

RESULTADOS CUALITATIVOS SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA SOLUCION EN PROBLEMAS DE VALORES INICIALES (PVI) PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Luis VILLA⁽¹⁾ y Nelson ACOSTA⁽²⁾

RESUMEN: En este trabajo, se presentan algunos resultados sobre el comportamiento de la solución correspondiente a problemas de valores iniciales asociados a la clásica ecuación diferencial lineal de

segundo orden $\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t)$, $t > 0$, cuando los coeficientes reales p , q , los

valores iniciales y la función $f = f(t)$, satisfacen restricciones oportunas.

Un hecho distintivo que caracteriza a la presentación consiste en la simplicidad de los argumentos técnicos y el marco conceptual elemental comprometidos en la consecución de los resultados. En tal sentido, es de destacar la ausencia de presupuestos relativos a la estructura de la solución (una vía clásicamente seguida y bien conocida), esto es sobre la naturaleza de las raíces características en correspondencia con la ecuación diferencial homogénea asociada a la que es motivo de análisis.

Solo se supone la existencia y unicidad de solución en dada clase (ver por ej Birkhoff y Rota, 1969).

ABSTRACT: In this paper, some results on the behaviour of the solution for initial value problems associated to the classical linear ordinary second order differential equation

$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t)$, $t > 0$ under opportune restriction on coefficients p , q , initial

values, and function $f = f(t)$, are presented.

A feature which characterize the presentation, regard to the simplicity in technical arguments and the elemental conceptual basis which are used in order to obtain the results. In such sense, it is remarked the absense of some presuppose regarding the structure of the solution, that is, on the nature of the characteristical roots of the corresponding homogeneous differential equation associated to the one under consideration.

Only existence and uniqueness of solution in a given class is assumed (see e.g. Birkhoff and Rota, 1969).

Palabras claves: Análisis cualitativo, ecuación diferencial, valores iniciales

Key words : Qualytative analysis, differential equation, initial values

INTRODUCCIÓN

Es bien conocido el hecho de que problemas asociados a la ecuación diferencial motivo de este trabajo, emergen con frecuencia en el modelado de diversas situaciones de interes práctico en las áreas de física, química, mecánica y tecnología en general.

(1) CIUNSa. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Salta. Instituto de Investigaciones para la Industria química (INIQUI-CONICET). Buenos Aires 177 (4400) Salta, Argentina. E-mail: villal@unas.edu.ar

(2) CIUNSa. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Salta. Buenos Aires 177 (4400) Salta, Argentina. E-mail: acostaa@unas.edu.ar

De por sí, ello constituye un argumento motivante suficiente para abordar un análisis y estudio con el fin de proveer un aporte que heche luz sobre el conocimiento del tema .

Entonces, el Problema de Valores Iniciales (en adelante abreviado como PVI) motivo de análisis en el presente es el siguiente :

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0, & \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

En pro del orden y claridad, el desarrollo del artículo se estructura según los dos CASOS principales caracterizados por :

$$\text{Caso A: } f = f(t) \equiv 0, \forall t > 0 \quad (2)$$

$$\text{Caso B: } f = f(t) \neq 0 \quad (3)$$

DESARROLLO

Caso A

En tal circunstancia, el PVI (1) toma la siguiente forma

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, & t > 0 \\ y(0) = y_0, & \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{cases} \quad (4)$$

Entonces, si $y = y(t)$ es la solución de (4), debe verificar el siguiente PVI asociado a una ecuación integro - diferencial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y_1 e^{-pt} - q \int_0^t y(z) e^{-p(t-z)} dz \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

y admitir la siguiente representación

$$y(t) = y_0 + \frac{y_1}{p} [1 - e^{-pt}] - q \int_0^t \left[\int_0^{\tau} y(z) e^{-p(\tau-z)} dz \right] d\tau \quad (6)$$

Teorema 1

Sea $y = y(t)$ la solución de (4) con parámetros p, q y datos iniciales y_0, y_1 tales que verifican las siguientes condiciones :

$$p \in \mathbb{R}, \quad q < 0, \quad y_0 \geq 0, \quad y_1 > 0 \quad (7)$$

Entonces la solución citada debe tener el siguiente comportamiento

$$y(t) > 0, \frac{dy}{dt} > 0, \forall t > 0 \quad (8)$$

constituyendo lo expresado por (8) un resultado global sobre el signo y monotonía de la solución del PVI bajo estudio.

Demostración

En virtud de la regularidad de la solución $y = y(t)$, se puede asegurar que en un semientorno derecho de $t=0$, $y = y(t)$ verifica el comportamiento tal que

$$y(t) > 0, \frac{dy}{dt} > 0 \quad (9)$$

Sea $t_0 > 0$ un supuesto eventual primer valor de t de modo que para el mismo se tiene que

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = 0 \quad (10)$$

por lo que de (5) se sigue

$$y_1 e^{-p t_0} = q \int_0^{t_0} y(z) e^{-p(t_0-z)} dz \quad (11)$$

siendo esta última desigualdad imposible a la vista de (7) y (9).

Si la hipótesis dada por (7) se cambia por la siguiente

$$p \in \mathbb{R}, \quad q < 0, \quad y_0 \leq 0, \quad y_1 < 0 \quad (12)$$

usando un argumento similar al precedente, se concluye

$$y(t) < 0, \frac{dy}{dt} < 0, \forall t > 0 \quad (13)$$

para el comportamiento de la solución de (4).

Ejemplos Test

En la Fig. 1 se ilustra la representación gráfica de la solución de un PVI, obtenida computacionalmente con un software oportuno de alta eficiencia, a modo de ejemplo test referente al resultado consignado por (8) del Teorema 1.

La figura Fig. 2, tiene el mismo fin que la de Fig. 1, pero referente al resultado consignado por (13).

En efecto, la Fig. 1 representa gráficamente la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - y = 0, & t > 0 \\ y(0) = 0, & \frac{dy}{dt}(0) = 1 \end{cases} \quad (14)$$

En tanto que en la Fig. 2 el gráfico corresponde a la solución del PVI

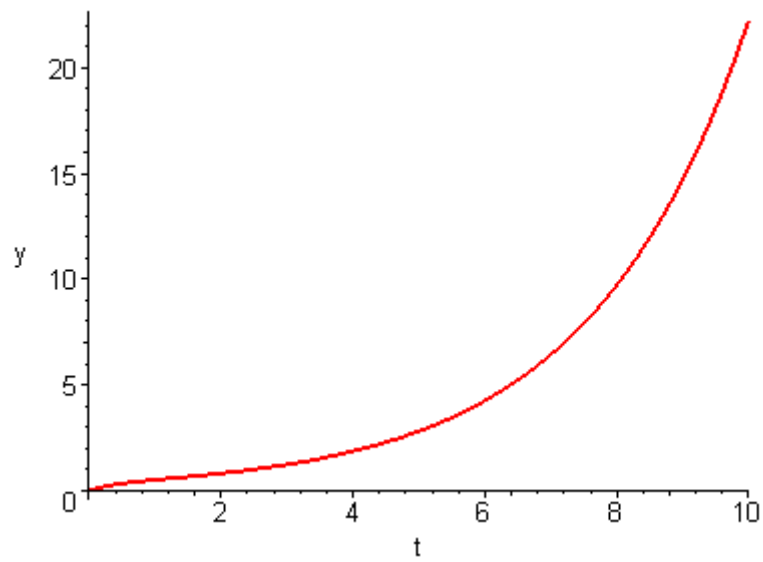


Fig. 1: Gráfico de la solución del PVI (14)
 $p=2, q=-1, y_0=0, y_1=1$

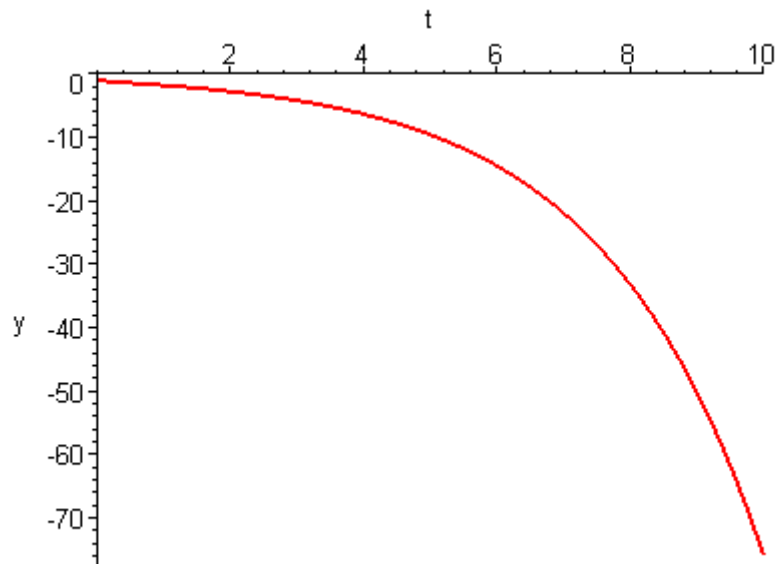


Fig. 2: Gráfico de la solución del PVI (15)
 $p=2, q=-1, y_0=-0,5, y_1=-1$

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - y = 0, & t > 0 \\ y(0) = -0,5, \quad \frac{dy}{dt}(0) = -1 \end{cases} \quad (15)$$

Teorema 2

Sea el PVI expresado por (4), con los parámetros p y q que verifiquen la hipótesis

$$H_0) \quad p > 0, \quad q > 0$$

Entonces la solución $y = y(t)$ de tal PVI debe ser acotada $\forall t > 0$

Demostración

La ecuación diferencial del PVI en cuestión se escribe como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} + py \right] = -qy \quad (16)$$

y se define una nueva función $V=V(t)$ relacionada con y de la siguiente manera :

$$V(t) = \frac{dy}{dt} + p y \quad (17)$$

por lo que de (16) se sigue que

$$\frac{dV}{dt} = -qy \quad (18)$$

Entonces, vamos a suponer que fuese posible la eventual ocurrencia de los siguientes comportamientos singulares para la solución de (4).

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dy}{dt} = +\infty$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dy}{dt} = -\infty$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty \quad \text{o} \quad -\infty$$

(i)

En virtud de H_0 , (17) y (18) se infiere que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V(t) = +\infty \quad (19)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dV}{dt} = -\infty \quad (20)$$

lo que es contradictorio respecto del comportamiento de la función $V=V(t)$

(ii)

Razonando análogamente al caso anterior, se establece que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V(t) = -\infty \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{dV}{dt} = +\infty \quad (22)$$

llegándose también a una contradicción

(iii)

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$, se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = -\infty \quad (23)$$

en tanto que si $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$ se tendría

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dV}{dt} = +\infty \quad (24)$$

arribándose siempre a una contradicción.

Ejemplo Test

A tal efecto el siguiente dado por (25) es un PVI provisto con fines ilustrativos, exhibiéndose en la Fig. 3 la representación gráfica de la respectiva solución obtenida computacionalmente

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0, & t > 0 \\ y(0) = -2, \quad \frac{dy}{dt}(0) = -0,7 \end{cases} \quad (25)$$

Observación 1

Una cota Superior $U=U(t)$ para la derivada $\frac{dy}{dt}$ de la solución para cada $t > 0$

Sea $M > 0$ una constante tal que

$$|y(t)| < M, \quad \forall t > 0 \quad (26)$$

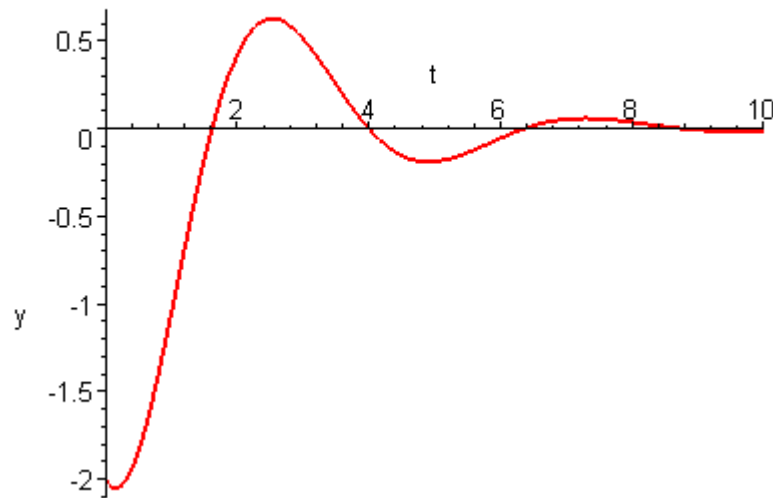


Fig. 3: Gráfico de la solución del PVI (25)
 $p=1, q=2, y_0=-2, y_1=-0,7$

Ahora, teniendo presente (26), a partir de (5) se encuentra

$$\left| \frac{dy}{dt} \right| \leq |y_1| + q \frac{M}{p} [1 - e^{-p t}] \quad (27)$$

lo que significa que la función $U = U(t)$ expresada por

$$U(t) = |y_1| + \frac{q \cdot M}{p} [1 - e^{-p t}] \quad (28)$$

resulta ser una cota superior para la función derivada de la solución $y = y(t)$ de (4) bajo la hipótesis H_0 para los parámetros p y q del referido PVI.

Teorema 3

Sea el PVI dado por (4). Se demuestra que la siguiente función $F=F(t)$ dada por

$$F(t) = \left[p \frac{dy}{dt} + qy \right] e^{pt} - q \int_0^t e^{pz} \frac{dy}{dz} (z) dz \quad (29)$$

es un invariante relacionado a la solución $y = y(t)$ del citado PVI

Demostración:

En efecto, integrando por partes el segundo término del segundo miembro de (5) se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = y_1 e^{-pt} - \frac{q}{p} \left[y(t) - y_0 e^{-pt} - e^{-pt} \int_0^t e^{pz} \frac{dy}{dz}(z) dz \right]$$

de donde reordenando términos oportunamente se encuentra

$$F(t) = py_1 + qy_0 = \text{constante} \quad (30)$$

Quedando así demostrado lo consignado por el teorema. Nótese que la constante de invariancia en (30) vincula precisamente a los parámetros y datos iniciales del PVI. Concretamente, nótese que $py_1 + qy_0$ es justamente la curvatura (convexidad o concavidad) inicial cambiada de signo, de la solución.

Corolario 1

En particular, en el PVI (4) supóngase que los parámetros p , q y los datos iniciales y_0 , y_1 satisfacen las siguientes condiciones

$$p < 0, \quad q < 0 \quad (31)$$

$$y_1 > 0, \quad py_1 + qy_0 \leq 0 \quad (32)$$

Entonces, la solución del precitado PVI debe ser monótona estrictamente creciente " $t \geq 0$ ".

Demostración

En virtud de la regularidad de la solución, teniendo presente la hipótesis dada por (32), se sigue que en un semientorno derecho de $t=0$ la solución debe exhibir el comportamiento siguiente

$$\frac{dy}{dt}(t) > 0 \quad (33)$$

Sea $t_0 > 0$ un eventual primer valor de t tal que

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = 0 \quad (34)$$

Entonces, cabe contemplar las siguientes alternativas :

$$\text{i) } y(t_0) \leq 0 \quad \text{ii) } y(t_0) > 0$$

vamos a ver que con las dos se arriba a una contradicción .

(i)

Teniendo presente (34), a partir de (29) y (30) se obtiene :

$$qy(t_0)e^{pt_0} - q \int_0^{t_0} e^{pz} \frac{dy}{dz} dz = py_1 + qy_0 \quad (35)$$

Por (31) y teniendo en cuenta que

$$\frac{dy}{dt} > 0 \quad \forall t \in [0, t_0) \quad (36)$$

se sigue que el primer miembro de (35) es positivo, en tanto que por (32) el segundo miembro es negativo.

(ii)

Se ve rápidamente que para $t = t_0$ la solución $y = y(t)$ del PVI en análisis no puede tener ni un punto de inflexión ni un máximo local. En efecto, dado que

$$\frac{d^2 y(t_0)}{dt^2} = -qy(t_0) \quad (37)$$

de (31) y (37) se infiere que

$$\frac{d^2 y(t_0)}{dt^2} > 0 \quad (38)$$

estando la desigualdad (38) en contradicción con la existencia sea de un punto de inflexión que de un máximo local para $t = t_0$.

Queda así demostrado el Corolario 1.

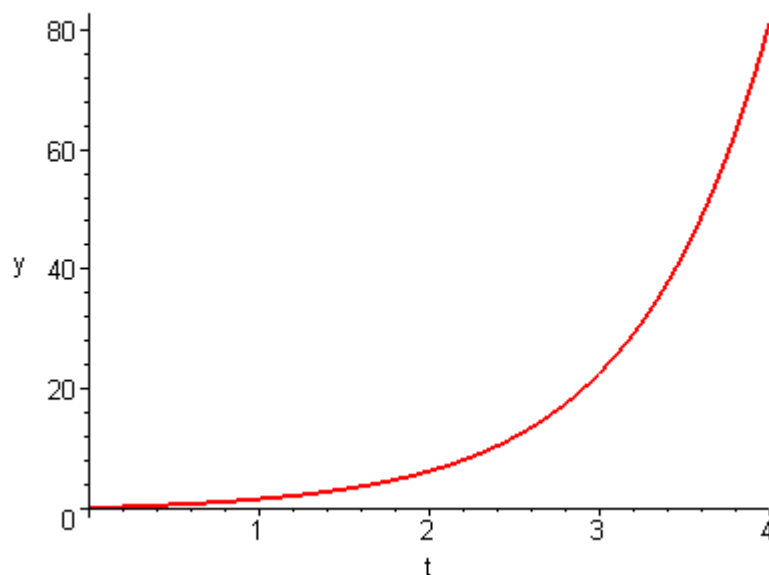


Fig. 4: Gráfico de la solución del PVI (39)
 $p = -0.5, q = -1, y_0 = 0, y_1 = 1$

La Fig. 4 ilustra gráficamente la solución del PVI (39) siguiente a modo de un ejemplo test.

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{dy}{dt} - y = 0, & t > 0 \\ y(0) = 0, & \frac{dy}{dt}(0) = 1 \end{cases} \quad (39)$$

Corolario 2

Consideremos el PVI (4) bajo las siguientes condiciones para los parámetros p, q y los datos iniciales y_0, y_1 :

$$p < 0, q < 0 \quad (40)$$

$$y_1 < 0, p y_1 + q y_0 > 0 \quad (41)$$

Entonces la solución del citado PVI debe ser una función monótona estrictamente decreciente $\forall t \geq 0$.

Demostración

De (41) y la regularidad de la solución se sigue que, la solución de (4) debe ser estrictamente decreciente en un entorno derecho de $t = 0$ esto es

$$\frac{dy}{dt} < 0 \quad (42)$$

en dicho entorno .

Sea $t_0 > 0$ un primer valor de t para el que eventualmente se verifique el comportamiento

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = 0 \quad (43)$$

Entonces, si fuese $y(t_0) \geq 0$, de (29) se infiere la desigualdad

$$q y(t_0) e^{p t_0} - q \int_0^{t_0} e^{p z} \frac{dy}{dz}(z) dz < 0 \quad (44)$$

a su vez, de (30) y (41) se tendría

$$q y(t_0) e^{p t_0} - q \int_0^{t_0} e^{p z} \frac{dy}{dz}(z) dz > 0 \quad (45)$$

siendo contradictorias (44) con (45)

Por otra parte, si fuese $y(t_0) < 0$ a partir de la ecuación diferencial de (4) y teniendo presente (40) se tendría que

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t_0) < 0 \quad (46)$$

siendo esta última desigualdad incompatible con la ocurrencia sea de un punto de inflexión que de un mínimo local en $t = t_0$.

Comportamiento oscilatorio

Observación 2

Una consecuencia inmediata que se infiere a partir de (5) es que la posibilidad de un comportamiento oscilatorio para la solución de (4) esta directamente vinculada a la naturaleza del parámetro q y a la dinámica de la convolución de $y = y(t)$ con el núcleo $e^{-p \cdot t}$.

En efecto, (5) puede escribirse como

$$\frac{dy}{dt} = h(t) - g(t) \quad (47)$$

donde

$$h(t) = y_1 e^{-p \cdot t}, \quad g(t) = q \int_0^t y(\tau) e^{-p(t-\tau)} d\tau \quad (48)$$

Se ve que la función $h=h(t)$ no tiene otra alternativa que la de ser monótona estrictamente creciente o decreciente, según sea $p < 0$ ó $p > 0$ respectivamente. Entonces,

los cambios de signo para $\frac{dy}{dt}$ dependerán de que cambie de signo la convolución $g(t)$, viéndose que en tal sentido una condición necesaria viene dada por

$$q \neq 0 \quad (49)$$

Más precisamente, a la vista de los resultados encontrados en secciones previas sobre el comportamiento de la solución del PVI que nos ocupa, podemos especificar la condición (49) como

$$q > 0 \quad (50)$$

Por otra parte, también surge que el rol del parámetro p respecto de la naturaleza de las oscilaciones de $y = y(t)$, emerge del comportamiento de las funciones h y g definidas por (48).

En efecto, si $p < 0$, al ser h estrictamente creciente, para tener intersecciones entre tales funciones al ir evolucionando la variable t , se requiere extremos locales (máximos) para $y = y(t)$ de amplitud cada vez mayores. Coherente con este comportamiento, se ve que para $p < 0$ el núcleo $e^{-p \cdot t}$ es expansivo con t .

En tanto que, si $p > 0$, es claro que a partir de (47) pueden esperarse oscilaciones de $y = y(t)$ con extremos de amplitudes decrecientes con t .

Caso B

Teorema 4

Sea el PVI dado por (1), bajo las siguientes hipótesis

$$p > 0, q > 0 \quad (51)$$

$$f = f(t), \text{ continua y acotada } \forall t \geq 0 \quad (52)$$

Entonces la solución de tal PVI debe ser acotada $\forall t \geq 0$

Demostración

Es de aplicación la misma técnica ilustrada en la demostración del Teorema 2 del Caso A. Es decir, se trabaja sobre la nueva función $V=V(t)$ definida por (17), resultando

en el presente que la derivada $\frac{dy}{dt}$ de tal función viene dada como

$$\frac{dV}{dt} = -qy + f(t) \quad (53)$$

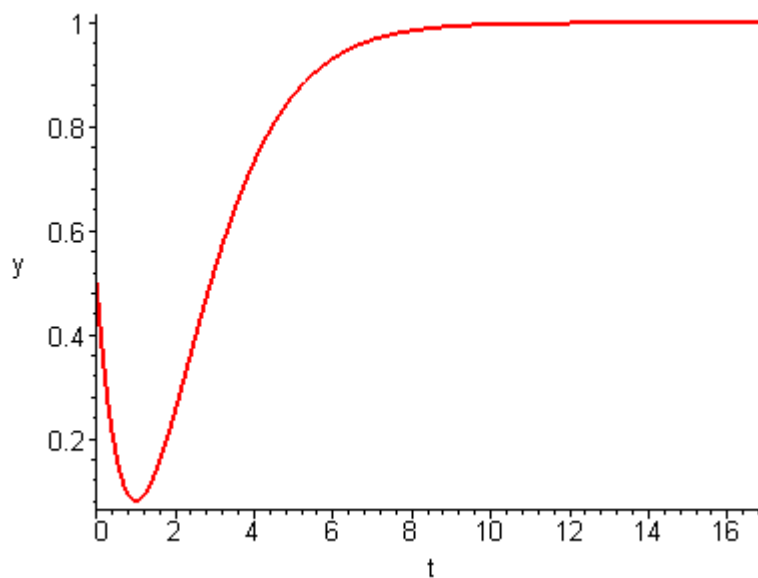


Fig. 5: Gráfico de la solución del PVI (1) con $f(t)=1 - e^{-t}$, $p=2$, $q=1$, $y_0 = 0.5$, $y_1 = -1$

La Fig. 5 muestra el comportamiento previsto por el Teorema 4 para la solución del PVI(1) con $p=2$, $q=1$, $f(t) = 1 - e^{-t}$, $y_0 = 0.5$, $y_1 = -1$.

Teorema 5

Sea el PVI (1) en el que se asume

$$H_0: p > 0, q < 0$$

$$H_1: f(t) > 0 \text{ continua y acotada } \forall t \geq 0$$

$$H_2: \quad y_0 > 0, \quad y_1 > 0$$

Entonces, si $y = y(t)$ es una solución de (1), debe poseer la siguiente propiedad ó comportamiento:

$$y(t) > 0, \quad \forall t > 0 \quad (54)$$

Prueba

Observación 3: En virtud de H_2 y la regularidad de la solución supuesta $y=y(t)$, debe existir $t_0 \geq 0$ tal que

$$y(t) > 0, \quad \forall t \in [0, t_0] \quad (55)$$

Por otra parte, de (1) se encuentra

$$\frac{d y}{d t} = y_1 + p y_0 - p y(t) - q \int_0^t y(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (56)$$

Definimos ahora la nueva función $V=V(t)$ como

$$V(t) = \frac{d y}{d t} + p y(t) \quad (57)$$

por lo que en virtud de (1) y (57) se arriba a formular el siguiente PVI para la función $V = V(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d V}{d t} = -q y(t) + f(t), \quad t > 0 \\ V(0) = \dot{y}(0) + p y(0) = y_1 + p y_0 = y_2 \end{cases} \quad (58)$$

Observación 4: En virtud de H_0 y H_2 se sigue que

$$V(0) = y_2 > 0 \quad (59)$$

En consecuencia, en virtud de la regularidad de la solución del PVI (58), se puede establecer el siguiente resultado sobre la función $V = V(t)$ solución de tal PVI:

$$\exists t_1 > 0 \text{ tal que } V(t) > 0, \quad \forall t \in [0, t_1] \quad (60)$$

También de H_0 , H_1 y (55), se infiere que

$$-q y(t) + f(t) > 0, \quad \forall t \in [0, t_0] \quad (61)$$

Por lo tanto, resulta que

$$V(t) > 0, \quad \dot{V}(t) > 0 \quad \forall t \in [0, t_2] \quad (62)$$

con

$$t_2 > 0, \quad t_2 = \min(t_0, t_1) \quad (63)$$

Supongamos ahora que existe un primer valor de t ($t = \bar{t} > t_2$) tal que

$$V(\bar{t}) = 0 \quad (64)$$

y en consecuencia debe existir $\hat{t} > 0$ ($t_2 < \hat{t} < \bar{t}$) tal que

$$-q y(\hat{t}) + f(\hat{t}) = 0 \quad (65)$$

es decir

$$f(\hat{t}) = q y(\hat{t}) \quad (66)$$

por lo que, de H_0 , H_1 y (67) se concluye

$$y(\hat{t}) < 0 \quad (67)$$

Entonces, en virtud de (55), (67) y la regularidad de la solución $y=y(t)$, debe existir $\tilde{t} > 0$ ($t_0 < \tilde{t} < \hat{t}$) donde se debe cumplir

$$y(\tilde{t}) = 0, \quad y(t) > 0, \quad \forall t \in [0, \tilde{t}] \quad (68)$$

infiriéndose a partir de (56) que:

$$\frac{d y}{d t}(\tilde{t}) = y_1 + p y_0 - q \int_0^{\tilde{t}} y(\tau) d\tau + \int_0^{\tilde{t}} f(\tau) d\tau \quad (69)$$

es decir

$$\frac{d y}{d t}(\hat{t}) > 0 \quad (70)$$

por lo que en vista de la regularidad de $y = y(t)$, debe tenerse que

$$0 < y(t) \quad (71)$$

en un semi entorno izquierdo de (\tilde{t}) . Entonces se sigue que (71) es contradictorio con (68), concluyéndose así el resultado anunciado por (54).

Teorema 6:

Sea $y=y(t)$ una solución del PVI (1) con los parámetros p , q , la función $f = f(t)$ y los datos iniciales tales que satisfacen las hipótesis H_3 , H_4 y H_5 dadas por:

$$H_3: \quad p \in \quad , \quad q < 0$$

$$H_4: \quad y_0 > 0, \quad y_1 > 0$$

$$H_5: \quad f(t) > 0, \text{ continua y acotada } \quad \forall t > 0$$

Entonces, la función $y = y(t)$ debe tener el siguiente comportamiento:

$y = y(t)$ es una función monótona estrictamente creciente en $[0, T]$, $\forall T > 0$ finito

Prueba:

En virtud de H_4 y la regularidad de la solución $y = y(t)$ de (1), se infiere que $\exists t^0 > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\dot{y}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, t^0] \quad (72)$$

Supongamos ahora que existe $t_1 > t^0$ tal que

$$\begin{aligned} \dot{y}(t_1) = 0, \quad \dot{y}(t) > 0 \quad \text{si } t \in (t_1 - \infty, t_1), \\ \dot{y}(t) < 0 \quad \text{si } t \in (t_1, t_1 + \infty) \end{aligned} \quad (73)$$

con ε arbitrariamente pequeño. Entonces, por la regularidad de $y = y(t)$ se tiene que existen $t_2 > 0$, $t_3 > 0$, $t_2 < t_1 < t_3$ tal que :

$$\dot{y}(t_2) > 0, \dot{y}(t_3) < 0, y(t_2) = y(t_3) \quad (74)$$

y consecuentemente, de (56) se sigue que

$$\frac{d y}{d t}(t_2) = y_1 + p(y_0 - y(t_2)) - q \int_0^{t_2} y(\tau) d\tau + \int_0^{t_2} f(\tau) d\tau \quad (75)$$

$$\frac{d y}{d t}(t_3) = y_1 + p(y_0 - y(t_3)) - q \int_0^{t_3} y(\tau) d\tau + \int_0^{t_3} f(\tau) d\tau \quad (76)$$

o equivalentemente

$$\dot{y}(t_2) + q \int_0^{t_2} y(\tau) d\tau - \int_0^{t_2} f(\tau) d\tau = y_1 + p(y_0 - y(t_2)) \quad (77)$$

$$\dot{y}(t_3) + q \int_0^{t_3} y(\tau) d\tau - \int_0^{t_3} f(\tau) d\tau = y_1 + p(y_0 - y(t_3)) \quad (78)$$

y al ser iguales los segundos miembros de (77) y (78) se tiene:

$$\dot{y}(t_2) - \dot{y}(t_3) = q \int_{t_2}^{t_3} y(\tau) d\tau - \int_{t_2}^{t_3} f(\tau) d\tau \quad (79)$$

Nótese ahora que el primer miembro de (79) debe ser positivo, en tanto que el segundo miembro es negativo, arribándose así a una contradicción emergente de haber supuesto la no monotonía de la solución $y = y(t)$.

Vale la pena puntualizar que la monotonía estricta se demuestra rápidamente, por el hecho de que si se tuviese que $\dot{y}(t_1) = 0$ y como el signo de $\dot{y}(t)$ es positivo en el entorno de $t = t_1$, entonces en tal valor t_1 se tendría una inflexión para $y = y(t)$ y como ésta es al menos una función de la clase $C_{[0, T]}^2$ debería ser $\ddot{y}(t_1) = 0$, arribándose otra vez a una contradicción por el hecho de que de la ecuación diferencial del PVI en cuestión resultaría:

$$\ddot{y}(t_1) = f(t_1) - p \dot{y}(t_1) - q y(t_1)$$

por lo que

$$\ddot{y}(t_1) = f(t_1) - q y(t_1) > 0$$

De tal modo está probado el Teorema 6.

Procesando computacionalmente la solución del PVI resultante de asignar los valores $p=1$, $q=-2$, $f(t) = 1 - e^{(-t)}$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$ en el PVI(1), se obtuvo la Fig. 6.

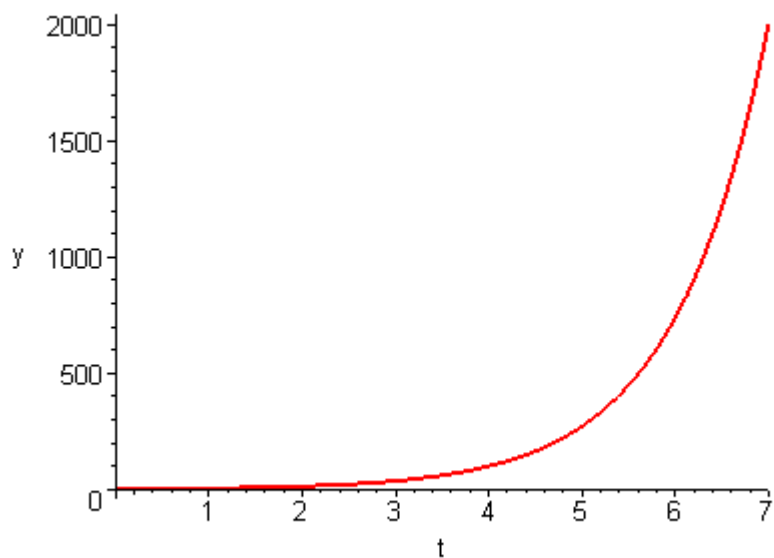


Fig. 6: Gráfico de la solución del PVI (1) con $f(t)=1 - e^{(-t)}$, $p=1$, $q=-2$, $y_0=2$, $y_1=1$

BIBLIOGRAFÍA

BIRKHOFF, G. y G.C. ROTA, 1969. *Ordinary differential equations*. Blaisdell Publishing Company.

Recibido/Received/: 23-dic-04
Aceptado/Accepted/: 17-may-05