¿*POR QUÉ RECORDAMOS A BROUWER*?

Jorge Alfredo Roetti

¿Por qué recordamos a Brouwer? Hay varias maneras de entender la pregunta. Para nosotros será la pregunta que se pueden hacer quienes han cultivado la lógica por años y se han ocupado alguna vez con temas relativos a la disputa de fundamentos entre lógicos “clásicos” e “intuicionistas”. La lógica actual, en sus numerosas ramas, sigue siendo mayoritariamente “clásica”. Sin embargo el intuicionismo y su presunta superación, el “constructivismo”, atraen cada vez más adeptos. Hoy podemos recordar a Brouwer como quien inició hace un siglo, en 1907, la forma moderna del estilo de fundamentación intuicionista. También podemos preguntarnos si lo recordaremos como matemático, como lógico o como filósofo. La inspección de su obra facilita la respuesta: lo recordaremos simultáneamente como matemático, lógico y filósofo, porque su lógica pretendió fundarse en lo que Brouwer consideraba el genuino modo de pensar matemático y eso suponía una concepción de ese pensar y del conocimiento en general y de su relación con el lenguaje. Esto lo llevó a elaborar una teoría intuicionista del conocimiento y de la filosofía de la ciencia, especialmente de la matemática. Además, aunque no entremos en detalles, es preciso recordar que los intereses filosóficos de Brouwer fueron mucho más amplios que los que atañen a la fundamentación de la lógica, la matemática y la teoría del conocimiento.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer, matemático holandés, nació el 27 de febrero de 1881 en Overschie, localidad que desde la ocupación alemana de 1941 pasó a ser parte de Amsterdam, y murió el 2 de diciembre de 1966 en Blaricum, también Holanda, a los 85 de edad, luego de que lo atropellara un automóvil a la puerta de su casa. Sus numerosos trabajos sobresalieron en varios campos de la matemática, pero se ocuparon especialmente de *topología* – es decir, del estudio de las propiedades más básicas de las estructuras espaciales en sentido amplio –, de *teoría de la medida* y de *análisis matemático*, especialmente *análisis de variable compleja*. Demostró el famoso teorema del punto fijo en 1908 (*Brouwerscher Fixpunktsatz*), estableció la importancia de los espacios cartesianos en topología, demostró el teorema de traslación plana, que caracteriza las transformaciones topológicas del plano cartesiano sobre sí mismo (1911), demostró que el número de dimensiones de un espacio cartesiano es topológicamente invariante, generalizó el teorema de

Jordan para *n* dimensiones (1912), etc. A él se debe la primera definición estricta de la noción de dimensión. Luego, entre 1928-1930, discutirá con Karl Menger sobre la prioridad en dicha definición. Por la importancia y cantidad de sus resultados muchos lo consideran el padre de la topología moderna, lo que no es poco decir. Sus trabajos más importantes en topología son de su juventud, entre los 28 y los 32 años.

El intuicionismo fue en sus comienzos muy conocido en el centro y este de Europa, pero recién cobró notoriedad en el resto del mundo luego de la segunda guerra mundial. Brouwer fue un hombre de carácter fuerte. Estuvo envuelto en varias peleas con David Hilbert, a partir de 1920.[1] Se doctoró en la Universidad de Amsterdam en 1907 con la disertación *Over de Grondslagen der Wiskunde*, en la que se esboza el programa intuicionista y comienza su reconstrucción crítica de la matemática y la lógica. El título completo de su tesis ya muestra un espíritu combativo, pues traducido dice así: *Sobre los principios de la matemática, dirigida entre otras cosas contra la axiomatización de la matemática, la teoría de conjuntos de G. Cantor y E. Zermelo, como también contra la lógica simbólica de G. Peano y B. Russell*. En efecto, Brouwer fundó al intuicionismo matemático como antagónico al logicismo y consideró a una cierta intuición temporal como el fundamento de la matemática. Para él la matemática era una ciencia cuyos objetos son construcciones mentales que tornan evidentes las expresiones matemáticas que las describen. La lógica intuicionista era para Brouwer un subproducto de la matemática, lo que contradecía la tesis del logicismo. Todo individuo nacería con una "visión" original de una infinitud de objetos, construída por la generación recursiva de colecciones crecientes no acotadas. De hecho, esto explicaría la comprensión que tienen los niños de la secuencia de los números naturales, porque tienen la habilidad de ir añadiendo en la imaginación un objeto por vez y así comprender que pueden proseguir esa secuencia sin encontrar un último elemento de ella, pues no hay ninguna regla que obligue a acotar el proceso.

Brouwer emprendió en 1918 la reconstrucción sistemática de la matemática con un trabajo muy técnico en alemán "*Begründung der*

[1] Recordemos el famoso "*Mathematische-Annalen-Streit* con Hilbert. Ver VAN DALEN 1990.

Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre" (*Fundamentación de la teoría de conjuntos con independencia del principio de tercero excluído. Primera parte, Teoría general de conjuntos*), que completó en 1920 con '*Intuitionistische Mengenlehre*' (*Teoría intuicionista de conjuntos*), el primer trabajo de matemática intuicionista que apareció en una revista científica internacional de primera línea: el *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker-Vereins* (*Informe anual de la Unión Alemana de Matemáticos*).

A consecuencia del teorema de Zermelo, que demostraba la equivalencia deductiva entre el principio de elección y el de buena ordenabilidad de todo conjunto, Brouwer se propuso reconstruir la teoría de conjuntos y toda la matemática prescindiendo del sospechoso axioma de elección. Así comenzó la reconstrucción intuicionista de buena parte de la matemática. No obstante, sin el axioma de elección, una parte considerable de la matemática clásica desaparecía, por lo que la escuela intuicionista fue firmemente resistida, especialmente por Hilbert y su escuela formalista y los antiguos logicistas.

Algunos aspectos del intuicionismo.

Como ya señaláramos, se deben a Brouwer muchos avances en varios campos de la matemática, pero nosotros enfatizaremos la revolución que produjo en la lógica, provocada por sus ataques contra el logicismo de Frege, Peano y sus seguidores, contra los infinitos actuales de Cantor y sus adláteres, contra la admisión de *tertium non datur* en dominios no finitos, contra la aserción no calificada de existencia, cuando no se puede dar una construcción del objeto del cual se dice que "existe" matemáticamente, y contra el reconocimiento del conjunto del continuo de todos los números reales. Como solución propuso concebir al continuo como "un medio que deviene libremente". En virtud de las dificultades de fundamentación de la matemática clásica y de las entonces recientes antinomias de la teoría ingenua de conjuntos de Cantor, Brouwer se propuso:

1. Utilizar sólo entes matemáticos "construidos" previamente a partir de la secuencia de la "intuición originaria", o "*Ur-Intuition*" en alemán.
2. Utilizar una lógica oriunda del pensamiento matemático, que será la lógica "intuicionista" adecuada para colecciones infinitas de objetos,

y no una fundada en las reglas para el pensamiento finito, que será la lógica “clásica”.
3. Admitir sólo los infinitos reducibles al infinito potencial, que es el único construido en la secuencia de la “intuición originaria”, y de este modo rechazar gran parte del “paraíso de Cantor”, que defendían logicistas y formalistas.
4. Reconstruir la matemática clásica exclusivamente con métodos “constructivos” de definición y demostración.

Para ello su programa exigía que las demostraciones matemáticas:
1. Tuvieran un número finito de pasos o utilizaran una forma de inducción enumerable o reducible a ella, es decir reducible a un proceso infinito potencial dado por un esquema metalingüístico finito.
2. Los entes que apareciesen en las demostraciones estuviesen previamente definidos en forma constructiva, o se construyesen a partir de los previamente definidos en un número finito de pasos, o por definiciones esquemáticas recursivas enumerables o reducibles a éstas.
3. No se admitiesen definiciones impredicativas.
4. No se admitiesen objetos infinitos actuales.
5. Las pruebas de existencia fuesen “constructivas”, las que podrían ser a su vez “fuertes” o “débiles”.
6. No se utilizasen el axioma de elección, ni ninguno de sus equivalentes.
7. Sólo se usase el *tertium non datur* en aquellos casos en que uno de los extremos de la disyunción estuviese demostrado o existiese un método efectivo para demostrarlo.
8. Las pruebas constructivas fuesen algorítmicas.

La matemática es según Brouwer la parte exacta del pensamiento. Si nos atenemos estrictamente a ello, todo lo que estuviese suficientemente fundado sería matemática. Pero las demostraciones matemáticas en sentido estricto se obtienen originariamente por *construcción en la intuición temporal*, a partir de la sucesión fundamental de los números 1, 2, ... Cuando Brouwer presentó su tesis ya se sabía muy bien que la caracterización kantiana del espacio era ambigua y no permitía determinar ninguna geometría métrica determinada. De allí que la pluralidad de geometrías relativamente consistentes con métricas diversas fueran todas compatibles con la filosofía kantiana. En cambio la intuición temporal se presentaba – y se presenta – como única y determinada. Las construcciones realizadas en ella serían por lo tanto necesarias y serían además el *fundamento intuitivo de la matemática* como saber absolutamente fundado. La concepción intuicionista de la *verdad* matemática será entonces la de una verdad *por correspondencia*. Por lo tanto la matemática será un *saber no axiomático ni analítico*, sino *sintético ampliativo*, aunque *a priori* y *monótono*, en lo que se advierte la influencia de Kant.

No discutiremos si su temporalidad fue descriptiva o empírica. De todos modos su concepción sufrió acusaciones de psicologismo. Éste es uno de los problemas que intentarán superar algunos constructivistas posteriores. Especialmente el constructivismo de Paul Lorenzen (1915-1995), fue una síntesis dialéctica entre el intuicionismo de Brouwer y el formalismo de Hilbert, pues del intuicionismo aceptó los ataques de arriba, con lo que se diferenció de la matemática clásica, pero por otra parte rechazó los presuntos aspectos de psicologismo empírico de las construcciones en el tiempo, que son difíciles de considerar públicas y que por lo tanto podrían ser intersubjetivamente incontrolables. Por otra parte dicho constructivismo adoptó parcialmente el formalismo de Hilbert, por ejemplo aspectos de su "giro lingüístico" y su concepción de muchas teorías como sistemas de objetos que se estudian desde una metamatemática, pero entre sus objetos no aceptó, como sí lo hacía Hilbert, todo el "paraíso de Cantor". Por ejemplo limitó el universo de los transfinitos ordinales a los de la segunda clase numérica de los ordinales transfinitos enumerables. Los procesos recursivos con orden transfinito era admisibles, pero bajo la condición de que se encontrara un proceso de reducción a una recursión finita. De los cardinales transfinitos sólo conservó $\aleph_0$, pues dio una prueba de que era posible construir funciones inyectivas de $\aleph_n$ sobre $\aleph_0$. Esa demostración permitió, por una parte, tornar superflua una parte importante del paraíso cantoriano y, por otra, resolver problemas como el primero de la lista de Hilbert, el de la hipótesis del continuo. El continuo real $\mathbb{R}$ se mostró así como posiblemente enumerable.[2]

Para el filósofo es de interés saber que para Brouwer el lenguaje y el pensamiento tienen orígenes diferentes. El lenguaje es para él

[2] Para una explicación detallada del problema del continuo y su solución o disolución constructiva, véase por ejemplo ROETTI 2000: ver bibliografía.

expresión originaria de la subjetividad y se comprende especialmente por su relación con la voluntad. Su función originaria es la de influir mediante sonidos sobre la conducta de los oyentes, es decir promover con órdenes o emociones las conductas de los otros miembros del grupo. Naturalmente el lenguaje primitivo se desarrolló hasta tornarse parcialmente descriptivo y sirvió de ese modo a los humanos como importante ayudamemoria. Por su parte para Brouwer el pensamiento no depende esencialmente del lenguaje, sino de construcciones realizadas en la imaginación. Esto es especialmente notorio en el pensamiento matemático, cuyos objetos se construyen sucesivamente a partir de la secuencia dada por una "intuición originaria" temporal o *Ur-Intuition*. A partir de esas construcciones imaginativas alcanzaríamos la existencia matemática, ligada así íntimamente a la conciencia individual. La intersubjetividad del pensamiento matemático requerirá por su parte de medios simbólicos compartidos de tipo adecuado, entre los que naturalmente se cuenta un lenguaje ya altamente elaborado de tipo descriptivo.

El intuicionismo de Brouwer reposaba sobre una filosofía de la mente, que mucho debía a Kant y a Schopenhauer. La matemática era una actividad libre del pensamiento exacto que se fundaba en la intuición pura del tiempo interno de la conciencia. Los objetos externos y el lenguaje no jugarían un papel importante en ella. De este modo intentó evitar el platonismo con sus problemas epistemológicos y el formalismo con su pobreza de contenido. La verdad matemática residía en la actividad del pensamiento. Un enunciado sobre ciertos objetos matemáticos sólo era verdadero cuando el sujeto había experimentado su verdad a partir de la construcción mental de esos objetos y sus relaciones, y era falso sólo cuando el sujeto había experimentado su falsedad o, lo que es lo mismo, había realizado una construcción mental que mostraba su imposibilidad. Por ello para Brouwer no existían verdades no experimentadas.

Su filosofía de la mente no fue un aspecto anecdótico de su pensamiento, sino un componente esencial que él desarrollaría a lo largo de toda su vida. Por ello no le interesó si la matemática reconstruida al modo intuicionista era compatible o incompatible con la matemática clásica. Esto no resultó problemático en el caso de la aritmética elemental, pues la aritmética intuicionista resultó ser un subsistema de la aritmética clásica, y por lo tanto compatible con ésta.

En cambio en análisis matemático, que es la extensión de la aritmética a los dominios continuos real y complejo con operaciones de diferenciación, la situación se tornó diferente, pues se dio la circunstancia de que ni todo el análisis clásico era intuicionistamente aceptable, ni todo el análisis intuicionista era clásicamente aceptable.

Desarrollo del intuicionismo de Brouwer.

Brouwer escribió en 1905 un pequeño libro titulado *Vida, arte y misticismo*, donde todavía no desarrollaba su concepción de la matemática, pero donde dio la clave para la comprensión de los fundamentos en la forma en que se utilizaron luego en su disertación de 1907. El librito reunió una variedad de temas, desde el de su concepción de la sociedad y de las mujeres, hasta sus ideas básicas sobre la mente, el lenguaje, la ontología y la epistemología. Los problemas fundamentales de la filosofía y no las novedosas paradojas y antinomias de esos días son los que incitaron el desarrollo intuicionista de Brouwer. No obstante, una vez que se hubiese desarrollado suficientemente el intuicionismo, surgieron de él soluciones adecuadas para esas paradojas y antinomias.

Brouwer sostuvo siempre que la matemática era una actividad independiente del lenguaje y que éste sólo cumplía la función de describir la actividad matemática. Esto lo llevó a negar a los tratamientos axiomáticos todo papel fundacional en matemática. Por su parte la lógica se convirtió en el estudio de las regularidades que se dan en las traducciones lingüísticas de la actividad matemática y era por lo tanto dependiente de la matemática, en tanto expresión de esas regularidades, y no a la inversa, como pretendía el logicismo. Eso lo movió a introducir la distinción entre matemática y metamatemática, para la que usó la expresión 'matemática de segundo orden', como le comenta a Hilbert en sus conversaciones de 1909. Hilbert adoptará luego esa distinción, que se toma como de su invención, introduciendo el término 'metamatemática'. No recuerdo que Hilbert se haya acordado de Brouwer al considerar la idea.

El recurso del intuicionismo al sujeto creador, luego de la introducción de las secuencias de elección y la demostración del teorema de barra, fue un nuevo paso en el uso de aspectos de la estructura supuestamente necesaria del sujeto matemático, lo que lo aproximó nuevamente a la concepción kantiana de la demostración matemática. Como el desarrollo de la matemática es un proceso infinito fundado en las construcciones que paulatinamente se van realizando en el sujeto matemático, podemos esperar siempre nuevos instrumentos demostrativos ligados a la descripción de la estructura de la subjetividad.

La noción clásica de secuencia es diferente en la matemática intuicionista, especialmente por su principio de elección continua (en inglés *principle of continuous choice*, que se abrevia CC). Los teoremas fundamentales del análisis intuicionista – el teorema de barra, el teorema de abanico y el teorema de continuidad – se encuentran en '*Über Definitionsbereiche von Funktionen*' ('*Sobre los dominios de la definición de funciones*') de 1927. Los dos primeros son teoremas estructurales sobre las "extensiones" o dispersiones; el tercero, que no se debe confundir con el principio de continuidad para las secuencias de elección, dice que toda función total $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e incluso uniformemente continua. El teorema de abanico es un corolario del teorema de barra y cuando se lo combina con el principio de continuidad, que por otra parte no es clásicamente válido, produce el teorema de continuidad. Lo sorprendente es que en el análisis clásico ambas partes de ese teorema serían falsas. El teorema de barra y el teorema de abanico, por su parte, son clásicamente válidos, aunque las demostraciones clásica e intuicionista para ellos no son intercambiables: las demostraciones clásicas no son intuicionistamente aceptables por depender del principio de tercero excluido y las demostraciones intuicionistas son clásicamente inaceptables por tener como aspectos inevitables de su demostración reflexiones sobre la estructura de las demostraciones mentales. Una interesante demostración del teorema de barra dio Michael Dummett en su libro *Intuitionism*.

La cuestión de la existencia en matemática.

La cuestión de la cualidad de la existencia arriba indicada era peculiarmente importante, pues obligaba a distinguir en matemática entre:

Existencia fuerte, que es la que se predica cuando se puede dar una regla de construcción de un objeto tal que

$\vdash \varphi a$, lo que por la regla de deducción admitida $\varphi a \vdash \bigvee x.\varphi x$ nos permite deducir $\vdash \bigvee x.\varphi x$, y

Existencia débil, que predicamos cuando carecemos de la construcción de un objeto a tal que $\vdash \varphi a$, pero podemos demostrar que de la negación de la existencia se deduce una expresión indemostrable en la teoría, es decir $\neg \bigvee x.\varphi x \vdash f$, lo que equivale a $\vdash \neg\neg \bigvee x.\varphi x$.

Muchísimos teoremas de existencia son sólo de existencia débil. El propio teorema brouweriano sobre el punto fijo es un teorema de existencia débil. Dicho teorema en una versión simple dice:

"Si g es una función continua en todos sus puntos y suryectiva $g(x)$ tal que $g(x)\varepsilon[a, b]$ para todo $x\varepsilon[a, b]$, entonces g tiene al menos un punto fijo $g(x) = x$ en $[a, b]$." Se suele proponer demostraciones clásicas como la siguiente:

Dem. Por definición de la función $g(a) \geq a$, $g(b) \leq b$, por lo tanto

$g(a) - a \geq 0$, $g(b) - b \leq 0$

Puesto que g es continua en todos sus puntos el teorema del valor medio garantiza que no es el caso que para todo $c\varepsilon[a, b]$ no se dé $g(c) - c = 0$. Es decir, no es el caso que no exista al menos un $c\varepsilon[a, b]$ tal que $g(c) = c$. Esto es lo que se afirma al decir que existe en sentido débil al menos un punto fijo en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Como se advierte, recordando el teorema del valor medio o el teorema de Rolle, se deduce la existencia de al menos un punto fijo, pero de ningún modo se puede determinar un punto tal para una función continua y suryectiva cualquiera. Se trata pues de una demostración de existencia débil.

Una versión más general diría por ejemplo: "Toda función continua suryectiva $G{:}B^n \rightarrow B^n$ tiene un punto fijo, donde $B^n = \{x\varepsilon R{:}\ x = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$ es la esfera n-dimensional unitaria cerrada de radio uno.

Las demostraciones originales de Brouwer con clásicas. La pregunta inmediata es la de si existirá una demostración intuicionista. De acuerdo a un Brouwer más tardío su teorema del punto fijo es intuicionistamente inválido, aunque se puede demostrar de modo intuicionista un teorema análogo mediante aproximaciones.

El tercero excluido.

Brouwer rechazó la validez universal del principio de tercero excluído o *tertium non datur* (tnd), aunque en los tiempos de su disertación todavía pensaba que dicho principio era correcto aunque inútil, porque todavía interpretaba $p \vee \neg p$ como clásicamente equivalente a $\neg p \to \neg p$. En su trabajo de 1908 '*De Onbetrouwbaarheid der Logische Principes*' ('*La no fiabilidad de los principios lógicos*') formuló una crítica al tdn, diciendo que, aunque en su forma simple $p \vee \neg p$ dicho principio nunca llevaría a contradicción, hay instancias del mismo en las que no es razonable considerarlo verdadero. A partir de allí uno de los puntos centrales de la matemática intuicionista fue la negación de la validez universal de dicho principio. En su lugar se admitió un *quintum non datur metamatemático irrestricto para las proposiciones matemáticas* que se expresa así:

$\vdash A \vee \neg A \vee \neg\neg A \vee {*A}$, donde $*A$ es una fbf. matemática indecidida o indecidible.

Un caso tradicional de fbf. matemática aún indecidida y tal vez indecidible es la conjetura de Goldbach (1690-1764): "*Todo número natural par diferente de 2 es suma de al menos un par de números primos*". Los enunciados matemáticos de este tipo son importantes, pues muestran lo inadecuado de la limitación de la lógica a enunciados "definidos respecto de la verdad", es decir '*v*' o '*f*', y justifican su extensión modificada a enunciados indefinidos respecto de la verdad, aunque definidos respecto de su procedimiento de fundamentación, es decir respecto del procedimiento de ataque y defensa. Tanto el intuicionismo como el constructivismo no parten del prejuicio de "bivalencia" – característico de las lógicas llamadas crisipianas – de que todo enunciado es *v* o *f*, prejuicio también típico de las concepciones "platónicas" o realistas de la matemática, sino que admiten enunciados indefinidos respecto de verdad y falsedad. En la metamatemática esta tesis se expresa del modo siguiente:

1. '$\vdash A$' equivale a 'A está demostrada',
2. '$A \vdash f$' equivale a '$\vdash \neg A$' o '$\neg A$ está demostrada' (donde 'f' es 'una fbf. necesariamente falsa en la teoría'),

3. ‘($A \vdash f$) $\vdash f$’ equivale a ‘$\vdash \neg\neg A$’ o a ‘$\neg\neg A$’ está demostrada’,
4. ‘$*A$’ equivale a ‘ni está demostrada A, ni está demostrada $\neg A$, ni está demostrada $\neg\neg A$’ pero:
4.1. o bien existe al menos un algoritmo que podría decidir la cuestión, aunque aún no hemos completado su utilización,
4.2. o no se conoce aún ningún algoritmo que permita decidir la cuestión, pero puede existir,
4.3. o no puede existir ningún algoritmo que permita decidir la cuestión.

Estas variantes de 4 son las que permitirían hablar, por ejemplo, incluso de un *septimum non datur*.

De lo anterior se sigue que para el intuicionismo vale que: “A implica la falsedad necesaria de la falsedad necesaria de A, pero la falsedad necesaria de la falsedad necesaria de A no implica A”, e. d., es teorema

$\vdash A \to \neg\neg A$,

pero no es demostrable

$\neg\neg A \to A$,

con lo que se conserva la introducción de la doble negación, pero cae su eliminabilidad.

Esta asimetría es incompatible con el principio del tercero excluido, pues en matemática puede demostrarse, respecto de esa fbf., o A, o $\neg A$, o $\neg\neg A$, o nada de ello, es decir nuevamente *quintum non datur*.

Brouwer se propuso reconstruir la teoría de conjuntos de Cantor con estos instrumentos deductivos más débiles. En sus primeros trabajos de la época de su disertación había fracasado en el intento de otorgarle un sentido intuitivo o constructivo a la segunda clase numérica de Cantor, es decir la clase de todos los ordinales infinitos enumerables, y a las clases de ordinales aún mayores. A partir de aquí advirtió que no se puede realizar tal sentido intuitivo para las clases superiores de números ordinales, por lo que conserva sólo los ordinales finitos y una colección abierta indefinida de ordinales infinitos enumerables. En consecuencia no admitió una parte importante de la matemática conjuntista generalmente aceptada en ese momento. Para ello propuso ejemplos que, por no refutar estrictamente al tdn, hoy se conocen como los “contraejemplos débiles”.

Contraejemplos débiles.

La innovación que otorga al intuicionismo un alcance mucho mayor que el de otras variedades de matemática constructiva, incluida la del propio Brouwer en su disertación, es la de sus secuencias de elección. Estas secuencias potencialmente infinitas de números u otros objetos matemáticos, elegidos uno tras otros, hicieron su aparición como objetos matemáticos en una reseña de libros de 1914. El principio que las hacía matemáticamente admisibles fue el principio de continuidad, que recién formuló Brouwer en 1916 en unas notas a unas conferencias. La utilidad principal de las secuencias de elección era la de permitir una reconstrucción del análisis clásico: los puntos sobre el continuo (los números reales) se identificaron con secuencias de elección que satisfacen ciertas condiciones. La secuencias de elección se reunen en un "artefacto" denominado '*spread*' en inglés (es decir 'distribución' o 'extensión'), que cumple una función semejante a la de los conjuntos de Cantor en el análisis clásico. Brouwer utilizó al principio incluso la palabra alemana '*Menge*' ('conjunto') para los *spreads* y desarrolló una teoría de esas extensiones, y una teoría de conjuntos de puntos basada en ella, en un artículo en alemán en dos partes de 1918/1919 '*Begründung der Mengenlehre unabhängig vom Satz vom ausgeschlossenen Dritten*' ('*Fundamentación de la teoría de conjuntos con independencia del principio de tercero excluido*').

En 1921 Brouwer formuló en el título de un trabajo la pregunta de si cada número real tiene un desarrollo decimal. La respuesta que encontró fue negativa. Para ello le bastó demostrar que se puede construir secuencias de elección, es decir números reales, que satisfacen la condición de convergencia de Cauchy pero que *para su desarrollo dependen de un problema aún no resuelto*. Por lo tanto no se podría construir el desarrollo decimal de esas secuencias hasta que el problema no haya sido resuelto. Eso significa que no existirá ningún desarrollo decimal hasta que el problema no haya sido resuelto. Por lo tanto se podrá decir que hay – aunque sólo en sentido débil – números reales, es decir secuencias de elección convergentes, que no tienen un desarrollo decimal. En su trabajo de 1923 '*Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik*' ('*Sobre el significado del principio de tercero excluído en la matemática*'), usando nuevamente secuencias de elección y problemas no resueltos, Brouwer presentó una técnica general para generar contraejemplos débiles a los principios clásicos.

Contraejemplos fuertes.

En '*Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus*' ('*Reflecciones intuicionistas sobre el Formalismo*') de 1928 discutió las diferencias entre formalismo e intuicionismo relativas al tnd y a la relación entre matemática y lenguaje, y enfatizó que el formalismo presupone matemática con contenido en el metanivel. En ese trabajo presentó también su primer contraejemplo fuerte al tnd, mostrando que es falso que todo número real sea racional o irracional. Uno de esos contraejemplos dice:

$\neg\bigwedge x\varepsilon\mathbb{R}(\mathbb{Q}x\vee\neg\mathbb{Q}x)$,

donde $\mathbb{R}$ es la "especie" de los reales (o del continuo intuicionista) y $\mathbb{Q}x$ es el predicado 'x es racional' y los números reales en sentido intuicionista son interpretados como secuencias de elección convergentes. La verdad del contraejemplo parte de demostrar que el continuo no es descomponible de esa manera, es decir no se puede dividir o separar en dos conjuntos complementarios: es decir, no existen dispersiones (*spreads*) no vacías A y B tales que $A\cup B = \mathbb{R}$ y $A\cap B = \emptyset$. Supongamos por *raa* que existiesen esos A y B; entonces la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, si $x\varepsilon A$, y $f(x) = 1$, si $x\varepsilon B$, es total y por lo tanto, por el teorema de continuidad de Brouwer (generalizado de [0,1] a $\mathbb{R}$), es continuo. Pero entonces f debe ser constante. Pero entonces o bien A es igual a $\mathbb{R}$, o bien B lo es, y la otra dispersión es vacía. Pero esto contradice la hipótesis de que tanto A como B son no vacías. De que el continuo no se pueda dividir o separar de esa manera se sigue que $\bigwedge x\varepsilon\mathbb{R}(\mathbb{Q}(x)\vee\neg\mathbb{Q}(x))$ es falso. Porque si fuese verdadero, podríamos construir una división del continuo asignando mediante f, 0 a los números reales racionales (A), y 1 a los reales irracionales (B); pero esto es imposible, como hemos visto. Por lo tanto $\neg\bigwedge x\varepsilon\mathbb{R}(\mathbb{Q}(x)\vee\neg\mathbb{Q}(x))$ (o $\bigvee x\varepsilon\mathbb{R}\neg(\mathbb{Q}(x)\vee\neg\mathbb{Q}(x))$).

En las conferencias de Viena de 1928 '*Mathematik, Wissenschaft und Sprache*' (Matemática, ciencia y lenguaje) y '*Die Struktur des Kontinuums*' (La estructura del continuo), la primera más filosófica y la segunda más matemática, Brouwer propuso en forma explícita sus primeros comentarios sobre la noción del "sujeto creador" o "matemático idealizado" y en 1949 publicó nuevos contraejemplos fuertes diferentes en los que la prueba depende esencialmente de la estructura temporal de la actividad matemática del sujeto creador. Esos contraejemplos fuertes, por ejemplo:

$\neg\bigwedge x\varepsilon\mathbb{R}(\neg\neg x < 0 \rightarrow x < 0)$ (o $\bigvee x\varepsilon\mathbb{R}\neg(\neg\neg x < 0 \rightarrow x < 0)$) y

$\neg\bigwedge x\varepsilon\mathbb{R}(x \neq 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 0)$ (o $\bigvee x\varepsilon\mathbb{R}\neg(x \neq 0 \rightarrow x < 0 \vee x > 0)$) ,

se basan en el teorema de abanico y en la teoría matemática del 'sujeto creador'. El primero demuestra que existe (en forma débil) un caso donde la eliminación de la doble negación conduce a contradicción, por lo que la eliminación de la doble negación no valdrá universalmente. El segundo que la ley de tricotomía no siempre es construible en el dominio real. La publicación en inglés de esta nueva clase de contraejemplos fuertes, y en general de los contraejemplos para el tnd, ocurrió recién en 1954 en el artículo traducido '*An Example of Contradictority in Classical Theory of Functions*'. Allí se mostró cómo *al conservar la teoría clásica pero substituyendo en su interpretación las nociones clásicas por sus correspondientes intuicionistas, se llega a una contradicción*. Por lo tanto no se trata de contraejemplos en sentido estricto, sino de resultados de *no-traducibilidad de un sistema a otro*.

Conclusión.

El intuicionismo significó un avance en la noción de fundamento en matemática. La matemática ya se había tornado mucho más exigente luego de la reconstrucción formalista de Hilbert y más aún luego de las críticas de Brouwer, de los intuicionistas y de sus epígonos constructivistas. Muchas demostraciones clásicas fueron criticadas por estas escuelas, con lo que *partes (importantes) de las doctrinas matemáticas tradicionales pasaban a ser insuficientemente fundadas*. Por supuesto especialmente el formalismo de Hilbert participó de esa discusión y de ella surgió una paulatina complementación en muchas cuestiones. También hay que recordar que no sólo hubo críticas intuicionistas a demostraciones clásicas, sino además críticas formalistas a demostraciones intuicionistas, precisamente a aquellas que dependían de la aceptación de la estructura del sujeto creador intuicionista. De modo que podemos decir que, si bien en el ámbito de la lógica podemos considerar en primera aproximación a la lógica intuicionista como un fragmento de la lógica clásica – aunque éste no es un tema definitivo –, en el dominio estrictamente matemático, si bien es cierto que la matemática intuicionista contiene sólo partes de la matemática clásica, también es cierto que la matemática clásica no contiene toda la matemática intuicionista. Por ejemplo, el teorema de abanico es un corolario del teorema de barra. Cuando se utiliza el principio de continuidad, que no es clásicamente válido, se obtiene el teorema de continuidad. Pero en el análisis clásico ambas partes de ese teorema serían falsas. Por otra parte los teoremas de barra y de abanico son clásicamente válidos, pero no así las demostraciones de Brouwer. Es decir que las demostraciones clásicas no son intuicionistamente aceptables por depender del principio de tercero excluido y las demostraciones intuicionistas son clásicamente inaceptables por depender de pasos que apelan a la estructura de las construcciones mentales. Brouwer aceptó incluso que dichas demostraciones, que identifica con objetos mentales del sujeto, son frecuentemente infinitas.

¿Cuál es el estado actual de la cuestión de fundamentos? Es fácil conjeturar que muchos problemas pendientes se resolverán alguna vez y que algunos problemas escaparán al alcance de los métodos disponibles. ¿Serán verdaderamente irresolubles? No lo podemos saber de antemano. Pero la discusión entre las escuelas de fundamento, entre las que Brouwer y su escuela intuicionista jugaron un papel central a lo largo de casi todo el siglo XX, ha realizado una tarea gigantesca, como ya lo había hecho previamente la escuela formalista. Por ello podemos esperar que la investigación de fundamentos no desmaye en el siglo XXI.

Breve bibliografía. (La bibliografía disponible es vasta. Hay mucha información disponible en Internet, por ejemplo en los artículos sobre Brouwer.)

VAN ATTEN, M.: *On Brouwer*, Belmont (CA): Wadsworth, 2004. (Introducción filosófica al intuicionismo de Brouwer con extensa discusión del teorema de barra, el sujeto creador y la intersubjetividad.)

BROUWER, L.E.J.: *Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics*, A. Heyting (ed.), Amsterdam: North-Holland, 1975.

BROUWER, L.E.J.: *Collected Works 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics*, H. Freudenthal (ed.), Amsterdam: North-Holland, 1976. (De estos *Collected Works* se tradujeron al inglés los originales en holandés.)

BROUWER, L.E.J.: *Intuitionismus*, (ed. Dirk van Dalen), Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1992.
BROUWER, L.E.J., , 'Life, Art and Mysticism', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(3), 1996: 389-429. Traducción de Walter van Stigt con una introducción en p. 381-387.
BROUWER, L.E.J.: *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, D. van Dalen (ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
VAN DALEN, Dirk: 'The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the Mathematische Annalen', *Mathematical Intelligencer* 12(4) 1990, 17-31.
VAN DALEN, Dirk: *Mystic, Geometer, and Intuitionist*, Oxford: Clarendon Press, 1999/2005, 2 vols.
DUMMETT, Michael E.: *Elements of Intuitionism*, Oxford: Oxford University Press, [1]1977 ([2]2000 edición revisada).
EUWE, M.: 'Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel', *Ned. Akad. Wetensch. Proc.* 32 (1929), 633-644.
van HEIJENOORT, Jan (ed.): *From Frege to Gödel. A Sourcebook in Mathematical Logic*, 1879-1931, Cambridge (MA): Harvard University Press, 1967.
HESSELING, D.E.: *Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*, Basel: Birkhauser, 2003. (Historia de las reacciones al intuicionismo maduro de Brouwer.)
HEYTING, Arend: *Intuitionism. An introduction*, Amsterdam: North-Holland. [2]1966, [3]1971. (Presenta versiones intuicionistas de varias cuestiones, en lo posible en matemática elemental, y además una versión de la lógica intuicionista.)
HILBERT, David: 'Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung', *Hamburger Math. Seminarabhandlungen*, 1 (1922), 157-177. (Hay traducción inglesa: 'The New Grounding of Mathematics: first report' en Mancosu 1998.)
LARGEAULT, J. *Intuition et Intuitionisme*, Paris: Vrin, 1993. (Presenta una sinopsis del intuicionismo al estilo de Brouwer.)
MANCOSU, Paolo (ed.): *From Hilbert to Brouwer. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Oxford University Press, 1998.
MANNOURY, G.: *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik*, Haarlem: Visser, 1909.
PLACEK, T. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*, Dordrecht: Kluwer, 1999. (Compara los argumentos en favor del intuicionismo propuestos por Brouwer, Heyting y Dummett,

especialmente en lo relativo a la posible validez intersubjetiva de la matemática intuicionista.)
ROETTI, Jorge Alfredo: “Hilbert, el primer problema: ¿solución o disolución?”, *Cuadernos del Sur – Filosofía* 30 (2000), Bahía Blanca: Eduns, 79-102. (Trata el primer problema de Hilbert y sus generalizaciones, la solución de Lorenzen sobre la enumerabilidad intuicionista y constructivista del continuo y propone un caso de enumeración compatible con los principios de Hankel.)
VAN STIGT, W.: *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam: North-Holland, 1990. (Contiene interesantes discusiones filosóficas y propone traducciones inglesas de materiales del Archivo Brouwer.)
WEYL, Hermann ‘Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik’, *Mathematische Zeitschrift* 10 (1921), 39-79. (Hay traducción inglesa: ‘On the New Foundational Crisis of Mathematics’ en MANCOSU 1998.)