

# **Formación de redes dirigidas circulares con costos de enlace compartidos**

Juan Manuel Larrosa y Fernando Tohmé  
CONICET - Universidad Nacional del Sur

## **Resumen**

Este trabajo analiza un problema de formación de redes en el que suponemos que cada sendero que conecta dos agentes tiene un costo asociado, compartido entre los agentes. Además suponemos que la conexión con un agente brinda beneficios tanto por el número de conexiones que éste puede proveer así como por su propio valor intrínseco. Encontramos una equivalencia débil entre las estructuras estrictas de Nash y las redes circulares. Además, mostramos que las redes circulares surgen como estructuras robustas y óptimas que maximizan los beneficios de la interacción entre los agentes, minimizando los costos de formación de la red.

Clasificación JEL : D20, C72

Palabras claves : juegos de formación de red, flujo de información dirigido, costos compartidos, redes circulares

## **1. Introducción**

La interacción entre agentes puede ser representada en diversas formas. Una manera de representar los intercambios directos que ha atraído mucho interés en los últimos años es a través de las *redes*. Dado que tiene una representación gráfica natural, esta herramienta de análisis fue primeramente adoptada en la sociología y antropología. Para los expertos de esas áreas constituye una forma pictórica de entender la influencia de los entornos de agentes sobre las conductas individuales. Basados en el estudio de las redes sociales reales, los sociólogos y antropólogos han acumulado una vasta cantidad de evidencia que ayuda a entender como el comportamiento humano es moldeado por el comportamiento de otros agentes.

En términos matemáticos, una red es un *grafo*, donde los nodos representan agentes individuales y los arcos ó enlaces representan un “bien de utilidad” (por ejemplo, información, prestigio personal, etc.) que es intercambiado (véase Wasserman y Faust (1994)). La literatura económica introdujo recientemente herramientas de teoría de juegos en este marco de análisis. En vez de estar interesados sólo en los aspectos descriptivos, algunos teóricos de la economía han encarado el estudio de cómo las redes se forman, en primer término, y luego de qué las hace estables ó eficientes (Jackson y Wolinsky (1996), Bala y Goyal (2000), Dutta y Jackson (2000)). El enfoque de redes basado en teoría de juegos exhibe dos corrientes principales: una basada en juegos cooperativos y otra con fuerte sentido estratégico. El análisis basado en juegos cooperativos, como es usual en este enfoque, estudia el problema de formación de coaliciones entre agentes. El exigente supuesto de transferencia de utilidad entre agentes es difícil de justificar en muchos casos, además de ser computacionalmente costoso (Qin (1996), Dutta y *otros* (1998), Slikker y van den Nouweland (2001)).

El enfoque estratégico ó no cooperativo, a su vez, sólo requiere de la definición de estrategias disponibles para los agentes así como de la caracterización de las correspondientes funciones de pagos. Dado cierto protocolo ó regla de interacción, los agentes deciden si se conectan ó no la red, evaluando los beneficios de conexión (ó desconexión) con otros agentes. Las decisiones racionales de los agentes llevan a equilibrios de Nash, las cuales dan lugar a las redes que son el objeto de este análisis.

Como fue mencionado, una red puede ser vista como un grafo. Una decisión importante de modelización es la de si el grafo va a ser *dirigido* ó *no dirigido*. Esta elección de primitivas tiene consecuencias también para los resultados de equilibrios en juegos no cooperativos de formación de redes. Los grafos no dirigidos son útiles para representar situaciones en las cuales la dirección de los flujos de bienes de utilidad es menos importante ó irrelevantes (Dutta y Mutuswami (1997)). Por otro lado, los grafos dirigidos reflejan la importancia de distinguir cuál agente ha iniciado la conexión así como qué dirección ha tomado el flujo de información. Una convención común es dibujar los enlaces dirigidos con flechas apuntando

hacia el agente que decidió iniciar la conexión (Bala y Goyal (2000), Dutta y Jackson (2001)).

En este trabajo modelamos redes como grafos dirigidos con flujos dirigidos. Llamamos ‘información’ (en un uso más bien genérico del término) al bien de utilidad que circula en las redes. Cada agente es dotado con alguna cantidad de información, pero tiene una función de pagos que depende positivamente del monto de información a la cual tiene acceso. Estableciendo enlaces con otros agentes el agente puede adquirir la información en posesión de los mismos pero tiene que compartir el pago del gasto de. Esta es una forma de representar el hecho de que en muchos casos la información obtenida indirectamente requiere, de todos modos, de una cierta cantidad de colaboración con la fuente, de modo de incentivarla a seguir proveyéndola. El enfoque de costo compartido aplicado en este trabajo supone que cada agente paga una pequeña tarifa por cada enlace en el sendero que le permite alcanzar la información deseada. El problema es determinar cuál estructura puede emerger como equilibrio estratégico entre los agentes y si ésta es óptima ó no. Nosotros encontramos que los equilibrios estrictos de Nash ó equilibrios de Nash con el mínimo número de enlaces dan lugar a una red circular, la cual es estable y óptima.

Instancias del problema de formación de redes estudiado aquí pueden ser observadas en muchas áreas. Así, por ejemplo, considérese el siguiente escenario: supongamos que los usuarios de Internet son tarifados en un pequeño monto por cada enlace que ellos visitan. Cuando un usuario visita un sitio web, paga dicha tarifa. Si sigue un link tiene que pagar por la nueva conexión pero accede a mayor información. Si a su vez sigue un link en este sitio accede al nuevo sitio pagando de nuevo la tarifa pero accediendo a mayor información. La pregunta es: ¿cuál es la manera más eficiente de navegar por una serie de sitios bajo esta estructura de costos?

Más cercano a nuestro marco de estudio, podríamos preguntar qué clase de arquitectura para una red de área local (LAN – Local Area Network) incrementa la velocidad de flujo mientras al mismo tiempo reduce las pérdidas. Esto es en efecto análogo a nuestro problema genérico: una computadora particular en la LAN podría necesitar recurrir a los

recursos de otra computadora en la red. Debería existir un protocolo eficiente para elegir a qué máquina conectarse. Al mismo tiempo tiene que pagar una pequeña ‘tarifa’ (en términos de tiempo de procesamiento, por ejemplo) para alcanzar la máquina que le proporciona la mayor cantidad de recursos. Dado que esto es cierto para todas las máquinas en la red, el resultado estratégico tiene que permitir a todos alcanzar la mayor cantidad de información disponible, pagando lo menos posible. Como en nuestro resultado (si bien por razones tecnológicas) el resultado final podría ser una red circular como en el caso de la arquitectura *Token Ring* de IBM (Tanenbaum (1989)).

También puede ocurrir esto en organizaciones humanas, por ejemplo en los comités multidisciplinarios de evaluación. Estos están constituidos por expertos en diferentes campos. Cada uno debe confiar en otros para obtener información acerca de áreas en las que no es experto. La red circular, en este caso, minimiza el número de preguntas mientras al mismo tiempo maximiza la información disponible para todos.

En la Sección 2 empezamos nuestro análisis con la presentación del modelo. En la Sección 3 determinaremos la arquitectura de equilibrio y mostramos cómo los equilibrios verifican algunos criterios de estabilidad y optimalidad. La Sección 4 discute las analogías y diferencias con el trabajo original de Bala y Goyal. Finalmente, la Sección 5 finaliza el trabajo con una pequeña evaluación de los resultados reportados aquí.

## 2. El Modelo

Sea  $N = (1, \dots, n)$  un conjunto de agentes. Para evitar resultados triviales siempre vamos a suponer que  $n \geq 3$ . Si  $i$  y  $j$  son dos miembros típicos de  $N$ , un enlace entre ellos, sin intermediarios, originado en  $i$  y finalizado en  $j$  será representado como  $ij$ . La interpretación de  $ij$  es que  $i$  establece un contacto con  $j$  que permite a  $i$  tener acceso a la información de  $j$  así como a su red de contactos. Cada agente  $i \in N$  tiene alguna información de su propiedad,  $I_i \in Z_+$  (es decir, representado como un entero positivo). Como se mencionó,  $i$  puede acceder a más información formando enlaces con otros agentes. La formación de redes es costosa, en tiempo, en recursos y esfuerzo, pero por simplicidad supondremos que el enlace  $ij$  tiene un costo de 1 (en unidades de utilidad de información). Por convención

supondremos que la información de cada agente es lo suficientemente valiosa como para que valga la pena establecer un enlace con ella, es decir que  $I_i > 1$ .

Los agentes tratarán de maximizar la utilidad de la información disponible para ellos así como minimizar el costo de conexión con otros agentes. Para lograr esto, escogerán una dentro de un conjunto de estrategias. Cada estrategia para  $i \in N$  es un vector  $g_i = \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}, g_{i,i+1}, \dots, g_{i,n} \rangle$  de  $(n-1)$  dimensiones donde cada  $g_{i,j}$  para  $j \neq i$  vale 0 ó 1. Esto es interpretado como indicando que  $i$  establece un enlace directo con  $j$  si  $g_{i,j} = 1$  mientras que si  $g_{ij} = 0$  dicho enlace no existe. El conjunto de todas las estrategias se denota como  $G_i$ . Restringimos nuestro análisis sólo a los casos de estrategias puras, lo cual implica que  $|G_i| = 2^{n-1}$ . Finalmente,  $G = G_1 \times \dots \times G_n$  denota al conjunto de perfiles de estrategias en la interacción entre los agentes de  $N$ .

La existencia de un enlace directo  $ij$  indica una comunicación asimétrica entre  $i$  y  $j$ . Esto es,  $g_{i,j} = 1$  indica que  $i$  ha establecido una comunicación con  $j$  que le permite acceder a la información de  $j$  pero no viceversa (la simetría entre  $i$  y  $j$  es restablecida si  $g_{j,i} = 1$ ). Las estructuras con esta característica son denominadas redes de flujo dirigido.

En las redes de flujo dirigido el perfil de estrategias puede ser representado como un grafo dirigido  $g = (g_1, \dots, g_n)$  sobre  $N$ . Esto es, en el grafo dirigido los elementos de  $N$  son los nodos mientras que cada enlace establecido como  $g_{i,j} = 1$  es representado por una flecha empezando en  $j$  con su cabeza apuntando a  $i$  (esto es para representar la idea que cuando  $i$  establece un enlace con  $j$ , la información fluye de  $j$  hacia  $i$ ). Esto es, las flechas siempre apuntan hacia el agente que establece el enlace. Se sigue inmediatamente que:

**Proposición 1:** *Existe una relación biyectiva entre los grafos dirigidos entre  $n$  nodos y los perfiles de estrategias en  $G$ .*

**Prueba:** Un grafo dirigido con  $n$  nodos es tal que para cada nodo  $i$  existe como máximo una flecha entrante de cada  $j \neq i$  (y ninguna desde él mismo). Entonces, para cada  $j$  define  $g_{i,j}$  igual a 1 si existe una flecha entrante desde  $j$  y 0 si no. Esto define a  $g_i = \langle g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}, g_{i,i+1}, \dots, g_{i,n} \rangle$  para cada  $i \in N$ . Esto es, define un  $g = \langle g_1, \dots, g_i, \dots, g_n \rangle \in G$ . Del mismo modo, dado un  $g$ , un grafo dirigido puede obtenerse añadiendo una flecha desde  $j$  hacia  $i$  si  $g_{i,j} = 1$ . Dado que  $g_{i,i}$  no está definido, el grafo carece de ciclos y dado que  $g_{i,j}$  tiene sólo dos posibles valores, existe uno ó cero enlaces entre ellos.  $\square$

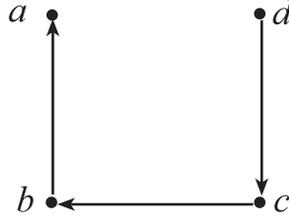
**Ejemplo 1.** Consideremos un grupo de cuatro agentes,  $N = \{a, b, c, d\}$ . Una estrategia conjunta  $g = \langle g_a, g_b, g_c, g_d \rangle$  puede ser representada como un perfil de estrategias. Esto se puede ver en la Tabla 1.

Cada fila es la estrategia elegida por uno de los agentes. Las columnas corresponden a los agentes. Una entrada 1 en la fila  $i$  y columna  $j$  significa que la estrategia del agente  $i$  prescribe establecer un enlace con el agente  $j$ . Las entradas en la diagonal principal están con cruces dado que los agentes no pueden establecer enlaces con ellos mismos. En la Figura 1 podemos ver el grafo dirigido que se corresponde con  $g$ .

**Tabla 1.** Perfil de estrategias para el Ejemplo 1

<b>Estrategia</b>	<b><i>a</i></b>	<b><i>b</i></b>	<b><i>c</i></b>	<b><i>d</i></b>
$g_a$	X	1	0	0
$g_b$	0	X	1	0
$g_c$	0	0	X	1
$g_d$	0	0	0	X

Figura 1. Red formada por el perfil de estrategias del Ejemplo 1



Definimos  $N^{g_i} = \{k \in N \mid g_{i,k} = 1\}$  como el conjunto de agentes con quienes  $i$  establece un enlace directo de acuerdo a su perfil de estrategias  $g_i$ . Decimos que existe un *sendero* desde  $j$  hacia  $i$  de acuerdo al  $g \in G$  si existe una secuencia de agentes diferentes (para evitar que existan ciclos)  $j_0, \dots, j_m$  (con  $i = j_0$  y  $j = j_m$ ) tal que  $g_{j_0, j_1} = \dots = g_{j_{m-1}, j_m} = 1$ . En palabras, dada una estrategia conjunta  $g$ , tenemos que  $j_1 \in N^{g_{j_0}}$ ,  $j_2 \in N^{g_{j_1}}$ , ...,  $j_m \in N^{g_{j_{m-1}}}$ . Un sendero desde  $j = j_m$  hacia  $i = j_0$ , denotada como  $j \xrightarrow{g} i$ , tiene una *longitud*, la cardinalidad de la secuencia  $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}, j_m$ , es decir  $m$ , el cual indica el número de enlaces intermedios entre  $j$  e  $i$ . Nótese que un enlace dirigido es un sendero de longitud 1.

**Ejemplo 1 revisión.** Dada la estrategia  $g = \langle g_a, g_b, g_c, g_d \rangle$ , tenemos que  $N^{g_a} = \{b\}$ ,  $N^{g_b} = \{c\}$  y  $N^{g_c} = \{d\}$  mientras que  $N^{g_d} = \emptyset$ . Esta secuencia establece un sendero desde  $d$  hacia  $a$  de longitud 3.

Anotamos al conjunto de agentes accedidos (directamente ó de otro modo) por  $i$  como  $N^{i:g} = \{k \in N \mid k \xrightarrow{g} i\} \cup \{i\}$ . Incluimos a  $i$  en  $N^{i:g}$  para indicar que  $i$  conoce su propia valuación, a pesar del hecho mencionado anteriormente de que  $i$  no establece un enlace directo consigo mismo. Sea  $\mu_i : G \rightarrow \{0, \dots, n \times (n-1)\}$  el número de enlaces en todos los senderos que finalizan en  $i$ , originados por agentes en  $N^{i:g}$  bajo cualquier estrategia conjunta:

$$\mu_i(g) = \left| \left\{ (j, k) \in N \times N : g_{j,k} = 1, \text{ y } \exists l \in N^{i:g} \text{ y } l \xrightarrow{g} i \text{ con } j, k \in l \xrightarrow{g} i \right\} \right|.$$

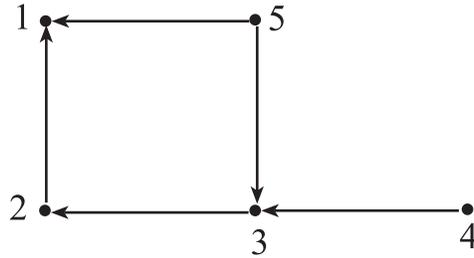
Nótese que puede haber mas de un sendero desde  $j$  hacia  $i$ .

**Ejemplo 2.** Supongamos que tenemos  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y la estrategia  $g = \langle g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \rangle$  dado por la Tabla 2.

**Tabla 2.** Perfil de estrategias para el Ejemplo 2

Estrategia	1	2	3	4	5
$g_1$	X	1	0	0	0
$g_2$	0	X	1	0	0
$g_3$	0	0	X	1	1
$g_4$	0	0	0	X	0
$g_5$	0	0	0	0	X

**Figura 2.** Red formada por el perfil de estrategias del Ejemplo 2



La Figura 2 muestra la red correspondiente. Tenemos que  $N^{1:g} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $N^{2:g} = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $N^{3:g} = \{3, 4, 5\}$ ,  $N^{4:g} = \{4\}$  y  $N^{5:g} = \{5\}$ . Esto es, bajo  $g$  tenemos que 1 accede a la información de todos los agentes mientras que 4 y 5 sólo acceden a su propia información. Los números de enlaces requeridos para obtener la información son  $\mu_1(g) = 5$ ,  $\mu_2(g) = 3$  y  $\mu_3(g) = 2$ , mientras que  $\mu_4(g) = \mu_5(g) = 0$ .

Para convertir a este esquema en un juego tenemos que definir los pagos de los agentes. Supondremos que  $\Pi_i : G \rightarrow R$ , la función de pagos para el agente  $i$ , es:

$$\Pi_i(g) \equiv \sum_{j \in N^{i:g}} I_j - \mu_i(g) \quad (1)$$

Esto es, los pagos de  $i$  son la suma de toda la información a la que puede acceder, menos el costo de los senderos que le llegan, establecidos de acuerdo a  $g$  (recuérdese que cada enlace tiene costo unitario). La intuición aquí es que  $i$  obtiene un pago por acceder a mayor información pero al mismo tiempo tiene que pagar un cargo ó arancel por cada uno de los enlaces en los senderos hacia las fuentes de información.

**Ejemplo 2 primera revisión.** *Supongamos que la información obtenida por los agentes es:  $I_1 = 2$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 3$  y  $I_5 = 3$ . Entonces, bajo la estrategia  $g$  tenemos que*

$$\Pi_1(g) = I_1 + \dots + I_5 - \mu_1(g) = 2 + 2 + 4 + 3 + 3 - 5 = 9$$

$$\Pi_2(g) = I_2 + \dots + I_5 - \mu_2(g) = 2 + 4 + 3 + 3 - 3 = 9$$

$$\Pi_3(g) = I_3 + \dots + I_5 - \mu_3(g) = 4 + 3 + 3 - 2 = 8$$

$$\Pi_4(g) = I_4 - \mu_4(g) = 3 - 0 = 3$$

$$\Pi_5(g) = I_5 - \mu_5(g) = 3 - 0 = 3$$

Podemos notar que, por ejemplo, si  $g_{1,5} = 0$ , el agente 1 podría mejorar su pago (es decir, obtener 10 en vez de 9) dado que tendría todavía acceso a  $I_5$  pero usando un enlace menos.

Para cada  $g \in G$ , el agente  $i$  obtiene una estructura  $N^{i:g}$  y su pago depende críticamente del tipo de grafo que corresponda a  $N^{i:g}$  como se resume en la siguiente proposición:

**Proposición 2.** *Dadas dos estrategias conjuntas  $g$  y  $g'$ ,  $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$  si y solo si los correspondientes grafos  $N^{i:g}$  y  $N^{i:g'}$  son tales que:*

$$\sum_{j \in N^{i:g}} I_j - \sum_{j \in N^{i:g'}} I_j \geq \mu_i(g) - \mu_i(g')$$

**Prueba:** Trivial.  $\square$

Este resultado ayuda a comprender la intuición de que el objetivo de un agente racional es el de obtener tanta información como sea posible, atravesando la menor cantidad de enlaces posibles. Dos casos son de particular interés:

- $\sum_{j \in N^i: g} I_j = \sum_{j \in N^i: g'} I_j$  y  $\mu_i(g) \leq \mu_i(g')$ ,
- $\sum_{j \in N^i: g} I_j \geq \sum_{j \in N^i: g'} I_j$  y  $\mu_i(g) = \mu_i(g')$ .

La primera condición nos muestra que  $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$  si la información obtenida a través de  $g$  es la misma que la obtenida por  $g'$  pero el número de enlaces requeridos es menor en  $g$  que en  $g'$ . El segundo caso muestra que  $\Pi_i(g) \geq \Pi_i(g')$  si el número de enlaces requeridos para alcanzar la información es la misma en  $g$  que en  $g'$  pero el monto de información obtenida en  $g$  es mayor que el monto obtenido en  $g'$ .

### 3. Equilibrio y optimalidad

Dada una red  $g \in G$  (de acuerdo a la Proposición 1 identificamos una estrategia conjunta  $g$  con su grafo dirigido correspondiente), sea  $g_{-i}$  el grafo dirigido obtenido cuando removemos todos los enlaces directos del agente  $i$ . Entonces,  $g$  puede ser escrito como  $g = (g_i, g_{-i})$ , significando que  $g$  esta formada por la unión de los enlaces de  $g_i$  y aquellos de  $g_{-i}$ . Una estrategia  $g_i$  se dice *mejor respuesta* del agente  $i$  a  $g_{-i}$  si

$$\Pi_i(g_i, g_{-i}) \geq \Pi_i(g'_i, g_{-i}) \quad (2)$$

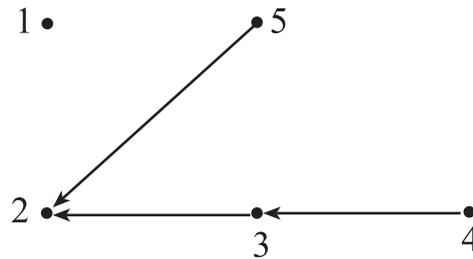
para todo  $g'_i \in G_i$ .

**Ejemplo 3:** *Considérese otra vez el caso de  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , donde  $I_1 = 2$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 3$  y  $I_5 = 3$ . Sea  $g_{-1}$  descrita por la Tabla 3. Asimismo véase la Figura 3 para la situación enfrentada por 1.*

**Tabla 3. Perfil de estrategias del Ejemplo 3**

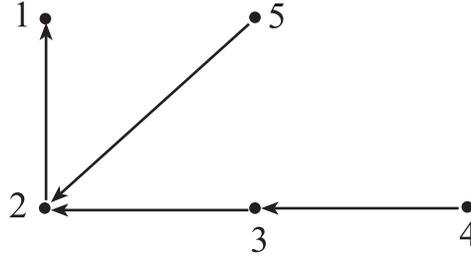
<b>Estrategia</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
$g_2$	0	X	1	0	1
$g_3$	0	0	X	1	0
$g_4$	0	0	0	X	0
$g_5$	0	0	0	0	X

**Figura 3. Red formada por el perfil de estrategias del Ejemplo 3**



El agente 1 tiene que decidir con quién establecer una conexión. Una posibilidad es la de permanecer aislado, pero eso sólo le daría un pago de 2. Alternativamente, podría conectarse a la cantidad de agentes que desee. Pero algunas conexiones podrían ser redundantes en términos de las ganancias por información. Tal redundancia, a su vez, significaría un mayor costo por la misma información. Así, por ejemplo, conectarse a 3 y 4 aseguraría a 1 el tener acceso a la información mantenida por ellos. El número de enlaces requeridos sería de 3. El pago entonces sería de  $2 + 4 + 3 - 3 = 6$ . Podría, en cambio, conectarse solamente a 3, dado que aún recibiría la información de 3 y 4 pero sólo requeriría de 2 enlaces, es decir su pago sería de  $2 + 4 + 3 - 2 = 7$ . Un poco de reflexión muestra que la mejor respuesta para 1 sería la de conectarse sólo al agente con el mayor pago bajo  $g_{-1}$ . Esto es, al agente 2, el cual tiene un pago de  $2 + 4 + 3 + 3 - 3 = 9$ . Entonces, 1 alcanzará la información de 2, 3, 4 y 5, requiriendo 4 enlaces. Esto es, su pago sería de 10. La Figura 4 muestra la red resultante.

**Figura 4. Red final formada por el agente 1**



El conjunto de mejores respuestas a  $g_{-i}$  es  $MR_i(g_{-i})$ . Una red  $g = (g_1, \dots, g_n)$  se dice una *red de Nash* si para cada  $i$ ,  $g_i \in MR_i(g_{-i})$ , es decir  $g$  (como una estrategia conjunta) es un equilibrio de Nash. Para determinar la estructura de las redes de Nash daremos algunas definiciones que nos permitirán describir propiedades adicionales de las redes.

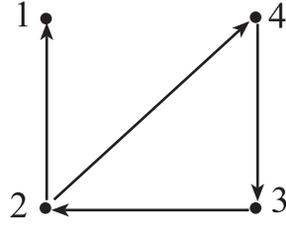
Dada una red  $g$ , un conjunto  $C \subset N$  es llamado *componente* de  $g$  si para cada par de agentes  $i$  y  $j$  en  $C$  ( $i \neq j$ ) tenemos que  $j \in N^{i:g}$  y no existe un  $C'$ ,  $C \subset C'$ , para el cual esto es cierto. Un componente  $C$  se dice *mínimo* si  $C$  no es más componente una vez que  $g_{i,j} = 1$  entre dos agentes  $i$  y  $j$  en  $C$  es cortado, es decir si  $g_{i,j} = 0$ .

**Ejemplo 4.** Si  $N = \{1, 2, 3, 4\}$ , considérese la siguiente red, representada en la Tabla 4 y dibujada en la Figura 5.

**Tabla 4. Perfil de estrategias para el Ejemplo 4**

<b>Estrategia</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
$g_1$	X	1	0	0
$g_2$	0	X	1	0
$g_3$	0	0	X	1
$g_4$	0	1	0	X

Figura 5. Red formada por el perfil de estrategias del Ejemplo 4



Claramente  $C = \{2, 3, 4\}$  es un componente, dado que  $N^{2:g} = N^{3:g} = N^{4:g} = \{2, 3, 4\}$  y si consideramos a  $N = C \cup \{1\}$ ,  $N$  no es un componente, dado que 1 no pertenece a  $N^{2:g}$ ,  $N^{3:g}$  ó  $N^{4:g}$ . Por otro lado,  $C$  es mínimo dado que si cortamos cualquiera de los enlaces 23, 34 ó 42 alguno de los agentes deja de ser alcanzable para al menos un agente en  $C$ . De este modo, por ejemplo, si 23 es cortado, en la nueva red  $g'$  tenemos que  $N^{2:g'} = \{2\}$ .

Una red se dice *conectada* si tiene un único componente. Si ese único componente es mínimo,  $g$  se dice *mínimamente conectada*. Una red no conectada se dice *desconectada*. Una instancia particular de las redes mínimamente conectadas es la red *circular*, en la cual los agentes pueden ser etiquetados (por medio de una función  $l: N \rightarrow N$ ) como  $\{l(1), \dots, l(n)\}$  y  $g_{l(1),l(2)} = g_{l(2),l(3)} = \dots = g_{l(n-1),l(n)} = g_{l(n),l(1)} = 1$  y no hay otros enlaces.

Con todos estos elementos a mano, podemos establecer el siguiente resultado (todos los resultados en esta sección corresponden al juego  $\langle N, G, \Pi \rangle$ , donde  $\Pi = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_n$ ):

**Lema 1:** Si  $g^*$  es una red estricta de Nash, entonces es circular.

**Prueba:** Consideremos a  $\Pi_i: G \rightarrow Z$ , para cada  $i \in N$  y un equilibrio de Nash estricto  $g^* \in G$ . Entonces, para cada  $i$  y cada  $g_i \in G_i$ , tenemos que:

$$\Pi_i(g_i^*, g_{-i}^*) > \Pi_i(g_i, g_{-i}^*) \quad (3)$$

Decimos que  $g^*$  define una red circular. Si es así, recordemos que, por la Proposición 2, debe ser cierto para cada  $i$  que (véase la Prueba 1 en el Apéndice de este trabajo):

$$\Pi_i(g^*) = \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (4)$$

En palabras: el máximo de información que puede ser alcanzado en una red circular es la suma de la información poseída por todos los agentes mientras que el número de enlaces que permitirían hacer disponible esta información a *cualquiera* de ellos es  $n - 1$ . Nótese que una estructura en la cual existe sólo un sendero entre cualquier par de agentes tendría sólo  $n$  enlaces (véase la Prueba 2 en el Apéndice).

Supongamos por contradicción que  $g^*$  no es circular. Esto significa que para al menos un agente  $i$ ,

$$\Pi_i(g^*) \neq \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (5)$$

Consideremos primero el caso en el cual:

$$\Pi_i(g^*) > \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (6)$$

Dado que  $\sum_{j \in N} I_j$  no puede ser mejorado, la única posibilidad es que el número de enlaces sea menor, es decir  $\Pi_i(g^*) = \sum_{j \in N} I_j - k$ , donde  $k < n - 1$ . Pero una contradicción aparece por el hecho que  $k \not\leq (n-1)$  dado que de otro modo  $i$  no sería capaz de acceder a por lo menos un agente  $j$  y entonces no podría obtener beneficio de su información  $I_j$ .

Consideremos ahora el caso en el cual:

$$\Pi_i(g^*) < \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (7)$$

el cual puede ocurrir si  $i$  no tiene acceso a al menos un agente (digamos  $j$ ) ó si el número de enlaces en los senderos hacia la información adquirida por  $i$  es mayor que  $n - 1$ . Consideremos el primer caso, esto es, que existe un  $j$  que no es accedido por  $i$ . Entonces,  $i$

puede seleccionar una estrategia  $g_i \in G$  tal que  $g_{i,j} = 1$ . Entonces, el número de enlaces se incrementa en 1 mientras que la información accedida se incrementa en  $I_j > 1$ . Esto es,  $\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) > \Pi_i(g^*)$ . Absurdo, dado que  $g^*$  es un equilibrio estricto de Nash.

Por otro lado, si el número de enlaces en el sendero que brinda información a  $i$  es mayor que  $n - 1$ ,  $i$  recibe la información de al menos un agente  $j$ ,  $I_j$ , en una forma redundante. Esto implica que existe un agente  $k$  (el cual puede ser el mismo  $i$ ) tal que  $k$  recibe información de  $j$  tanto por un enlace directo,  $g_{k,j}^* = 1$ , y a través de un enlace hacia otro agente, digamos  $l$ . Entonces,  $k$  puede cambiar hacia una estrategia alternativa  $g_k \in G_k$  idéntica a  $g_k^*$  excepto para  $g_{k,j} = 0$ . Esto implica que la información accedida por  $k$  es la misma con  $g^*$  mientras que el número de nodos se reduce por 1, es decir  $\Pi_k(g_k, g_{-k}^*) > \Pi_k(g^*)$ . Absurdo, dado que  $g^*$  es un equilibrio de Nash.  $\square$

Nótese que no toda red de Nash es circular:

**Ejemplo 5:** Sea  $N = \{1, 2, 3\}$  con  $I_i = 2$  para  $i = 1, 2, 3$ . Sea  $g^*$  representada por la Tabla 5.

**Tabla 5. Perfil de estrategias para el Ejemplo 5**

<b>Estrategia</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
$g_1^*$	X	1	1
$g_2^*$	1	X	0
$g_3^*$	1	0	X

Por supuesto,  $g^*$  no define una red circular (este tipo es denominado una red *estrella*). Para verificar que  $g^*$  es un equilibrio (débil) de Nash veamos, por ejemplo, las mejores respuestas de 2 a  $g_2^*$  (el análisis para 1 y 3 es análogo). Aparte de  $g_2^*$ , hay tres otras posibilidades:  $g_2^a = \langle 0, X, 0 \rangle$ ,  $g_2^b = \langle 1, X, 1 \rangle$  y  $g_2^c = \langle 0, X, 1 \rangle$ . Entonces, mientras

$$\Pi_2(g^*) = 2 + 2 + 2 - 2 = 4, \quad \Pi_2(g_2^a, g_{-2}^*) = 2, \quad \Pi_2(g_2^b, g_{-2}^*) = 2 + 2 + 2 - 3 = 3 \quad \text{y}$$

$$\Pi_2(g_2^c, g_{-2}^*) = 2 + 2 + 2 - 2 = 4.$$

Este ejemplo muestra que hay redes de Nash no circulares que pueden dar el mismo pago que las circulares. Pero nótese que mientras los individuos obtienen el mismo pago, la estructura global difiere. De hecho, tenemos lo siguiente:

**Proposición 3.**  $g^*$  es una red circular si y sólo si es una red de Nash con el mínimo número de enlaces.

**Prueba:** Si  $g^*$  es una red circular, para cada  $i$  el pago está dada por (4). Supongamos que no es red de Nash. Esto es, por al menos un agente  $i$ , existe una desviación  $g_i \in G_i$  tal que

$$\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) > \sum_{j \in N} I_j - (n-1) \quad (8)$$

Pero la única manera de alcanzar esto es reduciendo el número de enlaces en los senderos que llevan información de todos los otros agentes hacia  $i$ . Dado que  $g^*$  es circular, existe sólo un agente  $j$  tal que  $g_{i,j}^* = 1$ . Hay tres posibilidades de desviación para  $g_i$ :

- Para cada  $j \neq i$ ,  $g_{i,j} = 0$ . Pero entonces  $i$  reduce el número de enlaces en  $n - 1$  y accede sólo a su propia información, perdiendo la información de todos los otros  $n - 1$  agentes. Dado que  $\sum_{j \neq i} I_j > n - 1$  tenemos que  $\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) < \sum_{j \in N} I_j - (n-1)$ . Contradicción.
- Para un  $k$  dado,  $g_{i,k} = 1$  mientras que es cero para cualquier otro agente. Pero entonces  $i$  corta el sendero entero  $k \xrightarrow{g^*} i$  que pasa a través de  $j$ . Si la longitud de este sendero es  $m$ ,  $\mu_i(g_i, g_{-i}^*) = n - m - 1$ , pero  $m - 1$  agentes no son desde ahora accedidos. Dado que  $\sum_{j \in k \xrightarrow{g^*} i} I_j > m - 1$  tenemos que  $\sum_{j \notin k \xrightarrow{g^*} i} I_j - (n-1) - m < \sum_{i \in N} I_i - (n-1)$ . Contradicción.

- Para más de un  $k$ ,  $g_{i,k} = 1$ . Pero entonces, incluso si el número de agentes accedidos permanece igual, el número de enlaces se incrementa. De este modo,  $\Pi_i(g_i, g_{-i}^*) \leq \Pi_i(g^*)$ . Contradicción.

Si  $g^*$  es un equilibrio de Nash con el mínimo número de enlaces entonces constituye un único componente que incluye todos los agentes en  $N$  (de otro modo la información de los agentes que no son accedidos se perderá para al menos algún otro agente, mientras que la reducción en los costos de los enlaces no será lo suficiente como para compensar dicha pérdida. Recuérdese que cada  $I_i$  es mayor que el costo de un enlace.) Como se demostró anteriormente (nuevamente véase la Prueba 2 del Apéndice) el número mínimo de enlaces que permite estar conectados a todos los agentes es  $n$ . Para mostrar que  $g^*$  es circular empecemos por suponer que no lo es. Entonces, para cada etiquetamiento  $l: N \rightarrow N$  tenemos que al menos uno de los  $g_{l(1),l(2)}^*, g_{l(2),l(3)}^*, \dots, g_{l(n-1),l(n)}^*, g_{l(n),l(1)}^*$  tiene valor 0 ó existe otro enlace. Esta última posibilidad debe descartarse dado que sabemos que  $g^*$  tiene sólo  $n$  enlaces. Por ello no debe ser posible conectar todos los agentes en  $N$  de tal manera que cada agente sólo este conectado con un agente. Pero, dado que  $g^*$  tiene que incluir a todos los agentes y conectarlos con sólo  $n$  enlaces es posible elegir uno de los agentes en la estructura, digamos  $i$ , y asociarle a ella la etiqueta,  $l(i) = 1$ .  $i$  está conectado a sólo un agente  $j$  dado que si  $i$  estuviese conectado con dos agentes diferentes sólo restarían  $n - 2$  enlaces para conectar los otros  $n - 1$  agentes. En ese caso, al menos uno de los agentes no tendría un enlace directo dirigido hacia él y entonces obtendría un pago inferior al máximo. De acuerdo a esto, etiquetemos al agente conectado a  $i$  como  $j$ , tal que  $l(j) = 2$ . Consideremos el único agente a quién  $j$  esta conectado, digamos  $k$ . Etiquetamos a  $k$  como  $l(k) = 3$ . Procedamos del mismo modo hasta que el agente accedido por el sendero de conexiones, digamos  $r$ , sea tal que  $l(r) = n$ . Entonces,  $n - 1$  enlaces habrán sido usados hasta ese momento. Queda por establecer a quién se conectará  $r$ . No puede ser ninguno de los agentes etiquetados como  $2, \dots, n-1$  dado que cada uno de ellos tiene sólo una conexión (hacia el agente con la etiqueta predecesora). Por otro lado,  $r$  no puede conectarse consigo mismo (dado que su pago sería sólo de  $I_r$ ). Por ello, debe conectarse con  $i$  (quién

tiene la etiqueta 1). Esto es, encontramos una función de etiquetamiento  $l$  tal que  $g_{l(1),l(2)}^*, g_{l(2),l(3)}^*, \dots, g_{l(n-1),l(n)}^*, g_{l(n),l(1)}^* = 1$ . Esto contradice nuestro supuesto de que la red no es circular. Entonces,  $g^*$  es circular. Finalmente, afirmamos que pueden existir muchas  $g^*$ . El hecho es que, dado que todas son circulares, la única diferencia entre ellas reside en los nombres de los agentes. Por ello, dos redes de Nash diferentes sobre  $N$  son isomórficas. Esto es, si  $g^*$  y  $g^{*'}$  son dos redes de Nash sobre  $N$ , existe una función  $f: N \rightarrow N$  tal que para cada  $i$  y  $j$  tenemos que  $g_{i,j}^* = g_{f(i),f(j)}^{*'}$ .  $\square$

La Proposición 3 indica claramente la cercana relación entre la *estricticidad* de los equilibrios de Nash y la *minimalidad* del número de enlaces en la estructura resultante. Esto es:

**Corolario:** *Dado un componente  $g$ , es un equilibrio estricto de Nash sí y sólo sí el número de sus enlaces es el mínimo.*

**Prueba:** Supongamos que  $g$  es un equilibrio estricto de Nash pero el número de enlaces no es mínimo. Entonces, debe haber un enlace redundante, es decir un enlace que, si se lo cortara, dejaría al pago de al menos un agente sin cambios. Esto es, existe un agente  $i$  y una desviación  $g'_i$  tal que  $\Pi_i(g'_i, g_{-i}) = \Pi_i(g)$ . Contradicción, dado que supusimos que  $g$  es un equilibrio estricto de Nash. Dado que  $g$  es un componente para cada par de agentes  $i$  y  $j$ ,  $i \in N^{i:g}$  y  $j \in N^{i:g}$ , esto es, todos los agentes están conectados. Como se discutió más arriba, el mínimo número de enlaces que asegura esto es  $n$ . La única estructura con la propiedad de que todos los agentes están conectados por  $n$  enlaces es la red circular, la cual de acuerdo con la Proposición 3 es un equilibrio estricto de Nash.  $\square$

Incluso si las redes circulares pueden ser identificadas con equilibrios estrictos de Nash ello no significa que sean únicas dentro del conjunto de agentes en  $N$ . Pero son ciertamente isomórficas, tal como se mostrará en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 6:** Sea  $N = \{1, 2, 3\}$  con  $I_1 = 2$ ,  $I_2 = 3$  y  $I_3 = 4$ . Sea  $g^*$  representada por el perfil de estrategias en Tabla 6.

**Tabla 6. Perfil de estrategias para el Ejemplo 6**

Estrategia	1	2	3
$g_1^*$	X	1	0
$g_2^*$	0	X	1
$g_3^*$	1	0	X

Chequeemos que  $g^*$  es un equilibrio de Nash. Consideremos la mejor respuesta de 1 a  $g_{-1}^*$ . Hay cuatro opciones:  $g_1^a = \langle X, 0, 0 \rangle$ ,  $g_1^b = \langle X, 1, 0 \rangle$ ,  $g_1^c = \langle X, 0, 1 \rangle$  ó  $g_1^d = \langle X, 1, 1 \rangle$ . Tenemos que  $\Pi_1(g_1^a, g_1^*) = I_1 = 2$ ,  $\Pi_1(g_1^b, g_1^*) = I_1 + I_2 + I_3 - 2 = 2 + 3 + 4 - 2 = 7$ ,  $\Pi_1(g_1^c, g_1^*) = I_1 + I_3 - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$  y  $\Pi_1(g_1^d, g_1^*) = I_1 + I_2 + I_3 - 3 = 2 + 3 + 4 - 3 = 6$ . Es claro que  $g_1^b$  es la mejor respuesta a  $g_{-1}^*$ , pero precisamente  $g_1^b = g_1^*$ . Un argumento similar es válido para  $g_2^*$  y  $g_3^*$ . Esto muestra que  $g^*$  es una red de Nash. Por otro lado, considérese la siguiente red alternativa,  $g^{*'}$  sobre el  $N$  que es presentada en la Tabla 7.

**Tabla 7. Perfil de estrategias para el Ejemplo 6 alternativo**

Estrategia	1	2	3
$g_1^{*'}$	X	0	1
$g_2^{*'}$	1	X	0
$g_3^{*'}$	0	1	X

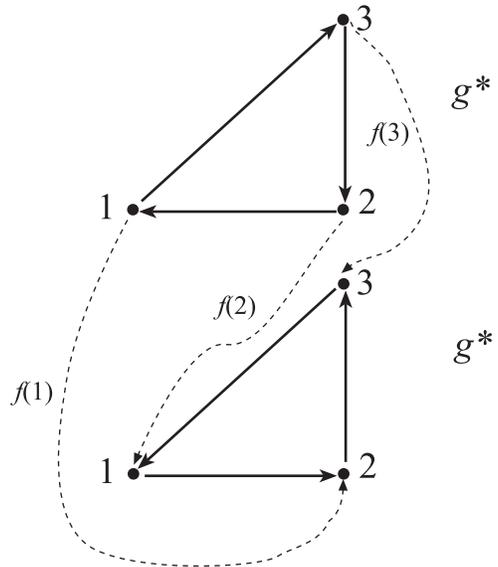
Un examen rápido muestra que  $g^{*'}$  es también una red de Nash que para cada agente en  $N$  proporciona el mismo pago  $g^* : \Pi_1(g^{*'}) = \Pi_2(g^{*'}) = \Pi_3(g^{*'}) = I_1 + I_2 + I_3 - 3 = 9 - 2 = 7$ . Es fácil establecer un isomorfismo  $f : N \rightarrow N$  entre  $g^*$  y  $g^{*'} : f(1) = 2$ ,  $f(2) = 1$  y

$f(3)=3$ . Entonces, considérese la Tabla 8, obtenida de la descripción de  $g^*$  por una transposición de las filas y las columnas a  $f$ .

Estrategia	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
$g_{f(1)}^*$	X	0	1
$g_{f(2)}^*$	1	X	0
$g_{f(3)}^*$	0	1	X

Nótese que la estructura de entradas en esta tabla es idéntica a la correspondiente  $g^*$ . Esto establece el isomorfismo entre  $g^*$  y  $g^{*'}$ . La Figura 6 exhibe el isomorfismo gráficamente.

Figura 6. Isomorfismo de redes



De acuerdo al Lema 1 y la Proposición 3, un resultado estable en la interacción estratégica de agentes es la red circular. Afirmamos que ésta es estable porque no hay incentivos a cortar o establecer nuevos enlaces, una vez que la estructura de la red circular ha surgido, porque la nueva configuración puede llegar a no otorgar los mismos pagos a los agentes. Este argumento hace surgir la pregunta sobre la optimalidad del resultado. Esto es, ¿hay otra configuración que pueda asegurar mejores pagos a los agentes? Antes de responder

negativamente esta pregunta, introduciremos dos nociones diferentes de optimalidad que pueden considerarse. Una representa la noción de *bienestar social* asegurada por la red. Formalmente, sea  $W : G \rightarrow Z$  definida como  $W(g) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(g)$  para  $g \in G$ . Una red se dice *eficiente* si  $W(g) \geq W(g')$  para todo  $g' \in G$ .

Por otro lado, tenemos la noción de optimalidad de Pareto. Una red  $g$  se dice *óptima de Pareto* si no existe otra red  $g'$  tal que para cada  $i \in N$ ,  $\Pi_i(g') \geq \Pi_i(g)$  y para al menos un  $i$ ,  $\Pi_i(g') > \Pi_i(g)$ .

Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Proposición 4.** *Una red estricta de Nash es tanto eficiente como óptima de Pareto.*

**Prueba.** Recordemos que una red estricta de Nash  $g^*$  sostiene el máximo pago para cada agente,  $\Pi_i(g^*) = \sum_{j \in N} I_j - (n-1)$ . Entonces,  $\Pi_i(g^*) \geq \Pi_i(g)$  para cada  $i \in N$  y cada  $g \in G$ . De este modo,  $g^*$  es *óptima* en el sentido de *Pareto*. Con el mismo razonamiento,  $W(g^*) = \sum_{i \in N} \Pi_i(g^*) \geq \sum_{i \in N} \Pi_i(g) = W(g)$ , para cada  $g \in G$ . Esto es,  $g^*$  es *eficiente*.  $\square$

#### 4. Comparación con el esquema de Bala y Goyal

Como fue mencionado, nuestro modelo comparte diversas características con Bala y Goyal (2000) – **BG** de ahora en más. Pero, como veremos, la intuición es muy diferente en un caso y en otro. Más aún, los resultados que se siguen, incluso si hay alguna semejanza entre ellos, se alcanzan en base a diferentes conceptos.

Para organizar la discusión, introduciremos la noción de pagos usada en **BG**. Recordemos dos definiciones ya dadas:  $N^{g_i} = \{k \in N \mid g_{i,k} = 1\}$  es el conjunto de agentes con quienes  $i$  establece un enlace directo de acuerdo a su estrategia  $g_i$  mientras que el conjunto de agentes accedidos (directamente ó de otro modo) por  $i$  es  $N^{i;g} = \{k \in N \mid k \xrightarrow{g} i\} \cup \{i\}$ .

Sobre estos dos conjuntos, **BG** definen dos funciones:  $\delta_i^d = |N^{g_i}|$  y  $\delta_i(g) = |N^{i:g}|$ , los cuales indican, respectivamente, el número de agentes a los cuales  $i$  tiene enlace directo y el número de agentes a los cuales  $i$  esta conectado, directa ó indirectamente. En la presentación original de **BG**,  $\delta_i^d$  es denotada como  $\mu_i^d$  mientras que  $\delta_i$  es  $\mu_i$ . Nosotros las cambiamos para evitar confusiones con nuestra notación.

BG consideran la siguiente función de pagos:

$$\Pi_i^{BG}(g) \equiv \delta_i(g) - \delta_i^d(g)c \quad (9)$$

donde  $c$  es el costo de establecer cada enlace. Esto es, los pagos de  $i$  son el número de agentes cuya información puede ser accedida por ella, menos el costo de los enlaces directos que son establecidos de acuerdo con  $g$ .

**Ejemplo 2 segunda revisión.** *Supongamos otra vez que la información poseída por los agentes es:  $I_1 = 2$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_3 = 4$ ,  $I_4 = 3$  y  $I_5 = 3$ . Entonces, bajo la estrategia  $g$  tenemos que en **BG**, suponiendo  $c = 1$ :*

$$\Pi_1^{BG}(g) = \delta_1(g) - \delta_1^d(g) = 5 - 2 = 3$$

$$\Pi_2^{BG}(g) = \delta_2(g) - \delta_2^d(g) = 4 - 1 = 3$$

$$\Pi_3^{BG}(g) = \delta_3(g) - \delta_3^d(g) = 3 - 2 = 1$$

$$\Pi_4^{BG}(g) = \delta_4(g) - \delta_4^d(g) = 1 - 0 = 1$$

$$\Pi_5^{BG}(g) = \delta_5(g) - \delta_5^d(g) = 1 - 0 = 1$$

Podemos notar aquí que, por ejemplo, si  $g_{1,5} = 0$ , el agente 1 podría mejorar su beneficio (obteniendo 10 en vez de 9) porque podría aún seguir teniendo acceso a la información del agente 5 pero usando un enlace menos. Lo mismo sigue siendo cierto para el caso de BG, el cuál en este caso particular incrementaría su beneficio de 3 a 4.

Pero, sí por ejemplo, 3 no contacta a 5, 1 mejoraría su pago bajo  $\Pi_1$  de 9 a 10, mientras que en el caso de  $\Pi_1^{BG}$  permanece con su pago igual a 3.

Más aún, nótese que  $\Pi_3^{BG}(g) = 1 = \Pi_4^{BG}(g)$ , mientras que  $\Pi_3(g) = 8 > 3 = \Pi_4(g)$ .

Las diferencias en los pagos exhibidos en este ejemplo muestran claramente las diferentes intuiciones detrás de  $\Pi_i(g)$  y  $\Pi_i^{BG}(g)$ . Mientras que la primera depende del valor de la información poseída por los agentes, **BG** la basa en la cantidad de agentes accedidos. También los costos son diferentes, dado que **BG** sólo considera los costos de establecer enlaces directos, mientras que en nuestro caso el costo de un sendero es compartido por todos los agentes en él.

Para analizar la existencia de equilibrios, en **BG** se generaliza  $\Pi_i^{BG}$  por medio de la función

$$\Phi(\delta_i(g), \delta_i^d(g)) \quad (10)$$

incrementándose en el primer argumento y decreciendo en el segundo. Con esta función en mano Bala y Goyal prueban las siguientes afirmaciones:

**Proposición (3.1, pp. 1194):** *Una red de Nash es vacía ó mínimamente conectada.*

**Proposición (3.2, pp. 1195):** *Una red estricta de Nash es vacía ó circular. Más aún:*

1. *Si  $\Phi(m+1, m) > \Phi(1, 0)$  para algún  $m \in \{1, \dots, n-1\}$  la única red estricta de Nash es la circular;*
2. *Si  $\Phi(m+1, m) \leq \Phi(1, 0)$  para todo  $m$  y  $\Phi(n, 1) > \Phi(1, 0)$ , tanto la red circular como la vacía son redes estrictas de Nash;*
3. *Si  $\Phi(m+1, m) \leq \Phi(1, 0)$  para todo  $m$  y  $\Phi(n, 1) \leq \Phi(1, 0)$ , la red vacía es la única red estricta de Nash.*

Este último resultado puede ser evaluado cuando  $\Phi(\delta_i(g), \delta_i^d(g)) = \delta_i(g) - \delta_i^d(g)c$ . Así, el caso 1 se reduce a  $m+1-mc > 1$ , es decir a  $1-c > 0$  ó  $c < 1$ . El caso 2 indica que mientras  $c \geq 1$ ,  $n-c > 1$ , es decir  $c < n-1$ . Finalmente, el caso 3 pasa cuando  $c \geq n-1$ .

De este modo, estos resultados indican que las únicas redes estrictas de Nash son las circulares cuando  $c < 1$ , mientras que las redes vacías son las únicas redes de Nash cuando  $c > n-1$ . Para  $c \in [1, n-1]$  tanto la red circular como la vacía son equilibrios estrictos de Nash.

Para comparar nuestros resultados con los de **BG** tenemos que identificar las respectivas funciones de pagos, es decir:

$$\Pi_i(g) = \sum_{j \in N^{i:g}} I_j - \mu_i(g) = \delta_i(g) - \delta_i^d(g)c = \Pi_i^{BG}(g) \quad (11)$$

La manera más simple en la cual esto puede ocurrir es si  $I_j = 1$  para cada  $j \in N^{i:g}$  y  $\mu_i(g) = \delta_i^d(g)c$ . En particular, para las redes circulares es el caso que, para cada  $i$ ,  $N^{i:g} = N$ ,  $\mu_i(g) = n-1$  y  $\delta_i^d(g) = 1$ . Para mantener ambas funciones de pagos iguales, el costo de cada enlace debe ser de  $c = n-1$ .

Pero entonces, si bien los pagos son los mismos, nuestro enfoque arroja a la red circular como la única red estricta de Nash. En **BG**, en cambio, la única red estricta de Nash es la red vacía. En otras palabras, las diferencias entre las respectivas funciones de pagos llevan a diferencias en los equilibrios.

## 5. Discusión

Presentamos en este trabajo un modelo de formación de redes en forma de un juego no cooperativo donde los agentes deciden a quién enlazarse, comparando los beneficios netos de sus acciones. Las decisiones son hechas simultáneamente y por ello no requerimos de una esquema dinámico, presente en cambio en Bala y Goyal (2000). En cualquier caso, en

un modelo donde los agentes no son miopes (es decir, como en nuestro esquema) y poseen mayores costos de establecer enlaces iniciales, también pueden plantearse procesos dinámicos que convergen a la red circular (Watts (2000)).

En nuestro marco de análisis la heterogeneidad sólo significa que cada agente esta dotado con alguna información particular que es valiosa para otros agentes. Este supuesto nos lleva a un incremento en el beneficio de ingresar en la red, haciendo de la participación en la red siempre más valioso que el aislamiento. Por otro lado, los costos tienden a ser mayores en nuestro esquema porque se supone que nuestros agentes contribuyen a pagar los costos de los enlaces en los senderos que llevan información hacia ellos. Un resultado interesante es que las redes circulares surgen en nuestro esquema como equilibrios de Nash que sostienen estructuras con un mínimo número de enlaces. Esto apoya la intuición de que las redes estrictas de Nash y la existencia de un número mínimo de conexiones son propiedades equivalentes.

## Referencias

- Bala, V. y S. Goyal (2000), “A Noncooperative Model of Network Formation”, *Econometrica* **68**: 1181-1229.
- Dutta, B. y M. Jackson (2000), “The Stability and Efficiency of Directed Communication Networks”, *Review of Economic Design* **5**: 251-272.
- Dutta, B. y M. Jackson (2001), On the Formation of Networks and Groups. Incluido en Dutta, B. y M. Jackson (editores), *Models of Strategic Formation of Networks and Groups*, Springer-Verlag, New York.
- Dutta, B., A. van den Nouweland y S. Tijs (1998), “Link Formation in Cooperative Situations”, *International Journal of Game Theory* **27**: 245-255.
- Dutta, B. y S. Mutuswami (1997), “Stable Networks”, *Journal of Economic Theory* **76**: 322-344.
- Jackson, M. y A. Wolinsky (1996), “A Strategic Model of Social and Economic Networks”, *Journal of Economic Theory* **71**: 44-74.

- Qin, C.Z. (1996), “Endogenous Formation of Cooperative Structures”, *Journal of Economic Theory* **69**: 218-226.
- Slikker, M. y A. van den Nouweland (2001), “A One-Stage Model of Link Formation and Payoff Division”, *Games and Economic Behavior* **34**: 153-175.
- Tanenbaum, A (1989), *Computer Networks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wasserman, S. y K. Faust (1994), *Social Network Analysis*, Cambridge University Press, New York.
- Watts, A. (2002), “Non-myopic formation of circle networks”, *Economic Letters* **74**: 277-282.

## 6. Apéndice

### Prueba 1

Este pago es mejor que el aislamiento. Considérese un agente  $i$  tal que  $I_i > I_j$  para cada  $j \neq i$ . El pago de los agentes aislados es, para cada  $i$ , precisamente  $I_i$ . Supongamos por contradicción que  $I_i + \sum_{j \neq i} I_j - (n-1) \leq I_i$ . Entonces  $\sum_{j \neq i} I_j \leq n-1$ , pero como  $I_j > 1$  para cada  $j$ ,  $\sum_{j \neq i} I_j > n-1$ . Absurdo.  $\square$

### Prueba 2

Una simple prueba por inducción muestra esto. Supongamos que  $N = \{i, j\}$ . Entonces, si  $i$  tiene acceso a  $j$  y  $j$  a  $i$ ,  $|N|$  enlaces son los requeridos. Vamos a suponer que la afirmación es válida para  $|N| = n - 1$ . Si  $|N| = n$  consideremos un subconjunto  $N' \subset N$ ,  $N = \{i\} \cup N'$ . Dado que  $|N'| = n - 1$ , todo los elementos en  $N'$  pueden ser conectados con  $n - 1$  enlaces. Para conectar  $i$  a cada elemento de  $N'$  en tal forma que cada agente en  $N'$  tenga acceso a  $i$ , solo considérese dos agentes en  $N'$ ,  $j_1$  y  $j_2$ , tal que la longitud del sendero de  $j_1$  a  $j_2$  es  $n - 2$ . Entonces, la longitud del sendero de  $j_2$  a  $j_1$  es 1. Eliminemos este enlace simple y reemplacémoslo con dos enlaces: uno desde  $j_2$  hacia  $i$  y el otro desde  $i$  hasta  $j_1$ . De este modo,  $i$  tendrá acceso a todos los agentes en  $N'$  y cada agente en  $N'$  tendrá acceso a  $i$ . El

número de enlaces es entonces  $(n - 1) - 1 + 2 = n$ . Por ello, la afirmación es válida para cada  $n > 0$ .  $\square$