \neq k$, $i \notin C'_j$ entonces $i \notin J(C')$. Sea $C''$ el perfil tal que $C''_k = \{i\}$ y $C''_j = \emptyset$ para todo $j \neq k$. Por C, $J(C'')$ no puede contener ningún individuo de $N - \{i\}$. Por lo tanto $J(C'') \in \{\emptyset, \{i\}\}$. Como esta FIC satisface la parte (i) de LE, no es posible $J(C'') = \emptyset$, entonces tenemos $J(C'') = \{i\}$. Pero obtenemos una contradicción con I, ya que el agente $i$ es tratado de igual forma en los perfiles $C'$ y $C''$ pero $i \notin J(C')$ e $i \in J(C'')$. Entonces no existe otra FIC distinta a la *Inclusiva* que satisfaga los axiomas propuestos. □

La siguiente proposición nos muestra que necesitamos de todos los axiomas para caracterizar a la FIC *In*.

**Proposición 3.** *La FIC Inclusiva no es la única FIC que verifica tres de los siguientes axiomas: MON, C, I y LE(i).*

[4] La FIC Inclusiva *In* se define en la prueba de la Proposición 2

*Prueba.* La prueba consiste en 4 ejemplos, cada uno presentando una FIC que satisface exactamente tres de los cuatro axiomas y ninguna de estas FICs es la *In*.

- Consideremos la FIC $J(C) = \{i : 0 < |\{k|i \in C_k\}| < \frac{|N|}{2}\ o\ |\{k : i \in C_k\}| = N\}$. Esto es, los individuos son considerados $J$ si menos de la mitad de los agentes los considera $J$ o todo el conjunto de votantes opina que son $J$. Esta FIC no satisface MON ya que si un agente $i$ que ya es considerado $J$ por el agregador obtiene más votos, eventualmente puede exceder los $\frac{|N|}{2}$ votos sin obtener la aprobación de $|N|$ individuos.

- La FIC $J(C) = N$ para todo $C \in \mathbf{C}$ satisface todos los axiomas excepto C. Supongamos que lo satisface y $1 \notin C_i$ para todo $i \in N$. Entonces por C, $1 \notin J(C) = N$. Obtenemos una contradicción.

- Consideremos la siguiente FIC definida inductivamente. Sea $J(C, 0)$ el conjunto de individuos para los cual existe un consenso de que son $J$ en $C$. Expandamos el conjunto de manera inductiva agregando, en la etapa $t$, aquellos miembros para los cuales existe un consenso en $J(C, t-1)$ de que son $J$. En el caso en que $J(C, 0) = \emptyset$ definimos $J(C) = \{i : |\{k|i \in C_k\}| \geq 1\}$. Esta FIC verifica todos los axiomas excepto I. Consideremos por ejemplo los perfiles $C = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$ y $C' = (\{1, 2\}, \{2\}, \{2, 3\})$. Por lo tanto $J(C) = \{1, 2, 3\}$, pero $J(C') = J(C', 0) = J(C', 1) = \{2\}$. Entonces I no es satisfecha para el agente 1.

- La FIC Liberal Fuerte satisface todos los axiomas excepto (LE)(i). Por ejemplo, consideremos el perfil $C = (\{2\}, \{1\})$. Entonces $LibF(C) = \emptyset$, violando LE(i).

$\square$

Tenemos un resultado de unicidad similar cuando trabajamos con la parte (ii) de LE:

**Teorema 3.** *La FIC Unanimidad $U$ es la única FIC que verifica MON, C, I y LE(ii).*[5]

*Prueba.* Claramente $U$ satisface estos cuatro axiomas. Consideremos una FIC diferente $J$ que también los verifique. Supongamos existe un perfil $C$ tal que $i \notin C_k$ para algún $k$ pero $i \in J(C)$. Aplicando MON varias veces, podemos obtener un perfil $C'$ idéntico a $C$ con la excepción que para todo $j \neq k$, $i \in C'_j$ entonces $i \in J(C')$. Sea $C''$ el perfil tal que para $j \in N - \{k\}$,

[5]Nuevamente, podemos encontrar la definición de $U$ en la prueba de la Proposición 2.

$C''_j = N$ y $C''_k = N - \{i\}$. Por C, $N - \{i\} \subseteq J(C'')$. Por lo tanto $J(C'') \in \{N - \{i\}, N\}$. Como esta FIC satisface la parte (ii) de LE, no es posible que $J(C'') = N$, por lo tanto tenemos $J(C'') = N - \{i\}$. Nuevamente obtenemos una contradicción con I, porque el agente $i$ es tratado de igual manera en los perfiles $C'$ y $C''$ pero $i \in J(C')$ e $i \notin J(C'')$. Entonces, no existe otra FIC más que la *Unanimidad* que satisfaga los axiomas. □

Como en el caso de la FIC $In$, los axiomas son independientes en la caracterización de la FIC $U$.

**Proposición 4.** *La FIC Unanimidad no es la única FIC que verifica tres de los siguientes axiomas: MON, C, I y LE(ii).*

*Prueba.* La prueba consiste nuevamente en cuatro ejemplos, cada uno satisfaciendo solo tres de los cuatro axiomas y ningún ejemplo es la FIC $U$.

- Consideremos la FIC que primero define como $J$ a los agentes para los cuales existe un consenso en el perfil $C$ de que son $J$. Si este grupo es vacío y $C_1 \neq N$, entonces $J(C) = \{i : i \in C_1 \textit{ e } i \notin C_k \textit{ para todo } k \neq 1\}$. Si $C_1 = N$ entonces $J(C) = \emptyset$. Ésta FIC verifica todos los axiomas excepto MON. Consideremos el perfil $C = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$. Entonces $J(C) = \{1\}$. Ahora supongamos que el agente 1 recibe un voto más, como en $C' = (\{1\}, \{1, 2\}, \{3\})$. Tenemos $J(C') = \emptyset$. Por lo tanto MON no se verifica.

- La FIC $J(C) = \emptyset$ para todo $C \in \mathbf{C}$ satisface todos los axiomas excepto C. Supongamos que verifica C y $1 \in C_i$ para todo $i \in N$. Por C, $1 \in J(C) = \emptyset$. Obtenemos entonces una contradicción.

- Consideremos la siguiente FIC definida inductivamente. Sea $J(C, 0)$ el conjunto de todos los individuos para los cual existe un consenso en $C$ de que son $J$. Expandamos el conjunto inductivamente agregando en la etapa $t$, aquellos miembros para los cuales existe un consenso en $J(C, t-1)$ de que son $J$. En el caso que $J(C, t) = N$ para algún $t > 0$, definimos $J(C) = \{i : |\{k | i \in C_k\}| = N\}$. Esta FIC verifica todos los axiomas excepto I. Consideremos por ejemplo los perfiles $C = (\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\})$ y $C' = (\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3\})$. $J(C) = J(C, 1) = \{1, 2\}$ mientras que $J(C') = \emptyset$. Entonces I no es verificada para el agente 2.

- La FIC Liberal Fuerte satisface todos los axiomas excepto LE(ii). Por ejemplo, consideremos el perfil $C = (\{1\}, \{2\})$. Entonces $LibF(C) = N$ violando LE(ii).

□

Un resultado de imposibilidad sigue como consecuencia del Teorema 2 y Teorema 3.

**Corolario 3.** *No existe FIC que verifique MON, C, I y LE.*

De la unicidad de *In* y *U* obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 4.** *Si una FIC verifica MON, C, I y LE(i) ó MON, C, I y LE(ii); entonces verifica SIM.*

## 1.5. Conclusiones

En este capítulo tratamos con el problema de identificación de grupos y consideramos distintas nociones de liberalismo, usando el enfoque de la teoría de Social Choice usado por K-R. Cuando cambiamos el axioma liberal de K-R, obtenemos resultados de unicidad e imposibilidad. Existen varios contextos donde estas variantes de liberalismo pueden ser aplicadas con sentido.
Nuestro primer resultado (Teorema 1) nos dice que cuando se les indica a los agentes que sean decisivos sobre su identidad o algún otro agente, existe una sola regla que satisface los axiomas propuestos.[6] Más aún, esta regla solo les permite ser decisivos sobre ellos mismos. La única FIC que satisface esto es la FIC Liberal Fuerte, el agregador que K-R caracterizan en su trabajo. Lo interesante es que esta condición de liberalismo implica otra nociones generalmente requeridas para un agregador "justo". Cuando pedimos que una FIC verifique Liberalismo de Sen, obtenemos que también verifica Monotonía, Consenso e Independencia. Un planificador social sabe entonces que si este tipo de libertad es requerida, va a venir asociada de estas importantes propiedades. La Proposición 2 muestra que si pedimos que los agentes sean semidecisivos, podemos encontrar más reglas que satisfagan los axiomas propuestos. Esto es, debilitando el Liberalismo de Sen, tenemos más procesos de elección disponibles. Finalmente, el Corolario 3 nos muestra que no existe FIC que satisfaga Liberalismo Extremo. Cuando la opinión de cualquier agente sobre cualquiera es importante para forzar a que el resultado sea no vacío o toda la sociedad, ninguna regla satisface todos los axiomas. La única posibilidad es tener dos FICs diferentes cada una satisfaciendo una parte de este concepto extremo.

[6] El resultado es válido también para cuando al menos dos agentes son decisivos (Corolario 2)

Como en el trabajo de K-R, la idea aquí no es encontrar el "método apropiado" para definir los miembros de un grupo. Al contrario, el objetivo es examinar de la manera más completa todos los aspectos lógicos del problema. Por lo tanto, proveemos una herramienta más para un planificador social que tiene que definir a los miembros de determinado grupo, y desea que su proceso de agregación adhiera a ciertos valores específicos.

# Capítulo 2

# Preguntándole a Infinitos Votantes quién es un J

## 2.1. Introducción

Ahora nos interesamos en una extensión del problema original. Por ejemplo, podemos considerar el problema de clasificar las inclinaciones políticas de los ciudadanos de un país cuyas fronteras están sujetas a cambios, basados en la opinión de ellos mismos. Si, digamos, la pregunta fuese "¿cuál es la inclinación política de la mayoría de los ciudadanos en Alemania, derecha o izquierda?", es importante saber si esta pregunta se formula previo a la reunificación de 1990 o luego de una eventual fusión con la Unión Europea. Mientras que las categorías de las respuestas son fijas (izquierda, derecha), si la pregunta no está enmarcada en un período de tiempo, nos enfrentamos con un número *no acotado* de individuos. Para cada individuo debemos crear distintos representantes dependiendo de las fronteras del país. Esto es, dada una ciudadana llamada Ángela, tenemos que diferenciar Ángela de 1985 de la Ángela de 2018, ya que la primera pudo ser ciudadana de la República Democrática (Alemania del Este), mientras que la segunda de la República Federal.[1]

El ejemplo anterior puede ser manejado como un caso de votación contínua, tomando promedios o medianas. Pero, como es claro que las opiniones en el tiempo $t$ importan para las decisiones que pueden influenciar las opiniones en un futuro $t' > t$, existen ciertas propiedades que buscamos en el proceso

[1]Problemas similares surgen incluso si las fronteras de los países no cambian. Pensemos sobre el problema de determinar si los habitantes de Estados Unidos están a favor o en contra de la inmigración. Eventos como el 9/11 y la elección de Donald Trump indican que las opiniones de los ciudadanos deben estar asociadas a una fecha.

de agregación relacionadas a la representatividad y equidad del resultado. Reglas de agregación más cualitativas pueden ser más apropiadas para satisfacer estos requerimientos.
Pero más allá de las motivaciones sociales y económicas para este problema, los avances tecnológicos crean marcos alternativos en los cuales este asunto puede surgir. Por ejemplo, en el caso de la tecnología *blockchain*, la base para la criptomoneda y los contratos inteligentes, la adición de nuevos bloques al ledger colectivo requiere de la validación de los nodos en una red peer2peer (Biais et al. 2018). Esta aplicación muestra que el problema original de *Who is a J* puede ser extendido para considerar varias situaciones en las que la clasificación se obtiene a lo largo del tiempo en un horizonte infinito. Incluso si suponemos que en cada período de tiempo el número de bloques candidato es finito, si el tiempo es no acotado y las asignaciones son datadas, es equivalente desde un punto de vista matemático a considerar un número infinito numerable de bloques para ser añadidos al ledger. Alternativamente, podemos considerar casos en los cuales la clasificación de bloques está sujeta a incertidumbre, con un conjunto infinito numerable de posibles estados de la red. Aquí, la adición de un bloque al ledger depende del estado de la red. Nuevamente esto es equivalente a tener un número infinito numerable de bloques.
Nuestro objetivo en este capítulo es determinar si las FICs introducidas por Kasher & Rubinstein presentan las clasificaciones apropiadas en un marco infinito numerable. Tratamos de ver si un enfoque similar al de Fishburn (1970) es válido en este contexto.[2] Mientras nuestros descubrimientos no son tan impactantes como este, apuntan a una similaridad entre el marco finito e infinito en el caso de la FIC Liberal Fuerte, mientras que una nueva clase de FIC, que llamamos *anti-oligárquica*, caracteriza axiomas que, en el marco finito, caracterizan a las FICs Oligárquicas.

## 2.2. Caso Liberal

El marco teórico es una adaptación del usado en el capítulo anterior, usando un conjunto infinito de votantes. Consideramos un conjunto $N = \mathbb{N}$ de individuos, es decir, los individuos están identificados con un número natural. Cada individuo $i$ tiene una "opinión" descripta por un conjunto $C_i \subseteq \mathbb{N}$, tal que si $j \in C_i$, entonces $i$ piensa que $j$ merece ser un $J$. De manera opuesta, si $j \notin C_i$, entonces $i$ piensa que $j$ no debe ser un $J$. Denotamos por $J$ a una Función de Identidad Colectiva* (FIC*) que toma como argumento un

[2] Fishburn muestra que el Teorema de Imposibilidad de Arrow no es válido cuando el número de agentes es infinito.

perfil de opiniones $C = (C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ y entrega un conjunto $J(C) \subseteq \mathbb{N}$ de gente socialmente aceptada como $J$. En esta sección nos enfocamos en la FIC* Liberal Fuerte, cuya definición recordamos:

$$LibF = \{i : i \in C_i\}$$

Los axiomas que usaremos son la versión infinita de los presentados en el capítulo anterior.

- **Monotonía**(MON*): consideremos un individuo $i \in J(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$. Sea $(C'_1, \ldots, C'_n, \ldots)$ un perfil idéntico a $(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ excepto que existe un individuo $k$ tal que $i \notin J_k$ mientras que $i \in J'_k$. Entonces $i \in J(C'_1, \ldots, C'_n, \ldots)$. Análogamente, si $i \notin J(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ y $(C'_1, \ldots, C'_n, \ldots)$ es idéntico a $(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$, excepto por la presencia de un $k$ tal que si $i \in C_k$ y $i \notin C'_k$, entonces $i \notin J(C'_1, \ldots, C'_n, \ldots)$.

- **Consenso**(C*): si $j \in C_i$ para todo $i$, entonces $j \in J(C)$. Análogamente, si $j \notin C_i$ para todo $i$, entonces $j \notin J(C)$.

- **Simetría**(SYM*): dos individuos, $j$ y $k$ son simétricos en el perfil $(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ si:

  (i) $C_j - \{j, k\} = C_k - \{j, k\}$

  (ii) para todo $i \in \mathbb{N} - \{j, k\}, j \in C_i$ si y solo si $k \in C_i$

  (iii) $j \in C_j$ si y solo si $k \in C_k$

  (iv) $j \in C_k$ si y solo si $k \in C_j$

  Entonces $j \in J(C)$ si y solo si $k \in J(C)$.

- **Independencia**(I*): consideremos un individuo $i$ y dos perfiles $(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ y $(C'_1, \ldots, C'_n, \ldots)$. Tal que $i \in C_k$ si y solo si $i \in C'_k$. Entonces $i \in J$ si y solo si $i \in J'$.

- **Principio Liberal**(L*): si existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \in C_i$, entonces $J(C) \neq \emptyset$, y si existe un $i$ tal que $i \notin C_i$, entonces $J(C) \neq \mathbb{N}$.

De acuerdo a Sung & Dimitrov (2003), estos axiomas propuestos por K-R en el marco finito no son independientes, en particular, MON y C pueden ser obtenidos de SIM, I y L.[3] Más aún, prueban una variante finita del siguiente Lema.

[3]Todos estos axiomas fueron definidos en el Capítulo 1.

**Lema 1.** *Si una FIC $J$ satisface SIM*, I* y $L^*$, entonces $J(S^{\mathbb{N}}) = S$ para cada $S \subseteq \mathbb{N}$ donde $S^{\mathbb{N}}$ es el perfil tal que $C_i = S$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Vamos a probar este resultado con una aplicación directa de la siguiente versión de inducción transfinita (Suppes, 1972):
Dada una función proposicional $P$ definida sobre la clase de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que:

(i) $P(\emptyset)$ es verdadera.

(ii) $P(S)$ implica $P(S^+)$, donde $|S^+| = |S| + 1$.

(iii) Si $P(S)$ es verdadera para cada $S \subseteq \mathbb{N}$ finito, entonces $P(\bar{S})$ es verdadero para cada $\bar{S}$ infinito tal que $S \subseteq \bar{S}$.

entonces $P(S)$ es verdadero para todo $S \in 2^{\mathbb{N}}$.
Entonces

*Prueba.* Sung & Dimitrov (2003) prueban con inducción finita sobre la cardinalidad $\mid S \mid$ de $S$ que toda FIC que satisface SIM, I y L es tal que

$$J(S^N) = S \text{ y } J((N - S)^N) = N - S \text{ para cada } S \subseteq N, \text{ donde } |N| < \infty.$$

Para ver que esto es válido en nuestro contexto hay que considerar que este argumento inductivo comparte los pasos (i) y (ii) con la inducción transfinita. Por último, el paso (iii) es satisfecho tomando $\bar{S} = \mathbb{N}$ □

Una extensión directa del Lema 1, probada por Sung & Dimitrov puede ser obtenida considerando una 4-partición de $\mathbb{N}$, $(A_0, A_1, B_0, B_1)$:[4]

**Lema 2.** *Dados dos perfiles $(C_1^a, \ldots, C_n^a, \ldots)$ y $(C_1^b, \ldots, C_n^b, \ldots)$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$:*

$$C_k^a = \begin{cases} A_0 \cup A_1, \text{si } k \in A_0 \cup B_0, \\ A_0 \cup A_1 \cup B_0, \text{si } k \in A_1 \cup B_1 \end{cases}$$

*y*

$$C_k^b = \begin{cases} A_0, \text{si } k \in A_0 \cup B_0, \\ A_0 \cup A_1, \text{si } k \in A_1 \cup B_1 \end{cases}$$

*si una FIC $J$ satisface SIM*, I* y $L^*$ entonces*
*$J(C_1^a, \ldots, C_n^a, \ldots) = J(C_1^b, \ldots, C_n^b, \ldots) = A_0 \cup A_1$.*

Entonces tenemos:

[4]Si la partición es $(S, \emptyset, \emptyset, \mathbb{N} \setminus S)$, para un $S \subseteq \mathbb{N}$, el Lema 1 es consecuencia del Lema 2.

**Teorema 4.** *La FIC Liberal Fuerte es la única FIC que verifica SIM*, I* y L* para cualquier conjunto de votantes $N \subseteq \mathbb{N}$.*

*Prueba.* Está claro que la FIC Liberal Fuerte satisface estos axiomas. Supongamos por contradicción que existe otra FIC que satisface los axiomas, llamémosla $J'$. Entonces existe un perfil $(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ tal que $J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots) \neq LibF(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$. Por lo tanto existe un $i \in \mathbb{N}$:

- $i \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ e $i \notin LibF(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$, o
- $i \notin J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ e $i \in LibF(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$.

Cuatro clases pueden ser definidas:

$$A_0 = \{k \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots) \setminus \{i\} : i \notin C_k\}$$
$$A_1 = \{k \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots) \setminus \{i\} : i \in C_k\}$$
$$B_0 = \{k \in (\mathbb{N} - J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)) \setminus \{i\} : i \notin C_k\}$$
$$B_1 = \{k \in (\mathbb{N} - J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)) \setminus \{i\} : i \in C_k\}$$

Entonces si $i \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ pero $i \notin LibF(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$, podemos construir un nuevo perfil, $(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n, \ldots)$, donde

$$\bar{C}_k = \begin{cases} A_0 \cup A_1, \text{si } k \in A_0 \\ A_0 \cup A_1 \cup B_0 \cup \{i\}, \text{si } k \in A_1 \\ A_0 \cup A_1, \text{si } k \in B_0 \cup \{i\} \\ A_0 \cup A_1 \cup B_0 \cup \{i\}, \text{si } k \in B_1 \end{cases}$$

De acuerdo al Lema 2, considerando la partición $(A_0, A_1, B_0 \cup \{i\}, B_1)$, $J'(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n, \ldots) = LibF(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n, \ldots) = A_0 \cup A_1 = J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots) \setminus \{i\}$.

Por definición, para cada $k \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$, $k \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ si y solo si $k \in J'(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n, \ldots)$ mientras que para cada $k \in \mathbb{N}$, $i \in C_k$ si y solo si $i \in \bar{C}_k$. Debido a I*, $i \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ si y solo si $i \in J'(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n, \ldots)$. Pero por construcción, $i \in J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ pero $i \notin J'(\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_n, \ldots)$.

El caso restante, $i \notin J'(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$ e $i \in LibF(C_1, \ldots, C_n, \ldots)$, permite realizar una construcción similar de un perfil alternativo $(\hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_n, \ldots)$, donde

$$\hat{J}_k = \begin{cases} A_0, \text{si } k \in A_0 \\ A_0 \cup A_1 \cup \{i\}, \text{si } k \in A_1 \cup \{i\} \\ A_0, \text{si } k \in B_0 \\ A_0 \cup A_1 \cup \{i\}, \text{si } k \in B_1 \end{cases}$$

Nuevamente, una aplicación del Lema 2 nos lleva a una contradicción con I$^*$. Por lo tanto, existe una única FIC que satisface los axiomas, la FIC$^*$ Liberal Fuerte. $\square$

## 2.3. Caso Oligárquico

En este contexto trabajamos con individuos que dividen a la sociedad en dos clases diferentes, en vez de opinar quién es un $J$. Luego, una función de agregación genera una partición de $\mathbb{N}$. Formalmente, cada $i \in \mathbb{N}$ especifica una relación de equivalencia en $\mathbb{N}$ notada $\sim_i$, tal que $j \sim_i k$ si $i$ considera que $j$ y $k$ pertenecen a la misma clase. Una FIC$^{**}$ es una función que asigna a cada perfil $(\sim_1, \ldots, \sim_i, \ldots)$ una relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{N}$. Los axiomas que usaremos son los siguientes:

- **Independencia**($I^{**}$): consideremos dos perfiles de relaciones de equivalencia, $(\sim_1, \ldots, \sim_i, \ldots)$ y $(\sim'_1, \ldots, \sim'_i, \ldots)$, tal que para cada $i, j$ y $k$, $i \sim_k j$ si y solo si $i \sim'_k j$, entonces $i \sim (\sim_1, \ldots, \sim_i, \ldots)j$ si y solo si $i \sim (\sim'_1, \ldots, \sim'_i, \ldots)j$.

- **Consenso**($C^{**}$): si $j \sim_i k$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $j \sim k$.

Una FIC$^{**}$ **Oligárquica** es tal que existe un único subconjunto $M$ no vacío que verifica que $i \sim j$ si y solo si $M \subseteq \{k \mid i \sim_k j\}$. En el caso que $|N| < \infty$, el siguiente resultado de Barthelemy, Leclerc & Monjardet (1986) caracteriza a los agregadores oligárquicos:

**Teorema 5.** *Si una FIC$^{**}$ satisface versiones finitas de C$^{**}$ e I$^{**}$ entonces es oligárquica o la FIC$^{**}$ constante $\sim = N$.*

Cuando el número de individuos es infinito numerable, este resultado ya no se mantiene. Tenemos en cambio:

**Proposición 5.** *Si $N = \mathbb{N}$, la FIC$^{**}$ oligárquica y la FIC$^{**}$ constante $\sim = \mathbb{N}$ no son las únicas FIC$^{**}$s que satisfacen C$^{**}$ e I$^{**}$.*

*Prueba.* Consideremos la FIC$^{**}$ definida como sigue:

$$i \sim j \text{ si y solo si } \{k|i \sim_k j\} = \mathbb{N} \text{ o } \mathbb{N} - \{k|i \sim_k j\} \text{ es infinito, con } \{k|i \sim_k j\} \neq \emptyset.$$

Claramente esta FIC$^{**}$ satisface ambos axiomas. Pero no es una FIC$^{**}$ oligárquica. Supongamos que existe un subconjunto propio de $\mathbb{N}$, $M$ (finito o no) que constituye una "oligarquía". No puede determinar el resultado por si mismo, ya que si todos los demás (excepto un número finito de individuos) no concuerda con los miembros de $M$, la oligarquía no obtendría el resultado buscado. $\square$

Podemos decir que una FIC** es **anti-oligárquica** si existe un único subconjunto $\overline{M}$ tal que $i \sim j$ si y solo si $\overline{M} \supseteq \mathbb{N} - \{k \mid i \sim_k j\}$. Nuevamente, esta FIC** verifica C** e I**. Una pregunta que surge al ver la existencia de este nuevo tipo de agregadores, es la de si existe alguna manera de caracterizar las FIC**s que satisfagan C** e I**. Podemos mostrar el siguiente resultado:

**Teorema 6.** *Una FIC** verifica C** e I** si y solo si es oligárquica, anti-oligárquica o la FIC** constante* $\sim = \mathbb{N}$.

*Prueba.* La vuelta es directa. La implicación puede ser probada por contradicción. Supongamos que existe una FIC** que verifica C** e I** y que también cumple con las siguientes dos condiciones:

1. Para todo $M \subseteq \mathbb{N}$ existen $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \sim j$ y $M \subsetneq \{k | i \sim_k j\}$.

2. Para todo $\overline{M} \subseteq \mathbb{N}$ existen $i, j \in \mathbb{N}$ tal que $i \sim j$ y $\overline{M} \supsetneq \mathbb{N} - \{k | i \sim_k j\}$.

Consideremos un perfil en el cual cada agente piensa que todos los agentes son de la misma clase, es decir, $\sim_i = \mathbb{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como la FIC** satisface C**, tenemos que $\sim = \mathbb{N}$. Pero entonces tenemos que $M \subseteq \{k \mid i \sim_k j\} = \mathbb{N}$ y $\overline{M} \supseteq \mathbb{N} - \{k \mid i \sim_k j\} = \emptyset$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Llegamos entonces a un absurdo.
Ahora probemos la unicidad. Supongamos existe un conjunto $M$ y $M'$ que constituyen dos "oligarquías" diferentes. Consideremos el agente $h$ tal que $h \in M$ pero $h \notin M'$ y usemos el perfil en donde todos los agentes excepto $h$ piensan que $i$ está en la misma clase que $j$. Como $M'$ es una "oligarquía", tenemos que $i \sim j$, pero $M \subsetneq \{k \mid i \sim_k j\}$, contradiciendo el hecho que $M$ es otra "oligarquía". Análogamente podemos probar la unicidad de la "anti-oligarquía". $\square$

El siguiente resultado, nos muestra que la "anti-oligarquía" es el complemento de la "oligarquía".

**Proposición 6.** $\overline{M} = \mathbb{N} - M$

*Prueba.* Es claro de la definición que $M \cap \overline{M} = \emptyset$. Sabemos que $\overline{M} \supseteq \mathbb{N} - \{k \mid i \sim_k j\}$ para todo $i, j$ tal que $i \sim j$. Consideremos el perfil donde $\{k \mid i \sim_k j\} = M$ para todo $i, j$, por lo tanto tenemos $\overline{M} \supseteq \mathbb{N} - M$. Debido a la unicidad de $M$, tenemos que $\overline{M}$ debe ser $\mathbb{N} - M$. $\square$

## 2.4. Conclusiones

En este capítulo estudiamos el problema de un número infinito numerable de agentes que tienen que decidir cuáles de ellos pueden ser clasificado como $J$. Nuestro objetivo era determinar qué resultados del marco finito original se mantienen cuando el número de agentes es $\mathbb{N}$. Mostramos que la FIC** Liberal Fuerte mantiene su propiedad principal en esta extensión, es decir, su unicidad. Por el contrario, en el caso de la FIC** oligárquica, el resultado del marco finito no se mantiene, ya que una nueva función de agregación aparece, la FIC** 'anti-oligárquica'. Esta función y la oligárquica caracterizan las FIC**s que verifican C** y I**. También encontramos que, una vez determinada una "oligarquía", la correspondiente "anti-oligaquía" es inmediatamente obtenida. Este resultado es bastante relevante para los ejemplos presentados en la Introducción. En el caso de las inclinaciones políticas en Alemania, la decisión puede ser tomada o por todos los individuos, o por una clase (bastante pequeña) de "poderosos"(como los miembros del Bundestag desde 1949). Este útimo caso parece ser la respuesta más sensible a la pregunta.

Similarmente, en el caso de los blockchain, la anti-oligarquía se constituye solo por los nodos (es decir, los pares) que están envueltos en correr la prueba de trabajo para incorporar nuevos bloque en el *ledger*. Esto es, produciendo los llamados blockchain privados o autorizados (Shorish, 2018).

La única función de agregación tratada por K-R en el marco finito que no tratamos, la FIC Dictatorial, debe ser analizada también en el caso infinito, bajo la condición de que el rango de la solución no puede ser la sociedad entera o el conjunto vacío. Este problema, que intuitivamente llevaría a un resultado similar al de Fishburn (1970), es objeto de una investigación futura.

# Capítulo 3

# No estoy seguro quiénes son J

## 3.1. Introducción

Muchas veces las opiniones que la gente tiene no son del todo claras, o bien porque no están seguros o bien porque el tema sobre el cual deben opinar no es muy claro. Por ejemplo, si un grupo de personas debe identificar cual de ellas es considerada “alta”, esta clasificación no es evidente. Es claro que va a haber consenso en que si alguien mide 2.00 metros es “alto”, pero este pensamiento común desaparece al opinar sobre alguien que mide 1.65 metros. Este tipo de problemas de clasificación, propensos a la imprecisión y vaguedad, motivaron la introducción de los conjuntos difusos. Zadeh (1965) define un subconjunto difuso $U$ de $A$ como una función de membresía $f : A \to [0,1]$, donde $f(a)$ indica el grado de pertenencia de $a$ en $U$.
Existen varios análisis sobre agregación de preferencias difusas. Mencionando algunas contribuciones anteriores, Dutta et al. (1986) trabajan con elecciones exactas bajo preferencias difusas y Dutta (1986) investiga la estructura de reglas de agregación difusas que determinan órdenes sociales difusos.
En este capítulo introducimos un enfoque difuso al problema de identificación de grupos que venimos trabajando en los otros capítulos. En este modelo, cada agente, en vez de etiquetar a cada individuo de $N = \{1, \ldots, n\}$ (la sociedad) como perteneciente o no al grupo de los $J$, le asigna un valor en el intervalo $[0,1]$, representando el grado en el cual el agente es considerado como parte de los $J$. Presentamos los axiomas usados anteriormente en su versión difusa. Primero trabajamos con los axiomas que definen al agregador “Liberal”, mostrando que los resultados aún se mantienen en sus versiones difusas. Pero cuando trabajamos con los axiomas que definen al agregador “Dictatorial”, los resultados difieren de los del marco determinístico. Más específicamente, K-R prueban un resultado de unicidad cuando restringen el

dominio y el rango del agregador. No existe una clara "traducción" a estas restricciones en nuestro marco, permitiendo diversas interpretaciones. En algunos casos obtenemos más agregadores que verifican los axiomas mientras que en otros no existe ninguna función que lo haga.

## 3.2. Modelo y conjunto de axiomas

Sea $N = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de agentes que tiene que definir quién es parte de los $J$. La opinión del agente $i$ se caracteriza por la función $p_i : N \to [0,1]$ donde $p_i(j)$ indica la evaluación del agente $i$ sobre el grado de membresía de $j$ a la clase de los $J$s. El agente $i$ genera entonces un vector de opiniones $P_i = \{p_i(1), \ldots, p_i(n)\}$. Un perfil de opiniones $P$ es una matriz $n \times n$, $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$. Con $\mathbf{P}$ notamos al conjunto de todos los perfiles de opiniones. Un subconjunto difuso $J$ de $N$ se caracteriza por una *función de membresía (característica)* $f_J : N \to [0,1]$, que indica el grado de membresía de un agente al grupo de los $J$. Sea $\mathbf{F} = \{f_J : N \to [0,1]\}$, esto es, el conjunto de todas las posibles funciones de membresía de un subconjunto difuso $J$. Notamos con $JD$ la *Función de Identidad Colectiva Difusa* (FICD) tal que $JD : \mathbf{P} \to \mathbf{F}$. Una FICD toma un perfil de opiniones y entrega una función de membresía para el subconjunto difuso $J$. Más precisamente, la función de membresía del conjunto $J$ asociada al perfil $P \in \mathbf{P}$ se nota $f_J^P$. No imponemos ningún tipo de restricciones sobre las funciones de membresía. Pueden ser distintas para cada $i$, por ejemplo, $f_J^P(1) = p_1(1)$ mientras que $f_J^P(2) = \frac{p_2(2)}{2}$. Nuevamente, los axiomas usados son propiedades que un planificador social quisiera que fuesen implementados por un proceso de agregación "justo". Los siguientes axiomas son una adaptación (débil y fuerte) del axioma de Monotonía.

- **Monotonía Difusa** (MOND): sea $P \in \mathbf{P}$ tal que $f_J^P(i) = a$ y sea $P'$ un perfil tal que $P'_{k,i} > P_{k,i}$ para algún $k$ con $P'_{h,j} = P_{h,j}$ para todo $(h,j) \neq (k,i)$, entonces $f_J^{P'}(i) \geq a$.
  Si $P''$ es un perfil tal que $P''_{k,i} < P_{k,i}$ para algún $k$ con $P''_{h,j} = P_{h,j}$ para todo $(h,j) \neq (k,i)$, entonces $f_J^{P''}(i) \leq a$.

- **Monotonía Fuerte Difusa** (MONFD): sea $P \in \mathbf{P}$ tal que $f_J^P(i) = a$ y sea $P'$ un perfil tal que $P'_{k,i} > P_{k,i}$ para algún $k$ con $P'_{h,j} = P_{h,j}$ para todo $(h,j) \neq (k,i)$, entonces $f_J^{P'}(i) > a$.
  Si $P''$ es un perfil tal que $P''_{k,i} < P_{k,i}$ para algún $k$ con $P''_{h,j} = P_{h,j}$ para todo $(h,j) \neq (k,i)$, entonces $f_J^{P''}(i) < a$.

Es fácil de ver que si una FICD verifica MONFD también verifica MOND. El axioma de consenso establece que la opinión agregada sobre un agente está acotada por la mejor y peor opinión individual sobre ese agente.

- **Consenso Difuso** (CD): si $p_i(j) \geq a$ y $p_i(j) \leq b$ para todo $i \in N$, entonces $a \leq f_J^P(j) \leq b$.

El axioma de simetría indica que si la opinión sobre dos agentes es la misma, entonces la FICD los considera de la misma manera.

- **Simetría** (SIM): agentes $j$ y $k$ son simétricos si:
  - $p_i(j) = p_i(k)$ para todo $i \in N - \{j, k\}$
  - $p_j(i) = p_k(i)$ para todo $i \in N - \{j, k\}$
  - $p_j(k) = p_k(j)$
  - $p_j(j) = p_k(k)$

  Entonces tenemos que $f_J^P(j) = f_J^P(k)$.

La siguiente propiedad puede ser considerada como la primera verdaderamente "difusa".

- **Simetría Difusa** (SIMD): los agentes $j$ y $k$ son difusamente simétricos si:
  - $p_i(j), p_i(k) \geq 0.5$ o $p_i(j), p_i(k) < 0.5$ para todo $i \in N - \{j, k\}$
  - $p_j(i), p_k(i) \geq 0.5$ o $p_j(i), p_k(i) < 0.5$ para todo $i \in N - \{j, k\}$
  - $p_j(k), p_k(j) \geq 0.5$ o $p_j(k), p_k(j) < 0.5$
  - $p_j(j), p_k(k) \geq 0.5$ o $p_j(j), p_k(k) < 0.5$

  Entonces $f_J^P(j), f_J^P(k) \geq 0.5$ o $f_J^P(j), f_J^P(k) < 0.5$.

Mientras SIM implica que $f_J(i)$ es la misma para todo $i \in N$, SIMD no impone una restricción tan fuerte. Los siguientes ejemplos pueden servir de utilidad para entender la diferencia.

**Ejemplo 4.** *Consideremos* $N = \{1, 2\}$.

- *La FICD tal que* $f_J(i) = \frac{p_1(i)+p_2(i)}{2}$ *verifica SIM pero no SIMD como podemos ver con el perfil* $P = (\{0.1, 0.9\}, \{0.6, 0.4\})$. *Tenemos que* $f_J^P(1) = 0.35 < 0.5$ *y* $f_J^P(2) = 0.65 > 0.5$.

- *La FICD* $f_J(1) = 0.2p_1(1) + 0.2p_2(1)$ *y* $f_J(2) = 0.1p_1(2) + 0.1p_2(2)$ *verifica SIMD pero no SIM.*

El siguiente axioma establece que la opinión agregada sobre un agente debe depender de las opiniones que se tengan sobre él.

- **Independencia** (I): sean $P$ y $P'$ dos perfiles tales que dado un agente $j \in N$ tenemos que $p_i(j) = p'_i(j)$ para todo $i \in N$. Entonces $f_J^P(j) = f_J^{P'}(j)$.

Una versión "difusa" de este axioma podría ser:

- **Independencia difusa** (ID): sean $P$ y $P'$ dos perfiles tales que dado un agente $j \in N$, para cada $i \in N$ tenemos $p_i(j) \geq 0.5$ si y solo si $p'_i(j) \geq 0.5$ y $p_i(j) < 0.5$ si y solo si $p'_i(j) < 0.5$. Entonces $f_J^P(j) \geq 0.5$ si y solo si $f_J^{P'}(j) \geq 0.5$ y $f_J^P(j) < 0.5$ si y solo si $f_J^{P'}(j) < 0.5$.

La diferencia entre los últimos dos axiomas es que mientras I establece que $f_J(i) = f(p_1(i), \ldots, p_n(i))$, ID permite a cada agente ser afectado por las opiniones que se tengan sobre los demás agentes. Nuevamente dos ejemplos ilustran mejor la diferencia entre estos axiomas.

**Ejemplo 5.** *Consideremos* $N = \{1, 2\}$.

- *La FICD* $f_J(i) = \frac{p_1(i)+p_2(i)}{2}$ *verifica I pero no ID como podemos ver en los siguientes dos perfiles* $P = (\{0.1, 0.6\}, \{0.6, 0.7\})$ *y* $P' = (\{0.45, 0.6\}, \{0.95, 0.7\})$. *Tenemos que* $f_J^P(1) = 0.35 < 0.5$ *y* $f_J^{P'}(1) = 0.7 > 0.5$.

- *La FICD* $f_J(1) = 0.25p_1(1) + 0.25p_1(2)$ *y* $f_J(2) = 0.25p_2(1) + 0.25p_2(2)$ *verifica ID pero no I.*

Nuevamente aparece el axioma de Liberalismo y su versión "difusa".

- **Liberalismo** (L): si $p_i(i) = 1$ para algún $i \in N$, entonces $f_J^P(k) = 1$ para algún $k \in N$. Si $p_i(i) = 0$ para algún $i \in N$, entonces $f_J^P(k) = 0$ par algún $k \in N$.

- **Liberalismo Difuso** (LD): si $p_i(i) \geq 0.5$ para algún $i \in N$, entonces $f_J^P(k) \geq 0.5$ para algún $k \in N$. Si $p_i(i) < 0.5$ para algún $i \in N$, entonces $f_J^P(k) < 0.5$ para algún $k \in N$.

Dos ejemplos ilustran la diferencia entre ambos axiomas.

**Ejemplo 6.**

- *La FICD tal que* $f_J(i) = 1$ *si* $p_i(i) = 1$ *y* $f_J(i) = 0$ *en otro caso, verifica L pero no LD.*

- *La FICD tal que* $f_J(i) = 0.9$ *si* $p_i(i) \geq 0.5$ *y* $f_J(i) = 0.1$ *si* $p_i(i) < 0.5$, *verifica LD pero no L.*

Los últimos dos axiomas son la adaptación del Liberalismo Extremo y su versión difusa:

- **Liberalismo Extremo** (LE):(i) Si $p_i(j) = 1$ para algún $i, j \in N$, entonces $f_J^P(k) = 1$ para algún $k \in N$. (ii)Si $p_i(j) = 0$ para algún $i, j \in N$, entonces $f_J^P(k) = 0$ para algún $k \in N$.

- **Liberalismo Extremo Difuso** (LED):(i) SI $p_i(j) \geq 0.5$ para algún $i, j \in N$, entonces $f_J^P(k) \geq 0.5$ para algún $k \in N$. (ii)Si $p_i(j) < 0.5$ para algún $i, j \in N$, entonces $f_J^P(k) < 0.5$ para algún $k \in N$.

Unos ejemplos finales muestran la diferencia entre estos dos axiomas.

**Ejemplo 7.**

- *La FICD $f_J(i) = 1$ para todo $i \in N - \{1\}$ si $f_J(1) = 0$ si existe un $j, k \in N$ tal que $p_j(k) = 0$; o $f_J(1) = 1$ de otra manera, verifica LE pero no LED.*

- *Consideremos $N = \{1, 2\}$. La FICD tal que $f_J(1) = 0.9$ y $f_J(2) = 0.1$ para cada $P \in \boldsymbol{P}$, verifica LED pero no LE.*

## 3.3. Caso Liberal

La FICD Liberal Fuerte es una analogía directa a la FIC Liberal Fuerte:

$$L(P_1, \ldots, P_N)(i) = L_J(i) = p_i(i)$$

para todo $i \in N$.
Verifica MOND, CD, ID y LD. Más aún y nuevamente es la única FICD que satisface este conjunto de axiomas.

**Teorema 7.** *La única FICD que verifica MOND, CD, ID y LD es la FICD Liberal Fuerte.*

*Prueba.* Está claro que la FICD Liberal Fuerte verifica estos cuatro axiomas. Supongamos que existe otra FICD que los verifica. Sea $P$ el perfil tal que $p_i(i) \geq 0.5$ pero $f_J^P(i) < 0.5$. Aplicando MOND varias veces podemos crear un perfil $P'$ idéntico a $P$ excepto que $p'_j(i) < 0.5$ para todo $j \neq i$, tal que $f_J^{P'}(i) < 0.5$. Consideremos el perfil $P''$ tal que $p''_i(i) \geq 0.5$ y $p''_j(k) < 0.5$ para todo $j, k \in N$ (excepto cuando $j = k = i$). Por CD tenemos que $f_J^{P''}(k) < 0.5$ para todo $k \neq i$. Por lo tanto el conjunto de agentes tales que $f_J^{P''}(k) \geq 0.5$ pertenece a $\{\emptyset, \{i\}\}$. Debido a LD tenemos $f_J^{P''}(i) \geq 0.5$. Pero entonces tenemos una contradicción con ID ya que el agente $i$ es tratado similarmente (en el sentido de ID) en los perfiles $P'$ y $P''$ pero $f_J^{P'}(i) < 0.5$ y $f_J^{P''}(i) \geq 0.5$. $\square$

El resultado sigue siendo válido aún cuando usamos las versiones que no son totalmente difusas de los axiomas.

**Corolario 5.** *La única FICD que verifica MOND, CD, I y L es la FICD Liberal Fuerte.*

De la unicidad de la FICD Liberal Fuerte obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 6.** *Si una FICD verifica MOND, CD, ID y LD entonces verifica SIM y SYMD.*

Como la FICD Liberal Fuerte no verifica MONFD, y tenemos que MONFD implica MOND, obtenemos:

**Corolario 7.** *No existe una FICD que verifique MONFD, CD, ID y LD.*

Las siguientes dos FICD son la contraparte difusa de la FIC Inclusiva y Unanimidad introducidas en el Capítulo 1.
La FICD Unanimidad Difusa se define como:

$$UD(P_1, \ldots, P_N)(i) = UD_J(i) = min_j p_j(i)$$

para todo $i \in N$.
Por otro lado, la FICD Inclusiva Difusa se define como:

$$IncD(P_1, \ldots, P_N)(i) = IncD_J(i) = max_j p_j(i)$$

para todo $i \in N$.
Como ocurre en el caso no difuso, cuando usamos conceptos tan extremos como LE o LED, obtenemos los mismos resultados de unicidad.

**Teorema 8.** *La IncD es la única FICD que verifica MOND, CD, ID y LE (i) o LED (i).*
*La UD es la única FICD que verifica MOND, CD, ID y LE(ii) o LED(ii).*

*Prueba.* Una construcción similar a la usada para probar el Teorema 7 nos da la prueba para las dos afirmaciones. □

Del Teorema 8 surge el siguiente resultado de imposibilidad:

**Corolario 8.** *No existe FICD que verifique MOND, CD, ID y LE o LED.*

## 3.4. Caso Dictatorial

Kasher y Rubinstein usan, en una sección de su trabajo, una versión ligeramente modificada de las FICs. Asumen que hay un consenso en toda la sociedad de que existe alguien que es J y alguien que no es J. Ellos prueban que la única FIC (con estas condiciones alternativas de dominio y rango) que verifica Consenso e Independencia es la Dictatorial. Aquí definimos a la FICD Dictatorial Difusa con el agente $j$ como dictador de la siguiente manera:

$$DD(P_1, \ldots, P_N)(i) = DD_J(i) = p_j(i)$$

para todo $i \in N$.
Existen varias maneras de interpretar las condiciones de K-R en nuestro marco difuso.
Con respecto al dominio de la FICD, podemos pensar en las siguientes posibilidades:

- $\mathbf{P}^*$ es el conjunto de perfiles tales que en cada perfil $P_i$ existe al menos un $j$ tal que $p_i(j) = 1$ y un $k$ tal que $p_i(k) = 0$.
- $\mathbf{P}^{**}$ es el conjunto de perfiles tal que para todo agente $i$ existe al menos un $k$ y un $j$ tal que $p_i(k) \geq 0.5$ y $p_i(j) \leq 0.5$.
- $\mathbf{P}^{***}$ es el conjunto de perfiles donde $p_i \neq \mathbf{1}$ y $p_i \neq \mathbf{0}$ para todo $i \in N$.

Similares intepretaciones se le pueden dar al rango de una FICD.

- $\mathbf{F}^*$ es el conjunto donde las funciones de membresía son tales que existe un $j$ y un $k$ tal que $f_J(j) = 1$ y $f_J(k) = 0$
- $\mathbf{F}^{**}$ es el conjunto de funciones de membresía tales que para cada perfil $P$ existe al menos un $k$ y un $j$ tales que $f_J^P(k) \geq 0.5$ y $f_J^P(j) \leq 0.5$.
- $\mathbf{F}^{***}$ es el conjunto de funciones de membresía tal que $f_J \neq \mathbf{1}$ y $f_J \neq \mathbf{0}$

Es fácil de verificar que:

$$\mathbf{P}^* \subset \mathbf{P}^{**} \subset \mathbf{P}^{***}$$

y

$$\mathbf{F}^* \subset \mathbf{F}^{**} \subset \mathbf{F}^{***}$$

Un planificador social puede tener diferentes requerimientos sobre qué dominio o rango es más apropiado para su trabajo. Dependiendo de su elección existen varias posibilidades.

**Teorema 9.** *Consideremos FICDs que verifiquen los axiomas de CD e ID.*

1. *La FICD Dictatorial Difusa no es la única FICD tal que* $\boldsymbol{P}^{***} \to \boldsymbol{F}^{***}$

2. *La FICD Dictatorial Difusa es la única FICD tal que* $\boldsymbol{P}^{*} \to \boldsymbol{F}^{**}$ *o* $\boldsymbol{P}^{**} \to \boldsymbol{F}^{**}$ *, y no existe FICD tal que* $\boldsymbol{P}^{***} \to \boldsymbol{F}^{**}$*.*

3. *La FICD Dictatorial Difusa es la única FICD tal que* $\boldsymbol{P}^{*} \to \boldsymbol{F}^{*}$*, y no existe FICD tal que* $\boldsymbol{P}^{**} \to \boldsymbol{F}^{*}$ *o* $\boldsymbol{P}^{***} \to \boldsymbol{F}^{*}$*.*

*Prueba.* 1. Notamos con $|P^i|^>$ el número de $p_j(i)$s que tienen un valor mayor a 0.5 y $|P^i|^<$ como el número de $p_k(i)$s con un valor menor a 0.5 en un perfil $P \in \mathbf{P}$. Consideremos la siguiente FICD:

$$f_J^P(i) = \begin{cases} \frac{min_j p_j(i) + max_j p_j(i)}{2} & si \quad |P^i|^> = n \\ \frac{0.5 + max_j p_j(i)}{2} & si \quad |P^i|^> > |P^i|^< \\ p_j(i) & si \quad p_j(i) = p_k(i) \quad para \quad todo \quad j,k \in N \\ 0.5 & si \quad |P^i|^< = |P^i|^> \\ \frac{0.5 + min_j p_j(i)}{2} & si \quad |P^i|^< > |P^i|^> \\ \frac{min_j p_j(i) + max_j p_j(i)}{2} & si \quad |P^i|^< = n \end{cases}$$

Esta FICD verifica CD e ID y no es la Dictatorial Difusa.

2. Notamos con $|f_J^P|^>$ el número de $f_J(i)$s con un valor mayor o igual a 0.5 y $|f_J^P|^<$ como el número de $f_J(i)$s con valor menor que 0.5 en la función de membresía $f \in \mathbf{F}$.
Decimos que una coalición $L \subseteq N$ se dice *difusamente semidecisiva* para el agente $i$, si las siguientes condiciones son satisfechas:

$$[\forall j \in L,\ p_j(i) \geq 0.5 \ y \ \forall j \notin L,\ p_j(i) < 0.5] \Rightarrow f_j(i) \geq 0.5 \tag{3.1}$$

y

$$[\forall j \in L,\ p_j(i) < 0.5 \ y \ \forall j \notin L,\ p_j(i) > 0.5] \Rightarrow f_j(i) < 0.5. \tag{3.2}$$

Una coalición $L \subseteq N$ se dice difusamente semidecisiva si es difusamente semidecisiva para todo agente $i$. Análogamente, decimos que $L \subseteq N$ es *difusamente decisiva* sobre el agente $i$ si se satisfacen:

$$[\forall j \in L,\ p_j(i) \geq 0.5] \Rightarrow f_j(i) \geq 0.5$$

y
$$[\forall j \in L,\ p_j(i) < 0.5] \Rightarrow f_j(i) < 0.5.$$
De la misma manera, $L \subseteq N$ se dice difusamente decisiva si es decisiva para todo agente $i$. Primero probaremos la existencia de una coalición semidecisiva para un agente $i$, reduciéndola y "dándole" más poder hasta encontrar un agente decisivo para todo $i \in N$. Veamos que existe un $L \subseteq N$ y un agente $i \in N$ tal que $L$ es difusamente semidecisivo para $i$. Lo hacemos con el caso $N = 3$, el resultado se extiende fácilmente.
Consideremos el perfil $P^1 = (\{0.1, 0.6, 0.1\}, \{0.9, 0.2, 0.3\}, \{0.1, 0.2, 0.8\})$.
Por hipótesis, $|f_J^{P^1}|^> \neq 3$ y $|f_J^{P^1}|^< \neq 3$. Supongamos $|f_J^{P^1}|^> = 2$, y que $f_J^{P^1}(1), f_J^{P^1}(2) \geq 0.5$. Consideremos el perfil
$P^2 = (\{0.1, 0.6, 0.6\}, \{0.9, 0.2, 0.5\}, \{0.1, 0.2, 0.8\})$. Por ID, $f_J^{P^2}(1), f_J^{P^2}(2) \geq 0.5$ y por CD $f_J^{P^2}(3) \geq 0.5$, una contradicción. Entonces $|f_J^{P^1}|^> = 1$. Supongamos $f_J^{P^2}(2) \geq 0.5$. Por ID,
$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(2) \geq 0.5, p_2(2) < 0.5, p_3(2) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(2) \geq 0.5. \quad (3.3)$$
Se verifica entonces (3.1) para $L = 1$ e $i = 2$. Consideremos el perfil $P^3 = (\{0.6, 0.1, 0.2\}, \{0.1, 0.7, 0.1\}, \{0.1, 0.8, 0.4\})$, y supongamos por contradicción que $f_J^{P^3}(2) \geq 0.5$. Por CD, $f_J^{P^3}(3) < 0.5$. Más aún, $f_J^{P^3}(1) < 0.5$. De otra manera, si $f_J^{P^3}(1) \geq 0.5$, el perfil
$P^4 = (\{0.6, 0.1, 0.7\}, \{0.1, 0.7, 0.9\}, \{0.1, 0.8, 0.9\})$ llevaría a una contradicción, porque por ID, $f_J^{P^4}(1), f_J^{P^4}(2) \geq 0.5$; y por CD, $f_J^{P^4}(3) > 0.5$, una contradicción. Por lo tanto, solo $f_J^{P^4}(2) > 0.5$ y por ID,
$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(2) < 0.5, p_2(2) > 0.5, p_3(2) > 0.5] \Rightarrow f_J^P(2) > 0.5.$$
Consideremos el siguiente perfil $P^5 = (\{0.2, 0.1, 0.7\}, \{0.6, 0.2, 0.1\}, \{0.6, 0.1, 0.3\})$.
Por CD $f_J^{P^5}(2) < 0.5$. Si $f_J^{P^5}(3) \geq 0.5$, entonces el perfil
$P^6 = (\{0.6, 0.1, 0.7\}, \{0.6, 0.8, 0.1\}, \{0.6, 0.8, 0.3\})$ resulta en $|f_J^{P^6}|^> = 3$, una contradicción. Entonces solo $f_J^{P^5}(1) \geq 0.5$ y por ID,
$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(1) < 0.5, p_2(1) \geq 0.5, p_3(1) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(1) \geq 0.5. \quad (3.4)$$
Finalmente, consideremos $P^7 = (\{0.1, 0.6, 0.7\}, \{0.6, 0.3, 0.9\}, \{0.6, 0.1, 0.7\})$.
Por (3.3) y (3.4) tenemos que $f_J^{P^7}(1), f_J^{P^7}(2) \geq 0.5$ y por CD $f_J^{P^7}(3) \geq 0.5$, una contradicción. Por lo tanto (3.2) se verifica para el agente 1, que es difusamente semidecisivo para el agente 2.
Lo siguiente es probar que si existe un $L \subseteq N$ que es difusamente decisivo para algún agente $i \in N$, entonces $L$ es difusamente semidecisivo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que 1 es difusamente decisivo sobre 2. Sea $P^8 = (\{0.4, 0.1, 0.7\}, \{0.6, 0.2, 0.1\}, \{0.6, 0.3, 0.3\})$. Por CD

$f_J^{P^8}(2) < 0.5$. Más aún, si solo $f_J^{P^8}(1) \geq 0.5$, entonces por ID, CD y el hecho que el agente 1 es difusamente decisivo sobre 2, tendríamos que $|f_J^{P^9}|^> = 3$ con $P^9 = (\{0.4, 0.6, 0.7\}, \{0.6, 0.2, 0.9\}, \{0.6, 0.3, 0.8\})$, una contradicción. Entonces $f_J^{P^8}(3) \geq 0.5$ y por ID,

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) \geq 0.5, p_2(3) < 0.5, p_3(3) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) \geq 0.5.$$

Consideremos el perfil $P^9 = (\{0.6, 0.1, 0.3\}, \{0.2, 0.2, 0.7\}, \{0.2, 0.3, 0.9\})$. Si $f_J^{P^9}(3) \geq 0.5$, entonces por ID, CD y el hecho que el agente 1 es difusamente decisivo sobre 2, tenemos que $|f_J^{P^{10}}|^> = 3$ con $P^{10} = (\{0.7, 0.6, 0.1\}, \{0.6, 0.2, 0.9\}, \{0.6, 0.3, 0.8\})$, una contradicción. Por lo tanto $f_J^{P^9}(3) < 0.5$ y por ID,

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) < 0.5, p_2(3) \geq 0.5, p_3(3) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) < 0.5.$$

Esto es, el agente 1 es difusamente semidecisivo sobre 3. Con el mismo argumento, el agente 1 es difusamente semidecisivo sobre si mismo. Entonces por definición 1 es difusamente semidecisivo.

Ahora veamos que la intersección de dos conjuntos difusamente semidecisivos es un conjunto difusamente semidecisivo. Primero probemos que $L \cap L' \neq \emptyset$. Supongamos lo contrario. Sin pérdida de generalidad, sea $L = \{1\}$ y $L' = \{2, 3\}$. Consideremos el perfil $P = (\{0.7, 0.1, 0.1\}, \{0.4, 0.7, 0.1\}, \{0.1, 0.9, 0.3\})$. Entonces $f_J^P(1), f_J^P(2) \geq 0.5$. Pero por ID y CD tendríamos $|f_J^{P'}|^> = 3$ con $P' = (\{0.7, 0.1, 0.7\}, \{0.3, 0.8, 0.9\}, \{0.1, 0.7, 0.8\})$, una contradicción. Entonces $L \cap L' \neq \emptyset$. Segundo probaremos que $L \cap L'$ es difusamente semidecisivo. Sin pérdida de generalidad, sea $L = \{1, 3\}$ y $L' = \{1, 2\}$. Consideremos otro perfil $P = (\{0.7, 0.1, 0.1\}, \{0.4, 0.1, 0.8\}, \{0.1, 0.9, 0.3\})$ y supongamos, por contradicción, $f_J^P(1) < 0.5$. Si $f_J^P(2) \geq 0.5$, entonces por ID, CD y el hecho de que $L'$ es difusamente semidecisivo, tendríamos $|f_J^{P'}|^> = 3$ con $P' = (\{0.7, 0.1, 0.7\}, \{0.8, 0.1, 0.9\}, \{0.1, 0.7, 0.8\})$, una contradicción. Alternativamente, si $f_J^P(3) \geq 0.5$, entonces consideremos el perfil $P'' = (\{0.7, 0.6, 0.1\}, \{0.8, 0.1, 0.8\}, \{0.1, 0.9, 0.3\})$. Por ID, $f_J^{P''}(3) \geq 0.5$. Como $L$ y $L'$ son difusamente semidecisivos, $f_J^{P''}(1), f_J^{P''}(2) \geq 0.5$. Entonces $|f_J^{P''}|^> = 3$, una contradicción. Por lo tanto, $f_J^P(1) \geq 0.5$, e ID implica que

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(1) \geq 0.5, p_2(1) < 0.5, p_3(1) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(1) \geq 0.5. \quad (3.5)$$

Por siguiente consideremos otro perfil $P = (\{0.4, 0.1, 0.7\}, \{0.8, 0.4, 0.1\}, \{0.8, 0.2, 0.3\})$. Si $f_J^P(1) \geq 0.5$, entonces se sigue de ID y que $L$ y $L'$ son difusamente semidecisivos, que $|f_J^{P'}|^> = 3$ si $P' = (\{0.4, 0.6, 0.7\}, \{0.8, 0.6, 0.1\}, \{0.8, 0.2, 0.8\})$, una contradicción. Por lo tanto $f_J^P(1) < 0.5$ y por ID

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(1) < 0.5, p_2(1) \geq 0.5, p_3(1) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(1) < 0.5. \quad (3.6)$$

Entonces tenemos que 1 es difusamente semidecisivo.
Probaremos que dada una coalición $L \subseteq N$, o $L$ es difusamente semidecisiva o $N \setminus L$ es difusamente semidecisiva. Notemos que por CD, $N$ es difusamente semidecisivo sobre $N$. Sin pérdida de generalidad, fijemos $L = \{1, 2\}$ y supongamos por contradicción que $L$ no es difusamente semidecisiva. Entonces debe existir un perfil $P$ y un individuo $i \in N$, tal que ocurra $p_1(i) \geq 0.5,\ p_2(i) \geq 0.5,\ p_3(i) < 0.5$ y $f_J^P(i) < 0.5$; o $p_1(i) < 0.5,\ p_2(i) < 0.5,\ p_3(i) \geq 0.5$ y $f_J^P(i) \geq 0.5$. Supongamos que ocurre este último, y sea $i = 1$. Por ID,

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(1) < 0.5, p_2(1) < 0.5, p_3(1) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(1) \geq 0.5. \quad (3.7)$$

Queremos probar que $N \setminus L = \{3\}$ es difusamente semidecisivo para el agente 1. Para hacer esto, falta probar que

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(1) \geq 0.5,\ p_2(1) \geq 0.5,\ p_3(1) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(1) < 0.5. \quad (3.8)$$

Consideremos el perfil $P^1 = (\{0.6, 0.1, 0.1\}, \{0.8, 0.4, 0.1\}, \{0.4, 0.6, 0.3\})$. Si $f_J^{P^1}(1) \geq 0.5$, tenemos por ID el resultado buscado. Si $f_J^{P^1}(1) < 0.5$ entonces procedemos como sigue. Primero, notemos que por CD $f_J^{P^1}(3) < 0.5$. Segundo, si $f_J^{P^1}(2) \geq 0.5$, tenemos que $|f_J^{P^2}|^{>} = 3$ si $P^2 = (\{0.6, 0.3, 0.7\}, \{0.8, 0.1, 0.9\}, \{0.2, 0.6, 0.8\})$. Entonces debe ser que solo $f_J^{P^1}(1) \geq 0.5$, y por ID,

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(1) \geq 0.5, p_2(1) \geq 0.5, p_3(1) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(1) \geq 0.5. \quad (3.9)$$

Consideremos el perfil $P^3 = (\{0.4, 0.1, 0.7\}, \{0.3, 0.4, 0.9\}, \{0.4, 0.6, 0.3\})$. Por CD $f_J^{P^3}(1) < 0.5$. Si $f_J^{P^3}(2) \geq 0.5$, entonces por CD e ID tenemos que $|f_J^{P^4}|^{>} = 3$ si $P^4 = (\{0.6, 0.3, 0.7\}, \{0.8, 0.1, 0.9\}, \{0.2, 0.6, 0.8\})$. Por lo tanto, tiene que ser que solo $f_J^{P^3}(3) \geq 0.5$; y por ID

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) \geq 0.5, p_2(3) \geq 0.5, p_3(3) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) \geq 0.5. \quad (3.10)$$

Pero entonces por CD, (3.7) y (3.10), tendríamos que $|f_J^{P^5}|^{>} = 3$ si $P^5 = (\{0.1, 0.6, 0.7\}, \{0.3, 0.6, 0.9\}, \{0.8, 0.6, 0.1\})$, una contradicción. Entonces llegamos a que $N \setminus L = \{3\}$ es difusamente semidecisivo para el agente 1. Finalmente obtenemos que 3 es difusamente semidecisivo sobre $N$.
Ahora probaremos que si una coalición $L$ es difusamente semidecisiva,

con $|L| > 1$, los subconjuntos y supraconjuntos de $L$ son difusamente semidecisivos. Sea $L \subseteq L' \subseteq N$, con $L$ difusamente semidecisivo. Si $L'$ no es difusamente semidecisivo, entonces $N \backslash L'$ es difusamente semidecisivo. Pero entonces $L \subseteq L'$, $(N \setminus L') \cap L = \emptyset$, contradiciendo lo probado anteriormente. Por lo tanto $L'$ es difusamente semidecisivo sobre $N$. Ahora tomemos un $h \in L$. Si $L \setminus \{h\}$ es difusamente semidecisivo, el resultado está probado. Caso contrario tenemos que $N \setminus (L \setminus \{h\})$ es difusamente semidecisivo. Luego, por resultados anteriores, obtenemos que $N \setminus (L \setminus \{h\}) \cap L = \{h\}$.
Lo siguiente es probar que siempre existe un agente $h \in N$ tal que $\{h\}$ es difusamente semidecisivo. Por CD, $N$ es difusamente semidecisivo, por lo tanto existe un $L' \subseteq N$ tal que $N \setminus L'$ es difusamente semidecisivo. Debe entonces existir un $L''$ tal que $(N \setminus L') \setminus L''$ es difusamente semidecisivo. Como $N$ es finito, iterando este proceso obtenemos que existe un $h \in N$ que es difusamente semidecisivo sobre $N$.
Por último probamos que si una coalición $L \subseteq N$ es difusamente semidecisiva, entonces es difusamente decisiva. Fijemos una coalición difusamente semidecisiva $L \subseteq N$. Entonces existe un $h \in L$ que es difusamente semidecisivo sobre $N$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h = 1$. Supongamos por ejemplo que $\{1\}$ no es difusamente decisivo para el agente 2. Entonces debe existir un perfil $P$ tal que (a) $p_1(2) \geq 0.5$ y $f_J^P(2) < 0.5$; o (b) $p_1(2) < 0.5$ y $f_J^P(2) \geq 0.5$. Supongamos ocurre (a). El otro caso es similar. Como por hipótesis $\{1\}$ es difusamente semidecisivo para el agente 2, tiene que haber un $j \neq 1$ tal que $p_j(2) > 0.5$. Más aún, también debe existir un agente $k \in N \setminus \{1, j\}$ tal que $p_k(2) < 0.5$. De otra manera, por CD obtendríamos $f_J^P(2) \geq 0.5$. Sin pérdida de generalidad, consideremos el caso donde $P = (\{0.1, 0.8, 0.2\}, \{0.1, 0.1, 0.9\}, \{0.2, 0.6, 0.1\})$. Por CD, $f_J^P(1) < 0.5$. Entonces, $f_J^P(3) \geq 0.5$. Por ID

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) < 0.5, p_2(3) \geq 0.5, p_3(3) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) \geq 0.5. \quad (3.11)$$

Consideremos el siguiente perfil $P' = (\{0.1, 0.3, 0.8\}, \{0.9, 0.1, 0.2\}, \{0.2, 0.6, 0.9\})$. Si $f_J^{P'}(3) < 0.5$, entonces por ID

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) \geq 0.5, p_2(3) < 0.5, p_3(3) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) < 0.5. \quad (3.12)$$

Como 2 es difusamente semidecisivo sobre 3, por (3.11) y (3.12), obtenemos que es difusamente semidecisivo sobre $N$. Sin embargo, $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, una contradicción. Entonces, $f_J^{P'}(3) \geq 0.5$. Más aún, por ID,

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) \geq 0.5, p_2(3) < 0.5, p_3(3) \geq 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) \geq 0.5.$$

Como 1 es difusamente semidecisivo sobre 3, también sabemos que

$$\forall P \in \mathbf{P}, [p_1(3) \geq 0.5, p_2(3) < 0.5, p_3(3) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) \geq 0.5.$$

Entonces, si para todo $P \in \mathbf{P}$, $[p_1(3) \geq 0.5,\ p_2(3) < 0.5,\ p_3(3) < 0.5] \Rightarrow f_J^P(3) \geq 0.5$, obtendríamos el resultado deseado, $\{1\}$ sería difusamente decisivo para el agente 3. De otra manera, podríamos repetir el argumento previo y mostrar que 3 es difusamente semidecisivo sobre $N$, que nos llevaría a una contradicción ya que $\{1\} \cap \{3\} = \emptyset$. Como $1 \in L$, tenemos que $L$ es difusamente decisivo para el agente 3. Finalmente, un razonamiento similar muestra que $L$ es difusamente decisivo para todo $i \in N$. Hemos hallado entonces que siempre que una FICD verifica CD e ID, existe un agente que es difusamente decisivo sobre $N$. La no existencia de una FICD se prueba por inclusión de conjuntos, ya que la Dictatorial Difusa no verifica las hipótesis en $\mathbf{P}^{***} \to \mathbf{F}^{**}$.

3. La prueba es análoga a la de (2).

□

Cuando cambiamos el axioma de Independencia Difusa por el de Independencia, obtenemos, mediante una prueba análoga, un resultado similar.

**Teorema 10.** *Consideremos FICDs que verifiquen los axiomas CD e I.*

1. *Existen varias FICDs con rango $\boldsymbol{F}^{***}$.*

2. *La FICD Dictatorial Difusa es la única FICD tal que $\boldsymbol{P}^{*} \to \boldsymbol{F}^{**}$ o $\boldsymbol{P}^{**} \to \boldsymbol{F}^{**}$ , y no existe FICD tal que $\boldsymbol{P}^{***} \to \boldsymbol{F}^{*}$.*

3. *La FICD Dictatorial Difusa es la única FICD tal que $\boldsymbol{P}^{*} \to \boldsymbol{F}^{*}$, y no existe FICD tal que $\boldsymbol{P}^{**} \to \boldsymbol{F}^{*}$ o $\boldsymbol{P}^{***} \to \boldsymbol{F}^{*}$.*

*Prueba.* (Sólo se prueba (1), ya que la prueba de las otras dos es análoga a la prueba del Teorema anterior)

1. Definimos como FICD *Democrática* a:

$$f_J(i) = \frac{p_1(i) + \ldots + p_n(i)}{n}$$

para todo $i \in N$. Esta FICD verifica CD e I.

□

La estructura difusa nos da la oportunidad de encontrar reglas no dictatoriales cuando trabajamos con el rango $\mathbf{F}^{***}$. Si una FICD debe verificar I, eso significa que $f_J(i)$ sólo depende de las opiniones $p_j(i)$. Una función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ que verifica $min\{a_1, \ldots, a_k\} \leq f(a_1, \ldots, a_k) \leq max\{a_1, \ldots, a_k\}$ es llamada una *media* $k$-dimensional (Hajja, 2013). Una FICD que verifica CD es entonces una media $n$-dimensional. Una media puede tener diferentes niveles de "democracia", en el sentido que tanto la FICD Dictatorial Difusa y la FICD Democrática son medias. Una pregunta natural es si cada media $n$-dimensional verifica la parte (1) del Teorema 9. El siguiente ejemplo muestra que la respuesta es negativa.

**Ejemplo 8.** *La FICD Unanimidad Difusa es una media $n$-dimensional. Consideremos el perfil $P = \{(0, 0.2, 0.3), (1, 0, 0.5), (0.3, 0.8, 0)\}$. Obtenemos $UD(i) = 0$ para todo $i \in N$, una función de membresía que no pertenece a $F^{***}$.*

## 3.5. Conclusiones

En este capítulo analizamos, desde un punto de vista de los conjuntos difusos, el problema de identificación de grupos. Las opiniones de los agentes ya no son determinísticas sobre la pertenencia o no al grupo. En vez de eso, expresan una opinión sobre el grado de membresía de los agentes al grupo de los $J$. Presentamos los axiomas que se encuentran en la literatura y agregamos versiones difusas de ellos. En el caso del agregador "Liberal", los resultados de unicidad e imposibilidad del marco determinístico se mantienen. Los axiomas de LD y LED siguen siendo muy restrictivos, manteniendo la unicidad de la FICD Liberal Fuerte en el primer caso, y la imposibilidad de una regla en el segundo. Cuando tratamos con el agregador "Dictatorial", los resultados son más diversos que en el caso determinístico, debido a las diferentes interpretaciones que le podemos dar a las restricciones de dominio y rango propuestas por Kasher & Rubinstein. Dependiendo de los objetivos del planificador social, podemos tener varias, una sola o ninguna regla que satisfaga las propiedades deseadas. La naturaleza binaria de analizar si alguien tiene más o menos grado de aceptación que 0.5, lleva a que en general se mantengan los resultados de unicidad e imposibilidad. Sin embargo, la posibilidad de modificar el dominio y rango de las FICDs nos da la posibilidad de elegir nuevas reglas distintas de la Dictatorial.

# Parte II

# Razonamiento Inductivo en Teoría de Elecciones Sociales

# Introducción

Las convenciones sociales surgen de procesos de tomas de decisiones, a veces bastante complejos, entre individuos y organizaciones. El estudio de estos procesos de agregación de opiniones individuales que resultan en una decisión colectiva ganó fuerza a finales de los 40. K. Arrow probó que un simple conjunto de propiedades sobre el proceso de agregación, eran imposibles de ser satisfechas simultáneamente (Arrow, 1951). A partir de allí un gran número de condiciones limitando o expandiendo las posibilidades del proceso de agregación han sido halladas. Sabemos que algunos estados sociales son deseables bajo ciertas circunstancias, pero no bajo otras, sin tener un completo entendimiento de los principios que guían nuestros propios juicios sociales. Esto también le puede ocurrir a un planificador social que no sabe exactamente sobre qué principios basar un resultado socialmente deseable en una situación en particular. Entonces, parte del ejercicio de elección social consiste en descubrir qué principios guían sus juicios. De hecho, eso es lo que tratamos de hacer en este capítulo, tratar de resolver el problema de inferir los principios generales de agregación a partir de ciertas situaciones sociales vistas. Entonces, en vez de postular condiciones que el proceso de agregación debe verificar, definimos las clases de los posibles resultados. Luego buscaremos una partición de esa clase acorde al proceso de agregación implícito que la da como resultado y determinamos las condiciones que caracterizan a cada clase de equivalencia. Esto significa que en vez de caracterizar resultados en términos de las condiciones en el proceso de agregación, caracterizamos las condiciones basadas en los resultados que brindan. Este proceso, que consiste en derivar una caracterización intensional de una extensional es típico en Estadística. Es por eso que vemos este trabajo como un ejercicio en Estadística Cualitativa. Como vamos a ver, no existe una completa equivalencia entre caracterizaciones intensionales y extensionales de funciones de elección social. A pesar de eso, cierta información parcial puede ser hallada por medio de este proceso. Como es obvio, cualquier proceso de inducción depende de un criterio de relevancia previo, como una forma de definir qué propiedades son importantes y cuales no. En este ejercicio específico que desarrollamos aquí, nos enfocamos en la idea que los nombres de las alternativas son irrelevantes. En otras palabras, trabajamos con la noción general que en la literatura se conoce como *neutralidad*. Nótese que nuestro enfoque no sólo estipula esta condición. Esta noción (en vez de las condiciones asociadas) es usada aquí para clasificar situaciones de elección social como equivalentes.[1] En adición, esta equivalencia es definida por medio de la estructura de decisión asociada con cada situación de elección social. En realidad, podemos hablar de la estructura de decisión de una situación sólo de manera derivada; las estructuras de decisión surgen como resultado de la equivalencia entre situaciones de elección social. De ahí que estas situaciones que son equivalentes tienen cierta similaridad entre los conjuntos decisivos correspondientes a las situaciones. Finalmente, dada nuestra definición de equivalencia, diferentes grados de similaridad pueden ser obtenidos, dependiendo de qué permutaciones (sobre alternativas) sean admisibles.

[1] Una distinción relacionada, entre criterio y axiomas, es desarrollada por Campbell & Kelly (1997).

# Capítulo 1

# Inferencia Inductiva

## 1.1. Presentación de axiomas

El estudio de *mecanismos de asignación de recursos* brinda un marco general de análisis en el cual podemos establecer los objetivos principales de este capítulo.[1] Consideremos una clase de entornos $\mathcal{E}$ y una familia de alternativas (sociales) $\mathbf{Z}$. Estos entornos contienen una descripción de las características relevantes de cada agente en la sociedad. Una correspondencia $\mathbf{f} : \mathcal{E} \to \mathbf{Z}$ indica qué alternativas son elegidas en cada entorno. El principal problema en este marco es:

- Agregación: dada una familia de axiomas $\mathcal{A}$ que representa ciertas propiedades deseadas, probar la existencia y obtener la caracterización de $\mathbf{f}$ tal que $\mathcal{A}$ es satisfecho.

Nuestro interés es el de resolver el problema inverso: considerar un planificador que, dado $E \subseteq \mathcal{E}$ (los únicos entornos que le preocupan), quiere implementar $\widetilde{\mathbf{f}} = \{\langle e, z\rangle : e \in E, z \in \mathbf{Z}\} \subseteq \mathcal{E} \times \mathbf{Z}$. Notemos que $\widetilde{\mathbf{f}}$ puede tener solo una caracterización extensional, sin tener una expresión analítica detallada. A pesar de esto, el planificador puede querer saber qué propiedades son satisfechas por $\widetilde{\mathbf{f}}$. Entonces, observando esas propiedades puede determinar si aquellas correpondientes a cierta noción de solución están presentes, indicando si $\widetilde{\mathbf{f}}$ puede ser implementada. Determinar las propiedades de $\mathbf{f}$ en $\{\langle e, z\rangle : e \in E, z \in \mathbf{Z}\}$ involucra una inferencia inductiva, cuyo estudio es el objetivo de este capítulo. Dado que para el marco general presentado anteriormente este problema puede ser extremedamante complicado, nos restringimos al marco en el cual cada $e \in \mathcal{E}$ es un perfil de órdenes individuales

[1] Ver Hurwicz (1960), Mount & Reiter (1974), Reiter (1977), Reichelstein & Reiter (1988) and Hurwicz & Reiter (2001), entre otros.

sobre un conjunto $S$ de alternativas, mientras que $\mathbf{Z}$ son órdenes (sociales) de $S$. Esto es, cada $\mathbf{f}$ es una función de bienestar social que nos da un orden social a partir de preferencias individuales. La información utilizada por el planificador es resumida en $\{\langle e, \max(z)\rangle : e \in E, z \in \mathbf{Z}\}$, donde $max(z)$ es el conjunto de elementos maximales de $z$. Esta clase puede ser obtenida de una clase más general $\{\langle e, z\rangle : e \in E, z \in \mathbf{Z}\}$ de lo que llamamos situaciones sociales, es decir, la clase de pares en los que la primer entrada es un perfil de preferencias y la segunda es una preferencia social. Estas situaciones difieren en los órdenes de preferencia individual o las preferencias sociales. A pesar de eso, si cierta forma de neutralidad es postulada (indicando que los nombres de alternativas no importan), equivalencias entre las situaciones sociales pueden ser encontradas. Llamamos este tipo de relación equivalencia de decisión teorética, notada $\simeq_{\mathcal{D}}$. Define la partición de un espacio de situaciones. Cada clase de equivalencia soporta una función, que llamamos *prima*. La agregación (unión de conjuntos) de clases de equivalencia, da una nueva partición, en los que cada clase corresponde a una función de elección social. Esta última puede ser factorizada en términos de las funciones primas subyacentes. La relación homomórfica entre particiones y clases de funciones indica que al fin de extraer las propiedades verificadas por $\mathbf{f}$, es suficiente con mirar su clase de equivalencia correspondiente. En esta estructura, las coaliciones de individuos están etiquetados con algo de información: el par de alternativas donde son decisivas y las permutaciones de los nombres de alternativas que dejan su decisividad invariante. El método aquí usado otorga mejores resultados cuando la clase de conjuntos decisivos coincide con una “librería” de casos conocidos. Pero incluso si no hay una estructura previamente conocida a la cual asociar los conjuntos decisivos obtenidos en el proceso, esta información resulta de utilidad ya que facilita la potencial implementación de la función de agregación implícita (que está descripta por sus conjuntos de decisión). La siguiente sección muestra el desarrollo paso a paso de este proceso.

## 1.2. Particiones del espacio de Situaciones de Elección Social

Definimos una situación de elección social con $n$ individuos sobre un conjunto numerable de alternativas $S$ ($|S| \geq 3$) como $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle$, donde cada $R_i \subseteq S^n$ es el orden de preferencia del agente $i$ y $\bar{R} \subseteq S^n$ es el orden social sobre $S$ (no ponemos restricciones sobre el orden social, puede no ser completo). Notamos con $R_i(s,t)$ cuando la alternativa $t$ es preferida (no necesariamente estrictamente) a la alternativa $s$ por el agente $i$. Ponemos atención a las situaciones en las que cada orden individual $R_i \in \{R_1, \ldots, R_n\}$ es:

- *reflexivo*: $R_i(s, s)$ para todo $s \in S$.
- *completo*: $R_i(s, t)$ o $R_i(t, s)$ para todo $s, t \in S$.
- *transitivo*: si $R_i(s, t)$ y $R_i(t, u)$ entonces $R_i(s, u)$ para $s, t, u \in S$.

Estas condiciones, que definen a $R_i$ como un orden débil, son vistas usualmente como representando la racionalidad del tomador de decisiones. Esta clase de situaciones las notaremos con $\widehat{\mathcal{S}}$. Vamos a asumir que la expresión *situación de elección social* aplica solamente a perfiles que verifiquen estas condiciones. Como deseamos clasificar estas situaciones y luego extraer la información de las condiciones satisfechas por las situaciones de elección social, nos tenemos que poner en la posición de un observador externo que debe definir qué propiedades deben ser consideradas relevantes y cuáles son accesorias. Lo primero para notar es que los nombres de las alternativas pueden ser irrelevantes. La familia de automorfismos ("cambio de nombres") admisibles sobre $S$ puede tener cualquier estructura. Sin embargo, para mantener cierta simetría pediremos que tenga estructura de grupo. Esto es, si $\mathcal{G} = \{f : A \to A\}$ representa los automorfismos del conjunto de alternativas ($A = S$), las siguientes condiciones deben ser verificadas:

**(A1)** Si $f, g \in \mathcal{G}$, $f \circ g \in \mathcal{G}$, donde $\circ$ es la composición de automorfismos.

**(A2)** $Id \in \mathcal{G}$,es decir, la identidad (que deja los nombres invariantes) siempre debe estar incluída en la familia de automorfismos admisibles.

**(A3)** Para cada $f \in \mathcal{G}$ debe existir $f^{-1} \in \mathcal{G}$ tal que $f \circ f^{-1} = Id = f^{-1} \circ f$. Esto es, para cada automorfismo admisible, su inversa también debe ser admisible.

Como una consecuencia trivial del Teorema de Cayley, el grupo de automorfismos sobre un conjunto finito $A$ coincide con el grupo de permutaciones de $|A|$, notado $\mathbf{S}_{|A|}$. Con la idea en mente que los nombres de las alternativas son irrelevantes, introducimos las clases de equivalencia entre situaciones sociales. Esto es, consideramos una relación binaria en $\widehat{\mathcal{S}}$, $\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$, que llamamos equivalencia en decisión.

**Definición 2.** *Dos situaciones de elección social, $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle$ y $\mathcal{S}' = \langle S, R_1', \ldots, R_n'; \bar{R}'\rangle$ son equivalentes en decisión, $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}'$, si y solo si existe una permutación $\gamma \in \mathcal{G}_S$ tal que para cada par $s, t \in S$ tenemos que*

$$D^{\mathcal{S}}(\{s, t\}) \;=\; \{i : R_i(s, t) \text{ si y solo si } \bar{R}(s, t)\} \;=$$

$$= \{i : R_i^{'}(\gamma(s), \gamma(t)) \text{ si y solo si } \bar{R}^{'}(\gamma(s), \gamma(t))\} \;=\; D^{\mathcal{S}^{'}}(\{\gamma(s), \gamma(t)\})$$

*Si* $\bar{R}(s,t)$ *no está definido, establecemos que* $D^{\mathcal{S}}(\{s,t\}) = \emptyset$.

En palabras, dos situaciones de elección social son equivalentes en decisión si existen cambios de nombres de alternativas (automorfismos en $\mathcal{G}_S$) que hacen que sus conjuntos decisivos coincidan. Nótese que un elemento crucial en esta definición es la caracterización de los conjuntos decisivos sobre pares de alternativas, es decir, dadas dos alternativas, el conjunto de agentes que coinciden con las preferencias sociales sobre ellos.[2]

**Ejemplo 9.** *Consideremos dos situaciones en las cuales tres agentes (*1, 2 *y* 3*) tienen que decidir:*

$$\mathcal{S} = \langle \{a,b,c\}, \{a \prec b \prec c\}_1, \{b \prec c \prec a\}_2, \{a \prec b \prec c\}_3; \{\{b \prec c\}, \{a\}\}\rangle$$

*y*

$$\mathcal{S}^{'} = \langle \{a,b,c\}, \{a \prec c \prec b\}_1, \{a \prec b \prec c\}_2, \{b \prec a \prec c\}_3; \{\{a \prec c\}, \{b\}\}\rangle.$$

*En ambas situaciones, los agentes ordenan linealmente las tres alternativas* $a, b, c$ *y el resultado social es similar: una alternativa es preferida a la otra, mientras que la restante no tiene ninguna relación con las otras dos. Tenemos que*

$$D^{\mathcal{S}}(\{b,c\}) = \{1,2,3\} = D^{\mathcal{S}^{'}}(\{a,c\})$$

*mientras que, como una alternativa no está relacionada en el orden social con las otras dos, tenemos que*

$$D^{\mathcal{S}}(\{b,a\}) = D^{\mathcal{S}}(\{a,c\}) = \emptyset = D^{\mathcal{S}^{'}}(\{b,a\}) = D^{\mathcal{S}^{'}}(\{b,c\})$$

*Esto es,* $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}} \mathcal{S}^{'}$ *bajo la permutación* (12)*.*

*Podemos ver que gracias a nuestra relación de equivalencia, podemos al mismo tiempo simplificar y enriquecer la información con la que estamos trabajando.*

Tenemos que:

**Proposición 7.** *La clase* $\widehat{\mathcal{S}}$ *de situaciones de elección social está particionada por* $\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$*.*

---

[2]La idea de conjunto decisivo en este trabajo es un poco diferente a la idea usual encontrada en la literatura

*Prueba.* Es inmediato de la definición de $\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ que para cada situación $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}$, simplemente tomando la permutación identidad $Id_S$, que pertenece a $\mathcal{G}_S$ por (A2). Esto es, $\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ es reflexiva. Para ver que es simétrica, asumimos que $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}'$ bajo $\gamma \in \mathcal{G}_S$. Entonces, por (A3), $\gamma^{-1} \in \mathcal{G}_S$, y de ahí que $\mathcal{S}' \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}$. Por otro lado, cuando $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}'$ y $\mathcal{S}' \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}''$ tenemos que existen permutaciones $\gamma, \gamma' \in \mathcal{G}_S$ tal que para cada $s, t \in S$

$$D^{\mathcal{S}}(\{s,t\}) = D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s), \gamma(t)\}) \text{ y}$$

$$D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s), \gamma(t)\}) \;=\; D^{\mathcal{S}''}(\{\gamma' \circ \gamma(s), \gamma' \circ \gamma(t)\})$$

Esto es

$$D^{\mathcal{S}}(\{s,t\}) \;=\; D^{\mathcal{S}''}(\{\gamma' \circ \gamma(s), \gamma' \circ \gamma(t)\})$$

Dado que por (A1) $\gamma' \circ \gamma \in \mathcal{G}_S$, $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} \mathcal{S}''$. Esto es, $\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ es transitiva. $\square$

Sobre cada clase de equivalencia $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ podemos distinguir una clase particular de conjuntos decisivos que nos permitirán identificar la clase:

**Definición 3.** *Para $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ la clase, módulo permutaciones de sus* conjuntos de decisión *es $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}})$, satisfaciendo las siguientes condiciones:*

- *para cada situación $\mathcal{S} \in \bar{\mathcal{S}}$ existe una permutación $\gamma \in \mathcal{G}_S$ tal que para cada par $s, t \in S$, $D(\{s,t\}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}})$,*

*donde $D(\{s,t\}) = D^{\mathcal{S}}(\{\gamma^{-1}(s), \gamma^{-1}(t)\})$.*[3]

Dada una situación $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle$, su perfil de preferencia asociado es $\text{prof}_{\mathcal{S}} = \langle R_1, \ldots, R_n\rangle$. Para la clase entera de situaciones $\widehat{\mathcal{S}}$, tenemos la clase asociada $\text{prof}_{\widehat{\mathcal{S}}} = \{\text{prof}_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{S}}\}$ de todos los posibles perfiles de preferencia. La clase de todos los órdenes posibles de $S$ es notada con $Ord_S$. Con estas definiciones a mano ahora podemos estudiar la estructura de agregación de las funciones:

**Definición 4.** *Una* función de agregación *(parcial) es*

$$\mathbf{f} : prof_{\widehat{\mathcal{S}}} \to Ord_S$$

En palabras, una función de agregación toma como argumento un perfil de preferencias sobre $S$ y entrega un orden (parcial) de $S$.[4] Dado el grupo de

[3]En términos más técnicos esto significa que para cada $\mathcal{S} \in \bar{\mathcal{S}}$ existe una permutación $\gamma$, tal que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}})$ es equivalente *módulo* $\gamma$ a la clase de conjuntos de decisión $\mathcal{S}$.

[4]Notar que por un lado, $\mathbf{f}(\text{prof}_{\mathcal{S}})$ no necesariamente coincide con la relación social $\bar{R}$ en la situación $\mathcal{S}$. Por otro lado, pueden existir al menos dos elementos $s, t \in \mathcal{S}$ tal que $\mathbf{f}(\text{prof}_{\mathcal{S}})(s,t) = \emptyset$.

permutaciones $\mathcal{G}_S$, $\mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ es la clase de funciones de agregación tal que, dado $\gamma \in \mathcal{G}_S$, cada $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ verifica $\gamma\big(\mathbf{f}(\text{prof}_{\mathcal{S}})\big) = \mathbf{f}\big(\text{prof}_{\gamma(\mathcal{S})}\big)$. Ahora vamos a introducir una función de bienestar social que contiene mínima información, que será de utilidad en nuestro análisis:

**Definición 5.** *Una función de agregación* $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ *se dice* prima *si y solo si*

- *para cada perfil* $prof_{\mathcal{S}}$, $\mathbf{f}\big(prof_{\mathcal{S}}\big) = \emptyset$

*o*

- *no existe otra función de agregación* $\mathbf{f}' \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ *que verifique que para un* $prof_{\mathcal{S}}$ *tal que* $\mathbf{f}\big(prof_{\mathcal{S}}\big) \neq \emptyset$, $\emptyset \neq \mathbf{f}'\big(prof_{\mathcal{S}}\big) \subseteq \mathbf{f}\big(prof_{\mathcal{S}}\big)$ *mientras que* $\mathbf{f}'\big(prof_{\mathcal{S}'}\big) = \emptyset$ *para todo perfil* $prof_{\mathcal{S}'}$ *tal que* $\mathbf{f}\big(prof_{\mathcal{S}'}\big) = \emptyset$.

Esto es, una función de agregación $\mathbf{f}$ es prima si no existe otra función $\mathbf{f}'$ que sea "más eficiente" que $\mathbf{f}$. Para hacer la descripción de las funciones de agregación más precisa necesitamos especificar sus dominios y rangos. Por lo tanto, el dominio de una función de agregación $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ es

$$\text{Dom}(\mathbf{f}) = \{\text{prof}_{\mathcal{S}} \in \text{prof}(\widehat{\mathcal{S}}) : \mathbf{f}\big(\text{prof}_{\mathcal{S}}\big) = \mathbf{f}\big(\text{prof}_{\gamma(\mathcal{S})}\big) \neq \emptyset, \quad \gamma \in \mathcal{G}_S\}$$

mientras que su rango es

$$\text{Im}(\mathbf{f}) = \{R \in \text{Ord}(S) : \exists \text{prof}_{\mathcal{S}} \in \text{prof}(\widehat{\mathcal{S}}), \mathbf{f}\big(\text{prof}_{\mathcal{S}}\big) = \mathbf{f}\big(\text{prof}_{\gamma(\mathcal{S})}\big) = R, \ \gamma \in \mathcal{G}_S\} \cup \emptyset.$$

**Ejemplo 10.** *Consideremos dos situaciones:*

$$\mathcal{S} = \langle \{a,b,c\}, \{a \prec b \prec c\}_1, \{b \prec c \prec a\}_2, \{c \prec a \prec b\}_3; \{a \prec b \prec c \prec a\}\rangle$$

*y*

$$\mathcal{S}' = \langle \{a,b,c\}, \{a \prec b \prec c\}_1, \{a \prec b \prec c\}_2, \{a \prec b \prec c\}_3; \{a \prec b \prec c\}\rangle.$$

*Estas dos situaciones no son equivalentes dado que, por ejemplo,* $D^{\mathcal{S}}(\{b,c\}) = \{1,2\}$ *mientras que todos los conjuntos decisivos de* $\mathcal{S}'$ *incluyen los tres agentes. Por lo tanto no existe una permutación posible* $\gamma$ *tal que* $D^{\mathcal{S}}(\{b,c\}) = D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(b),\gamma(c)\})$.

*Consideremos una función de agregación* $\mathbf{f}$ *tal que*

$$\{a \prec b \prec c \prec a\} = \mathbf{f}\big(\{a \prec b \prec c\}_1, \{b \prec c \prec a\}_2, \{c \prec a \prec b\}_3\big)$$

*y*

$$\{a \prec b \prec c\} = \mathbf{f}\big(\{a \prec b \prec c\}_1, \{a \prec b \prec c\}_2, \{a \prec b \prec c\}_3\big).$$

*Una posibilidad es considerar que* **f** *es la* regla de la mayoría *que, para cada par de alternativas, determina el orden preferido por la mayoría de los agentes (dos de tres en este caso). Esta función de agregación no es prima ya que por ejemplo la* regla unanimidad *que determina el orden acordado por* todos *los agentes también puede explicar el resultado social en* $\mathcal{S}'$.

Este ejemplo muestra, en particular, que situaciones no equivalentes pueden responder a funciones de agregación diferentes (si al menos una no es prima). Esta intuición puede ser formalizada como sigue:

**Teorema 11.** *Dada* $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ *existe una función de agregación prima* $\mathbf{f}_{\bar{\mathcal{S}}} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ *tal que para cada situación* $\mathcal{S} = \langle S, prof_{\mathcal{S}}; \bar{R}\rangle \in \bar{\mathcal{S}}$ *tenemos que*

$$\mathbf{f}_{\bar{\mathcal{S}}}(prof_{\mathcal{S}}) = \bar{R}.$$

*Recíprocamente, para cualquier función de agregación prima* $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ *existe un* $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ *tal que*

$$\mathbf{f}(prof_{\mathcal{S}}) = \bar{R} \neq \emptyset$$

*para todo* $\mathcal{S} = \langle S, prof_{\mathcal{S}}; \bar{R}\rangle \in \bar{\mathcal{S}}$.

*Prueba.* $\Rightarrow$) Dado $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ consideramos la familia de sus conjuntos de decisión, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}})$ y definimos una función $\mathbf{f}_{\bar{\mathcal{S}}}$ como sigue. Para cada perfil $\langle R_1, \ldots, R_n\rangle$ y para cada par $s, t \in S$, consideremos el conjunto decisivo $D(\{s,t\}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}})$. Entonces, para cada $\gamma \in \mathcal{G}_S$:

$\mathbf{f}\big(\mathrm{prof}_{\gamma(\mathcal{S})}\big) = R(\gamma(s), \gamma(t))$ si y solo si para todo $i \in D(\{s,t\}), R_i(\gamma(s), \gamma(t))$.

Por la definición de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}})$, $\mathbf{f}_{\bar{\mathcal{S}}} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$. Más aún, si para cada

$$\mathrm{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle \notin \bar{\mathcal{S}}$$

definimos $\mathbf{f}_{\bar{\mathcal{S}}}\big(R_1, \ldots, R_n\big) = \emptyset$, es inmediato que $\mathbf{f}_{\bar{\mathcal{S}}}$ es prima.
$\Leftarrow$) Consideremos la clase de situaciones con órdenes sociales no vacíos que pueden ser vistos como definidos por una función de agregación prima arbitraria $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$,

$$\widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} = \{\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{S}} : \mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle, \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n) = \bar{R} \neq \emptyset\}$$

. Asumamos, por contradicción, que existen dos clases de equivalencia $\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{S}}' \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ tales que $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} \cap \bar{\mathcal{S}} \neq \emptyset$ y $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} \cap \bar{\mathcal{S}}' \neq \emptyset$. Consideremos dos situaciones $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} \cap \bar{\mathcal{S}}$ y $\mathcal{S}' \in \widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} \cap \bar{\mathcal{S}}'$. Entonces $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ no son equivalentes. Esto puede ocurrir por dos razones: para cada permutación $\gamma$ existen al menos un par $s, t \in S$ tal que

- $D^{\bar{\mathcal{S}}}(\{s,t\}) \neq \left(D^{\bar{\mathcal{S}}'}(\{\gamma^{-1}(s),\gamma^{-1}(t)\})\right)$

o

- $\bar{R}(s,t)$ o $\bar{R}'(\gamma(s),\gamma(t))$ no está definido.

Analicemos el último caso. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle$ y $\mathcal{S}' = \langle S, R_1', \ldots, R_n'; \bar{R}'\rangle$ son tal que $R_i \equiv R_i'$ para $i = 1, \ldots, n$ mientras que $\bar{R}(s,t)$ y no $\bar{R}'(\gamma(s),\gamma(t))$ (o tampoco $\bar{R}'(\gamma(t),\gamma(s))$), en particular para $\gamma \equiv Id_S$. Dado que $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}}$, $\bar{R} = \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n)$ y $\bar{R}' = \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n)$. Pero entonces, dado que asumimos que $\bar{R} \not\equiv \bar{R}'$ tenemos una contradicción ya que se asume que $\mathbf{f}$ es una función.
Ahora supongamos que $D^{\bar{\mathcal{S}}}(\{s,t\}) \neq D^{\bar{\mathcal{S}}'}(\{\gamma^{-1}(s),\gamma^{-1}(t)\})$ para al menos un par de alternativas, $s$ y $t$. Debido a la parte $\Rightarrow$ de esta prueba, existen dos funciones de agregación prima $\mathbf{f}'$ y $\mathbf{f}''$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ tales que $\mathbf{f}'(R_1, \ldots, R_n) = \bar{R}$ y $\mathbf{f}''(R_1, \ldots, R_n) = \bar{R}'$. Por otro lado, tenemos que $\mathbf{f}'(R_1, \ldots, R_n) \subseteq \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n)$ y $\mathbf{f}''(R_1, \ldots, R_n) \subseteq \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n)$, pero esto es absurdo dado que $\mathbf{f}$ es prima. Esto muestra que existen clases de equivalencia $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$, tales que $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} \subseteq \bar{\mathcal{S}}$.
Ahora suponemos que existe una situación $\mathcal{S} \in \bar{\mathcal{S}}$ y $\mathcal{S} \notin \widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}}$. Esto significa que si $\mathcal{S}$ es $\langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle$, con $\bar{R} \not\equiv \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n)$, debe existir una situación $\mathcal{S}' = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \mathbf{f}(R_1, \ldots, R_n)\rangle \in \widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}}$. Pero entonces, para cada permutación $\gamma$, debe existir un par $s,t \in S$ tal que $D^{\mathcal{S}}(\{s,t\}) \neq D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma^{-1}(s),\gamma^{-1}(t)\})$. Esto es absurdo, dado que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ están ambas en $\bar{\mathcal{S}}$. Entonces $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathbf{f}} = \bar{\mathcal{S}}$. $\square$

## 1.3. Funciones de Agregación y Particiones

La relación entre clases de equivalencia en $\widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ y funciones primas puede ser extendida a todas las funciones de agregación en $\mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$, debido a la siguiente propiedad:

**Definición 6.** *La clase de funciones de agregación $\mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ está parcialmente ordenada por la inclusión (hablando en términos de conjuntos) de sus rangos, $\subseteq$. Esto es, decimos que $\mathbf{f} \preceq \mathbf{f}'$ si y solo si para todo perfil $prof_{\mathcal{S}}$, $\mathbf{f}(prof_{\mathcal{S}}) \subseteq \mathbf{f}'(prof_{\mathcal{S}})$.*

El orden $\preceq$ es parcial ya que es reflexivo, antisimétrico y transitivo. No es completo, es decir, hay funciones de agregación que no son comparables. Por otro lado, como no pusimos restricción sobre la cardinalidad de $S$ o en el tipo de órdenes admisibles, $Ord(S)$ puede ser tan grande como $2^{|S|}$. Lo que realmente importa para nuestro argumento es que para cada $\mathbf{f}$, su imagen es tal que $\mathrm{Im}\big(\mathbf{f}\big) \subseteq \mathrm{Ord}(S)$. Esto es, $\mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ está acotado superiormente. De acuerdo al Lema de Zorn tenemos que cada cadena (suborden lineal) en $\langle \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}, \preceq \rangle$ tiene un elemento maximal. Un argumento similar muestra que, dado que $\emptyset$ acota a $\mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ inferiormente, la existencia de una función de agregación minimal (prima) está asegurada.

**Ejemplo 11.** *Consideremos la familia de funciones de agregación $q-$cuota: para cada perfil $\langle R_1, \ldots, R_n \rangle$ y cada $s, t \in S$, $\mathbf{f}^q\big(\langle R_1, \ldots, R_n \rangle\big)(s, t)$ si y solo si existe un $I^q \subseteq \{1, \ldots, n\}$, tal que $|I^q| = \lceil \frac{q \times n}{100} \rceil$ y para cada $i \in I^q$, $R_i(s, t)$.*[5] *Para la secuencia decreciente $q \downarrow_0^{100}$ tenemos la siguiente cadena:*

$$\mathbf{f}^{100} \preceq \ldots \mathbf{f}^{99} \preceq \ldots \preceq \mathbf{f}^{1}$$

*es decir, de la función de agregación Unanimidad a la función de agregación Inclusiva.*[6]

El orden entre funciones de agregación se refleja en la estructura de las situaciones sociales.

**Proposición 8.** *Para cualquier función de agregación $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ existe una familia de clases de equivalencia $\{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j \in J} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ tal que*

$$\mathbf{f}(prof_{\mathcal{S}}) = \bar{R}$$

*para todo $\mathcal{S} = \langle S, prof_{\mathcal{S}}; \bar{R} \rangle \in \cup_{j \in J} \bar{\mathcal{S}}^j$.*

*Prueba.* Para cada función de agregación prima $\mathbf{f}$ existe una familia $\{\mathbf{f}^j\}_{j \in J_{-0}}$ de funciones de agregación prima tal que cada $\mathbf{f}^j \preceq \mathbf{f}$. Consideremos cada $\bar{R} \in \mathrm{Im}\big(\mathbf{f}\big)$. Si $\bar{R} \neq \emptyset$ solo consideremos las clases de equivalencia asociadas a cada función prima de acuerdo con el Teorema 11: $\{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j \in J_{-0}} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$. Es claro que para cada $\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}$ tal que $\mathcal{S} \in \cup_{j \in J_{-0}} \bar{\mathcal{S}}^j$ tenemos que existe al menos un $j \in J_{-0}$ que verifica que $\mathbf{f}^j(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) = \bar{R}$. Por otro lado, si $R = \emptyset$ entonces consideremos $\bar{\mathcal{S}}^0$ la clase de todas las situaciones de la forma $\langle S, R_1, \ldots, R_n; \emptyset \rangle$. Esta clase corresponde a la función prima $\mathbf{f}^0$ tal que $\mathbf{f}^0(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) = \emptyset$. Entonces, si consideramos la clase $J = J_{-0} \cup \{0\}$, tenemos que $\mathbf{f}(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) = \bar{R}$ para cada $\mathcal{S} \in \cup_{j \in J} \bar{\mathcal{S}}^j$. $\square$

Esto indica que cada $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}$ puede ser asociada a una clase en el engrosamiento de la partición $\widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$. Esto muestra de hecho, que las propiedades de cualquier función de agregación pueden ser analizadas en términos

[5] $\lceil r \rceil$ es el menor entero mayor que $r$.

[6] Definidas de manera análogas a las definidas en la Parte 1.

del comportamiento de las uniones de clases de equivalencia en la partición $\widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$. Las características de $\langle \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}, \preceq\rangle$ se reflejan en el orden agregacional de $\widehat{\mathcal{S}}$:

**Definición 7.** *El* orden agregacional *de $\widehat{\mathcal{S}}$ es una subclase de particiones de $\widehat{\mathcal{S}}$, $\langle \Pi^{\alpha}\rangle_{\alpha\geq 0}$, tal que $\Pi^0 = \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ y para cada par de índices $\alpha < \alpha^{'}$, $\Pi^{\alpha}$ es un* refinamiento *de $\Pi^{\alpha^{'}}$, es decir, para cada $\pi \in \Pi^{\alpha}$ existe $\pi^{'} \in \Pi^{\alpha^{'}}$ tal que $\pi \subseteq \pi^{'}$.*

Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Teorema 12.** *Para toda cadena $\mathcal{C}$, $\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^i\rangle$ tal que para cada par de índices $k < k^{'}$, $\mathbf{f}^k \preceq \mathbf{f}^{k^{'}}$, existe una subsucesión $\langle \Pi^{\alpha_0}, \Pi^{\alpha_1}, \ldots, \Pi^{\alpha_k}, \ldots\rangle_{k\geq 0}$ de $\langle \Pi^{\alpha}\rangle_{\alpha\geq 0}$, tal que*

$$\Pi^{\alpha_0} = \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)} = \Pi^0$$

*y para cada par $k < k^{'}$, $\alpha_k < \alpha_{k^{'}}$.*

*Más aún, si $\mathcal{C} = \langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^{|\mathcal{C}|}\rangle$, donde $|\mathcal{C}|$ es la longitud de $\mathcal{C}$, tenemos que toda $\mathbf{f}^k$ tiene como soporte a una partición $\pi^k \in \Pi^{\alpha_k}$.*

*Prueba.* Primero notemos que cada cadena $\mathcal{C}$ en $\langle\langle \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}, \preceq\rangle$ tiene una *longitud*, definida como su cardinalidad y notada $|\mathcal{C}|$. Consideremos primero el caso en que $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$, es decir, que $\mathcal{C}$ es numerable. Si $\mathcal{C} = \langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^{|\mathcal{C}|}\rangle$, $\mathbf{f}^0$ es la única función de agregación prima en $\mathcal{C}$. De acuerdo con el Teorema 11, para $\mathbf{f}^0$ existe un $\bar{\mathcal{S}}^0 \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ tal que $\mathbf{f}^0(\text{prof}(\mathcal{S})) = \bar{R}$ para cada $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle \in \bar{\mathcal{S}}^0$. Probaremos por inducción que para cada $\mathbf{f}^k \in \mathcal{C}$ existe un elemento $\pi^k$ en una partición $\Pi^{\alpha^k}$ tal que $\mathbf{f}^k(\text{prof}(\mathcal{S})) = \bar{R}$ para cada $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle \in \pi^k$. Más aún, que $\Pi^{\alpha^k}$ es un refinamiento de $\Pi^{\alpha^{k+1}}$ para cada $k$:

- Consideremos el caso de $\mathbf{f}^1$. Acorde a la Proposición 8 tenemos que existe $\{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j\in J} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ tal que $\mathbf{f}(\text{prof}_{\mathcal{S}}) = \bar{R}$ para cada $\mathcal{S} = \langle S, \text{prof}_{\mathcal{S}}; \bar{R}\rangle \in \cup_{j\in J}\bar{\mathcal{S}}^j$. Supongamos que $\bar{\mathcal{S}}^0 \neq \bar{\mathcal{S}}^j$ para cada $j \in J$, pero esto significa que $\mathbf{f}^0(\text{prof}_{\mathcal{S}}) \neq \mathbf{f}^1(\text{prof}_{\mathcal{S}})$ para todo $\mathcal{S} \in \bar{\mathcal{S}}^0$. Esto es absurdo, ya que asumimos que $\mathbf{f}^0 \preceq \mathbf{f}^1$. Entonces $\bar{\mathcal{S}}^0 \in \{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j\in J}$. Esto es, mientras que $\mathbf{f}^0$ es soportado por $\bar{\mathcal{S}}^0 \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$, $\mathbf{f}^1$ es soportado por $\bar{\mathcal{S}}^0 \cup_{j\in J, j\neq 0} \bar{\mathcal{S}}^j$. Si llamamos $\bar{\mathcal{S}}^0$, $\pi^0$ y $\widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$, $\Pi^{\alpha_0}$, veremos que si denotamos $\bar{\mathcal{S}}^0 \cup_{j\in J, j\neq 0} \bar{\mathcal{S}}^j$ como $\pi^1$, es claro que $\pi_0 \subseteq \pi_1$. Por otro lado, $\pi_1 \cup_{j'\notin J} \bar{\mathcal{S}}^{j^{'}} = \widehat{\mathcal{S}}$ mientras que $\pi_1 \cap \bar{\mathcal{S}}^{j^{'}} = \emptyset$ para cada $j^{'} \notin J$. Esto significa que $\pi_1$ y $\{\bar{\mathcal{S}}^{j^{'}}\}_{j'\notin J}$ constituyen una partición de $\widehat{\mathcal{S}}$, que llamaremos $\Pi^{\alpha_1}$. Dado que para $\pi^0 \in \Pi^{\alpha^0}$, $\pi^0 \subseteq \pi^1$ y para cada $\bar{\mathcal{S}}^j \in \Pi^{\alpha^0}$ $(j \in J)$, $\bar{\mathcal{S}}^j \subseteq \pi^1$ mientras que $\bar{\mathcal{S}}^{j^{'}} \in \Pi^{\alpha^1}$ para $j^{'} \notin J$, $\Pi^{\alpha^1}$ es un engrosamiento de $\Pi^{\alpha^0}$.

- Asumimos que el resultado es válido para $k$. Esto es, $\mathbf{f}^k$ es soportada por una $\pi^k \in \Pi^{\alpha^k}$. Sin pérdida de generalidad asumimos que si $\mathbf{f}^k$ es soportada, de acuerdo con la Proposición 8, por una familia $\{\bar{\mathcal{S}}^l\}_{l\in L} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ entonces $\pi^k = \cup_{l\in L}\bar{\mathcal{S}}^l$ y $\Pi^{\alpha^k} = \{\pi^k, \{\bar{\mathcal{S}}^{l'}\}_{l'\notin L}\}$. Ahora consideremos el caso que $\mathbf{f}^{k+1}$. Nuevamente, por la Proposición 8, tenemos que existe $\{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j\in J} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_n,\mathcal{G}_S)}$ tal que $\mathbf{f}^{k+1}(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) = \bar{R}$ para cada $\mathcal{S} \in \cup_{j\in J}\bar{\mathcal{S}}^j$. Dado que $\mathbf{f}^k \preceq \mathbf{f}^{k+1}$ tenemos que $\mathbf{f}^k(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) \subseteq \mathbf{f}^{k+1}(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}})$ para cada $\mathcal{S} \in \pi^k$. Esto es, $\pi^k \in \{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j\in J}$. Llamemos a este último $\pi^{k+1}$. Tenemos que $\pi^{k+1}$ y $\{\bar{\mathcal{S}}^{j'}\}_{j'\notin J}$ es una partición de $\widehat{\mathcal{S}}$ que llamamos $\Pi^{\alpha^{k+1}}$. Es claro que $\pi^k \subseteq \pi^{k+1}$ y $\bar{\mathcal{S}}^j \subseteq \pi^{k+1}$ para $j \in J$, mientras que $\bar{\mathcal{S}}^{j'} \in \Pi^{\alpha^{k+1}}$ para $j' \notin J$. Entonces, $\Pi^{\alpha^{k+1}}$ es un engrosamiento de $\Pi^{\alpha^k}$.

Por lo tanto, la afirmación es válida para todo $k$.
Ahora consideremos el caso en que $|\mathcal{C}| > \aleph_0$. Entonces, el conjunto de índices $k$ en $\mathcal{C} = \langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^{|\mathcal{C}|}\rangle$ puede ser descompuesto en dos clases, aquellas funciones con índices sucesores o límite. Esto es, aquellos índices $k'$ que tienen la forma $k' = k+1$ (los índices *sucesores*) y aquellos que verifican que $k' = lim_{k<k'} k$, los índices *límite*. La prueba para la longitud numerable de $\mathcal{C}$ aplica también para los índices sucesores. La siguiente es la prueba para los índices límite:

- Supongamos que el resultado es válido para cada $k < k'$ para un índice límite $k'$. Esto es, cada $\mathbf{f}^k$ es soportada por una $\pi^k \in \Pi^{\alpha^k}$ y, como $\mathbf{f}^k$ es soportada por una familia $\{\bar{\mathcal{S}}^l\}_{l\in L} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ entonces $\pi^k = \cup_{l\in L}\bar{\mathcal{S}}^l$ y $\Pi^{\alpha^k} = \{\pi^k, \{\bar{\mathcal{S}}^{l'}\}_{l'\notin L}\}$. Más aún, para cada par $k_1 < k_2 < k'$, $\Pi^{\alpha^{k_1}}$ es un refinamiento de $\Pi^{\alpha^{k_2}}$. Ahora consideremos $\mathbf{f}^{k'}$. Por la Proposición 8 tenemos que existe $\{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j\in J} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ tal que $\mathbf{f}^{k'}(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) = \bar{R}$ para cada $\mathcal{S} \in \cup_{j\in J}\bar{\mathcal{S}}^j$. Para todo $\mathbf{f}^k \preceq \mathbf{f}^{k+1}$ tenemos que $\mathbf{f}^k(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}}) \subseteq \mathbf{f}^{k'}(\mathrm{prof}_{\mathcal{S}})$ para cada $\mathcal{S} \in \pi^k$. Esto es, cada $\pi^k \in \{\bar{\mathcal{S}}^j\}_{j\in J}$. Llamemos a este último $\pi^{k'}$. Tenemos que $\pi^{k'}$ y $\{\bar{\mathcal{S}}^{j'}\}_{j'\notin J}$ es una partición de $\widehat{\mathcal{S}}$ que llamamos $\Pi^{\alpha^{k'}}$. Es claro que para cada $k < k'$, $\pi^k \subseteq \pi^{k'}$ y $\bar{\mathcal{S}}^j \subseteq \pi^{k'}$ para $j \in J$, mientras que $\bar{\mathcal{S}}^{j'} \in \Pi^{\alpha^{k'}}$ para $j' \notin J$. Entonces, $\Pi^{\alpha^{k'}}$ es un engrosamiento de $\{\Pi^{\alpha^k}\}_{k<k'}$.$\square$

$\square$

Esto es, una cadena de funciones está asociada a una cadena de particiones. Más aún, cada función en la cadena tiene como soporte una clase en la correspondiente partición. Como se discutió anteriormente, cada clase de equivalencia $\bar{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$ se define por sus conjuntos de decisión, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}}) = \{\mathcal{D}(s,t)\}_{s,t\in S}$. Notemos que cada función de agregación $\mathbf{f}$, asociada a una $\pi^{\mathbf{f}}$ en particular en una partición $\Pi^{\mathbf{f}}$ de $\widehat{\mathcal{S}}$, se define en términos de sus conjuntos de decisión correspondientes a $\pi^{\mathbf{f}}$. Más precisamente, como $\pi^{\mathbf{f}} \subseteq \widehat{\mathcal{S}}/\simeq_{\mathcal{D}(\mathcal{G}_S)}$, existe un conjunto de índices $J$ tal que $\pi^{\mathbf{f}} = \cup_{j\in J}\bar{\mathcal{S}}^j$ y por lo tanto los conjuntos de decisión $\pi^{\mathbf{f}}$ son $\cup_{j\in J}\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}}^j) = \cup_j\{\{\mathcal{D}(s,t)\}_{s,t\in S^j}\}^j$. Una consecuencia inmediata es que el último conjunto, que llamamos $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$, define completamente $\mathbf{f}$.[7] En otras palabras:

**Proposición 9.** *Para cada cadena $\mathcal{C}$ en $\langle \mathbf{F}_{\mathcal{G}_S}, \preceq\rangle$, $\mathcal{C} = \langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^{|\mathcal{C}|}\rangle$, existe una secuencia*

$$\mathcal{C}^{\mathcal{DEC}} = \langle \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^0), \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^1), \ldots, \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^{|\mathcal{C}|})\rangle$$

*tal que $\mathcal{DEC}(\mathbf{f}^k)$ son los conjuntos de decisión que definen $\mathbf{f}^k$.*

*Más aún, si $k < k'$, $\mathcal{DEC}(\mathbf{f}^k) \subseteq \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^{k'})$. Esto es, $\mathcal{C}^{\mathcal{DEC}}$ es una cadena bajo la inclusión de conjuntos.*

*Prueba.* De acuerdo con el Teorema 12, $\mathcal{C}$ genera una cadena de particiones, y particularmente de clases de equivalencia, un $\pi^k$ para cada $\mathbf{f}^k \in \mathcal{C}$. Como cada $\pi^k$ está totalmente descripto por $\mathcal{DEC}(\mathbf{f}^k)$, tenemos que $\mathcal{C}$ genera también una sucesión de la forma $\mathcal{C}^{\mathcal{DEC}} = \{\mathcal{DEC}(\mathbf{f}^k)\}_{k=0}^{|\mathcal{C}|}$. Para ver que $\mathcal{C}^{\mathcal{DEC}}$ es una cadena bajo $\subseteq$, consideremos el hecho que para $k < k'$, para todo perfil $\text{prof}_{\mathcal{S}}$ tenemos que $\mathbf{f}^k(\text{prof}_{\mathcal{S}}) \subseteq \mathbf{f}^{k'}(\text{prof}_{\mathcal{S}})$. Como en particular $\mathbf{f}^k(\text{prof}_{\mathcal{S}})(s,t) \subseteq \mathbf{f}^{k'}(\text{prof}_{\mathcal{S}})(s,t)$ para cada situación $\mathcal{S}$ y todo par $s,t \in S$, la clase de agentes que son decisivos sobre $s$ y $t$ para la función anterior, $D^k(\{s,t\}) \in \mathcal{F}^k_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^k)$ es también una clase de agentes decisivos sobre $s$ y $t$ para la última. Esto es, $D^k(\{s,t\}) \in \mathcal{F}^{k'}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^{k'})$. En otras palabras: $\mathcal{DEC}(\mathbf{f}^k) \subseteq \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^{k'})$. □

## 1.4. Criterio de Elección Social y Funciones de Agregación

Como la estructura de las funciones de agregación está asociada a la estructura de sus correspondientes conjuntos de decisión, nos vamos a enfocar en estos últimos, ya que resumen toda la información sobre los procesos de agregación. Para ser más precisos, vamos a obtener las propiedades satisfechas

[7] Esto es, $\mathcal{DEC}(\mathbf{f}) = \cup_j\{\{\mathcal{D}(s,t)\}_{s,t\in S^j}\}^j$.

por una función de agregación de las características de sus correspondientes conjuntos de decisión. Un primer paso hacia este objetivo es "normalizar" los conjuntos de decisión correspondientes a cada elemento en la partición.

**Definición 8.** *Dada una función de agregación* $\mathbf{f}$*, si* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{S}'$ *están en su soporte,* $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$*, para cada* $s, t \in S$*, existe una permutación* $\gamma \in \mathcal{G}_S$ *tal que ocurre* $D^{\mathcal{S}'}(\{s,t\}) \subseteq D^{\mathcal{S}}(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$ *o* $D^{\mathcal{S}}(\{s,t\}) \subseteq D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$*. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\{s,t\}) = \big\{\gamma : S \to S \ :& \\ D^{\mathcal{S}'}(\{s,t\}) \ &\subseteq \ D^{\mathcal{S}}(\{\gamma(s),\gamma(t)\}) \\ o\ D^{\mathcal{S}}(\{s,t\}) \ &\subseteq \ D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s),\gamma(t)\}); \\ para\ todo\ \ \mathcal{S},\mathcal{S}' \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})\big\}& \end{aligned}$$

*es el conjuntos de permutaciones que transforma los conjuntos de decisión de* $\mathbf{f}$ *para* $s$ *y* $t$ *sobre* $\mathcal{S}$ *en un subconjunto o supraconjunto de cada conjunto de decisión para una permutación de* $s$ *y* $t$ *sobre* $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$*.*

*Para cada* $D(\{s,t\}) \in \mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ *obtenemos un* $\mathcal{D}(\{s,t\})$*. El* cociente *de permutaciones bajo* $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ *es entonces un* $\mathcal{S}^* \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$*,*[8]

$$\mathbf{D}EC_{\mathcal{G}_S}(\mathbf{f}) = \big\{\langle \mathcal{D}(\{s,t\}), D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\})\rangle : D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) \in \mathcal{DEC}(\mathbf{f}), \mathcal{S}^* \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})\big\}.$$

Incluso si $\mathbf{D}EC(\mathbf{f})$ es más complejo que $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$, nos permite deshacernos de la complicación que es usar definiciones modulo permutaciones. Esto se obtiene eligiendo un $\mathcal{S}^*$ adecuado:

**Proposición 10.** *Sea* $\mathcal{S}^* \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ *tal que para todo* $s, t \in S$ *y cada otra situación* $\mathcal{S} \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ *existe una permutación* $\gamma$ *verificando que* $D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) \subseteq D^{\mathcal{S}}(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$*. Entonces, si* $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{j^*}$*,* $\mathcal{S}^* \notin \mathcal{SUPP}(\mathbf{f}^j)$*, para cualquier* $j < j^*$ *en una cadena* $\langle \mathbf{f}^0, \mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^{j^*}\rangle$*.*

*Prueba.* Supongamos que $\mathcal{S}^* \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f}^j)$ para $j < j^*$. Entonces va a existir $\mathcal{S}' \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f}^{j^*})$, tal que para un par dado $s, t \in S$ y una permutación $\gamma$, $D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) \subseteq D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$. Entonces, tenemos que ocurre o $D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) = D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$ (en cuyo caso $\mathcal{S}^*$ es equivalente en decisión a $\mathcal{S}'$ y entonces $\mathcal{S}^* \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f}^{j^*})$) o $D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) \subset D^{\mathcal{S}'}(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$. Pero entonces, dado que $\mathcal{DEC}(\mathbf{f}^j) \subseteq \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^{j^*})$, va a existir un conjunto decisivo para un par $s$ y $t$, $D(\{s,t\}) \in \mathcal{DEC}(\mathbf{f}^{j^*})$ para el cual no existe una permutación $\gamma$ tal que $D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) \subseteq D(\{\gamma(s),\gamma(t)\})$. Llegamos entonces a una contradicción. □

[8] Vamos a omitir el subíndice $\mathcal{G}_S$, excepto cuando sea necesario.

Esto significa que toda la información relevante sobre los conjuntos de decisión de $\mathbf{f}$ está comprimida en los conjuntos de decisión que no son permutaciones de los conjuntos de decisión de ningún predecesor $\mathbf{f}^j$ en una cadena que comienza con una función de agregación prima. Es directo ver que $\mathbf{D}EC(\mathbf{f}) \subseteq \mathcal{G}_S \times 2^n$. Pero este potencialmente enorme número de posibilidades puede ser sustancialmente reducido si notamos que la segunda componente de $\mathbf{D}EC(\mathbf{f})$ contiene la información más importante para el análisis de la estructura de $\mathbf{f}$. Esto es, una vez elegido $\mathcal{S}^*$ en el soporte de $\mathbf{f}$, sabemos por la Proposición 10 que los conjuntos de decisión sobre otros elementos en $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ pueden ser obtenidos al aplicar cierto conjunto de permutaciones sobre los conjuntos de decisión correspondientes a $\mathcal{S}^*$. Entonces, nos podemos enfocar sobre $\{D^{\mathcal{S}^*}(\{s,t\}) : s,t \in S\}$. Definimos la estructura de hipergrafo $\mathcal{H}(\mathbf{f}) = \langle \{1,\ldots,n\}, \mathbf{D}EC(\mathbf{f})\rangle$, donde los individuos son vistos como "nodos", mientras que cada $D^{\mathcal{S}}(\{s,t\})$ es un "hiperlado" entre los nodos, etiquetado con las alternativas sobre las cuales está definido $\{s,t\}$ y la clase de permutaciones que preservan su poder de decisión, $\mathcal{D}(\{s,t\})$. Con esta caracterización, $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ es un *hipergrafo etiquetado*.[9] Ahora que tenemos una manera de mostrar toda la información de una forma compacta, procedemos a clasificar $\{D^{S^*}(s,t) : s,t \in S\}$, y luego a encontrar algunas propiedades de la función de bienestar social $f$.

**Ejemplo 12.** *Un caso en el que podemos encontrar fácilmente algunas características de la función de agregación, es cuando $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ contiene todos los conjuntos $Q \subseteq 2^n$ tal que $|Q| \geq \lceil \frac{q \times n}{100} \rceil$. En este caso, la función envuelta es la regla de agregación q-cuota, porque necesitamos al menos el q porciento de los agentes para decidir sobre una situación.*

El conjunto $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ induce una función de bienestar social, notada $f_{\mathcal{DEC}(\mathbf{f})}$ como

$$\text{para todo } s,t \in S, R(s,t) \text{ si y solo si existe } D \in \mathcal{DEC}(\mathbf{f}) \text{ tal que para todo } i \in D, R_i(s,t)$$

Ahora introducimos algunas definiciones que nos ayudarán a detectar propiedades de $f_{\mathcal{DEC}(\mathbf{f})}$:

**Definición 9.** *Para cualquier conjunto $D$, sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de $D$.*

- *$\mathcal{D}$ es un prefiltro sobre $D$ si*

[9] En el caso en que cada hiperlado tenga una cardinalidad de 2 y descartando las etiquetas obtenemos la noción de *grafo* como caso particular.

*1.* $D \in \mathcal{D}$

*2.* $A \in \mathcal{D}$ *y* $A \subseteq B$ *implica que* $B \in \mathcal{D}$

*3.* $G$ *una familia finita de* $\mathcal{D}$ *implica que* $\bigcap G \neq \emptyset$

- $\mathcal{D}$ *es un filtro sobre* $D$ *si* $\mathcal{D}$ *es un prefiltro y para todo* $A, B \in \mathcal{D}$, $A \bigcap B \in \mathcal{D}$
- $\mathcal{D}$ *es un ultrafiltro sobre* $D$ *si* $\mathcal{D}$ *es un filtro y para todo* $A \in D, A \in \mathcal{D}$ *o* $D \backslash A \in \mathcal{D}$

Una función de elección social $f$ se dice:

- *oligárquica* si existe $D \subseteq N$ tal que
  - cada miembro de $D$ tiene poder de veto; y
  - $D \in \mathcal{DEC}(\mathbf{f})$
- *colegial* si y solo si

$$K(\mathcal{DEC}(\mathbf{f})) \equiv \bigcap_{D \subset \mathcal{DEC}(\mathbf{f})} D$$

  es no vacío. El conjunto $K(\mathcal{DEC}(\mathbf{f}))$ se llama *colegio.*

- *dictatorial* si existe un agente $i$ (un *dictador*) tal que $R_i(s,t)$ implica que $R(s,t)$ para cada par de alternativas $s$ y $t$.

Con todas estas definiciones a mano tenemos el siguiente resultado:[10]

**Teorema 13.** *Sea* $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ *el conjunto de coaliciones decisivas de* $f$. *Si* $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ *es:*

1. *un ultrafiltro, entonces* $f_{\mathcal{DEC}(\mathbf{f})}$ *es dictatorial.*
2. *un filtro, entonces* $f_{\mathcal{DEC}(\mathbf{f})}$ *es oligárquica.*
3. *un prefiltro, entonces* $f_{\mathcal{DEC}(\mathbf{f})}$ *es colegial.*

*En cada caso,* $f_{\mathcal{DEC}(\mathbf{f})}$ *es débilmente Pareto e independiente de alternativas irrelevantes.*

Veamos algunos ejemplos que muestran como es el proceso.

[10] Ver (Austen-Smith & Banks, 1998), p. 49.

**Ejemplo 13.** *Consideremos las siguientes tres situaciones sociales:*

$$\mathcal{S} = \langle \{a, b, c\}, \{a \prec b \prec c\}_1, \{b \prec c \prec a\}_2, \{a \prec b \prec c\}_3; \{\{b \prec c\}, \{a\}\} \rangle,$$

$$\mathcal{S}^{'} = \langle \{a, b, c\}, \{b \prec c \prec a\}_1, \{b \prec a \prec c\}_2, \{a \prec b \prec c\}_3; \{\{b \prec c\}, \{a\}\} \rangle$$

*y*

$$\mathcal{S}^{''} = \langle \{a, b, c\}, \{b \prec a \prec c\}_1, \{a \prec c \prec b\}_2, \{b \prec a \prec c\}_3; \{\{a \prec c\}, \{b\}\} \rangle$$

*En estas situaciones, los agentes ordenan linealmente las tres alternativas* $a, b, c$ *y el resultado es similar: una alternativa es preferida sobre la otra, mientras que la restante no tiene relación con ninguna de las otras dos alternativas. Tenemos que*

$$D^{\mathcal{S}}(\{b, c\}) = D^{\mathcal{S}^{'}}(\{b, c\}) = D^{\mathcal{S}^{''}}(\{a, c\}) = \{1, 2, 3\}$$

*Es fácil ver que todos los demás conjuntos decisivos son vacíos. Entonces, tenemos que* $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}} \mathcal{S}^{'}$ *bajo* $Id_S$ *y* $\mathcal{S} \simeq_{\mathcal{D}} \mathcal{S}^{''}$ *bajo la permutación* $(12)$*. La clase de sus conjuntos de decisión es:*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_S}(\bar{\mathcal{S}}) = \{1, 2, 3\}$$

*En el caso de tener más situaciones sociales, podríamos obtener otra clase de conjuntos decisivos. El conjunto de decisión de* $f$*, es:*

$$\mathcal{DEC}(\mathbf{f}) = \{1, 2, 3\}$$

*Finalmente encontramos que:*

$$\mathbf{D}EC(\mathbf{f}) = \{\langle Id_S, \{1, 2, 3\} \rangle, \langle (12), \{1, 2, 3\} \rangle\}$$

*Con toda esta información podemos construir el hipergrafo etiquetado asociado:*

$$\mathcal{H}(\mathbf{f}) = \langle \{1, 2, 3\}, \{\langle Id_S, \{1, 2, 3\} \rangle, \langle (12), \{1, 2, 3\} \rangle\} \rangle$$

*Nos enfocamos en* $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$*. Podemos ver que es un filtro, por lo tanto, usando el Teorema 13 tenemos que* $f$ *es oligárquica. En este caso específico, tenemos la regla de unanimidad, dado que la oligarquía está compuesta por toda la sociedad (los tres agentes).*

**Ejemplo 14.** *Consideremos las siguientes cuatro situaciones sociales:*

$$\mathcal{S} = \langle \{a, b, c, d\}, \{a \prec b \prec c \prec d\}_1, \{a \prec b \prec d \prec c\}_2, \{d \prec a \prec b \prec c\}_3; \{a \prec b \prec c \prec d\} \rangle,$$

$$\mathcal{S}' = \langle \{a, b, c, d\}, \{b \prec a \prec c \prec d\}_1, \{b \prec a \prec d \prec c\}_2, \{c \prec a \prec b \prec d\}_3; \{b \prec a \prec c \prec d\} \rangle,$$

$$\mathcal{S}'' = \langle \{a, b, c, d\}, \{c \prec a \prec b \prec d\}_1, \{c \prec a \prec d \prec b\}_2, \{c \prec b \prec d \prec a\}_3; \{c \prec a \prec b \prec d\}\rangle$$

*y*

$$\mathcal{S}''' = \langle \{a, b, c, d\}, \{a \prec b \prec c \prec d\}_1, \{a \prec d \prec b \prec c\}_2, \{c \prec b \prec a \prec d\}_3; \{a \prec b \prec c \prec d\}\rangle$$

*Es simple verificar que éstas situaciones no son equivalentes. Vamos a enfocarnos en $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$. Si solo consideramos $\mathcal{S}', \mathcal{S}'', \mathcal{S}'''$, tenemos que*

$$\mathcal{DEC}(\mathbf{f}) = \langle \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\rangle$$

*es un prefiltro, por lo tanto tenemos que el agente 1 pertenece al colegio. Pero si consideramos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, tenemos que*

$$\mathcal{DEC}(\mathbf{f}) = \langle \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\rangle$$

*es un ultrafiltro y el agente 1 es el dictador. Esto significa que agregar la situación $S$ le da poder extra al agente 1. Por otro lado, la situación $S$ por si sola no permite obtener conclusiones.*

Algunas intuiciones pueden ser extraídas de estos ejemplos. Dependiendo de $\mathcal{G}_S$ cierta información se pierde cuando consideramos $\mathcal{H}(\mathbf{f})$, en particular lo que refiera al nombre de la alternativa. Por otro lado, si $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$ tiene cierta estructura reconocible, el criterio general satisfecho por la función de bienestar social (como la existencia de un colegio, dictador, etc) aún puede ser detectado. En ciertas ocasiones, si no tenemos suficiente cantidad de situaciones sociales, puede que no podamos encontrar información en este proceso.

## 1.5. Teorías obtenidas de $\mathcal{H}(\mathbf{f})$

El criterio satisfecho por $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ puede ser concebido como los axiomas que en un sistema formal definen las propiedades de la función de agregación. Para hacer esto más preciso vamos a dar alguna definiciones.

**Definición 10.** *El* lenguaje formal para funciones de agregación *sobre el conjunto de alternativas $S$ y $n$ agentes, $\mathcal{L}_n^S$, es un lenguaje de primer orden* two-sorted*, y la clase de sus sentencias es $\mathbf{S}ENT(\mathcal{L}_n^S)$.*[11]

*Una* teoría *de una función de agregación en este contexto es $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{S}ENT(\mathcal{L}_n^S)$ tal que $\mathcal{T}$ es* consistente*: $\mathcal{T} \nvdash \perp$. Un conjunto de* axiomas *para $\mathcal{T}$ es $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{A} \vdash \mathcal{T}$.*

[11]Para un tratamiento más general de lógicas de primer orden ver Smullyan (1995).

**Ejemplo 15.** *Consideremos el caso de la función de agregación* $\mathbf{f}$ *sobre tres alternativas, que siempre impone la opinión del agente* 1 *sobre el resto (tres agentes en total). Podemos notar esto en lenguaje de primer orden como:*

$$\phi^1 : \forall x, y \ R(1, x, y) \to \bar{R}(x, y)$$

*donde* $\bar{R}(x, y)$ *se interpreta como el orden de preferencias* mayor o igual *impuesto por* $\mathbf{f}$*, en* $x, y$*, que varían sobre el conjunto de alternativas* $\{a, b, c\}$*, mientras que* $R(i, \cdot, \cdot)$ *es tal que su primer argumento varía sobre el conjunto de agentes, mientras que los otros dos argumentos varían sobre las alternativas. Si queremos tener una teoría de* $\mathbf{f}$*, digamos* $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$*,* $\phi^1$ *debe ser tal que* $\phi^1 \in \mathcal{T}^{\mathbf{f}}$*. Más aún, como* $\phi^1$ *caracteriza la función de agregación,* $\phi^1 \in \mathcal{A}^{\mathbf{f}}$*, es decir, es un axioma de la teoría. Por otro lado, es claro que* $\mathbf{f}$ *verifica trivialmente la* condición Pareto*, que puede ser representada como:*

$$\phi^P : \forall x, y \ [R(1, x, y) \wedge R(2, x, y) \wedge R(3, x, y)] \to \bar{R}(x, y)$$

*Entonces tenemos que* $\phi^P \in \mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ *y, más aún, que* $\phi^1 \vdash \phi^P$*. En cambio, si tenemos una fórmula como:*

$$\phi^{-1} : \forall x, y \ R(1, x, y) \to \neg\bar{R}(x, y)$$

*estableciendo que* 1 *es un* antidictador*(es decir, lo que* 1 *elige nunca es elegido por la sociedad),* $\phi^{-1} \notin \mathcal{T}^{\mathbf{f}}$*, dado que de otra manera* $\phi^1 \wedge \phi^{-1} \vdash \perp$*. Una versión más débil de* $\phi^{-1}$*, llamada*

$$\phi^{-1'} : \forall x, y \ R(1, x, y) \to \bar{R}(y, x)$$

*es en cambio,* no *inconsistente con* $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$*.*

La caracterización sintáctica dada en la Definición 10 tiene una contraparte en teoría de modelos. Esto es, cada sentencia en $\mathcal{L}_n^S$ puede ser interpretada de manera tal que una teoría $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{S}ENT(\mathcal{L}_n^S)$ puede ser vista como un conjunto de afirmaciones sobre el comportamiento de las constantes y las relaciones en la interpretación. Si existe una interpretación $\mathcal{M}$ que satisface (hace verdadera) cada fórmula en $\mathcal{T}$, es llamada un modelo de la teoría. Más aún, si $\mathcal{T}$ es consistente entonces tiene al menos un modelo.[12] En nuestro caso, como muestra el ejemplo anterior, la interpretación de los símbolos sobre el comportamiento de una función de agregación es directa: variables y

[12]Esta es la razón por la cual en el Ejemplo 15, $\phi^1$ y $\phi^{-1'}$ no son inconsistentes: existe un modelo donde ambas son verdaderas. En ese modelo el orden social es indiferente entre cualquier par de alternativas

constantes varían sobre los conjuntos de individuos y alternativas, $\{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{S}$ respectivamente, mientras que cualquier expresión atómica $R(i, x, y)$ se interpreta como la preferencia del agente $i$ sobre $x, y$, es decir, $R_i(x, y)$. Finalmente, si la interpretación tiene la intención de ser un modelo, $\bar{R}$ se interpreta como la preferencia social impuesta por $\mathbf{f}$. Entonces, cualquier teoría $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ de una función de agregación $\mathbf{f}$ tiene cada situación $\mathcal{S} \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ como uno de sus modelos. Más aún, si $\mathcal{S} = \langle S, R_1, \ldots, R_n; \bar{R}\rangle \notin \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$, tenemos por definición que $\mathbf{f}(\mathrm{prof}(\mathcal{S})) \neq \bar{R}$. Entonces $\mathcal{S}$ no es un modelo de $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. Dada cualquier estructura $\mathcal{M}$ podemos buscar una teoría para la cual $\mathcal{M}$ es un modelo. Si $\mathcal{M}$ tiene solo un número finito de constantes y relaciones definidas sobre ella, es simple encontrar un conjunto finito de sentencias que pueden ser interpretadas para obtener las relaciones de verdad en la estructura. Las cosas se hacen más interesantes si intentamos encontrar una teoría correspondiente a una clase dada de estructuras $\bar{\mathcal{M}}$. En particular trataremos de encontrar $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ dado $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$. Como se discutió anteriormente, el hipergrafo etiquetado $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ representa en forma de resumen la información sobre $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$. Indica los conjuntos decisivos para cada par de alternativas y las permutaciones de agentes que tranforma los conjuntos decisivos de una situación en los conjuntos decisivos de otra situación en $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$. Esta información es útil para obtener $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. Como dijimos, esperamos obtener $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ a partir de $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ pero primero debemos mostrar que esto es posible. Notemos que de $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ podemos obtener, aplicando las permutaciones indicadas en las etiquetas de sus hiperlados, varias familias de conjuntos de decisión alternativos. Esta información puede ser usada para reconstruir una clase de situaciones de elección social, aquellas en $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$. Cada una de ellas es un modelo para una colección de fórmulas de primer orden $\mathcal{C}$. Estas fórmulas se obtienen traduciendo las relaciones correspondientes descriptas por $\mathcal{H}(\mathbf{f})$. Consideremos $\mathcal{L}_n^S$ como un lenguaje formal *two-sorted* con fórmulas construidas con los siguientes elementos:

- constantes del tipo *agente*: $\bar{I} = \{\bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{n}\}$,
- constantes del tipo *alternativa*: $\bar{A} = \{\bar{s}, \bar{t}, \ldots\}$, tal que $|\bar{A}| = |S|$,
- una familia de variables del tipo *agente*, $\hat{I}$, con elementos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, etc.,
- una familia de variables del tipo *alternativa*, $X$, con elementos $x$, $y$, etc.,
- una función proposicional *individual*, $R(\cdot, \cdot, \cdot)$ que varía sobre $\bar{I} \times \bar{A} \times \bar{A}$,
- una función proposicional *social* $\bar{R}(\cdot, \cdot)$ que varía sobre $\bar{A} \times \bar{A}$,

- una familia de funciones $\bar{\mathcal{G}}_S$ donde cada $\bar{\gamma} \in \bar{\mathcal{G}}_S$, $\bar{\gamma} : \bar{A} \to \bar{A}$ es una permutación de constantes del tipo alternativa,
- una familia de funciones $\bar{\mathcal{G}}_n$ donde cada $\bar{\rho} \in \bar{\mathcal{G}}_n$, $\bar{\rho} : \bar{I} \to \bar{I}$ es una permutación de constantes del tipo agente,
- los conectivos y cuantifcadores usuales de las lógicas de primer orden.

En este lenguaje restringido la información en $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ puede ser inmediatamente expresada como sigue. Cada hiperlado es $\mathbf{H} = \langle \mathcal{I}, \mathcal{P}_S, \mathbf{G}_n, \mathbf{G}_S \rangle$, donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de agentes conectados por el hiperlado, $\mathcal{P}_S \in S \times S$ es el par de estados sobre los cuales esos agentes son decisivos en $\mathcal{DEC}(\mathbf{f})$. Finalmente $\mathbf{G}_n \subseteq \mathcal{G}_n$ y $\mathbf{G}_S \subseteq \mathcal{G}_S$ son las familias de permutaciones que preservan la decisividad de $\mathcal{I}$ sobre $\mathcal{P}_S$. Entonces podemos obtener la familia de sentencias de primer orden en $\mathbf{S}ENT(\mathcal{L}_n^S)$, que serán notadas $\Phi^{\mathbf{f}}$:

**Definición 11.** *Para cada hiperlado* $\mathbf{H}$ *de* $\mathcal{H}(\mathbf{f})$*, si* $\mathcal{P}_S = \langle a, b \rangle$ *entonces, para cada* $i \in \mathcal{I}$*, cada* $\rho \in \mathbf{G}_n$ *y cada* $\gamma \in \mathbf{G}_S$*, la sentencia*

$$\phi : R(\bar{\rho}(i), \bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b)) \to \bar{R}(\bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b))$$

*se incluye en* $\Phi^{\mathbf{f}}$*.*

Cada $\mathcal{S} \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ constituye una interpretación de $\Phi^{\mathbf{f}}$ por construcción. Esta familia es la base sobre la cual vamos a definir $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ como:

$$\mathcal{T}^{\mathbf{f}} \ = \ \{\mu \in \mathbf{S}ENT(\mathcal{L}_n^S) : \Phi^{\mathbf{f}} \vdash \mu\}$$

Notemos que el número de fórmulas en $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ es infinito. Incluso si $S$ es finito, si cualquier $\mathcal{S} \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ es una interpretación para una fórmula $\phi \in \mathcal{T}^{\mathbf{f}}$, también interpreta $\phi \vee \psi$, para cualquier sentencia de primer orden $\psi$. Por otra parte, dado que asumimos que cada $\mathcal{S} \in \mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$ es un modelo para $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ se sigue que es *consistente*. Ahora consideremos dos situaciones diferentes $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ pertenecientes a $\mathcal{SUPP}(\mathbf{f})$. Como sus correspondientes conjuntos de decisión son iguales salvo permutaciones como se definió en $\mathbf{H}$ de $\mathcal{H}(\mathbf{f})$, existe un isomorfismo entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, a través de las correspondientes permutaciones. Técnicamente, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ se dicen modelos *elementalmente equivalentes* $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. Un resultado conocido en teoría de modelos es (Stigum, 1990):

**Teorema de Completitud**: *Sea* $\mathcal{T}$ *una teoría de primer orden consistente con lenguaje* $\mathcal{L}$*. Entonces,* $\mathcal{T}$ *es completa si y solo si dos modelos cualquiera de* $\mathcal{T}$ *son elementalmente equivalentes.*

Incluso si $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ está bien definido y tiene las propiedades metamatemáticas deseables de consistencia y completitud, estamos interesados en encontrar la axiomatización para $\mathbf{f}$, que implica un número mínimo de fórmulas $\mathcal{A}^{\mathbf{f}} \subseteq \mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{T}^{\mathbf{f}}$, $\mathcal{A}^{\mathbf{f}} \vdash \mu$. Decimos $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ es el conjunto de axiomas de $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$.[13] Dos casos diferentes pueden surgir. Unos cuando $S$ y $n$ son finitos y el otro cuando alguno de los dos es infinito. Cada caso necesita un tratamiento diferente.

### 1.5.1. Número finito de Agentes y Alternativas

En este caso $\Phi^{\mathbf{f}}$ es finito. Es fácil de ver que, por las propiedades del hiperlado $\mathbf{H}$ de donde fue extraído, dada una sentencia $\phi$, $R(i,a,b) \to \bar{R}(a,b)$ se verifica para cada $\rho \in \mathcal{G}_n$ y cada $\gamma \in \mathcal{G}_S$ o no. Entonces

- Si $\phi$ se verifica para cada $\rho \in \mathcal{G}_n$ y cada $\gamma \in \mathcal{G}_S$, entonces definimos $\phi^{\forall\forall} : \forall\bar{\rho}\ \forall\bar{\gamma}\ [R(\bar{\rho}(i), \bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b)) \to \bar{R}(\bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b))]$.[14]
- Si $\phi$ se verifica para cada $\rho \in \mathcal{G}_n$ y para varios pero no todo $\gamma \in \mathcal{G}_S$, definimos $\phi^{\forall\exists} : \forall\bar{\rho}\ \exists\bar{\gamma}\ [R(\bar{\rho}(i), \bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b)) \to \bar{R}(\bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b))]$.
- Si $\phi$ se verifica para cada $\gamma \in \mathcal{G}_S$ y no para todo $\rho \in \mathcal{G}_n$, definimos $\phi^{\exists\forall} : \forall\bar{\gamma}\ \exists\bar{\rho}\ [R(\bar{\rho}(i), \bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b)) \to \bar{R}(\bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b))]$.
- Si $\phi$ se verifica para alguno pero no todo $\rho \in \mathcal{G}_n$ y $\gamma \in \mathcal{G}_S$, definimos $\phi^{\exists\exists} : \exists\bar{\rho}\ \exists\bar{\gamma}\ [R(\bar{\rho}(i), \bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b)) \to \bar{R}(\bar{\gamma}(a), \bar{\gamma}(b))]$.

Esto significa que cada hiperlado $\mathbf{H}$ puede ser representado por una sentencia, notada por $\phi_{\mathbf{H}}$ (o $\phi_{\mathbf{H}}^{\forall\forall}$, $\phi_{\mathbf{H}}^{\forall\exists}$, $\phi_{\mathbf{H}}^{\exists\forall}$ o $\phi_{\mathbf{H}}^{\exists\exists}$). Queda claro que cierta información es perdida, pero la estructura de decisión se mantiene. Con un examen similar de la clase $\{\phi_{\mathbf{H}}\}_{\mathbf{H}\in\mathcal{H}(\mathbf{f})}$, podemos obtener ocho casos posibles de la forma

$$\phi^{\triangle} : \triangle_{\hat{I}}\hat{\imath}\ \triangle_X^1 x\ \triangle_X^2 y\ \phi_{\mathbf{H}}$$

donde $\triangle_{\hat{I}}$, $\triangle_X^1$ y $\triangle_X^2$ son $\forall$ o $\exists$.

Es inmediato que:

**Proposición 11.** *Las sentencias cuantificadas $\phi^{\triangle}$ y $\phi_{\mathbf{H}}$ implican todo el conjunto de sentencias $\Phi^{\mathbf{f}}$:*

$$\{\phi^{\triangle}\} \cup \{\phi_{\mathbf{H}}\}_{\mathbf{H}\in\mathcal{H}(\mathbf{f})} \ \vdash\ \Phi^{\mathbf{f}}.$$

[13] Vamos a restringir el significado de $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ a los axiomas no lógicos de $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. Los axiomas no lógicos son aquellos de primer orden.

[14] Notemos que esta sentencia sigue siendo de primer orden, dado que los cuantificadores no varían sobre funciones proposicionales.

Este resultado indica que $\mathcal{A}^{\mathbf{f}} = \{\phi^{\triangle}\} \cup \{\phi_{\mathbf{H}}\}_{\mathbf{H} \in \mathcal{H}(\mathbf{f})}$ proveé una axiomatización finita de $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. Esta familia de axiomas $\mathcal{A}$ concentra la mínima información esencial sobre las situaciones sociales, mientras que la información completa está provista por $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. El conjunto de axiomas $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ puede ser analizado según la siguiente clasificación (Fishburn, 1987):[15]

- *Condiciones estructurales.* Prescriben condiciones sobre el dominio de agregación (individuos, alternativas y perfiles). Las condiciones estructurales indican los elementos sobre los cuales el proceso de agregación será aplicado. Ejemplos simples son los requerimientos de que todos los órdenes de preferencia individuales tienen que ser órdenes débiles o que el número de individuos tiene que ser mayor que 2.

- *Condiciones existenciales.* Prescriben la existencia de ciertos resultados bajo el proceso de agregación. Entonces, por ejemplo, una condición existencial es que no exista un individuo tal que para cada perfil sus preferencias coincidan con aquellas que resultan del proceso de agregación.

- *Condiciones universales.* Especifican aspectos generales del proceso de agregación. Las condiciones universales pueden ser clasificadas como condiciones intraperfiles, donde no hay comparación entre perfiles y las entreperfiles. Un ejemplo de condición intraperfil es la condición de Pareto, que indica que si cada individuo en un perfil prefiere una alternativa sobre otra, esto debe verse reflejado en el orden social. Una condición entreperfil es en cambio, la independencia de alternativas irrelevantes, que prescribe que si en dos perfiles las preferencias de los agentes con respecto a un par de alternativas son las mismas, entonces el orden sobre esas dos alternativas en los respectivos órdenes sociales debe coincidir.

Se sigue que:

- La caracterización conjunta de $S$, $n$ y los correspondientes $\mathcal{G}_S$ y $\mathcal{G}_n$ permite obtener las condiciones estructurales de la función de agregación $\mathbf{f}$.

- Las sentencias $\phi_{\mathbf{H}}$ nos permiten obtener las condiciones entreperfiles.

- Las sentencias $\phi^{\triangle}$ resumen tanto las condiciones entreperfiles e intraperfiles.

[15]También capturan las propiedades de tres clases de funciones de agregación: reglas simples, reglas de conteo y reglas de votación. Estas reglas están totalmente caracterizadas por sus conjuntos de decisión (Austen-Smith & Banks, 1998).

Esto indica que para distinguir las condiciones intraperfil de las entreperfil, más información es necesaria, que puede ser encontrada en $\Phi^{\mathbf{f}}$. La familia de axiomas $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ provee solo las propiedades más generales de $\mathbf{f}$ mientras que otras pueden ser derivadas de ellos. Un simple ejemplo muestra esto:

**Ejemplo 16 (Ejemplos 13 y 14 revisitados).** *Consideremos alguno de los hipergrafos etiquetados, digamos* $\mathcal{H}(\mathbf{f}) = \langle 3, \big\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\big\}\rangle$*. Constituye, como se dijo, un ultrafiltro, es decir cada subconjunto* $A \subseteq \{1,2,3\}$ *es* $A \in \mathcal{H}(\mathbf{f})$ *o* $A^C \in \mathcal{H}(\mathbf{f})$*, donde* $A^C = \{1,2,3\} \setminus A$*. Dado que* $\{1,2,3\}$ *es finito,* $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ *es un ultrafiltro principal. Esto es,* $\bigcap \mathcal{H}(\mathbf{f})$ *es un conjunto de un único elemento. Este elemento es el dictador.*[16] *Entonces, el único axioma* $\phi^{\triangle}$ *que puede ser derivado es* $\phi : \exists \hat{\imath}\ \forall x, y\ R(\hat{\imath}, x, y) \rightarrow \bar{R}(x, y)$*. De hecho,* $\mathcal{A}^{\mathbf{f}} = \{\phi\}$*. Notemos que la variable* $\hat{\imath}$ *puede ser interpretada como cualquiera de los tres agentes,* $1, 2$ *o* $3$*. Esto es, en esta representación de primer orden la información sobre el dictador se pierde. A pesar de esto, y dada la información que ya hemos obtenido, se sigue que la función de elección social implícita en el ejemplo puede ser implementada en un equilibrio de estrategias dominante.*

Por otro lado, para obtener una teoría que solo implique $\Phi^{\mathbf{f}}$, en vez de una tan general como $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$, podemos tan solo tomar $\Phi^{\mathbf{f}}$ como la clase de nuestros axiomas. Como son finitos, la axiomatización también es finita. Pero este proceso tiene un gran costo asociado: todas las ventajas de extraer información intensional de la extensional son perdidas. Es como si en un proceso estadístico obtuviésemos una caracterización exacta de la muestra solo enumerando los elementos.

### 1.5.2. Número infinito de Agentes o Alternativas

Este caso es mucho más complejo que el caso finito. Notemos que el lenguaje necesario ya no es finitario, debido al número de constantes requeridas para representar los infinitos elementos del dominio. Mientras esto es una desventaja, algunos resultados nos permitirán recuperar la caracterización del conjunto de axiomas $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ similar a la presentación de la sección anterior. Notemos que esos axiomas son expresados con unas pocas variables. Entonces nos podemos mantener usando un fragmento finitario de $\mathcal{L}_n^S$ con la condición que solo será usado para escribir $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$. Recordemos que $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ es un hipergrafo. Buscamos una familia de sentencias $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ que pueda ser satisfecha por $\mathcal{H}(\mathbf{f})$:

**Definición 12.** $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ *es satisfecha si y solo si existe* $\sigma = \langle \mathcal{I}, \mathcal{P}_S, \mathbf{G}_n, \mathbf{G}_S \rangle$*, donde* $\mathcal{I} \subseteq I$ *es un conjunto de agentes,* $\mathcal{P}_S \in S \times S$ *es un par de estados,*

[16] Ver Kirman & Sondermann (1972), Brown (1974) o Hansson (1976).

*mientras que* $\mathbf{G}_n \subseteq \mathcal{G}_n$ *y* $\mathbf{G}_S \subseteq \mathcal{G}_S$ *son permutaciones sobre* $n$ *y* $S$*, que verifica (Kolany, 1993):*

- **consistencia***:* $\mathbf{H} \subset \sigma$ *para ningún* $\mathbf{H} \in \mathcal{H}(\mathbf{f})$*,*
- **transversalidad***:* $\sigma \cap \mathcal{INT}(\alpha) \neq \emptyset$*, para cada sentencia* $\alpha \in \mathcal{A}^{\mathbf{f}}$*, donde* $\mathcal{INT}(\alpha)$ *es un hiperlado del cual se obtiene una interpretación de verdad de* $\alpha$*.*

La noción de satisfacción sobre hipergrafos es de hecho equivalente a la existencia de un sistema de representativos distintos, es decir, a la existencia de un transversal $\sigma$ que tiene un elemento de cada hiperlado. La existencia de dicho $\sigma$ está asegurado por el siguiente resultado:

**Teorema**(Hurwicz & Reiter, 2001)$\mathcal{H}(\mathbf{f})$ *tiene un transversal* $\sigma$ *si y solo si* $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ *es generado por una correspondencia autocontenida* $\Upsilon : \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f}) \to \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f})$*.*
*Dos son las condiciones sobre* $\Upsilon : \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f}) \to \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f})$ *que pueden asegurar la existencia de* $\sigma$*:*

- generación*: para todo* $\mathbf{H} \in \mathcal{H}(\mathbf{f})$*, existe* $\theta \in \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f})$ *verificando que* $\mathbf{H} = \Upsilon(\theta)$*,*
- auto-contención*: para todo* $\theta \in \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f})$*,* $\theta \in \Upsilon(\theta)$*.*

De hecho, sigue que:

**Proposición 12.** *Existe* $\Upsilon$ *que asegura la existencia de un transversal* $\sigma$*.*

*Prueba.* Por construcción, cada $\theta \in \bigcup \mathcal{H}(\mathbf{f})$ es $\theta = \langle i, \mathcal{P}_S, \mathbf{G}_n, \mathbf{G}_S \rangle$, es decir, un solo individuo y un par de estados sobre los cuales es decisivo (y las permutaciones que preservan su decisividad). Entonces $\theta \in \mathbf{H}$ para un $\mathbf{H} \in \mathcal{H}(\mathbf{f})$. Definimos entonces $\Upsilon(\theta)$ como la correspondiente $\mathbf{H}$. $\square$

Finalmente:

**Lema 3.** *Existe un conjunto de sentencias* $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ *en* $\mathcal{L}_n^S$ *que es satisfecho por el transversal* $\sigma$*. Más aún, cada* $\alpha \in \mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ *puede ser* $\phi_{\mathbf{H}}^{\forall\forall}$*,* $\phi_{\mathbf{H}}^{\forall\exists}$*,* $\phi_{\mathbf{H}}^{\exists\forall}$*,* $\phi_{\mathbf{H}}^{\exists\exists}$ *o* $\phi^{\triangle}$*.*

*Prueba.* La primera afirmación sale inmediatamente de la Definición 12 y la Proposición 12. La caracterización de las sentencias en $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$ sigue del hecho que las sentencias del tipo $\phi_{\mathbf{H}}^{\forall\forall}$, $\phi_{\mathbf{H}}^{\forall\exists}$, $\phi_{\mathbf{H}}^{\exists\forall}$, $\phi_{\mathbf{H}}^{\exists\exists}$ o $\phi^{\triangle}$ pueden ser verificadas en $\mathcal{H}(\mathbf{f})$ independientemente de si $S$ y $n$ son finitos o no. $\square$

Por lo tanto, como pasa en el caso finito, un conjunto de axiomas puede ser obtenido de una potencial teoría $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$. Sin embargo, como ocurre en el caso anterior, los axiomas de $\mathcal{A}^{\mathbf{f}}$, mientras agrupan las propiedades generales de $f$, no señalan sus detalles precisos. Teniendo en cuenta que $\Phi^{\mathbf{f}}$ es una enumeración infinita de sentencias sin cuantificadores, podemos aplicar el siguiente teorema (Shoenfield 1967):

**Teorema**(Łos-Tarski) *Una teoría $\mathcal{T}$ es equivalente a un conjunto de sentencias libre de cuantificadores $\Phi$ si y solo si cada subestructura del modelo de $\mathcal{T}$ es un modelo de $\mathcal{T}$*

Esto significa que, en nuestro caso que $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$ con precisamente esas sentencias en $\Phi^{\mathbf{f}}$ y solo esas, debe ser tal que sus modelos tienen una estructura de "muñeca rusa". Esto es, para cada modelo sus subestructuras también son modelos. Como en el caso finito, si tomamos a $\Phi^{\mathbf{f}}$ como los axiomas de $\mathcal{T}^{\mathbf{f}}$, tenemos una instancia trivial del Teorema de Łos-Tarski. Pero en este caso, sumado a que la identificación trivial de la caracterización intensional con la enumeración extensional, tenemos que el sistema de axiomas no es más finito.[17]

## 1.6. Conclusiones

En este capítulo presentamos un ejercicio de razonamiento inductivo, como inferir el criterio verificado por una función de bienestar social a partir del comportamiento observable de sus conjuntos de decisión. Mostramos que las funciones de bienestar social mantienen una relación cercana con las particiones de las situaciones sociales. Más aún, de cada función podemos obtener un hipergrafo etiquetado. Como es usual en inferencia inductiva, la información extraída durante el proceso es la que puede ser considerada primordial, dejando de lado ciertos detalles accesorios. Haciendo esto, se borran las diferencias entre funciones similares, pero al mismo tiempo obtenemos lo que originalmente estábamos buscando, ciertas propiedades satisfechas por ellas. Entendemos que puede ser muy restrictivo pedir que los conjuntos decisivos sean prefiltros, filtros o ultrafiltros. Dejamos fuera del análisis otras estructuras potenciales al hacer esto. Suponemos que podemos relajar éstas hipótesis si continuamos estudiando los hipergrafos etiquetados. En particular, estos hipergrafos pueden ser utilizados para representar nervios de cubrimientos por conjuntos de agentes, asociados a algunas decisiones. Esto permite conexiones entre el análisis topológico y combinatorio de las elecciones socia-

[17]De hecho, nada en el teorema asegura que la axiomatización será finita.

les (Chichilnisky 1980, Baryshnikov 1997, Lauwers 2000). Incluso con estos inconvenientes menores, este enfoque brinda una herramienta para la elicitación de la información oculta en cada caso. Una vez generalizado, puede ayudar para determinar la posibilidad de implementar la regla de elección social implícita descripta en esos casos. Este trabajo también apunta a una línea más general de investigación, la extracción de información intensional de una descripción extensional en forma particional. Mientras éste método no es independiente del problema subyacente, muchas de sus características son modulares y pueden ser aplicadas a otros problemas de la Teoría Económica.

# Parte III

# Análisis de las Estrategias de los Equipos de Rugby de Acuerdo al Sistema de Puntuación

# Introducción

El rugby es un deporte en constante evolución. Esto se puede ver fácilmente ya que cada año las leyes de juego se ponen bajo evaluación. Esto lleva a variaciones experimentales de las mismas, y si las expectativas de estas variaciones son satisfechas, el libro de leyes es modificado permanentemente. Los objetivos de tanta revisión y modificación son principalmente la seguridad de los jugadores y el entretenimiento. Muchas reglas son modificadas para hacer el juego más seguro y tener menos lesionados, y algunas otras son modificadas de manera que el juego sea más entretenido para todos (jugadores, entrenadores, espectadores). Una de las tantas modificaciones que se han realizado, es cuántos puntos son otorgados a los equipos de acuerdo a si ganaron, cuántos tries anotaron y otro tipo de cuestiones. Esto no es algo estándar, cada organizador de torneo tiene el derecho de decidir qué tipo de sistema de puntuación será aplicado. Por ejemplo, en la Copa del Mundo, o en el Rugby Championship, un torneo donde compiten las mejores cuatro naciones del hemisferio sur, cuatro puntos son otorgados al equipo ganador, dos a cada equipo en caso de empate y ningún punto al equipo perdedor. Además de estos puntos otorgados por ganar, empatar o perder, un punto extra (usualmente llamado punto bonus) se le otorga al equipo que anota más de cuatro tries, y un punto extra al equipo perdedor si pierde por menos de siete puntos. Otro sistema de puntuación utilizado, en el Super Rugby o el Top 14 Francés, dos de los torneos de clubes más importantes del mundo, otorga un punto extra al equipo ganador si anota tres tries más que el rival y un punto al equipo perdedor si pierde por menos de siete. En esta parte del trabajo compararemos las estrategias de los equipos bajo estos dos sistemas de puntuación y un sistema en el cual no existe punto extra. La idea detrás de que los torneos tengan diferentes sistemas de puntuación es hacerlos más emocionantes, justos, etc. Claramente no existe consenso sobre qué sistema es mejor, ya que como dijimos, diferentes torneos alrededor del mundo usan distintos sistemas. Pero sobre lo que si parece haber consenso para cada participante de este deporte, es que el juego es más entretenido si los equipos se vuelcan al ataque y tratan de anotar en vez de evitar que les anoten. Las

formas de anotar puntos en el rugby son cuatro. Cuando un equipo apoya la pelota en el ingoal del equipo oponente (un área rectangular en cada extremo de la cancha), se dice que el equipo anotó un try y obtiene cinco puntos. Luego de esto, dos puntos más pueden ser obtenidos al patear una conversión entre los postes. Una patada del piso o una patada de sobrepique a los postes le otorga al equipo tres puntos. Incluso estos valores están siendo puestos bajo revisión. La World Rugby (institución regente del rugby a nivel mundial) está analizando si darle más puntos por anotar un try y menos por una patada del piso, hace a los equipos más ofensivos. Nuevamente la misma idea, más tries, más entretenido el juego. Esta es la motivación para nuestro trabajo. Usar, al principio, un modelo estático donde comparamos cuán ofensivos son los equipos de acuerdo al sistema de puntuación utilizado, y obtener como conclusión bajo qué sistema son más ofensivos y por lo tanto, hacen más entretenido al juego. Luego usaremos un enfoque disitnto del problema. Basados en el trabajo de Massó - Neme (1996), analizamos un ejemplo con un modelo dinámico, haciendo foco en los pagos factibles y de equilibrio que tienen los equipos bajo cada sistema de puntuación. La idea detrás de esto es que si los equipos tienen más pagos factibles y mejores pagos de equilibrio, recurrirán a más variadas estrategias para poder ganar, y así hacer más entretenido el juego.
A pesar que un deporte puede ser muy difícil de modelar, debido a sus infinitas variables, existen varias maneras efectivas de simplificar el modelo y, usando herramientas básicas de teoría de juegos, predecir los comportamientos de los equipos y hallar las estrategias más adecuadas para cada momento del juego. Algunos de los autores que han desarrollado esta tarea han sido, Walker & Woodens (2001), con el tenis, Chiappori, Levitt & Groseclose (2002) y Palomino, Rigotti & Rustichini (1999) con el futbol. Otro trabajo importante, relacionado con el nuestro, es el de Brocas & Carrillo (2004). En su trabajo ellos analizan y comparan las estrategias de dos equipos de futbol bajo el sistema de tres puntos o dos puntos por partido ganado. Ellos concluyen, algo que es esperable, que los equipos actúan de manera más ofensiva si se les otorga tres puntos cuando ganan. Un hecho interesante que encontraron, es que otorgar más de tres puntos por ganar un partido, hace a los equipos más defensivos en el primer tiempo, por lo tanto, en promedio, los equipos no se vuelven más ofensivos.

# Capítulo 1

# Análisis de las Estrategias

## 1.1. Modelo Estático

Tratamos de modelar en una manera simple los efectos que tiene anotar un try sobre las estrategias de los equipos. Consideramos dos equipos $i \in \{A, B\}$. Los posibles eventos son $(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, donde $a$ y $b$ representan los tries anotados por el equipo $A$ y $B$ respectivamente. Para simplificar el análisis, consideramos que no se anotan conversiones (o que todos los tries son convertidos), patadas de penal o de sobrepique. Sean $(\theta^A, \theta^B) \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^2$ las estrategias de los equipos. El parámetro $\theta^i$ denota cuan ofensivos son los equipos, a mayor valor, mayor grado de ofensividad. Con $\alpha(\theta^A, \theta^B)$ notamos la probabilidad que el equipo $A$ anote un try, si el equipo $A$ usa la estrategia $\theta^A$ y el equipo $B$ usa $\theta^B$; y $\beta(\theta^A, \theta^B)$ es la probabilidad que el equipo $A$ reciba un try. Estas funciones de probabilidad verifican las siguientes hipótesis, donde el subíndice $n$ en cada función denota la derivada con respecto al argumento $n$-ésimo (por simplicidad omitimos los argumentos):

i $\alpha_1 > 0; \alpha_{11} \leq 0; \alpha_2 > 0; \alpha_{22} > 0$

ii $\beta_1 > 0; \beta_{11} > 0; \beta_2 > 0; \beta_{22} \leq 0$

iii $\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$

iv $\alpha(\theta^A, \theta^B) = \beta(\theta^B, \theta^A)$

Las propiedades (i) y (ii) son fáciles de aceptar. Si un equipo se vuelva más ofensivo, tiene más chances de anotar un try y a la vez de recibir un try. Más aún, tenemos que la probabilidad marginal de anotar un try es decreciente con respecto al nivel de juego ofensivo, y la probabilidad marginal de recibir un try es creciente con respecto al nivel de ofensividad. La propiedad (iii)

indica que el efecto marginal del juego ofensivo de un equipo es independiente de la estrategia empleada por el otro equipo. Finalmente, la propiedad (iv) indica que los equipos son homogéneos. Estas propiedades son debatibles, básicamente las implementamos por simplicidad, pero en algunos casos son completamente aplicables. Por ejemplo, la propiedad (iv) dice que los equipos son igual de fuertes. En el rugby internacional, los seleccionados nacionales se dividen de acuerdo a su nivel en distintos grupos. Por ejemplo, actualmente Nueva Zelanda, Inglaterra y algunos equipos más son equipos del Grupo 1, mientras que Argentina, Italia, Samoa y otros son considerados equipos de Grupo 2. Por lo tanto, si consideramos que un partido es jugado entre equipos del mismo grupo, la hipótesis de homogeneidad no parece tan fuera de lugar.
La idea del modelo es la siguiente, analizar en cada posible evento de un sistema de puntuación dado, los equilibrios de Nash de los equipos, y luego hacer comparación componente a componente con los equilibrios encontrados en los otros sistemas. La función de utilidad para cada equipo, si los equipos usan la estrategia $(\theta^A, \theta^B)$, y el evento en el que están es $(a, b)$, es de la siguiente forma:

$$U_i((\theta^A, \theta^B), (a, b)) =$$
$$\alpha(\theta^A, \theta^B) f_i(a+1, b) + (1-\alpha(\theta^A, \theta^B) - \beta(\theta^A, \theta^B)) f_i(a, b) + \beta(\theta^A, \theta^B) f_i(a, b+1)$$

La función $f_i : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ depende del sistema de puntuación utilizado y tiene como resultado los puntos obtenidos por el equipos $i$ si el partido finaliza igual que su argumento. Consideraremos tres funciones diferentes.
En el caso en que no se otorga ningún punto bonus (NB), tenemos:

$$f_A^{NB}(a, b) = \begin{cases} 4 & si \quad a > b \\ 2 & si \quad a = b \\ 0 & si \quad a < b \end{cases}$$

$$f_B^{NB}(a, b) = \begin{cases} 0 & si \quad a > b \\ 2 & si \quad a = b \\ 4 & si \quad a < b \end{cases}$$

Cuando el punto bonus se otorga por anotar cuatro o más tries, y por perder por un try, (+4):

$$f_A^{+4}(a, b) = \begin{cases} 4 & si \quad a > b \quad y \quad a < 4 \\ 5 & si \quad a > b \quad y \quad a \geq 4 \\ 2 & si \quad a = b \quad o \quad [a < b \quad y \quad a > 4 \quad y \quad b - a = 1] \\ 3 & si \quad a = b \quad y \quad a \geq 4 \\ 0 & si \quad a < b \quad y \quad a < 4 \quad y \quad b - a > 1 \\ 1 & si \quad [a < b \quad y \quad a \geq 4] \quad o \quad [a < b \quad y \quad b - a = 1] \end{cases}$$

$$f_B^{+4}(a,b) = \begin{cases} 4 & si \quad b > a \quad y \quad b < 4 \\ 5 & si \quad b > a \quad y \quad b \geq 4 \\ 2 & si \quad a = b \quad o \quad [b < a \quad y \qquad b > 4 \qquad y \quad a - b = 1] \\ 3 & si \quad a = b \quad y \quad b \geq 4 \\ 0 & si \quad b < a \quad y \quad b < 4 \quad y \quad a - b > 1 \\ 1 & si \quad [b < a \quad y \quad b \geq 4] \quad o \qquad [b < a \qquad y \quad a - b = 1] \end{cases}$$

Finalmente, si el punto extra se otorga por anotar tres tries o más que el rival, y por perder por un try, (3+):

$$f_A^{3+}(a,b) = \begin{cases} 4 & si \quad a > b \quad y \quad a - b < 3 \\ 5 & si \quad a > b \quad y \quad a - b \geq 3 \\ 2 & si \quad a = b \\ 0 & si \quad a < b \quad y \quad b - a > 1 \\ 1 & si \quad a < b \quad y \quad b - a = 1 \end{cases}$$

$$f_B^{3+}(a,b) = \begin{cases} 4 & si \quad b > a \quad y \quad b - a < 3 \\ 5 & si \quad b > a \quad y \quad b - a \geq 3 \\ 2 & si \quad a = b \\ 0 & si \quad b < a \quad y \quad a - b > 1 \\ 1 & si \quad b < a \quad y \quad a - b = 1 \end{cases}$$

Las funciones de utilidad pueden ser entendidas como la probabilidad del equipo $A$ de anotar, que ninguno anote o que el equipo $B$ anote, multiplicado por los puntos que el equipo obtiene si el partido finaliza con ese resultado. En estas funciones de utilidad consideramos que los equipos solo quieren ganar la mayor cantidad de puntos y que no les interesa los puntos que obtiene el equipo rival. Una vez encontrado el equilibrio de Nash (cuya existencia está asegurada por las propiedades de las funciones de probabilidad), podemos comparar el punto de equilibrio de los distintos sistemas de la siguiente manera:

$$(\theta^A, \theta^B) \geq (\theta^{A'}, \theta^{B'}) \text{ si } \theta^A \geq \theta^{A'} \text{ y } \theta^B \geq \theta^{B'}.$$
$$\text{Caso contrario notamos que } (\theta^A, \theta^B) \sim (\theta^{A'}, \theta^{B'})$$

Entendemos esto como qué par de estrategias es más ofensiva. Analizamos el equilibrio de Nash en todos los posibles eventos. Esta claro que uno puede argumentar que teóricamente existen infinitos eventos, pero usamos una cantidad promedio para determinar la cantidad máxima de tries que se pueden anotar por equipo. Usamos estadísticas de partidos jugados en diferentes Copas del Mundo, torneos del Super Rugby y Tres Naciones, usando partidos de diferentes temporadas y con distintos sistemas de puntuación. El promedio de tries hallado fue 7 tries por partido, lo que nos lleva a analizar 64 eventos posibles. Cuando comparamos las estrategias entre sistemas, en cada posible evento, un ranking es armado. En el caso en que un sistema esté empatado con otro, comparten esa posición. Veamos algunos casos para terminar de entender el método (omitimos todos los argumentos para su fácil lectura, sin que esto genere alguna confusión).

1. Caso donde $a = b$ y $a + 1 < 4$

   **Sistemas (+4) y (3+)**

   $U_A = \alpha 4 + (1 - \alpha - \beta)2 + \beta$

   $U_B = \alpha + (1 - \alpha - \beta)2 + \beta 4$

   El equilibrio de Nash está dado por $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 2$ y $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2$

   **Sistema (NB)**

   $U_A = \alpha 4 + (1 - \alpha - \beta)2$

   $U_B = (1 - \alpha - \beta)2 + \beta 4$

   El equilibrio de Nash está dado por $\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1$ y $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$.
   Las propiedades de las funciones de probabilidad permiten comparar estos resultados. Las funciones $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ y $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ son crecientes en el primer y segundo argumento, respectivamente. Por lo tanto podemos concluir que los equipos son más ofensivos bajo los sistemas (+4) y (3+) y rankeamos (+4) y (3+) en la posición 1 y (NB) en la posición 3.

2. Caso donde $a = b + 1$ y $a > 4$

   **Sistema (+4)**

   $U_A = \alpha 5 + (1 - \alpha - \beta)5 + \beta 3$

   $U_B = \alpha + (1 - \alpha - \beta)2 + \beta 3$

   El equilibrio de Nash está dado por $\theta^A = \underline{\theta}$ y $\theta^B$ como la solución de $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$

   **Sistema (3+)**

   $U_A = \alpha 4 + (1 - \alpha - \beta)4 + \beta 2$

   $U_B = (1 - \alpha - \beta) + \beta 2$

El equilibrio de Nash está dado por $\theta^A = \underline{\theta}$ y $\theta^B$ como la solución de $\dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$

**Sistema (NB)**

$U_A = \alpha 4 + (1 - \alpha - \beta)4 + \beta 2$

$U_B = \beta 2$

El equilibrio de Nash está dado por $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.
Claramente siempre la mejor opción para el equipo con ventaja mínima es volverse más defensivo, para así no perder esa ventaja. Podemos conlcuir que el sistema (NB) es mejor que los sistemas (3+) y (+4) y rankear (NB) en la primera posición y a los otros dos sistemas en la segunda posición.

**Proposición 13.** *Los equipos son más ofensivos bajo el sistema (+4) que en los sistemas (3+) y (NB). Los equipos son más ofensivos en (NB) que en (3+).*

*Prueba.* Analizamos los 64 diferentes casos y armamos todos los rankings posibles, hacemos la comparación entre sistemas de puntuación para ver cual es mejor en términos de ofensividad. Los resultados se pueden ver en el Cuadro 1.1. En una comparación uno a uno, 24 eventos posicionan mejor a (NB) contra 20 eventos que lo hacen con (3+). El sistema (+4) está mejor rankeado en 26 eventos contra 12 eventos en los que se posiciona mejor a (NB). Por último, 17 eventos posicionan mejor a (+4) contra 10 eventos que lo hacen con (3+). □

Aquí encontramos nuestro primer resultado sorprendente. El sistema (NB) termina mejor posicionado que el sistema (3+). Sólo dos tipos de eventos hacen a los equipos más ofensivos bajo el sistema (3+), cuando están empatados, y el premio por romper esa paridad es más alto, y cuando la diferencia en el resultado es de 2 tries, donde anotar un try más para el equipo que lleva la ventaja le da un pago mucho mejor. Los otros eventos, hacen a los equipos más defensivos. Por ejemplo, supongamos un encuentro que va (3,0). El equipo $B$ no tiene nada que perder, por lo tanto puede volverse ofensivo al extremo, pero el equipo $A$ puede perder su ventaja de 3 tries, por lo tanto se vuelca a la extrema defensa. También el hecho de obtener un punto por perder por un try, hace que el equipo perdedor se “conforme”, cuando va perdiendo por uno. Algo que no sorprende es que (+4) termina mejor posicionado que (NB). En este caso, los equipos están siempre incentivados por el punto extra por anotar 4 tries. En otro resultado que no parecía tan obvio

| Eventos | Equilibrio NB | Equilibrio 3+ | Equilibrio +4 | Ranking |
|---|---|---|---|---|
| (0,0),(1,1),(2,2) | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 2, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 2, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $3+ \sim +4 > NB$ |
| (3,3) | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 2, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 3, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 3)$ | $+4 > 3+ > NB$ |
| (4,4),(5,5),(6,6), (7,7) | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 2, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 2, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $3+ \sim +4 > NB$ |
| (1,0),(2,1) | $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\underline{\theta}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $NB > 3+ \sim +4$ |
| (3,2) | $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{2}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $NB \sim +4 > 3+$ |
| (4,3) | $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{2}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 2)$ | $NB \sim +4 > 3+$ |
| (5,4), (6,5), (7,6) | $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1)$ | $(\underline{\theta}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{1}{2})$ | $NB > 3+ \sim +4$ |
| (2,0) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \overline{\theta})$ | $3+ > +4 > NB$ |
| (3,1) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ | $3+ \sim +4 > NB$ |
| (4,2) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \overline{\theta})$ | $3+ > +4 > NB$ |
| (5,3) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \overline{\theta})$ | $3+ > +4 > NB$ |
| (6,4), (7,5) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \overline{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \overline{\theta})$ | $3+ > +4 > NB$ |
| (3,0) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\overline{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 > NB > 3+$ |
| (4,1), (5,2) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 \sim NB > 3+$ |
| (6,3) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \overline{\theta})$ | $+4 > NB > 3+$ |
| (7,4) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\underline{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 \sim NB > 3+$ |
| (4,0), (5,1), (6,2) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 \sim NB \sim 3+$ |
| (7,3) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \overline{\theta})$ | $+4 > NB \sim 3+$ |
| (5,0), (6,1), (7,2) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 \sim NB \sim 3+$ |
| (6,0), (7,1) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 \sim NB \sim 3+$ |
| (7,0) | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta})$ | $+4 \sim NB \sim 3+$ |

Cuadro 1.1: Comparación de Sistemas de Puntuación

al principio, es que (+4) termina mejor posicionado que (3+). Podemos interpretar esto como que obtener el punto extra y no correr riesgo de perderlo, hace que los equipos estén más tranquilos y se puedan volcar al ataque. En conclusión, darle un punto extra por anotar 4 o más tries sin riesgo de perderlo es más efectivo en hacer a los equipos más ofensivos, pero dárselo por una diferencia de 3 o más tries es contraproducente, ya que los equipos se vuelcan a la defensa en más situaciones para poder mantener esta ventaja.

## 1.2. Modelo Dinámico

A continuación usaremos un ejemplo con un modelo de juego dinámico, como se describe en el trabajo de Massó - Neme (1996), para así comparar lo pagos factibles y de equilibrio de los equipos en cada sistema de puntos. Este es un enfoque diferente ya que compararemos pagos, y no estrategias. La interpretación de los resultados puede ser la siguiente, mejores pagos de equilibrio y pagos factibles, hacen que los equipos usen una más variada cantidad de estrategias, lo cual hace al juego más entretenido. El juego $G = ((W, (0,0)), [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{2^*}, T)$ se define como sigue:

1. El conjunto de equipos $\{A, B\}$. Un equipo genérico se denota con $i$.

2. Un conjunto finito de acciones conjuntas $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{2^*} = \{(\theta^A, \theta^B) \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^2 | (\theta^A, \theta^B)$ es un equilibrio de Nash en el modelo estático$\}$.

3. Un conjunto finito de eventos $W$ que depende del sistema de puntos (con el símbolo / notamos al conjunto cociente):

   - $W_{NB} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim_{NB}$ donde $\sim_{NB}$ es la relación de equivalencia definida de la siguiente manera:
     $(a, b) \sim_{NB} (a', b')$ si y solo si
     $(|a - b| \leq 1$ y $a - b = a' - b')$ o
     $(|a - b| \geq 1$ y $|a' - b'| \geq 1)$
   - $W_{3+} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim_{3+}$ donde $\sim_{3+}$ es la relación de equivalencia definida de la siguiente manera:
     $(a, b) \sim_{3+} (a', b')$ si y solo si
     $(|a - b| \leq 3$ y $a - b = a' - b')$ o
     $(|a - b| \geq 3$ y $|a' - b'| \geq 3)$
   - $W_{+4} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim_{+4}$ donde $\sim_{+4}$ es la relación de equivalencia definida de la siguiente manera:
     $(a, b) \sim_{+4} (a', b')$ si y solo si
     $(a - b = a' - b' = 1$ y $min\{a, a', b, b'\} \leq 4)$ o

$(b - a = b' - a' = 1$ y $min\{a, a', b, b'\} \leq 4)$ o
$(a - b = a' - b' = 2$ y $min\{a, a', b, b'\} \leq 4)$ o
$(b - a = b' - a' = 2$ y $min\{a, a', b, b'\} \leq 4)$ o
$(min\{a - b, a' - b'\} \geq 3$ y $min\{a, b\} < 3$ y $min\{a', b'\} < 3)$ o
$(min\{a - b, a' - b'\} \geq 3$ y $min\{a, b\} = 3$ y $min\{a', b'\} = 3)$ o
$(a = a'$ y $b = b'$ y $min\{a, a'\} \geq 4)$

Básicamente, dos eventos son equivalentes si los equipos tienen la misma función de utilidad en ambos eventos. Notamos con $(a, b)^{NB} = (\{A, B\}, [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{2^*}, ((U_i)^{NB})_{i \in \{A,B\}})$ un juego finito en forma normal (lo mismo para los otros sistemas de puntuación), donde $(U_i)^{NB}$ es la función de utilidad para el equipo $i$ en el modelo estático en el evento $(a, b)$.

4. Un evento inicial $(0, 0)$, que es el mismo para cada sistema de puntuación.

5. Una función de transición $T$, que especifica el nuevo juego (evento) como una función del juego (evento) actual y las estrategias usadas por los equipos. Tenemos entonces $T : W \times [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{2^*} \longrightarrow W$. La función de transición es desconocida para ambos equipos y tiene solo tres posibles resultados:

   *a*) $T((a, b), (\theta^A, \theta^B)) = (a, b)$
   *b*) $T((a, b), (\theta^A, \theta^B)) = (a + 1, b)$
   *c*) $T((a, b), (\theta^A, \theta^B)) = (a, b + 1)$

De hecho, como la función de transición tiene solo tres posibles resultados (anota A, anota B o nadie anota), generalmente dependerá de las estrategias de los equipos.

Algunas definiciones que serán de utilidad en el resto del capítulo son:

**Definición 13.** *Para cada* $t \in \mathbb{N}$*, definimos* $H^t$ *como el producto cartesiano de* $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{2^*}$ $t$ *veces, es decir, un elemento* $h \in H^t$ *es una historia de longitud* $t$*. Notamos con* $H^0 = \{e\}$ *el conjunto de historias de longitud* 0*, con* e *representando a la historia vacía. Sea* $H = \cup_{t=0}^{\infty} H^t$ *el conjunto de todas las historias.*

**Definición 14.** *Una estrategia del jugador* $i \in \{A, B\}$ *para el juego* $G$ *es una función* $f_i : H \to [\underline{\theta}, \overline{\theta}]^{2^*}$.[1] *Vamos a notar* $F_i$ *al conjunto de todas estas funciones para el jugador* $i$ *y con* $F = F_A \times F_B$*.*

[1]En palabras, los jugadores deciden sus acciones sabiendo todas las acciones previas, esto es conocido como monitoreo perfecto.

Notamos $(a,b)^j = (a,b)(h_{j-1}) = T((a,b)^{j-1}, h_{j-1})$, donde $h_t \in H$ para todo $t \geq 0$. Esto es, el resultado del juego en la etapa $j$ es una consecuencia de las estrategias usadas en las etapas anteriores.

**Definición 15.** *Una estrategia $f_i \in F_i$ es estacionaria si para cada $h, h' \in H$ tal que $(a,b)(h) = (a,b)(h')$, tenemos que $f_i(h) = f_i(h')$.*

Esto es, una estrategia es estacionaria si solo depende del evento en el que se está, y no en como se llegó a este ese evento. Notaremos al conjunto de estrategias estacionarias como $S$. En su trabajo, Massó - Neme realizan una caracterización de los pagos de equilibrio en términos de estrategias estacionarias conexas. En nuestro trabajo, consideramos que todas nuestras estrategias son estacionarias. Esto significa que a los equipos no les importa, cuando están jugando en determinado evento, cómo llegaron a este mismo. Por ejemplo, si el partido se encuentra empatado (3,3), el equipo $A$ y $B$ jugarán de la misma manera, sin importar si el partido iba (3,0) o (0,3). Esta hipótesis puede sonar bastante forzada. Usualmente, cómo un resultado es alcanzado conlleva una gran carga emocional para los equipos. Si un equipo va ganando (4,0) y se encuentra con que le empatan (4,4), es común que los jugadores de ese equipo se desilusionen, se pongan nerviosos y cambien sus estrategias e incentivos. Pero esta hipótesis es aplicable en varios casos reales, en especial cuando juegan equipos de alto rendimiento. Por ejemplo, en la primera ronda de la Copa del Mundo 2015, los All Blacks (el seleccionado nacional de Nueva Zelanda), un equipo de Grupo I, jugó contra Los Pumas (seleccionado nacional de Argentina), un equipo de Grupo II. El segundo tiempo comenzó con Los Pumas ganando por una diferencia de cuatro puntos. Uno puede suponer que los All Blacks, actualmente el mejor equipo de rugby del mundo (y uno de los mejores de cualquier deporte con aproximadamente el 90 % de partido ganados desde el 2010), se pondrían nerviosos al perder con un equipo del Grupo II. Pero la confianza en su plan de juego y sus habilidades, hizo que se mantuvieran jugando como lo venían haciendo sin cambiar estrategias. Resultado final: All Blacks 26 - 14 Los Pumas. Por lo tanto, esta hipótesis puede ser correctamente aplicada para equipos de alto rendimiento, y refleja su buena fortaleza mental, y que aplicarán su plan de juego a pesar del resultado.
Otro resultado en el trabajo de M-N es el siguiente:

**Lema 4.** *Sea $f \in F$. Existen $M, R \in \mathbb{N}$ tal que $(a,b)^{t+R}(f) = (a,b)^{t+R+M}$ para cada $t \geq 1$. Esto es, una estrategia estacionaria (toda estrategia en nuestro caso) produce un ciclo finito de longitud $M$ después de $R$ períodos.*

Notamos $c_{(a,b)}(f) = \{(a,b)^{R+1}, \ldots (a,b)^{R+M}\}$ al ciclo generado por $f$.

**Definición 16.** *Sean $f^l, f^{l'} \in F$.*

1. *Decimos que $f^l$ y $f^{l'}$ son directamente conexas, $f^l \sim f^{l'}$, si $c(f^l) \cap c(f^{l'}) \neq \emptyset$.*
2. *Decimos que $f^l$ y $f^{l'}$ son conexas, $f^l \approx f^{l'}$, si existen $f^1, \ldots, f^m \in F$ tales que $f^l \sim f^1 \sim \ldots \sim f^m \sim f^{l'}$.*[2]

**Definición 17.** *Para cada $i \in \{A, B\}$, $U_i = (\frac{1}{|s|})\Sigma_{r=1}^{M} U_i^{j(r)}((\theta^A, \theta^B)^{R+r(s)})$, donde $j(r)$ es tal que $(a,b)^{j(r)} = (a,b)^{R+r}(s)$.*

Esto significa que el pago de las estrategias estacionarias es la media de los pagos de los ciclos. La caracterización de M-N se basa en combinaciones conexas de los pagos de estrategias conexas estacionarias. Pero primero, necesitamos una caracterización del conjunto de pagos factibles de $G$.

**Definición 18.** *Un vector $v \in \mathbb{R}^2$ es factible si existe una estrategia $f \in F$ tal que $v = U(f)$.*

Entonces, en M-N podemos encontrar el siguiente resultado:

**Teorema 14.** *Un vector $v \in \mathbb{R}^2$ es factible si y solo si existe $S(v) = \{s^1, \ldots, s^{\overline{k}}\} \subseteq S$ tal que para cada $s^r, s^{r'} \in S(v)$, $s^r \approx s^{r'}$ y existen $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{\overline{k}}) \in \overline{\Delta}$ (el simplex $\overline{k}$-dimensional) tal que*

$$v = \Sigma_{k=1}^{\overline{k}} \alpha^k U(s^k).$$

Esto es, el conjunto de pagos factibles es una combinación convexa de pagos de estrategias estacionarias. En nuestro caso, el conjunto de pagos factibles puede ser visto en la Figura 1.1. Como podemos ver en el gráfico, la mayor región de pagos factibles es la del sistema (+4), seguida del sistema (3+) y por último (NB). Como vemos el sistema (NB) tiene como región de pagos factibles solamente un segmento, esto se debe a que siempre el valor del pago total (pago de 1 más pago de 2) es 4.

**Definición 19.** *Decimos que $f^* \in F$ es un equilibrio de Nash del juego $G$ si para todo $i \in \{A, B\}$, $U_i(f^*) \geq U_i(g_i, f^*_{-i})$ para todo $g_i \in F_i$. Un vector $v \in \mathbb{R}^2$ es un pago de equilibrio de $G$ si existe un equilibrio de Nash de $G$, $f \in F$, tal que $U(f) = v$.*

El siguiente resultado de M-N caracteriza los pagos de equilibrio del juego G.

[2] En palabras, dos estrategias son directamente conexas si desde el ciclo de estados de una de ellas, los jugadores tienen acceso directo al ciclo de estados de la otra y viceversa. Si en cambio son conexas, los jugadores pueden acceder del ciclo de estados de una de ellas al otro a través de un camino.

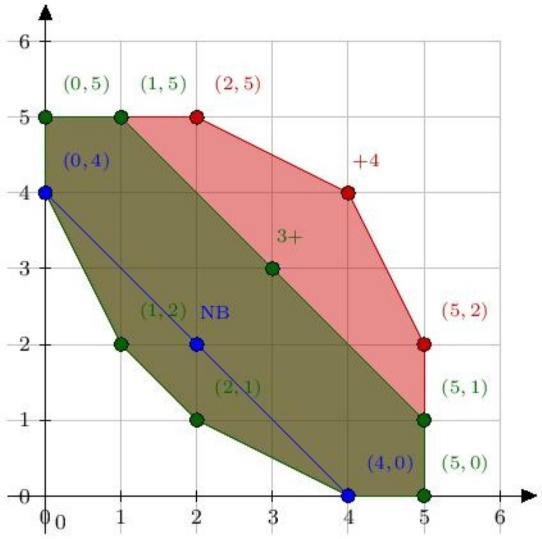


Figura 1.1: Pagos factibles

**Teorema 15.** *Sea $v$ un pago factible de $G$. Entonces $v$ es un pago de equilibrio si y solo si existen $s^1, s^2, s^3 \in S$, y $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in \Delta^3$ tal que $v = \Sigma_{k=1}^{3} \alpha^k U(s^k)$ y el pago $v_i$ es mayor o igual al pago más alto que el jugador $i$ se puede garantizar al desviarse de los ciclos de $s^1, s^2, s^3$, los ciclos que los conectan y el camino inicial de una de esas estrategias.*

Con todas las definiciones y teoremas presentados, analizaremos el juego donde tenemos:

- $\alpha(\theta^A, \theta^B) = \frac{\theta^A}{2} + \frac{\theta^{B2}}{2}$
- $\beta(\theta^A, \theta^B) = \frac{\theta^{A2}}{2} + \frac{\theta^B}{2}$
- Si $a \leq b$,

$$T((a,b),(\theta^A,\theta^B)) = \begin{cases} (a+1,b) & si \quad |\theta^A - \theta^B| \leq 0.5 \\ (a,b+1) & si \quad |\theta^A - \theta^B| > 0.5 \end{cases}$$

Si $a > b$, tenemos que

$$T((a,b),(\theta^A,\theta^B)) = \begin{cases} (a+1,b) & si \quad |\theta^A - \theta^B| > 0.5 \\ (a,b+1) & si \quad |\theta^A - \theta^B| \leq 0.5 \end{cases}$$

Recordemos que $\alpha$ y $\beta$ son las probilidades de que anote el equipo A y el equipo B respectivamente. La función de transición en este caso nos indica que siempre algún equipo anota, que no es posible quedar en el mismo

evento. También otorga una leve ventaja al equipo $A$, ya que en el caso de estar empatados, siempre tiene la posibilidad de anotar usando la estrategia $\theta^A = 1/2$.
Con estas funciones definidas, obtenemos las siguientes regiones de pagos factibles y de pagos de equilibrio. En la Figura 1.2 los correspondientes al sistema (NB), donde $A = (5/2, 3/2)$. En la Figura 1.3, para el sistema (3+), donde $B = (87/32, 55/32)$. Por último, en la Figura 1.4, para el sistema (+4), donde $C = (119/32, 87/32)$.

Nuevamente obtenemos que los mejores pagos factibles pertenecen al sistema (+4), seguido del (3+) y por último el sistema (NB). También ocurre lo mismo con los pagos de equilibrio. El hecho de que la función de transición le de una ventaja al equipo $A$, hace que los pagos de equilibrio favorezcan a este equipo, ya que la estrategia $\theta^A = 1/2$ siempre lo va a posicionar favorablemente.

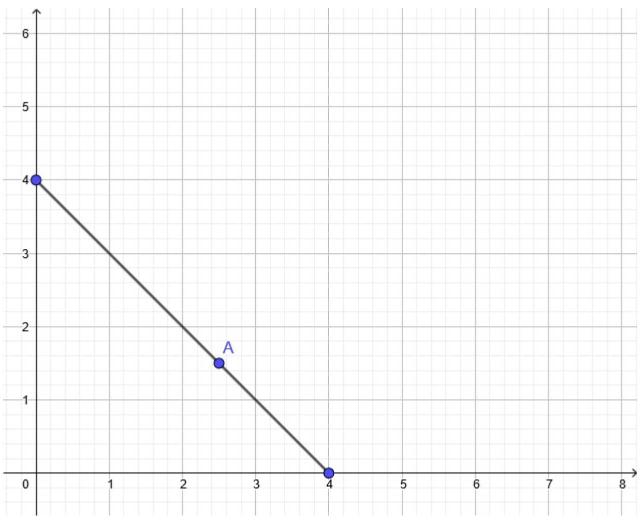


Figura 1.2: Pagos factibles y minimax en NB

## 1.3. Conclusiones

Esta parte del trabajo arroja dos resultados no tan diferentes usando distintos enfoques sobre el mismo problema. Tanto en el modelo estático como en el dinámico, vemos que el sistema (+4) hace que los equipos sean más ofensivos y tengan más variedad de pagos factibles, que con cualquiera de los otros dos sistemas. Más aún, en el ejemplo usado, también tiene mejores

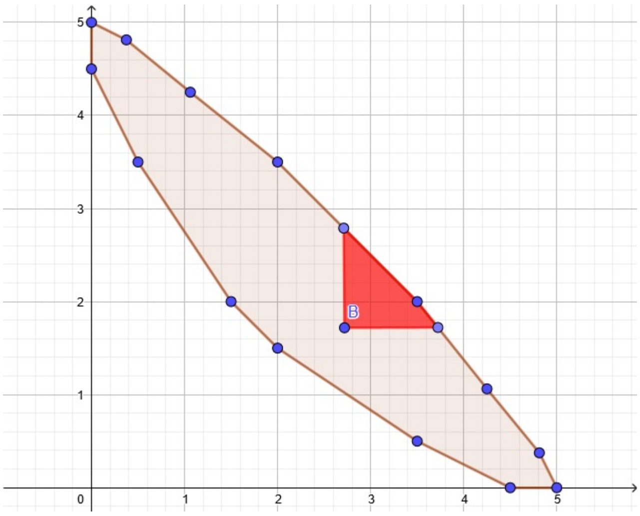

Figura 1.3: Pagos factibles y minimax en 3+

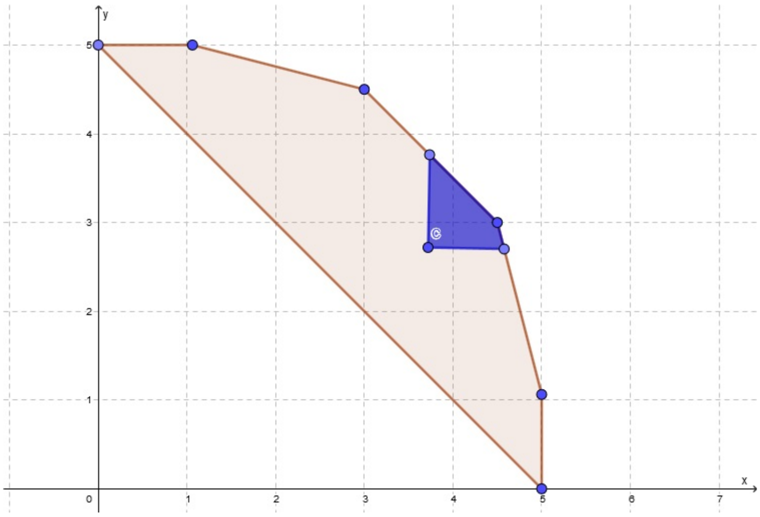

Figura 1.4: Pagos factibles y minimax en +4

pagos de equilibrio. No ocurre lo mismo con los sistemas (NB) y (3+). En el caso estático, (NB) hace los equipos más ofensivos, mientras que en el caso dinámico, la región de pagos factibles es mayor en el sistema (3+). Nuevamente en el ejemplo también tiene una mejor región de pagos de equilibrio. Por lo tanto, si se lo mira desde un punto de análisis de estrategias y de pagos factibles, el sistema (+4) debe ser el elegido para poder hacer más "entretenido" al juego.
Distintas líneas pueden surgir de este trabajo para investigaciones futuras.

Primero en realizar un análisis general de los pagos de equilibrio, donde la intuición parece indicar que (+4) sigue siendo el mejor sistema. También se podrían analizar las estrategias que los equipos utilizan en el modelo dinámico, para luego así compararlas en términos de ofensividad. Y por último quedaría encontrar el sistema de puntuación óptimo, tanto para el análisis enfocado en estrategias como en pagos factibles y de equilibrio.

# Bibliografía


[1] Arrow, K.: *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York, 1951.

[2] Austen-Smith, D. y Banks, J.: *Positive Political Theory I: Collective Preference*, The University of Michigan Press, Ann Arbor MI, 1998.

[3] Barthelemy, J.R., Leclerc, B. y Monjardet, B.: "On the Use of Ordered Sets in Problems of Comparison and Consensus of Classifications", *Journal of Classification* 3: 187–224, 1986.

[4] Baryshnikov, Y.: Topological and Discrete Social Choice: In a Search of a Theory, *Social Choice and Welfare* 14: 199–209, 1997.

[5] Biais, B., Bisiére, C., Bouvard, M. y Casamatta, C.: " The Blockchain Folk Theorem", *Toulousse School of Economics Working Paper* 17-817, 2018.

[6] Brown, D.: An Approximate Solution to Arrow's Problem, *Journal of Economic Theory*, bf 9: 375–383, 1974.

[7] Brocas, I. y Carrillo, J.: "Do the 'Three-Point Victory' and the 'Golden Goal' Rule Make Soccer More Exciting?", *Journal of Sports Economics*, 5, 2: 169–185, 2004.

[8] Campbell, D. y Kelly, J.: Preference Aggregation, *Mathematica Japonica*, 45: 573–593, 1997.

[9] Caryl, S., 2014, "1950: Law of Return". Retrieved from https://www.nationalgeographic.org/thisday/jul5/law-return/

[10] Chiappori, P. A., Levitt, S. Groseclose, T.: "Texting Mixed Stretegy Equilibria when Players are Heterogeneous: the Case of Penalty Kicks in Soccer", *American Economic Review*, 92: 1138–1151, 2002.

[11] Chichilnisky, G.: Social Choice and the Topology of Spaces of Preferences, *Advances in Mathematics*, 37: 165–176, 1980.

[12] Cho, W.J. y Ju B.-G.: "Multinary Group Identification", *Theoretical Economics* 12: 513–531, 2017.

[13] Cho, W.J. y Saporiti, A.: "Incentives, Fairness, and Efficiency in Group Identification", *The School of Economics Discussion Paper Series* 1117 Economics, The University of Manchester, 2015.

[14] Dutta, B.: "Fuzzy Preferences and Social Choice", *Mathematical Social Sciences*, 13: 215–229, 1987.

[15] Dutta, B., Panda, S. y Pattanaik, P.: "Exact Choices and Fuzzy Preferences", *Mathematical Social Sciences*, 11: 53–68, 1986.

[16] Fishburn, P.C.: "Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters", *Journal of Economic Theory*, 2: 103–106, 1970.

[17] Fishburn, P.: Interprofile Conditions and Impossibility, *Harwood Academic Publishers*, Chur (Switzerland), 1987.

[18] Fishburn, P.C. y Rubinstein, A.: "Aggregation of Equivalence Relations", *Journal of Classfication* 3: 61–65, 1986.

[19] Hajja, M.: "Some Elementary Aspects of Means", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2013, Article ID 689560, 9 pages, 2013. doi:10.1155/2013/689560

[20] Hansson, B.: The Existence of Group Preferences, *Public Choice*, 28: 89–98, 1976.

[21] Hurwicz, L.: Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes, in K. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford University Press, Stanford CA, 1960.

[22] Hurwicz, L. y Reiter, S.: Transversals, Systems of Distinct Representatives, Mechanism Design and Matching, *Review of Economic Design*, 6: 289-304, 2001.

[23] Kasher, A.: "Jewish Collective Identity", in: *Jewish Identity*, eds. D.T. Goldberg and M. Kraus, Philadelphia: Temple University Press, 1993.

[24] Kasher, A. y Rubinstein, A.: "On the Question "Who is a J?": A Social Choice Approach", *Logique & Analyse* 160: 385–395, 1997.

[25] Kirman, A. y Sondermann, D.: Arrow's Theorem, Many Agents and Invisible Dictators, *Journal of Economic Theory*, 5: 267–277, 1972.

[26] Kolany, A.: On the Logic of Hypergraphs, in *Computational Logic and Proof Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[27] Lauwers, L. y Van Liedekerke, L.: Ultraproducts and Aggregation, *Journal of Mathematical Economics*, 24: 217–237, 1995.

[28] Lauwers, L.: Topological Social Choice, *Mathematical Social Sciences*, 40: 1–39, 2000.

[29] Masso, J.y Neme, A.: "Equilibrium Payoffs of Dynamic Games", *International Journal of Game Theory*, 25, 4: 437–453, 1996.

[30] McMorris, F. R. y Powers, R.C.: "A Characterization of Majority Rule for Hierarchies", *Journal of Classification* 25: 153–158, 2008.

[31] Mirkin, B.: "On the Problem of Reconciling Partitions", in *Quantitative Sociology, International Perspectives on Mathematical and Statistical Modelling*, eds. H.M. Blalock, A. Aganbegian, F.M. Borodkin, R. Boudon, y V. Capecchi, New York: Academic Press, 441–449, 1975.

[32] Mount, K. y Reiter, S.: The Informational Size of Message Spaces, *Journal of Economic Theory*, 8: 161–192, 1974.

[33] Nicolas, H.: "I want to be a J!: Liberalism in group identification problems", *Mathematical Social Sciences* 54 59-70, 2007.

[34] Palomino, F., Rigotti, L. y Rustichini, A.: "Skill, Strategy and Passion: An Empirical Analysis of Soccer", [Mimeo], Tilburg University, 1999.

[35] Reiter, S.: Information and Performance in the $(\text{New})^2$ Welfare Economics, *American Economic Review*, 67: 226–234, 1977.

[36] Saporiti, A.:"A Proof for 'Who is a J' Impossibility Theorem", *Economics Bulletin*, 32: 494–501, 2012.

[37] Sen, A.: *Collective Choice and Social Welfare*, Holden Day, San Francisco, CA, 1970.

[38] Sen, A.: "The impossibility of a Paretian Liberal", *Journal of Political Economy* 78(1) 152-157, 1970.

[39] Shoenfield, J.: *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.

[40] Shorish, J.: Blockchain State Machine Representation, *Open Science Framework* (`https://osf.io/hbmje/`), 2018.

[41] Smullyan, R.: *First-Order Logic*, Dover, New York, 1995.

[42] Stigum, B.: *Toward a Formal Science of Economics*, MIT Press, Cambridge, MA, 1990.

[43] Sung, S.C. and Dimitrov, D.: "On the Axiomatic Characterization of 'Who is a J?"', *Logique & Analyse* 48: 101–112, 2005.

[44] Suppes, P.: *Axiomatic Set Theory*, Toronto: Dover Publications, 1972.

[45] Walker, M. y Wooders, J.: "Minimax Play at Wimbledon", *American Economic Review*, 91: 1521–1538, 2001.

[46] Zadeh, L. A.: "Fuzzy Sets", *Information and Control*, 8: 338–353, 1965.