

# La engañosa simplicidad del “método de Stokes” para medir viscosidades

(*The misleading simplicity of “Stokes method” for viscosity measurement*)

Claudia Sandoval<sup>1</sup>, Jorge Caram<sup>1</sup> y Julia Salinas<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán,  
San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina.*

<sup>2</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Buenos Aires, Argentina.*

Recibido em 13/5/2009; Revisado em 22/7/2009; Aceito em 27/7/2009; Publicado em 18/2/2010

Enfocamos la atención sobre la relación entre magnitudes que suele utilizarse en los laboratorios docentes para determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido con el método de Stokes. El experimento es de bajo costo y de aparente realización sencilla. Pero la sencillez proviene de las exigentes condiciones que el sistema debe cumplir para que sea lícito suponer la validez de la relación entre magnitudes que se emplea. Compartimos información y reflexiones sobre algunos aspectos puntuales vinculados a esta práctica de laboratorio. El tratamiento de estos aspectos puede aumentar el interés y la participación de los estudiantes, así como favorecer mejores aprendizajes. Por una parte, proponemos desarrollos teóricos complementarios clarificadores, básicamente cualitativos, que pueden ser incorporados al experimento en momentos oportunos, para favorecer comprensiones más profundas. Por otra parte, presentamos un diseño experimental para la realización de la práctica; exponemos resultados obtenidos, su procesamiento y análisis, a la luz del marco teórico definido. Finalizamos con una breve síntesis de lo tratado y algunas reflexiones sobre la práctica docente.

**Palabras-clave:** medición de viscosidad, Stokes, condiciones de validez, Reynolds.

In this article we focus on the relation between magnitudes used to measure liquid viscosity coefficients with Stokes' method. The related experiment is a low-cost, and apparently also a very simple one. Its simplicity however rests on the exacting conditions that must be fulfilled by the system. Otherwise, it is incorrect to assume the validity of the usual relation between magnitudes. We deal with some punctual aspects related to this laboratory practice. Their treatment may increase students' interest and favor a better learning. We propose clarifying, complementary theoretical developments, most of them of qualitative type, which may be incorporated to the experiment in opportune moments, so as to help students' deeper comprehension of the subject. We also present an improved experimental design with several measured results, their analysis and the conclusions. We finally expose a brief synthesis of the aspects under consideration, as well as some reflections about teaching practice.

**Keywords:** viscosity measurement, Stokes, validity conditions, Reynolds.

## 1. Introducción

La mecánica de fluidos es una rama muy compleja de la física. En los cursos básicos universitarios de carreras científico-tecnológicas, la enseñanza de la Dinámica de Fluidos, en particular, plantea dificultades que no es sencillo resolver: se hace imprescindible recortar y simplificar fuertemente el estudio y la aplicación de la teoría, sin por ello afectar la correcta comprensión de los fundamentos físicos involucrados.

Para lograr buenos resultados parece conveniente (aunque, por supuesto, no suficiente) adoptar estrategias basadas en una concepción constructivista del aprendizaje [1]. En particular, se destaca la orientación

que propone concebir a los estudiantes como miembros de un equipo de investigadores noveles, que con la guía del docente (que hace las veces de un director de investigación), (re) construye el conocimiento de la física a través de la aplicación de procedimientos y criterios científicos para la resolución de situaciones problemáticas [2].

Los modelos pueden ser considerados entre las principales herramientas usadas por los científicos para producir conocimiento y están, al mismo tiempo, entre los principales productos de la ciencia. Las teorías científicas tratan de modelos ideales que representan sólo unos pocos aspectos de los sistemas reales que estudian; para tratar esos aspectos se introducen sólo

<sup>2</sup>E-mail: jsalinas@herrera.unt.edu.ar.

unas pocas variables, entre las que consideran sólo unas pocas relaciones. Una teoría refiere a un sistema y el modelo supuesto por la teoría representa ese sistema [3].

Expresadas en forma diferencial, las ecuaciones generales de movimiento de los fluidos conforman un sistema no lineal de ecuaciones de segundo orden en derivadas parciales. Este sistema es tan dificultoso, que se dispone de soluciones exactas sólo para un número reducido de casos [4]. Una de las estrategias que se sigue para resolverlo, consiste justamente en la construcción y el uso de modelos simplificados. Así, se trabaja, por ejemplo, con el modelo de fluido incompresible, con el modelo de fluido ideal y con el modelo de fluido muy viscoso. El primero supone densidad constante; se aplica, con buena aproximación, al movimiento de líquidos. El segundo supone despreciables los efectos disipativos de viscosidad y conducción de calor en las ecuaciones de movimiento; se aplica, con razonable precisión, al movimiento de fluidos con viscosidades y conductividades térmicas muy pequeñas. El tercero supone despreciables las fuerzas de inercia convectiva frente a las fuerzas de viscosidad en las ecuaciones de movimiento; se aplica con elevado grado de ajuste a flujos en cañerías de diámetro pequeño, en películas líquidas delgadas y a los movimientos de pequeñas partículas en el seno de fluidos.

En cada caso, la imposición (a las ecuaciones generales) de las condiciones de cada modelo, conduce a la predicción teórica de diferentes relaciones entre las magnitudes. Una vez confirmadas, estas relaciones son leyes de la teoría, que se cumplen bajo las condiciones establecidas en cada modelo. Conviene entonces dar a las leyes la forma lógica de condicionales (“ $p \rightarrow q$ ”: si se da el antecedente  $p$ , entonces se da el consecuente  $q$ ). Esta formulación presenta la ventaja de mostrar con claridad cuáles son las condiciones de validez de la ley, importante cuestión que parece presentar dificultades no sólo a los estudiantes [5].

En este trabajo enfocamos la atención sobre una relación entre magnitudes que suele utilizarse en los laboratorios docentes para determinar el coeficiente de viscosidad de un líquido

$$\eta = \frac{g \cdot d^2 \cdot (\rho_C - \rho_L)}{18 v} \quad (1)$$

Esa expresión se aplica al movimiento de caída (con velocidad uniforme  $v$ ) de una esfera (de densidad  $\rho_C$  y diámetro  $d$ ) en el seno de un líquido (de densidad  $\rho_L$  y viscosidad  $\eta$ );  $g$  representa la aceleración de la gravedad.

Nuestro propósito es compartir desarrollos de algunos aspectos puntuales vinculados a esta práctica de laboratorio, cuyo tratamiento puede aumentar el interés y la participación de los estudiantes, así como favorecer mejores aprendizajes mediante comprensiones más profundas. En el punto 2 de este trabajo exponemos desarrollos teóricos que consideramos útiles para que el

docente complemente las presentaciones del tema que se encuentran en los textos usuales. Con el mismo espíritu, en el punto 3 tratamos algunas cuestiones vinculadas al experimento de medición del coeficiente de viscosidad con el método de Stokes. En el punto 4 presentamos una breve síntesis de lo tratado, con reflexiones sobre la práctica docente.

## 2. Algunas precisiones teóricas

Nos interesa, entonces, favorecer un mejor aprovechamiento educativo del experimento de laboratorio consistente en la determinación del coeficiente de viscosidad con el método de Stokes. En este apartado compartimos desarrollos teóricos (básicamente cualitativos) vinculados a dicho experimento, que complementan las presentaciones que se encuentran en los textos que se usan corrientemente en los ciclos básicos universitarios de carreras científico-tecnológicas. Debe quedar claro que no exponemos una síntesis de la teoría que acompaña el experimento; lo que pretendemos es enfatizar algunas cuestiones puntuales que consideramos clave y que suelen no ser profundizadas. La idea es que, durante el desarrollo orientado de la práctica, el docente propicie, en momentos adecuados, el tratamiento comprensivo de estos aspectos por parte de los estudiantes.

A continuación se comienza con el significado del coeficiente de viscosidad, para pasar luego a la diferencia entre los regímenes de flujo laminar y turbulento, a la obtención de la ley de Stokes, y al sentido del número de Reynolds. Se termina con la caída de una esfera pesada en un fluido viscoso.

### 2.1. El coeficiente de viscosidad

La viscosidad, como la difusión y la conducción de calor, es un mecanismo de nivelación de propiedades intensivas del medio en el que se manifiesta. La viscosidad nivela la velocidad; la difusión nivela la composición; la conducción de calor nivela la temperatura. En los tres casos hay una aproximación al estado de equilibrio térmico, mediante el transporte molecular de determinadas magnitudes extensivas (de momento lineal en la viscosidad, de partículas en la difusión y de energía en la conducción de calor) [6].

La viscosidad puede, así, ser entendida como un fenómeno de transporte [7]. Consideremos un fluido en el que, además de la agitación térmica de las moléculas, hay un movimiento de masa de todo el fluido (por ejemplo, agua que corre por una tubería). Se supone, para simplificar la situación, que el eje  $Y$  corresponde a la dirección de la velocidad  $\mathbf{v}$  del fluido, y que el módulo de la velocidad es función de la distancia sobre el eje  $X$ .

Sea  $P$  un plano perpendicular al eje  $X$ , como muestra la Fig. 1. Las moléculas tienen movimiento térmico y chocan entre sí. Por lo tanto, ellas no se mueven únicamente en forma paralela al eje  $Y$ , sino que están

atravesando permanentemente el plano  $P$ , en ambos sentidos. Cada molécula posee un momento lineal paralelo al eje  $Y$ , asociado al movimiento de masa de todo el fluido.

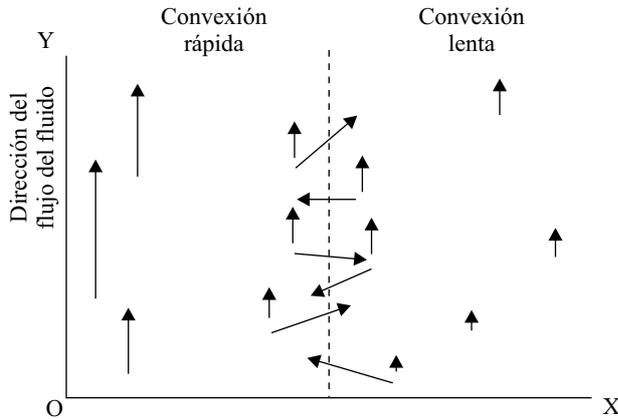


Figura 1 - Velocidades en un fluido en movimiento.

Como la velocidad del fluido varía con la posición sobre el eje  $X$ , hay una cantidad neta de momento lineal que se transfiere por unidad de tiempo a través de un área unitaria perpendicular al eje  $X$ .

El fluido a un lado del plano  $P$  gana momento lineal paralelo al eje  $Y$ , y el fluido que está al otro lado del plano  $P$  pierde momento lineal paralelo al eje  $Y$ . Se puede decir, entonces, que a un lado de  $P$  el fluido está sujeto a una fuerza paralela a la dirección del flujo y que al otro lado de  $P$  está sujeto a una fuerza igual y contraria.

Aparece así un esfuerzo de corte  $\tau$  (fuerza por unidad de área) que, para muchos fluidos (que reciben el nombre de fluidos newtonianos), es proporcional a la variación de la velocidad  $\mathbf{v}$  del fluido por unidad de longitud en la dirección del eje  $X$  (gradiente de  $\mathbf{v}$ ). Para ese tipo de fluidos se puede entonces escribir la conocida ecuación

$$\tau = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

en la que el factor de proporcionalidad  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del fluido.

Cuando hay fricción interna en el fluido, aparece una transferencia de momento lineal, desde las zonas más rápidas del flujo, a las menos rápidas. Cuanto mayor es  $\eta$ , mayor es la fuerza de fricción interna, es decir, mayor es la rapidez de transmisión del momento lineal de un lugar a otro del fluido. La viscosidad es un fenómeno irreversible y disipativo que tiende a igualar la velocidad en los distintos lugares.

En los líquidos la viscosidad disminuye cuando aumenta la temperatura; en los gases, por el contrario, la viscosidad aumenta con la temperatura. Una explicación de estos comportamientos diferentes tiene en cuenta que en los líquidos, una mayor energía cinética (es decir, una mayor temperatura) debilita el efecto

de las fuerzas intermoleculares de cohesión (de las que proviene la viscosidad) y facilita el desplazamiento mutuo de las moléculas. En cambio, en los gases a mayor temperatura hay mayor movimiento molecular y más mezclas, por lo que las moléculas más lentas en movimiento impiden desplazarse a las más rápidas, entorpeciendo el desplazamiento mutuo de las moléculas [8].

## 2.2. Laminaridad y turbulencia

Cuando un cuerpo se mueve en el seno de un líquido viscoso en reposo, a causa de la viscosidad, aparece un flujo de momento lineal desde el cuerpo hacia el líquido. Además, como entre la superficie de un sólido y un fluido hay fuerzas de cohesión molecular, la capa de líquido más próxima al cuerpo se adhiere a éste y se mueve con la velocidad del cuerpo.

Si el cuerpo es redondeado por delante y se mueve a velocidades bajas, sin formar torbellinos, cada partícula del líquido se desplaza según una trayectoria determinada (la velocidad del líquido en cualquier punto se mantiene constante en el tiempo). Es como si las capas de líquido resbalaran unas sobre otras a distintas velocidades decrecientes, a partir de la capa adherida al cuerpo. El régimen es regular y estacionario; para velocidades muy bajas es además estable (las alteraciones producidas por agentes perturbadores externos se amortiguan rápidamente). La resistencia se debe esencialmente a la viscosidad del fluido. El régimen se denomina laminar.

Con el aumento de la velocidad del cuerpo, se va perdiendo el carácter laminar y el movimiento del fluido se desordena. Las partículas describen trayectorias complicadas que varían continuamente. Detrás del cuerpo, particularmente si éste es romo (no se afila) hacia atrás, el líquido se descompone en torbellinos. El movimiento del fluido es aleatorio e irregular. La velocidad varía caóticamente, con rápidas fluctuaciones en el tiempo y en el espacio. En un punto, las variaciones se producen alrededor de cierto valor medio, que describe el movimiento una vez que las fluctuaciones se han amortiguado. La resistencia depende crecientemente de las diferencias de presión delante y atrás. El régimen se denomina turbulento.

El movimiento de mezcla caótica e irregular del líquido en el régimen turbulento, transmite el momento lineal de un punto a otro del líquido, mucho más eficazmente que el rozamiento interno del régimen laminar. En consecuencia, el perfil de las velocidades del fluido se diferencia notablemente en ambos casos. En el flujo laminar la velocidad del líquido disminuye gradualmente desde la superficie del cuerpo en movimiento hasta la pared de la cañería. En el flujo turbulento, la velocidad es casi constante en la mayor parte del área de la sección de la cañería, y disminuye a cero en una delgada capa contigua a la pared de la cañería. En

el movimiento turbulento, el efecto de la viscosidad es mucho menor que el efecto de la mezcla.

### 2.3. Ecuaciones de movimiento del fluido. ley de Stokes

Sobre un volumen de fluido pueden actuar fuerzas de volumen y fuerzas de superficie.

Las fuerzas de volumen son debidas en general a campos de fuerzas externos al fluido. En esta categoría entran la fuerza gravitatoria (debida a la gravedad terrestre), las fuerzas de inercia (debidas al movimiento no uniforme del sistema de referencia) y las fuerzas electromagnéticas (fluido cargado o con circulación de corriente eléctrica). Son fuerzas de largo alcance.

Las fuerzas de superficie tienen su origen en la agitación molecular y en la interacción entre moléculas. Se manifiestan como fuerzas que una parte del fluido ejerce sobre otra parte contigua, a través de la superficie que las separa. Esta categoría incluye las fuerzas de presión y las fuerzas de viscosidad. Son fuerzas de corto alcance.

La ecuación general de movimiento en fluidos se obtiene a partir de la aplicación, a volúmenes fluidos, del principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal. Este principio establece que la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de un volumen fluido, es igual a la resultante de todas las fuerzas (de volumen y de superficie) que actúan sobre él. Expresada en forma diferencial, esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Navier-Stokes. En coordenadas cartesianas resulta

$$\rho \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \cdot \mathbf{v} \cdot \text{divergencia } \mathbf{v} = \mathbf{f} - \text{gradiente } p + \eta \cdot \text{laplaciano } \mathbf{v},$$

donde  $p$  y  $\mathbf{f}$  representan respectivamente la presión y las fuerzas volumétricas que actúan sobre el volumen infinitesimal. Recordamos que

$$\begin{aligned} \text{Divergencia } \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \text{Gradiente } p &= \frac{\partial p}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z}, \\ \text{Laplaciano } \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \hat{x} + \\ &\left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \hat{y} + \\ &\left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \hat{z}. \end{aligned}$$

La derivada de la velocidad con respecto al tiempo que aparece en esta ecuación no determina el cambio de

la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino el cambio de la velocidad de una partícula del fluido a medida que ella se mueve en el espacio. La velocidad no sólo cambia por cambiar el tiempo, sino también por cambiar la posición. Para un observador que se mueve con la velocidad del fluido, el cambio  $d\mathbf{v}$  durante el tiempo  $dt$  se compone de dos partes: (i) el cambio durante el tiempo  $dt$  de la velocidad en un punto fijo del espacio. (ii) La diferencia entre las velocidades (en el mismo instante de tiempo) de dos puntos separados entre sí por la distancia  $d\mathbf{r}$  que se mueve la partícula de fluido en el tiempo  $dt$ .

Entonces, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo que aparece en la ecuación de Navier-Stokes no sólo incluye la aceleración local, dada por el término  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  (donde la derivada se calcula para valores constantes de las coordenadas espaciales, es decir, en un punto fijo del dominio fluido). Incluye también la aceleración convectiva, dada por un término no lineal<sup>1</sup> que proviene de fuerzas de inercia convectiva (representa el cambio experimentado por la velocidad ligada a la partícula de fluido, cuando ésta se mueve a una posición donde la velocidad del fluido es diferente).

La ecuación de Navier-Stokes expresa que la variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento contenida en la unidad de volumen de fluido más el flujo convectivo de cantidad de movimiento que la abandona a través de su superficie, es igual a la resultante sobre la unidad de volumen de las fuerzas de volumen y de superficie [4].

Con esta ecuación, Stokes estudió el movimiento de un fluido viscoso incompresible infinito en reposo en el infinito, y en el que una esfera sólida de radio  $r$  efectúa un movimiento de traslación rectilínea y uniforme de velocidad  $v$ . Se supone que no hay fuerzas externas y que el movimiento del fluido relativo a un sistema de referencia sobre la esfera es estacionario (es decir, que la velocidad no depende del tiempo).

La aproximación de Stokes consiste en despreciar, en la ecuación de Navier-Stokes, el término no lineal (asociado a las fuerzas de inercia debidas a la aceleración convectiva). Esta aproximación parece razonable para velocidades pequeñas y simplifica enormemente la solución de la ecuación, pues la dificultad principal proviene del término convectivo.

Con la ecuación de Navier-Stokes aproximada que resulta de aplicar este modelo simplificado, Stokes obtuvo la solución al problema del movimiento lento de una esfera en un fluido viscoso. Encontró que las fuerzas aplicadas por el fluido sobre la esfera se reducen a una resultante aplicada al centro de la esfera, con la misma dirección y sentido contrario al de la velocidad de la esfera, de intensidad  $F = 6\pi\eta r v$ . Esta relación se conoce con el nombre de ley de Stokes.

<sup>1</sup> En coordenadas cartesianas, la aceleración convectiva es  $v_x \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial x) + v_y \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial y) + v_z \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial z)$ .

## 2.4. El número de Reynolds

Las dificultades planteadas por la resolución de la ecuación de Navier-Stokes no sólo se encaran con el empleo de modelos simplificados. También se recurre al método experimental, orientado por el análisis dimensional y la teoría de la semejanza física.

El análisis dimensional supone la utilización de un sistema coherente de unidades y se basa en el principio de que en el estudio de un fenómeno físico, las relaciones funcionales entre variables son las mismas, sea cual fuere el sistema de unidades con que se trabaje.

La teoría de la semejanza física, que tiene un elevado valor práctico desde el punto de vista experimental, considera dos situaciones de distinta escala con geometría semejante (es decir, el cociente entre dos longitudes cualesquiera en una de las situaciones, es igual al cociente correspondiente en la otra). Si en ambas situaciones son válidas las mismas ecuaciones y las mismas condiciones iniciales y de contorno escritas en forma adimensional, entonces la teoría afirma que las situaciones son físicamente semejantes. Esto significa que en ambas situaciones, en las coordenadas espaciotemporales correspondientes, las magnitudes homólogas son proporcionales entre sí. Esto permite trasladar la solución de uno de los sistemas a la solución del otro.

La semejanza geométrica se expresa a través de números adimensionales que representan cocientes de longitudes. La semejanza física se expresa a través de números adimensionales que representan cocientes de unidades fundamentales en el problema (por ejemplo, en cinemática, serán cocientes de tiempos, velocidades, aceleraciones...). Dos o más fenómenos físicos son semejantes cuando son iguales los números adimensionales que corresponden a las situaciones.

Para expresar la ecuación de Navier-Stokes en forma adimensional se recurre a magnitudes típicas del movimiento; las nuevas variables adimensionales se definen como el cociente entre la magnitud y su valor típico (por ejemplo, para la viscosidad  $\eta$ , la nueva variable adimensional será  $\eta' = \eta/\eta_0$ , donde  $\eta_0$  es una viscosidad típica para el problema en consideración).

Al hacer este cambio, la ecuación queda expresada en las nuevas variables y en cada término de la ecuación se pueden agrupar los valores típicos ( $\eta_0$ ,  $\rho_0$ , etc.) que aparecen, obteniéndose así, en cada término, un parámetro que acompaña la relación entre variables que corresponde a cada uno. Para clarificar la idea, consideremos el término  $\rho \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial t)$  de la ecuación de Navier-Stokes, asociado a la aceleración local. Las nuevas variables son  $\rho' = \rho/\rho_0$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/\mathbf{v}_0$  y  $t' = t/t_0$  (donde  $\rho_0$ ,  $v_0$  y  $t_0$  son, respectivamente, una densidad, una velocidad y un tiempo, típicos de la situación bajo estudio). Cuando se hace el cambio de variables, el término  $\rho \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial t)$  puede ser escrito en la forma  $(\rho_0 \cdot v_0 / t_0) \cdot \rho' \cdot (\partial \mathbf{v}' / \partial t')$ . El parámetro a que recién

hacíamos referencia viene dado, en este caso, por la expresión  $(\rho_0 \cdot v_0 / t_0)$ .

La ecuación de Navier-Stokes, como toda ecuación de la física, debe ser dimensionalmente homogénea. En consecuencia, todos los parámetros que aparecen en los distintos términos de la ecuación, deben tener las mismas dimensiones. Dividiendo dos de ellos entre sí, se obtiene un número adimensional que representa la importancia relativa de cada uno de esos términos entre sí [9].

Es posible así definir distintos números adimensionales. Por ejemplo, el número de Strouhal representa el cociente entre los términos asociados, respectivamente, a la aceleración local y a la aceleración convectiva.

Por su parte, el número de Reynolds es una medida de la importancia relativa entre las fuerzas de inercia convectiva y las de viscosidad. El cociente entre los respectivos parámetros en la ecuación de Navier-Stokes expresada en las nuevas unidades, conduce a

$$Re = \frac{\rho_0 \cdot v_0 \cdot L_0}{\eta_0},$$

donde  $L_0$  es una longitud típica del problema. En movimientos con  $Re$  pequeños, las fuerzas de inercia convectiva son despreciables frente a las fuerzas de viscosidad. En movimientos con  $Re$  elevados ocurre lo contrario.

Es posible también obtener la expresión de  $Re$  efectuando el cociente entre las dimensiones típicas asociadas a fuerzas de inercia [*masa* · *aceleración*  $\rightarrow L_0^3 \cdot \rho_0 \cdot (v_0^2 / L_0)$ ] y a fuerzas de viscosidad [*esfuerzo de corte* · *área*  $\rightarrow \eta_0 \cdot (v_0 / L_0) \cdot L_0^2$ ].

Para una esfera que se mueve en un líquido de densidad típica  $\rho_0$  y viscosidad típica  $\eta_0$ , la longitud típica  $L_0$  corresponde al diámetro de la esfera y la velocidad típica  $v_0$  es la velocidad relativa del flujo alejado infinitamente de la esfera.

Stokes dedujo la ley para  $Re \ll 1$ , bajo condiciones de velocidad reducida. Por otra parte, según la teoría de la semejanza física, los sistemas que tengan igual  $Re$  (manteniendo la forma geométrica del cuerpo y la disposición relativa de la corriente), se comportan físicamente de manera semejante. En consecuencia, para partículas muy pequeñas, la ley puede mantener su validez aún para velocidades que podrían ser consideradas elevadas con otros parámetros de comparación, siempre que se cumpla la condición  $v_0 \ll \eta_0 / \rho_0 \cdot L_0$ .

Experimentalmente se encuentra que la ley de Stokes es válida cuando el número de Reynolds verifica la desigualdad  $Re < 0,5$  [10].

La experiencia muestra también que en general, los números de Reynolds bajos están asociados a regímenes laminares, mientras los regímenes turbulentos corresponden a números de Reynolds elevados.

Usualmente, la corriente viscosa que fluye por una cañería se convierte en turbulenta cuando  $Re > 1,7 \times 10^3$ ; pero en situaciones extremadamente

controladas, se han conseguido flujos laminares en tubos incluso a  $Re \cong 5 \times 10^4$  [6]. Para  $Re < 1,7 \times 10^3$  la corriente laminar suele presentar elevada estabilidad (las alteraciones se amortiguan rápidamente).

Cuando una esfera se desplaza en el interior de un líquido viscoso, la estela turbulenta surge habitualmente para  $Re \cong 1 \times 10^3$ .

## 2.5. Caída de una esfera pesada en un fluido viscoso

Sea una esfera sólida de radio  $r$  y densidad  $\rho_C$  que cae verticalmente con velocidad uniforme  $v$  en un fluido viscoso incompresible infinito, de densidad  $\rho_L$  y viscosidad  $\eta$ , que está en reposo en el infinito.

Sea muy pequeño el número de Reynolds del sistema.

Entonces, las fuerzas resistivas aplicadas por el fluido sobre la esfera se reducen a una resultante vertical aplicada al centro de la esfera, con sentido contrario al de la velocidad de la esfera, de intensidad  $F = 6\pi\eta r v$ .

Sea  $g$  la aceleración de la gravedad. Para que la esfera caiga con velocidad  $v$  constante, es menester que la resultante entre el peso y el empuje que actúan sobre ella, esté exactamente compensada por la fuerza de resistencia  $F$ . Esta condición conduce al valor que debe tener la velocidad  $v$  para que las fuerzas estén equilibradas

$$v = \frac{2 \cdot g \cdot r^2 \cdot (\rho_C - \rho_L)}{9 \cdot \eta} \quad (2)$$

De aquí se obtiene la relación que se utiliza en los laboratorios docentes para determinar la viscosidad  $\eta$  del líquido

$$\eta = \frac{g \cdot d^2 \cdot (\rho_C - \rho_L)}{18 v}$$

donde  $d = 2 \cdot r$  es el diámetro de la esfera.

Acorde a lo visto, las condiciones que deben cumplirse para que sea legítimo utilizar esta expresión, son las siguientes:

- Velocidad de la esfera constante.
- Líquido infinito, en reposo en el infinito.
- Número de Reynolds pequeño ( $Re < 0,5$ ).

## 3. Determinación experimental de la viscosidad de un líquido

En este apartado presentamos cuestiones relacionadas directamente con las mediciones y el procesamiento de datos, que complementan las actividades que corrientemente se desarrollan en el experimento que nos ocupa. Debe quedar claro que no exponemos una síntesis del desarrollo del experimento; lo que pretendemos es compartir algunas cuestiones puntuales que consideramos

clave y que suelen no ser incorporadas. Nuevamente, la idea es que, durante el desarrollo orientado de la práctica, el docente propicie, en momentos adecuados, el tratamiento comprensivo de estos aspectos por parte de los estudiantes.

Se da por descontado que el experimento se realiza con un tratamiento serio de los errores experimentales, componente esencial de la metodología científica. El resultado final de cada medición se expresa en la forma  $m = (\bar{m} \pm \Delta m) u$ , donde  $\bar{m}$  es el mejor valor,  $\Delta m$  es la cota de error experimental y  $u$  simboliza la unidad de medición. Los mejores valores y las cotas de error se determinan con herramientas y criterios empleados en la labor científica [11-14].

A continuación comenzamos con la descripción del sistema experimental con el que se han obtenido los datos utilizados en este trabajo. Estos datos acompañan la discusión de los dos aspectos que luego nos ocupan: (i) la discrepancia entre las predicciones teóricas habituales y el comportamiento real de la velocidad de la esfera hasta llegar al valor final constante; (ii) Las inconsistencias a las que conduce la aplicación de la ley de Stokes fuera de los límites de validez impuestos por las restricciones del modelo simplificado al que refiere la ley.

### 3.1. Descripción del sistema experimental

Se dispuso de tubos cilíndricos de cuatro diámetros internos ( $D$ ) diferentes llenos con la misma glicerina comercial no diluida, en los que se estudió el movimiento de esferas de acero de cuatro diámetros ( $d$ ) distintos (ver Tabla 1). La verticalidad de los tubos se controló mediante el empleo de una plomada antes de cada serie de medición. La longitud de la columna de glicerina dentro de los tubos estaba comprendida entre 100 cm y 150 cm.

Tabla 1 - Diámetros de tubos y esferas del sistema experimental.

Tubos		Esferas	
D [mm]	$\Delta D$ [mm]	d [mm]	$\Delta d$ [mm]
21,60	0,09	3,926	0,004
26,29	0,04	9,998	0,001
35,5	0,2	15,070	0,002
40,92	0,02	20,636	0,002

Se usó una cámara filmadora digital SONY modelo DCR-HC32 montada sobre un trípode provisto de un pivote vertical (ver el esquema de la Fig. 2) que permitió seguir la esfera a lo largo del tubo con un acercamiento (zoom) lo suficientemente grande como para apreciar con claridad la escala adherida al soporte del tubo.

El lanzamiento de las esferas dentro del tubo con glicerina se hizo en forma manual, con ayuda de una pequeña pinza para evitar que ingresen con velocidad alta y posicionándolas en el centro del tubo para

provocar la mínima interacción posible con las paredes. Además, siempre fue relevada la temperatura ambiente antes y después de cada serie de mediciones, como parámetro de control de las condiciones del experimento. Durante la totalidad de las mediciones realizadas, la temperatura se mantuvo dentro del intervalo comprendido entre 23,5 °C y 24,2 °C.

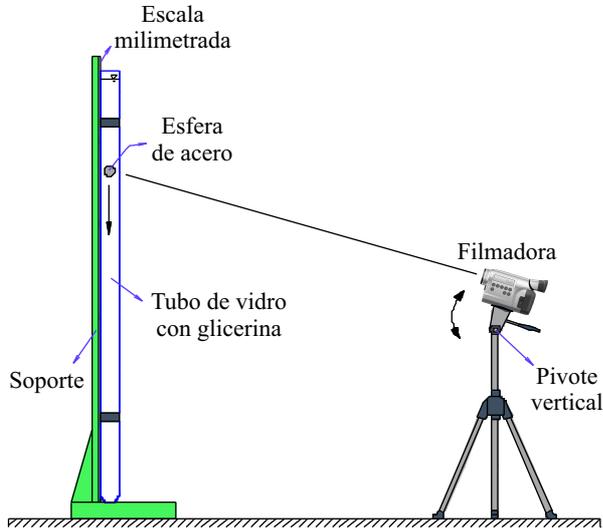


Figura 2 - Sistema experimental.

Los videos fueron descargados a un ordenador para su posterior edición con el programa *Pinnacle Studio 10.5*. Se filmaron un total de 115 esferas de las que se seleccionó las mejores 65 para su procesamiento. Se capturaron imágenes de las esferas en contraste con la escala milimetrada cada tramos no mayores a 10 cm. La filmadora proporcionó el tiempo correspondiente a cada posición de la esfera con apreciación de 0.01 s, como muestra el fotograma de la Fig. 3.

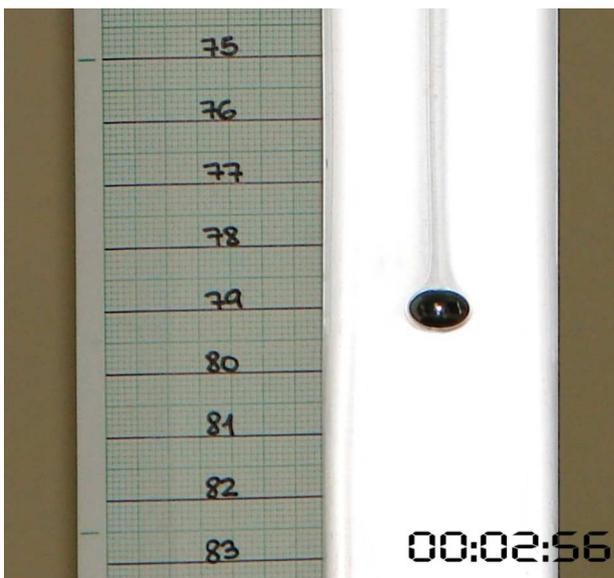


Figura 3 - Fotograma de la caída de una esfera.

Dada la separación entre el plano del movimiento de la esfera y el plano de la escala, se produjo una desviación de la lectura por paralaje que fue tenida en cuenta y corregida mediante las siguientes ecuaciones

$$\text{Posición corregida } y_c = y + y'$$

$$\text{Corrección } y' = \frac{x'}{x} \cdot (H/2 - y)$$

El análisis realizado en torno a estas ecuaciones se detalla en el Anexo. Es importante destacar aquí dos cuestiones:

- La corrección es significativa pues  $y'_{\max} > \Delta y$  ( $y'_{\max} = 0,6$  cm;  $\Delta y = 0,1$  cm).

- El error  $\Delta y'$  es, como máximo, igual a  $\Delta y$ . En consecuencia, se tiene que  $\Delta y_c \leq 2 \cdot \Delta y$  (con  $\Delta y = 0,1$  cm).

Este sistema presenta ventajas frente al tradicional sistema de operador con visión directa (sin cámara filmadora) y cronómetro accionado manualmente. Cabe mencionar las siguientes:

- Permite observar el comportamiento de la esfera en el seno del líquido advirtiendo detalles que a simple vista no es posible apreciar y con la ventaja de poder repetir cuantas veces sea necesario el video de una misma esfera.
- La medición de la velocidad puede hacerse con un error sensiblemente menor al que se comete con el método tradicional. Este aumento en la precisión de la velocidad redundará en una medida de la viscosidad más precisa.
- Al disminuir el error en las mediciones, se puede determinar con mayor precisión cuál es la zona del tubo en la que la esfera se desplaza con velocidad constante. También puede determinarse sin problemas (con mucha mayor facilidad que con el método tradicional) si la rapidez de la esfera disminuye o aumenta hasta alcanzar la velocidad de régimen.
- Motiva más a los estudiantes, mantiene su participación activa en la toma de datos (lanzamiento de las esferas y seguimiento de su movimiento con la filmadora) e induce al manejo por parte de estos, de algún programa de edición de videos, lo cual contribuye a su formación informática.

### 3.2. Análisis teórico habitual del movimiento de la esfera. Discrepancias con el comportamiento real de la velocidad hasta alcanzar su valor final constante

Para determinar la viscosidad del líquido con el método de Stokes, es menester conocer el valor constante que adquiere la velocidad de la esfera a partir de un cierto instante.

Para el análisis de la dependencia de la velocidad de la esfera con el tiempo es común que se emplee una expresión según la cual la rapidez aumenta hasta alcanzar el valor límite [15]. Esta expresión se deduce

imponiendo en la ecuación de movimiento que  $v = 0$  en  $t = 0$ , obteniéndose

$$v = v_{\text{límite}} \cdot (1 - e^{-t/\tau}),$$

donde

$$v_{\text{límite}} = \frac{2 \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_C - \rho_L)}{9 \cdot \eta}.$$

La Fig. 4 muestra el comportamiento de la velocidad para este caso.

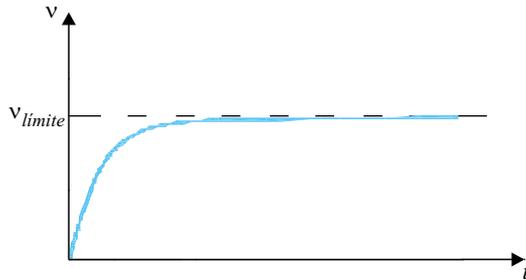


Figura 4 - Comportamiento de la velocidad de la esfera bajo la condición  $v_0 = 0$ .

Sin embargo, al realizar la experiencia repetidas veces, se observa claramente que en la mayoría de los casos la rapidez *disminuye* hasta alcanzar el valor límite.

La Fig. 5 muestra este comportamiento, en uno de entre los numerosos casos en que se lo observó durante la realización de las mediciones. La gráfica fue construida a partir de los datos de posición y tiempo proporcionados por el equipo experimental descrito precedentemente. Los valores de velocidad corresponden a velocidades medias  $\bar{v} = (y_{\text{final}} - y_{\text{inicial}}) / (t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}})$ , calculadas en intervalos de tiempo pequeños, dada la apreciación de 0,01 s que el equipo posibilita. Los errores en los valores  $\bar{v}$  se calcularon con las técnicas habituales de propagación de error para mediciones indirectas. Las barras horizontales en los valores de  $t$  corresponden al ancho del intervalo de tiempo para el que se calculó la velocidad media.

El comportamiento de la rapidez hasta alcanzar el valor constante no siempre es objeto de la atención que merece. Es por ello que la expresión  $v = v_{\text{límite}} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$  suele proponerse y usarse, muchas veces, con independencia de un control de su cumplimiento en los casos reales.

La expresión que corresponde al movimiento de frenado se obtiene a partir de la ecuación de movimiento, considerando que  $v = v_{\text{inicial}} \neq 0$  en  $t = 0$  [16]. Resulta

$$v = v_{\text{inicial}} \cdot e^{-t/\tau} + v_{\text{límite}} \cdot (1 - e^{-t/\tau}),$$

con  $v_{\text{límite}}$  y  $\tau$  dados precedentemente.

La Fig. 6 muestra el comportamiento de la velocidad para este caso.

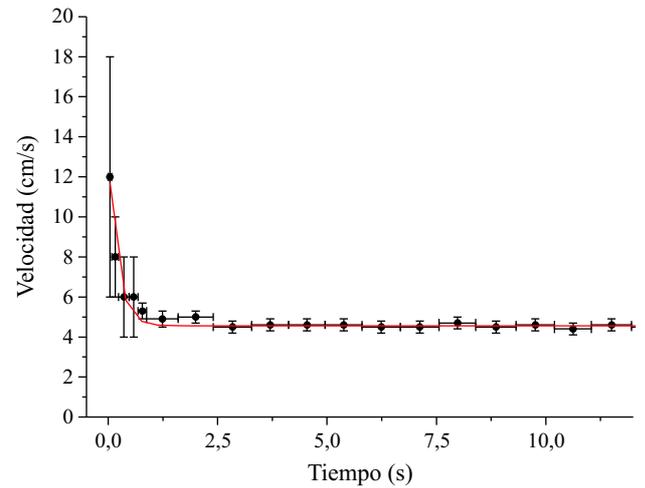


Figura 5 - Datos experimentales del comportamiento de la velocidad de la esfera.

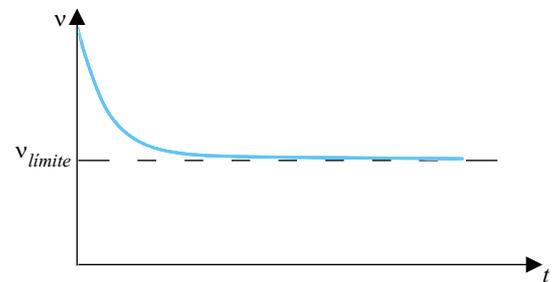


Figura 6 - Comportamiento de la velocidad de la esfera bajo la condición  $v_0 \neq 0$ .

Se observa que la velocidad límite es independiente de la velocidad inicial, cuestión que no suele ser evidente para los estudiantes y sobre la que conviene insistir.

En esta ecuación, la velocidad inicial de la esfera corresponde a la adquirida por efecto de su propio peso antes de verse afectada por las fuerzas en sentido contrario (empuje y fuerza resistiva) ejercidas por el fluido. Es de destacar que las ecuaciones del movimiento de caída libre proporcionan un valor extremadamente bajo (del orden de 0,7 mm) para la distancia que la esfera debe recorrer, bajo la influencia de la gravedad, para adquirir una velocidad inicial del orden de 12 cm/s, como la que se observa en la Fig. 5.

Este sencillo cálculo sugiere que es muy alta la probabilidad de que en la mayoría de los casos reales, aunque se intente enraizar la esfera en el líquido del tubo antes de liberarla, ésta tenga una velocidad inicial significativa y sufra un movimiento de *frenado* en el interior del fluido.

### 3.3. Restricciones impuestas por el modelo simplificado de la ley de Stokes. Inconsistencias a las que conduce la aplicación de la ley fuera de sus límites de validez

Si la realización del experimento se automatiza de manera irreflexiva y se independiza de un análisis del

cumplimiento de las condiciones que legitiman el empleo de la relación (1), pueden obtenerse valores de viscosidad incorrectos.

A continuación se presentan las mediciones (y las reflexiones que pueden acompañar su procesamiento) en condiciones y orden cronológico compatibles con el desarrollo real de la experiencia de laboratorio con estudiantes.

A fin de favorecer la efectiva realización de los controles, es conveniente que los docentes dispongan de un valor confiable del coeficiente de viscosidad que se pretende medir (que se dará a conocer a los estudiantes en el momento oportuno), o que el laboratorio cuente con otro método de medición (que los estudiantes puedan utilizar en el momento oportuno para obtener dicho valor confiable). En este trabajo, para la solución de glicerina utilizada, el valor  $\eta = (8,6 \pm 0,2)$  poise se adopta como confiable a la temperatura 23,7 °C.

Los valores acotados de  $g$ ,  $\rho_C$  y  $\rho_L$  son los siguientes

$$\begin{aligned} g &= (9,789 \pm 0,001) \text{ m/s}^2, \\ \rho_C &= (7,81 \pm 0,02) \text{ g/cm}^3, \\ \rho_L &= (1,25 \pm 0,01) \text{ g/cm}^3. \end{aligned}$$

Las variaciones por temperatura de las densidades en el rango de trabajo, están contempladas en las cotas de error.

Para las distintas combinaciones de valores de diámetro de esfera ( $d$ ) y diámetro de tubo ( $D$ ) disponibles en el laboratorio docente en el que se realizaron las mediciones, la Tabla 2 muestra los valores medidos para la velocidad ( $v_{medida}$ ) en las respectivas zonas de velocidad constante de las esferas, así como los valores de viscosidad ( $\eta$ ) que se obtienen en cada caso si se aplica directamente la expresión (1).

Tabla 2 - Valores experimentales de velocidad límite y viscosidad para esferas y tubos de distintos diámetros.

d [mm]	D [mm]	$v_{medida}$ [cm/s]	$\eta$ [poise]
3,926 ± 0,004	21,60 ± 0,09	4,50 ± 0,06	12,2 ± 0,2
	26,29 ± 0,04	5,24 ± 0,06	10,5 ± 0,2
	35,5 ± 0,2	5,01 ± 0,04	11,0 ± 0,2
	40,92 ± 0,02	5,33 ± 0,06	10,3 ± 0,2
9,998 ± 0,001	21,60 ± 0,09	10,0 ± 0,1	35,7 ± 0,4
	26,29 ± 0,04	15,3 ± 0,1	23,3 ± 0,2
	35,5 ± 0,2	19,9 ± 0,3	18,0 ± 0,3
	40,92 ± 0,02	22,4 ± 0,3	15,9 ± 0,2
15,070 ± 0,002	21,60 ± 0,09	4,89 ± 0,06	165 ± 2
	26,29 ± 0,04	13,0 ± 0,3	62 ± 2
	35,5 ± 0,2	25,9 ± 0,5	31,2 ± 0,7
	40,92 ± 0,02	32,8 ± 0,5	24,7 ± 0,4
20,636 ± 0,002	40,92 ± 0,02	28,0 ± 0,4	54,2 ± 0,9

Se observa una notable dispersión en los valores obtenidos para la viscosidad  $\eta$ , que varían entre 10,3 poise y 165 poise. Más aún: ese intervalo no contiene el valor esperado (el valor confiable) de  $\eta$ .

Los estudiantes suelen sugerir que las variaciones de temperatura durante las mediciones podrían explicar parte de la dispersión de los puntos. Conviene en tal caso solicitarles que consulten bibliografía pertinente,

que brinde información útil para controlar la plausibilidad de su hipótesis. Para el caso que estamos considerando (solución acuosa de glicerina al 99%), la consulta [17] proporciona los datos de la Tabla 3.

Tabla 3 - Dependencia de la viscosidad con la temperatura para la glicerina empleada.

Solución acuosa de glicerina (al 99%)			
Temperatura [°C]	20,00	25,00	30,00
Viscosidad [poise]	11,97	7,75	5,11

Durante las mediciones, la temperatura estuvo comprendida entre 23,5 °C y 24,2 °C. Un elevado porcentaje de los valores obtenidos para  $\eta$  en la Tabla 2, no está contenido en el intervalo de variación de la viscosidad con la temperatura. Deben buscarse otras posibles razones de la notable variabilidad obtenida para  $\eta$ .

Cabe entonces pasar a un análisis del cumplimiento de las condiciones bajo las cuales es válida la expresión (1), que se ha utilizado para calcular  $\eta$ .

La primera condición requerida para que sea legítimo utilizar la expresión (1) expresa que la velocidad de la esfera debe ser constante. Eso se cumple en todos los casos reportados en la Tabla 2, dentro de la precisión del error experimental.

La segunda condición expresa que el líquido debe tener extensión infinita y estar en reposo en el infinito. Previsiblemente, la capa de glicerina que está en contacto con el tubo está en reposo. Pero es claro que la extensión del líquido no es infinita.

Una nueva consulta bibliográfica permite relevar aportes que contemplen la incidencia de las dimensiones finitas del sistema experimental.

Las dimensiones finitas del tubo incrementan la fuerza de resistencia que experimenta la esfera. Si es  $H$  la longitud del tubo y  $R$  su radio, su influencia puede expresarse a través de la corrección empírica ( $\lambda$ ) propuesta por Ladenburg, Emersleben y Faxén [18]

$$F' = 6.\pi.\eta.r.v.\lambda,$$

con

$$\lambda = \frac{1 - 3,3.(r/H) - \dots}{1 - 2,104.(r/R) - 2,09.(r/R)^3 - \dots}$$

En general  $r \ll H$ , lo que permite que en el numerador se puedan despreciar los términos que contienen la fracción ( $r/H$ ). En la experiencia bajo consideración, la longitud de la columna de glicerina dentro de los tubos está comprendida entre 100 cm y 150 cm; en consecuencia, para las esferas utilizadas, la relación  $r/H$  varía entre  $10^{-3}$  y  $10^{-2}$ .

Si además se desprecia en el denominador el término que contiene la fracción ( $r/R$ )<sup>3</sup>, se desarrolla el resto en serie de Taylor, y se desprecian los términos con potencias de ( $r/R$ ) mayores que 1, se obtiene un factor de corrección simplificado ( $\lambda'$ ) que da buenos resultados para  $r/R < 0,2$  [19]

$$\lambda' = 1 + 2,1.(r/R).$$

La consulta bibliográfica permite constatar que la corrección que suele mencionarse para contemplar la influencia de las paredes laterales del tubo sobre la velocidad de régimen estacionario (a la que se llama “corrección de Ladenburg”), se expresa en la forma [20]

$$\lambda'' = 1 + 2,4.(r/R).$$

Acerca de la diferencia entre  $\lambda'$  y  $\lambda''$ , Worsnop y Flint [21] afirman que “el valor 2,4 fue introducido originalmente por error en lugar del valor 2,1, pero no obstante ello, 2,4 concuerda bastante bien con los resultados de los experimentos” y remiten a la página 181 del texto de Barr [22].

En la Tabla 4, construida a partir de la Tabla 2, aparecen los valores de velocidad ( $v_{2,1}$  ;  $v_{2,4}$ ) obtenidos al aplicar las correcciones  $\lambda'$  y  $\lambda''$  a los valores de la velocidad  $v$ . Aparecen también los correspondientes valores de viscosidad ( $\eta_{2,1}$  ;  $\eta_{2,4}$ ). Los valores en negro corresponden a los casos que cumplen la condición  $r/R < 0,2$ . Los valores en gris corresponden a los valores que los estudiantes obtienen si aplican directamente las correcciones a todos los casos, sin tener en cuenta los límites de validez de  $\lambda'$  y  $\lambda''$ .

Los resultados que se obtienen con  $\lambda'$  y  $\lambda''$  son compatibles dentro del margen de error, lo que está de

acuerdo con lo afirmado por Worsnop y Flint [21].

Pero debe tenerse en cuenta que esta compatibilidad depende del error con que se miden las magnitudes que intervienen en el cálculo de  $\eta$ . Una mayor precisión en la medición de dichas magnitudes podría tornar significativo el corrimiento sistemático hacia valores menores de  $\eta$ , producido por el empleo de  $\lambda''$  (con el factor 2,4) en lugar de  $\lambda'$  (con el factor 2,1).

Parece entonces conveniente (para los casos en que se cumple simultáneamente  $r \ll H$  y  $r/R < 0,2$ ) utilizar la siguiente expresión para corregir el valor de la velocidad, aproximándolo al que tendría en un medio de extensión infinita

$$v_{\text{corregida}} = v_{\text{medida}} \left(1 + 2,1 \frac{d}{D}\right). \quad (3)$$

La tercera condición requerida para que sea legítimo utilizar la expresión (1), expresa que el número de Reynolds debe ser pequeño ( $Re < 0,5$ ).

La Tabla 5 muestra los valores del número de Reynolds ( $Re$ ) para los distintos casos de la Tabla 2. En ella,  $v_{\text{corregida}}$  ha sido calculada con la ecuación (3) y ha sido utilizada para calcular  $Re$ . Los valores que aparecen en negro en la Tabla 5, corresponden a los casos que cumplen la condición  $Re < 0,5$ . Los valores en gris no deben ser aceptados, pues corresponden a mediciones realizadas en condiciones en las que no es legítimo aplicar la ley de Stokes  $F = 6 \pi \eta r v$ .

Tabla 4 - Valores de velocidades corregidas y viscosidades correspondientes. Los valores en negro verifican la condición  $r/R < 0,2$ .

d [mm]	D [mm]	r / R	$v_{2,1}$ [cm/s]	$\eta_{2,1}$ [poise]	$v_{2,4}$ [cm/s]	$\eta_{2,4}$ [poise]
3,926 ± 0,004	21,60 ± 0,09	0,18	6,2 ± 0,2	8,8 ± 0,3	6,5 ± 0,2	8,5 ± 0,3
	26,29 ± 0,04	0,15	6,9 ± 0,2	8,0 ± 0,2	7,1 ± 0,2	7,7 ± 0,2
	35,5 ± 0,2	0,11	6,2 ± 0,1	8,9 ± 0,2	6,3 ± 0,1	8,7 ± 0,2
	40,92 ± 0,02	0,10	6,4 ± 0,1	8,6 ± 0,2	6,6 ± 0,1	8,4 ± 0,2
9,998 ± 0,001	21,60 ± 0,09	0,46	20 ± 1	18 ± 1	21 ± 1	17 ± 1
	26,29 ± 0,04	0,38	28 ± 1	13,0 ± 0,4	29 ± 1	12,2 ± 0,4
	35,5 ± 0,2	0,28	32 ± 1	11,3 ± 0,4	33 ± 1	10,7 ± 0,4
	40,92 ± 0,02	0,24	34 ± 1	10,5 ± 0,3	36 ± 1	10,1 ± 0,3
15,070 ± 0,002	21,60 ± 0,09	0,70	12 ± 1	67 ± 3	13 ± 1	62 ± 3
	26,29 ± 0,04	0,57	29 ± 1	28 ± 1	31 ± 1	26 ± 1
	35,5 ± 0,2	0,42	49 ± 2	17 ± 1	52 ± 2	15 ± 1
	40,92 ± 0,02	0,37	58 ± 2	14 ± 1	62 ± 2	13,1 ± 0,5
20,636 ± 0,002	40,92 ± 0,02	0,50	58 ± 2	26 ± 1	62 ± 2	25 ± 1

Tabla 5 - Valores de velocidad corregida y viscosidades correspondientes. Los valores en negro verifican la condición  $Re < 0,5$ .

d [mm]	D [mm]	$v_{\text{corregida}}$ [cm/s]	Re	$\eta$ [poise]
3,926 ± 0,004	21,60 ± 0,09	6,2 ± 0,2	0,4	8,8 ± 0,3
	26,29 ± 0,04	6,9 ± 0,2	0,4	8,0 ± 0,2
	35,5 ± 0,2	6,2 ± 0,1	0,4	8,9 ± 0,2
	40,92 ± 0,02	6,4 ± 0,1	0,4	8,6 ± 0,2
9,998 ± 0,001	21,60 ± 0,09	20 ± 1	3	18 ± 1
	26,29 ± 0,04	28 ± 1	4	13,0 ± 0,4
	35,5 ± 0,2	32 ± 1	5	11,3 ± 0,4
	40,92 ± 0,02	34 ± 1	5	10,5 ± 0,3
15,070 ± 0,002	21,60 ± 0,09	12 ± 1	3	67 ± 3
	26,29 ± 0,04	29 ± 1	7	28 ± 1
	35,5 ± 0,2	49 ± 2	11	17 ± 1
	40,92 ± 0,02	58 ± 2	13	14 ± 1
20,636 ± 0,002	40,92 ± 0,02	58 ± 2	18	26 ± 1

La Tabla 6 presenta los valores de la Tabla 2 que pueden ser considerados válidos en el sentido de que han sido obtenidos bajo condiciones que permiten calcular el valor de  $\eta$  con la expresión (1); son los casos que simultáneamente aparecen en negro en las Tablas 4 y 5.

El análisis realizado ha conducido a desechar, con fundamentos, parte importante de los resultados reportados en la Tabla 2: no deben aceptarse los resultados

que no tienen validez y, por lo tanto, carecen de significado físico.

Ahora se procede a controlar la coherencia interna de los resultados presentados en la Tabla 6. A primera vista, los cuatro valores de  $\eta$  que allí aparecen, no son todos compatibles entre sí. Sin embargo, debe recordarse que las mediciones no fueron todas realizadas a la misma temperatura. La Tabla 7 presenta los datos.

Tabla 6 - Valores de velocidad corregida y viscosidades correspondientes. Los valores verifican la condiciones  $r/R < 0,2$  y  $Re < 0,5$ .

d [mm]	D [mm]	r / R	$v_{corregida}$ [cm/s]	Re	$\eta$ [poise]
3,926 ± 0,004	21,60 ± 0,09	0,18	6,2 ± 0,2	0,4	8,8 ± 0,3
	26,29 ± 0,04	0,15	6,9 ± 0,2	0,4	8,0 ± 0,2
	35,5 ± 0,2	0,11	6,2 ± 0,1	0,4	8,9 ± 0,2
	40,92 ± 0,02	0,10	6,4 ± 0,1	0,4	8,6 ± 0,2

Tabla 7 - Valores de velocidad corregida y viscosidades correspondientes. Se especifica la temperatura de trabajo.

d [mm]	D [mm]	$v_{corregida}$ [cm/s]	T [°C]	$\eta$ [poise]
3,926 ± 0,004	21,60 ± 0,09	6,2 ± 0,2	23,7 ± 0,1	8,8 ± 0,3
	26,29 ± 0,04	6,9 ± 0,2	24,2 ± 0,1	8,0 ± 0,2
	35,5 ± 0,2	6,2 ± 0,1	23,5 ± 0,1	8,9 ± 0,2
	40,92 ± 0,02	6,4 ± 0,1	23,7 ± 0,1	8,6 ± 0,2

A fin de controlar si las variaciones en los valores de  $\eta$  pueden ser atribuidas a la temperatura (con lo que se podría aceptar que los valores medidos para  $\eta$  son todos compatibles entre sí), recurrimos nuevamente a los valores de la Tabla 3. Mediante un ajuste de estos tres puntos con un polinomio de segundo grado, se obtiene la relación

$$\eta = 0,0316 \cdot T^2 - 2,266 \cdot T + 44,65$$

La gráfica de esta relación se muestra en la Fig. 7. Marcamos en ella los resultados experimentales obtenidos:

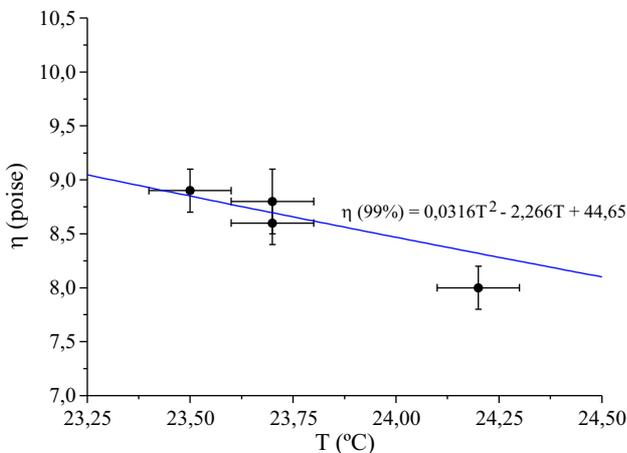


Figura 7 - Valores experimentales de viscosidad en relación con la curva de ajuste de  $\eta$  con la temperatura.

En la Tabla 8 se presentan los valores medidos para la viscosidad ( $\eta_{medida}$ ) y los valores calculados para la viscosidad mediante la función graficada en la Fig. 7 ( $\eta_{calculada}$ ).

Tabla 8 - Valores de viscosidad medidos y valores de viscosidad calculados con la curva de ajuste de  $\eta$  con la temperatura.

T [°C]	$\eta_{medida}$ [poise]	$\eta_{calculada}$ [poise]
23,5 ± 0,1	8,9 ± 0,2	8,9 ± 0,2
23,7 ± 0,1	8,8 ± 0,3	8,7 ± 0,2
23,7 ± 0,1	8,6 ± 0,2	8,7 ± 0,2
24,2 ± 0,1	8,0 ± 0,2	8,3 ± 0,2

Como cada una de las viscosidades calculadas es compatible con la obtenida experimentalmente para la temperatura en cuestión, podemos afirmar que los cuatro valores medidos para la viscosidad, son compatibles entre sí. En otras palabras, la dispersión que se observa entre los valores de  $\eta_{medida}$ , puede ser atribuida al hecho de que las mediciones fueron realizadas a diferentes temperaturas.

Cabe prestar atención al hecho de que en la experiencia realizada, sólo hay 0,7 °C de diferencia entre la temperatura más baja y la más alta. La sensibilidad a la temperatura que muestran las mediciones, es el resultado de haber disminuido el error en la determinación de  $\eta$ . En particular, la velocidad de régimen se ha medido con un error sensiblemente menor al que se comete con el método tradicional.

Esta sensibilidad a la temperatura debe ser contemplada en el diseño de la experiencia. La utilización de esferas y tubos de diferentes dimensiones favorece que se enriquezcan y se profundicen, como se ha visto, los análisis y procesamientos asociados a la realización de la práctica, pero demanda mayor tiempo para llevar a cabo las mediciones.

#### 4. Comentarios

En general, en el nivel universitario, los estudiantes realizan las prácticas de laboratorio una vez que ya han visto en clase los contenidos teóricos relacionados con el tema de cada experimento. Para la práctica que nos ocupa (determinación del coeficiente de viscosidad de un líquido con el método de Stokes), la experiencia docente muestra que habitualmente, los textos destinados a este nivel educativo presentan tratamientos breves y poco profundos de los contenidos conceptuales involucrados. En el apartado 2 de este trabajo (“Algunas precisiones teóricas”), compartimos desarrollos complementarios clarificadores, básicamente cualitativos, que pueden ser incorporados al desarrollo de la práctica en momentos oportunos, para favorecer aprendizajes más comprensivos.

El experimento es de realización sencilla y de bajo costo. Pero su sencillez proviene de las exigentes condiciones que el sistema debe cumplir para que sea lícito suponer la validez de las relaciones entre magnitudes que se emplean. En el apartado 3 (“Determinación experimental de la viscosidad de un líquido”) prestamos atención a cuestiones que pueden ser incorporadas al desarrollo de la práctica de laboratorio, con potenciales fuertes ganancias en la comprensión de los estudiantes sobre dos cuestiones interconectadas, cruciales para un correcto aprendizaje de la física: (i) la estrecha relación entre “modelo empleado” y “rango de validez” de las relaciones entre magnitudes; (ii) El consecuente carácter fuertemente condicional de las leyes de la física (“ $p \rightarrow q$ ”: si se da el antecedente  $p$ , entonces se da el consecuente  $q$ ).

Las cuestiones a las que nos referimos en dicho apartado 3 son las siguientes:

- El control experimental de la extendida creencia de que la rapidez de la esfera *crece* hasta alcanzar la velocidad de régimen, muestra que en realidad, en la mayoría de los casos, esta rapidez *disminuye*, porque la esfera penetra en el líquido con una velocidad inicial significativa. Es decir, porque en el sistema no se verifica la condición  $v = 0$  para  $t = 0$  que suele imponerse en la teoría.
- El análisis de los resultados que se obtienen experimentalmente para  $\eta$  cuando se aplica el método de Stokes sin controlar su validez, muestra que se obtienen valores incorrectos para la viscosidad

cuando en el sistema experimental se exceden los límites impuestos por las exigentes restricciones del modelo que subyace a la ley de Stokes. Para llegar a un valor correcto es menester trabajar en la zona de velocidad constante, con un número de Reynolds menor que 0,5, y con un valor de la velocidad que esté correctamente corregido por la influencia retardadora de las paredes del tubo.

- La aplicación irreflexiva de la llamada “corrección de Ladenburg”, como si tuviera validez general, conduce también a resultados incorrectos para la velocidad de la esfera corregida por la influencia de las paredes del tubo y, en consecuencia, a valores incorrectos para la viscosidad. En este caso se trata de una relación empírica, pero, del mismo modo que con las relaciones teóricas, los valores correctos se obtienen sólo cuando se la aplica dentro de sus límites de validez ( $r \ll H$  y  $r/R < 0,2$ ).

La realización de estos controles se ve facilitada por la utilización de un sistema experimental que incorpora una cámara filmadora digital y que tiene, además, una característica fundamental: la posibilidad de trabajar con tubos y esferas de dimensiones geométricas variadas.

La transferencia al laboratorio de los aspectos considerados en los apartados 2 y 3 de este trabajo, que tienen un claro potencial formativo, debiera hacerse de manera oportuna, como parte de una labor de indagación problematizada, coherente con el accionar científico. No hay aprendizaje comprensivo si el estudiante no se involucra activamente en el proceso educativo (la incorporación de información debe hacerse cuando responde a inquietudes y necesidades compartidas por los estudiantes con el docente); y no hay aprendizaje genuino de contenidos de física si el estudiante no los (re)construye con los moldes y criterios de la actividad científica [23].

#### 5. Anexo: corrección de la posición de la esfera por paralaje

Los cálculos se basan en dos supuestos:

1. La distancia  $x$  es lo suficientemente grande como para considerar que el punto Q coincide con el punto P (ver Ampliación en la Fig. 8). Este supuesto parece razonable dentro de los errores experimentales, ya que durante las mediciones  $x \cong 2,7 \cdot 10^2$  cm, con esferas de radios  $r \leq 2$  cm. Un dibujo a escala de alta precisión realizado en el programa Autocad muestra que para la esfera más grande, el error cometido en la posición horizontal al hacer esta suposición es del orden de 0,2 cm.

- La esfera siempre se mueve exactamente por el centro del tubo. Bajo el primer supuesto,  $x'$  coincide entonces con el radio  $R$  del tubo (que se conoce con error  $\Delta R \leq 0,1$  cm). Un estudio cuidadoso de los fotogramas muestra que se tiene un *corrimiento lateral de la trayectoria de la esfera respecto de la vertical que pasa por el centro del tubo* de hasta 3 mm. Debido a esto,  $\Delta R \leq \Delta x' \leq 0,3$  cm.

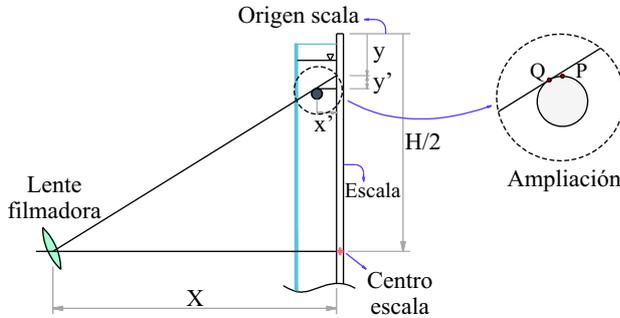


Figura 8 - Esquema de las dimensiones geométricas que intervienen en la corrección por paralaje de la posición de la esfera.

Por semejanza de triángulos vale

$$\frac{y'}{H/2 - y} = \frac{x'}{x} \quad (a)$$

La corrección de la posición de la esfera está entonces dada por

$$y' = \frac{x'}{x} \cdot (H/2 - y) \quad (b)$$

Cuando la esfera se encuentra por arriba del centro de la escala, el paréntesis de la ecuación anterior es positivo; mientras que cuando está por debajo, es negativo. Por lo tanto, la posición corregida de la esfera está dada por

$$y_c = y + y' \quad (c)$$

Se observa que la corrección es nula cuando la esfera se encuentra en el centro de la escala. El valor absoluto máximo de  $y'$  se da en los extremos del tubo, por ejemplo, cuando  $y=0$ . Además, cuanto más largo sea el tubo, mayores serán los efectos del paralaje. El tubo más largo es el de mayor radio; para este caso ( $x' = 2,046$  cm,  $x = 271,1$  cm,  $H = 150,0$  cm), se tiene  $y'_{\max} \cong 0,6$  cm. Como  $\Delta y = 0,1$  cm, se concluye que la corrección llega a tomar valores que la hacen significativa.

Interesa también conocer el error de  $y'$ , porque  $\Delta y_c = \Delta y + \Delta y'$ . La expresión de  $\Delta y'$  se obtiene propagando el error en la ecuación (b).

Realizando la propagación y reemplazando valores para el caso de mayor error (teniendo en cuenta tanto los errores introducidos por los supuestos como los errores de medición), se obtiene para  $(\Delta y')_{\max}$  el valor 0,1 cm, que es igual a  $\Delta y$ . En consecuencia, será  $\Delta y_c = \Delta y + \Delta y' \leq 2 \Delta y$ .

## Referencias

- [1] R. Cubero, *Perspectivas Constructivistas* (Ed. Graó, Barcelona, 2005)
- [2] D. Gil Pérez, *Enseñanza de las Ciencias* **11**, 197 (1993).
- [3] M. Bunge, *La Investigación Científica* (Ed. Ariel, Barcelona, 1985).
- [4] A. Barrero Ripoll y M. Pérez Saborid, *Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos* (Ed. McGraw-Hill/Interamericana de España, Madrid, 2005).
- [5] J. Salinas, in *Memorias de VIII CIAEF (VIII Conferencia Inter Americana de Educación en Física)*, La Habana, Cuba, 2003.
- [6] L. Landau, A. Ajiezer y E. Lifshitz, *Curso de Física General. Mecánica y Física Molecular* (Editorial Mir, Moscú, 1973).
- [7] M. Alonso y E. Finn, *Física. Volumen II. Campos y Ondas* (Ed. Fondo Educativo Interamericano, EEUU, 1970).
- [8] R. Resnick, D. Halliday y K. Krane, *Física. Volumen 1* (Ed. Compañía Editorial Continental, México, 2004).
- [9] A. Crespo Martínez, *Mecánica de Fluidos* (Ed. ITES-Paraninfo, Madrid, 2006).
- [10] R. Berker, *Handbuch der Physik v. 8* (Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1963).
- [11] V. Giamberardino, *Teoría de los errores* (Ed. Reverté Venezolana, Caracas, 1983).
- [12] G.L. Squires, *Practical Physics* (Ed. Cambridge University Press, Malta, 1994).
- [13] L.C. de Cudmani, *Errores Experimentales* (Ediciones FACET-UNT, Tucumán, 1997).
- [14] J.R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis* (Ed. University Science Books, California, 1997).
- [15] C.A. Cordiviola, *Revista de Enseñanza de la Física* **1**, 57 (1985).
- [16] M. Alonso y E. Finn, *Física. Volumen I. Mecánica* (Ed. Fondo Educativo Interamericano, EEUU, 1976).
- [17] C.D. Hodgman, *Handbook of Chemistry and Physics* (Ed. Chemical Rubber Publishing, Cleveland, 1948).
- [18] OIBF (IX Olimpiada Ibero-Americana de Física). *Experimento I: Medidas de viscosidad y la ley de Stokes*. (Salvador, Brasil). En <http://oc.uan.edu.co/oibf/ibero04/oibfixex.a.pdf> (2004).
- [19] C.E. Lapple, *Fluid and Particle Mechanics* (Ed. University of Delaware, EEUU, 1951).
- [20] M.R. Ortega Girón, *Prácticas de Laboratorio de Física General* (Ed. Compañía Editorial Continental, Barcelona, 1978).
- [21] B.L. Worsnop y H.T. Flint, *Curso Superior de Física Práctica. Tomo I* (Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1964).
- [22] G. Barr, *Monograph of Viscometry* (Ed. Oxford University Press, London, 1931).
- [23] J. Salinas, *Revista de Enseñanza de la Física* **Vol. Extraordinario**, **5** (1996).