

Mecánica Computacional Vol. XXIII, pp. 391-410
G.Buscaglia, E.Dari, O.Zamonsky (Eds.)
Bariloche, Argentina, November 2004

ANÁLISIS GEOMÉTRICO NO LINEAL DE VIGAS COMPUESTAS DE PARED DELGADA

Sebastián P. Machado y Víctor H. Cortínez

Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos
Universidad Tecnológica Nacional (FRBB)
11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina
E-mail: vcortine@frbb.utn.edu.ar

CONICET, Argentina.

Key words: Vigas de Pared Delgada, Material Compuesto, Post-pandeo

Abstract. *En este trabajo se presenta un análisis no-lineal del problema de pandeo y post-pandeo de vigas de paredes delgadas construidas con material compuesto utilizando una extensión del modelo no lineal previamente desarrollado por los autores (Post-pandeo de Vigas compuestas de pared delgada, Mecánica Computacional XXI, 2002). Como aspecto distintivo dicho modelo contempla, entre otros efectos, la flexibilidad de corte en forma completa, la cual ha demostrado tener una influencia crucial en el comportamiento de post-pandeo. Se analizan numéricamente las curvas de equilibrio para diversas condiciones de borde y estados de carga, poniendo de manifiesto la importancia de los efectos considerados.*

1 INTRODUCCIÓN

Las vigas de pared delgada se utilizan frecuentemente en diversas aplicaciones tecnológicas en las cuales el ahorro de peso resulta una propiedad determinante en el diseño. Dicha propiedad se ve incrementada cuando las mencionadas estructuras se construyen con materiales compuestos, los que a su vez presentan importantes ventajas tales como alta resistencia a la corrosión, mejoradas propiedades de resistencia a la fatiga, etc.

Es posible analizar dichas estructuras con suficiente precisión haciendo uso de modelos unidimensionales. Las aplicaciones de estos modelos van desde estructuras de vigas simples hasta el análisis de hélices de helicópteros, alas de aviones, álabes de turbina y cascos de barcos.

La inestabilidad de estas estructuras resulta ser un aspecto fundamental en el diseño. De tal manera que una importante cantidad de trabajo fue dirigida al desarrollo de modelos adecuados y métodos de cálculo precisos para la determinación de cargas de pandeo.

Para el caso de vigas metálicas se han realizado aplicaciones exitosas de la teoría de Vlasov, obteniéndose en varias situaciones soluciones analíticas simples de gran valor práctico. La teoría clásica de Vlasov¹ ha sido extendida al caso de materiales compuestos por Lee et al² entre otros. Recientemente Cortínez y Piovan³ han desarrollado un modelo para el análisis lineal de vibración y pandeo de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos con arquitectura de laminación simétrica balanceada o especialmente ortótropa considerando el efecto de la flexibilidad de corte (despreciada en la teoría de Vlasov). Por otra parte Piovan⁴ ha desarrollado una teoría lineal general para el análisis lineal de vigas de pared delgada con eje curvo considerando una arquitectura de laminación completamente general.

Con estos modelos se han resuelto diversos problemas de pandeo. Otras soluciones similares en tal sentido fueron desarrolladas por Sapkás y Kollár⁵.

No obstante varios problemas solamente pueden ser comprendidos con el uso de una teoría geométrica no lineal que permita analizar el comportamiento de post-pandeo de dichas estructuras. El análisis de post-pandeo permite estimar la capacidad de carga adicional después del pandeo, que resulta de gran utilidad para definir los márgenes de seguridad.

Una de las principales limitaciones del análisis lineal es que no considera los efectos de deformación previos al pandeo. Estos en algunos casos presentan una influencia crucial en la determinación de las cargas de bifurcación. Por ejemplo, la determinación de cargas críticas de pandeo lateral de vigas isótropas de pared delgada cargadas en su plano principal, arroja valores extremadamente conservativos con respecto a los reales. Este hecho es subsanado cuando se utiliza un enfoque geométrico no lineal, por ejemplo^{6,7,8}.

En este trabajo se presenta un análisis del problema de post-pandeo de vigas de material compuesto utilizando una modificación del modelo no lineal previamente desarrollado por los autores⁹.

Como aspecto distintivo dicho modelo contempla, entre otros efectos, la flexibilidad de corte en forma completa, la cual ha demostrado tener una influencia crucial en el comportamiento de post-pandeo.

A los efectos de resolver numéricamente las ecuaciones resultantes se utiliza un enfoque

tipo Ritz-Galerkin que conduce a un sistema algebraico no lineal. Este se resuelve mediante el método de Newton Raphson. Como funciones aproximantes se adopta un conjunto de polinomios ortogonales generados mediante el método de Gram Schmidt.

Se analizan numéricamente las curvas de equilibrio para diversas condiciones de borde y estados de carga, poniendo de manifiesto la importancia de los efectos geométricos no lineales, así como del efecto de corte.

2 TEORÍA

2.1 Cinemática

Se considera una viga recta de paredes delgadas construida con material compuesto (Fig. 1). Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema cartesiano ortogonal (x, \bar{y}, \bar{z}) donde el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que \bar{y} y \bar{z} son los ejes principales de la sección. Por otra parte y y z son paralelos a los principales pero teniendo su origen en el centro de corte, definido de acuerdo a la teoría de Vlasov¹ de vigas isótropas. Las coordenadas correspondientes a puntos ubicados sobre la línea media de la sección se denotan mediante letras mayúscula Y y Z (o \bar{Y} y \bar{Z}). También se utilizan las coordenadas curvilíneas s (coordenada circunferencial) y n (coordenada normal) sobre la superficie media de la sección.

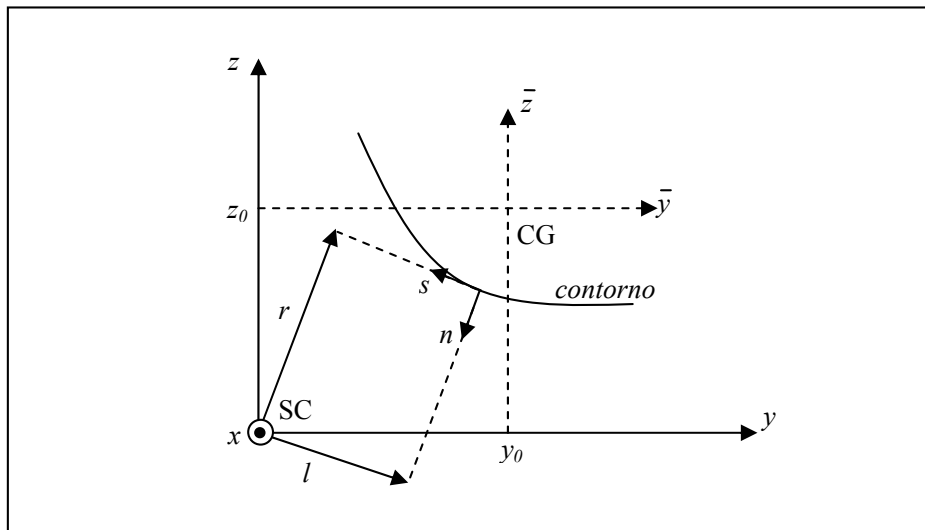


Figura 1: Sistema de coordenadas de la sección transversal

Las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario de la sección transversal pueden relacionarse con las correspondientes coordenadas curvilíneas s y n mediante las expresiones

$$\bar{y}(s, n) = \bar{Y}(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad \bar{z}(s, n) = \bar{Z}(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (1)$$

$$y(s, n) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s, n) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (2)$$

Por otra parte y_0 y z_0 son las coordenadas del centroide con respecto al centro de corte

$$\begin{aligned} \bar{y}(s, n) &= y(s, n) - y_0 \\ \bar{z}(s, n) &= z(s, n) - z_0 \end{aligned} \quad (3)$$

El modelo estructural utilizado en este trabajo está basado en las siguientes hipótesis:

- El contorno de la sección transversal es rígida en su propio plano
- La distribución de alabeo se representa mediante la función de Saint-Venant de vigas isótropas
- Los esfuerzos y momentos resultantes sobre el espesor de la pared, correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} se suponen despreciables. Asimismo se desprecia la fuerza resultante sobre el espesor relacionada con γ_{ns} .
- La curvatura de superficie media de la sección transversal es despreciable
- La arquitectura de laminación se supone simétrica y balanceada o especialmente ortótropa.

El campo de desplazamientos adoptado se basa en la expresión obtenida por Fraternali y Feo¹⁰, en su teoría de vigas compuestas de pared delgada considerando rotaciones moderadas, en la cual generalizan la teoría infinitesimal de áreas sectoriales de Vlasov. Aquí el campo de desplazamiento de Fraternali y Feo se generaliza para considerar el efecto de flexibilidad de corte. Entonces el campo de desplazamiento de segundo orden mejorado, compatible con las hipótesis (a) y (b) se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_x &= u_o - \theta_z \bar{y} - \theta_y \bar{z} + \phi \theta_z z - \phi \theta_y y + \omega \left[\theta - \frac{I}{2} (\theta_y' \theta_z - \theta_y \theta_z') \right] \\ u_y &= v - \phi z + \frac{I}{2} (-\phi^2 y - \theta_z^2 \bar{y} - \theta_z \theta_y \bar{z}) \\ u_z &= w + \phi y + \frac{I}{2} (-\phi^2 z - \theta_y^2 \bar{z} - \theta_z \theta_y \bar{y}) \end{aligned} \quad (4)$$

Estas expresiones coinciden con las de Fraternali y Feo cuando $\theta_z = v'$, $\theta_y = w'$ y $\theta = \phi'$ (lo que equivale a despreciar la deformación de corte como se puede apreciar en (18) y (19)). Por otra parte, si se desprecian los términos no lineales, las expresiones (4) coinciden con el campo de desplazamiento propuesto por Cortínez y Piovan³.

En las expresiones anteriores ϕ , θ_y y θ_z son las rotaciones con respecto al eje longitudinal (pasante por el centro de corte), \bar{y} y \bar{z} respectivamente; θ representa la variable de alabeo de la sección transversal. Por otra parte el superíndice “prima” indica derivación con respecto a x .

La función de alabeo de la sección transversal se define mediante la expresión

$$\omega(s, n) = \omega_p(s) + \omega_s(s, n) \quad (5)$$

donde ω_p y ω_s son las funciones de alabeo en el contorno y en el espesor respectivamente, las cuales se definen en la forma (Cortínez y Rossi¹¹)

$$\omega_p(s) = \frac{1}{S} \left[\int_0^s \left(\int_{s_0}^s [r(s) - \psi(s)] ds \right) ds \right] - \int_{s_0}^s [r(s) - \psi(s)] ds \quad (6)$$

$$\omega_s(s, n) = -n l(s)$$

donde

$$r(s) = -Z(s) \frac{dY}{ds} + Y(s) \frac{dZ}{ds} \quad (7)$$

$$l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \quad (8)$$

$r(s)$ representa la distancia perpendicular del centro de corte a la tangente a cualquier punto de la superficie media, y $l(s)$ representa la distancia del centro de corte a la normal a la superficie media (Fig.1). En la expresión (6) Ψ es la deformación de corte en la superficie media obtenida mediante la teoría de torsión pura de Saint-Venant y normalizada con respecto a $d\phi/dx$. Para secciones abiertas $\Psi = 0$.

2.1 Campo de Deformación

Los desplazamientos con respecto al sistema curvilíneo (x, s, n) puede ser expresado de la siguiente manera

$$\bar{U} = u_x(x, s, n) \quad (9)$$

$$\bar{V} = u_y(x, s, n) \frac{dY}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dZ}{ds} \quad (10)$$

$$\bar{W} = -u_y(x, s, n) \frac{dZ}{ds} + u_z(x, s, n) \frac{dY}{ds} \quad (11)$$

Las tres componentes ε_{xx} , ε_{xs} , ε_{xn} no nulas del tensor de deformación de Green Lagrange son dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$\varepsilon_{xs} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial s} \right] \quad (13)$$

$$\varepsilon_{xn} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \right] \quad (14)$$

Sustituyendo las expresiones (4) en (9-11) y luego en (12-14), empleando las relaciones (1-3) y (5-8), después de simplificar algunos términos de orden superior, se llega a las siguientes

expresiones para el tensor de deformación

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + n\kappa_{xx}^{(1)} \\ \gamma_{xs} &= 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^{(0)} + n\kappa_{xs}^{(1)} \\ \gamma_{xn} &= 2\varepsilon_{xn} = \gamma_{xn}^{(0)}\end{aligned}\quad (15)$$

donde

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(0)} &= u'_0 + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) - y_0 \theta'_y \phi + z_0 \theta'_z \phi + \bar{Y}(-\theta'_z - \theta'_y \phi - u'_0 \theta'_z) + \bar{Z}(-\theta'_y + \theta'_z \phi - u'_0 \theta'_y) \\ &+ \omega_p \left[\theta' - \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] + \frac{1}{2} \phi'^2 (Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2} \bar{Z}^2 \theta_y'^2 + \frac{1}{2} \bar{Y}^2 \theta_z'^2 + \bar{Y} \bar{Z} \theta'_y \theta'_z\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\kappa_{xx}^{(1)} &= -\frac{dZ}{ds}(-\theta'_z - \theta'_y \phi - u'_0 \theta'_z) + \frac{dY}{ds}(-\theta'_y + \theta'_z \phi - u'_0 \theta'_y) - l \left[\theta' - \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] \\ &- r \phi'^2 + \bar{Z} \frac{dY}{ds} \theta_y'^2 - \bar{Y} \frac{dZ}{ds} \theta_z'^2 + \left(\bar{Y} \frac{dY}{ds} - \bar{Z} \frac{dZ}{ds} \right) \theta'_y \theta'_z\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xs}^{(0)} &= \frac{dY}{ds} \left[v' - \theta_z - u'_0 \theta_z - z_0 \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] + \frac{dZ}{ds} \left[w' - \theta_y - u'_0 \theta_y + y_0 \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] \\ &+ (r - \psi)(\phi' - \theta) + \psi \left[\phi' - \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right]\end{aligned}\quad (18)$$

$$\kappa_{xs}^{(1)} = -2 \left[\phi' - \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] \quad (19)$$

$$\gamma_{xn}^{(0)} = -\frac{dZ}{ds} \left[v' - \theta_z - u'_0 \theta_z - z_0 \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] + \frac{dY}{ds} \left[w' - \theta_y - u'_0 \theta_y + y_0 \frac{1}{2}(\theta'_z \theta'_y - \theta'_y \theta'_z) \right] + l(\phi' - \theta) \quad (20)$$

2.3 Formulación Variacional

Teniendo en cuenta las hipótesis adoptadas, el principio de trabajos virtuales para una lámina compuesta puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned}& \iint (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \kappa_{xx}^{(1)} + N_{xs} \delta \gamma_{xs}^{(0)} + M_{xs} \delta \kappa_{xs}^{(1)} + N_{xn} \delta \gamma_{ns}^{(0)}) ds dx \\ & - \iint (\bar{q}_x \delta \bar{u}_x + \bar{q}_y \delta \bar{u}_y + \bar{q}_z \delta \bar{u}_z) ds dx - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=0} ds dn \\ & - \iint (\bar{p}_x \delta u_x + \bar{p}_y \delta u_y + \bar{p}_z \delta u_z) \Big|_{x=L} ds dn - \iiint (\bar{f}_x \delta u_x + \bar{f}_y \delta u_y + \bar{f}_z \delta u_z) ds dn dx = 0\end{aligned}\quad (21)$$

donde N_{xx} , N_{xs} , M_{xx} , M_{xs} y N_{xn} son las resultantes de tensión definidas mediante las expresiones

$$\begin{aligned}N_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xx} dn, & M_{xx} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xx} n) dn, & N_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xs} dn, \\ M_{xs} &= \int_{-e/2}^{e/2} (\sigma_{xs} n) dn, & N_{xn} &= \int_{-e/2}^{e/2} \sigma_{xn} dn\end{aligned}\quad (22)$$

La viga está sometida a la acción de fuerzas superficiales por unidad de área \bar{q}_x , \bar{q}_y y \bar{q}_z actuando según las direcciones x , y y z respectivamente. De la misma forma \bar{p}_x , \bar{p}_y y \bar{p}_z son fuerzas por unidad de superficie actuando en los extremos de la viga, $x = 0$ y $x = L$, donde L es la longitud de la viga. Por otra parte \bar{f}_x , \bar{f}_y y \bar{f}_z son fuerzas por unidad de volumen, mientras que \bar{u}_x , \bar{u}_y y \bar{u}_z son desplazamientos correspondientes a puntos sobre la línea media de la sección.

2.4 Ecuaciones Constitutivas

Las ecuaciones constitutivas para las resultantes de tensión correspondientes a laminados simétricos balanceados pueden expresarse en la forma

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ N_{xn} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A}_{55}^{(H)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \gamma_{xs}^{(0)} \\ \gamma_{xn}^{(0)} \\ \kappa_{xx}^{(1)} \\ \kappa_{xs}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}, & \bar{A}_{66} &= A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}}, & \bar{A}_{55}^{(H)} &= A_{55}^{(H)} - \frac{(A_{45}^{(H)})^2}{A_{44}^{(H)}} \\ \bar{D}_{11} &= D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}, & \bar{D}_{66} &= D_{66} - \frac{D_{26}^2}{D_{22}} \end{aligned} \quad (24)$$

Los coeficientes de rigidez tipo placa A_{ij} , D_{ij} y $A_{ij}^{(H)}$ se definen de acuerdo a la teoría de laminación presentada por Barbero¹². El coeficiente \bar{D}_{16} ha sido despreciado debido a su valor relativamente bajo para la arquitectura de laminación considerada.

2.5 Ecuaciones Variacionales Gobernantes

Sustituyendo (16-20) en (21) e integrando con respecto a s , se obtiene la expresión unidimensional del principio de trabajos virtuales dada por

$$L_K + L_P = 0 \quad (25)$$

donde

$$\begin{aligned}
 L_K = \int_0^L \{ & \delta u'_0 (N + N u'_0 - M_y \theta'_y - M_z \theta'_z - Q_y \theta_z - Q_z \theta_y) + \delta v'(Q_y + v'N) + \delta w'(Q_z + w'N) \\
 & + \delta \theta_z \left[-Q_y - Q_y u'_0 + \frac{1}{2}(Q_z y_0 - Q_y z_0) \theta'_y - \frac{1}{2} T_{sv} \theta'_y - \frac{1}{2} B \theta''_y \right] - \delta \theta''_y \frac{1}{2} B \theta_z \\
 & + \delta \theta'_z \left[-M_z - M_z u'_0 + (M_y + N z_0) \phi + \frac{1}{2}(Q_y z_0 - Q_z y_0) \theta_y + \frac{1}{2} T_{sv} \theta_y + P_{zz} \theta'_z + P_{yz} \theta'_y \right] \\
 & + \delta \theta_y \left[-Q_z - Q_z u'_0 + \frac{1}{2}(Q_y z_0 - Q_z y_0) \theta'_z + \frac{1}{2} T_{sv} \theta'_z + \frac{1}{2} B \theta''_z \right] + \delta \theta''_z \frac{1}{2} B \theta_y \\
 & + \delta \theta'_y \left[-M_y - M_y u'_0 - (M_z + N y_0) \phi + \frac{1}{2}(Q_z y_0 - Q_y z_0) \theta_z - \frac{1}{2} T_{sv} \theta_z + P_{yy} \theta'_y + P_{yz} \theta'_z \right] \\
 & + \delta \phi \left[(M_y + N z_0) \theta'_z - (M_z + N y_0) \theta'_y \right] + \delta \phi' (T_w + T_{sv} + B_l \phi') + \delta \theta' B - \delta \theta T_w \} dx
 \end{aligned} \tag{26 a,b}$$

$$\begin{aligned}
 L_P = \int_0^L \{ & -q_x \delta u_0 - q_y \delta v - q_z \delta w - b \delta \theta + \delta \theta_z \left[m_z - (m_y + z_0 q_x) \phi + \frac{1}{2} b \theta'_y + \frac{1}{2} \lambda_{mx} \theta_y + \lambda_y \theta_z \right] \\
 & - \delta \theta'_z \frac{1}{2} b \theta_y + \delta \theta_y \left[m_y + (m_z + y_0 q_x) \phi - \frac{1}{2} b \theta'_z + \frac{1}{2} \lambda_{mx} \theta_z + \lambda_z \theta_y \right] + \delta \theta'_y \frac{1}{2} b \theta_z \\
 & + \delta \phi \left[-m_x - (m_y + z_0 q_x) \theta_z + (m_z + y_0 q_x) \theta_y + \phi (\lambda_y + \lambda_z + z_0 q_z + y_0 q_y) \right] \} dx \\
 & + \left[-\bar{N} \delta u_0 - \bar{Q}_y \delta v - \bar{Q}_z \delta w - \bar{B} \delta \theta - \delta \theta'_z \frac{1}{2} \theta_y \bar{B} + \delta \theta'_y \frac{1}{2} \theta_z \bar{B} + \delta \theta_z \left[\bar{M}_z - (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) \phi + \frac{1}{2} \theta'_y \bar{B} + \theta_z \bar{\lambda}_y + \frac{1}{2} \theta_y \bar{\lambda}_{mx} \right] \right. \\
 & \left. + \delta \theta_y \left[\bar{M}_y + (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) \phi - \frac{1}{2} \theta'_z \bar{B} + \theta_y \bar{\lambda}_z + \frac{1}{2} \theta_z \bar{\lambda}_{mx} \right] + \delta \phi \left[-\bar{M}_x - (\bar{M}_y + \bar{N} z_0) \theta_z + (\bar{M}_z + \bar{N} y_0) \theta_y + \bar{B}_l \phi \right] \right]_{x=0}^{x=L}
 \end{aligned}$$

donde $q_x, q_y, q_z, m_x, m_y, m_z, b, \lambda_y, \lambda_z$ y λ_{mx} representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en la viga, y $\bar{N}, \bar{Q}_y, \bar{Q}_z, \bar{M}_z, \bar{M}_y, \bar{B}, \bar{M}_x, \bar{\lambda}_y, \bar{\lambda}_z, \bar{\lambda}_{mx}, \bar{B}_l$ representan las resultantes de las fuerzas aplicadas en los extremos de la viga⁹. En las expresiones anteriores se han efectuado las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
 N &= \int N_{xx} ds, \quad M_y = \int \left(N_{xx} \bar{Z} + M_{xx} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad M_z = \int \left(N_{xx} \bar{Y} - M_{xx} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 B &= \int (N_{xx} \omega_p - M_{xx} l) ds, \quad Q_z = \int \left(N_{xs} \frac{dZ}{ds} + N_{xn} \frac{dY}{ds} \right) ds, \quad Q_y = \int \left(N_{xs} \frac{dY}{ds} - N_{xn} \frac{dZ}{ds} \right) ds \\
 T_w &= \int (N_{xs} (r - \psi) + N_{xn} l) ds, \quad T_{sv} = \int (N_{xs} \psi - 2M_{xs}) ds
 \end{aligned} \tag{27}$$

donde $N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, B, T_w$ y T_{sv} corresponden a la fuerza axial, fuerzas de corte, momentos flectores, bimomento, momento flexotorsional y momento torsional de Saint Venant respectivamente. Adicionalmente se han definido cuatro resultantes de tensión de orden superior dadas por las expresiones

$$B_l = \int \left[N_{xx} (Y^2 + Z^2) - 2M_{xx} r \right] ds, \quad P_{yy} = \int \left[N_{xx} \bar{Z}^2 + 2M_{xx} \bar{Z} \frac{dY}{ds} \right] ds$$

$$P_{zz} = \int \left[N_{xx} \bar{Y}^2 - 2M_{xx} \bar{Y} \frac{dZ}{ds} \right] ds \quad , \quad P_{yz} = \int \left[N_{xx} \bar{Y} \bar{Z} + M_{xx} \left(\bar{Y} \frac{dY}{ds} - \bar{Z} \frac{dZ}{ds} \right) \right] ds \quad (28)$$

Sustituyendo (16-20) en (23) y luego en (25) se obtiene la ecuación variacional gobernante cuyas incógnitas vienen dadas por los desplazamientos generalizados.

3 APROXIMACIÓN RITZ-GALERKIN

A los efectos de resolver numéricamente las ecuaciones resultantes se utiliza un enfoque tipo Ritz-Galerkin que conduce a un sistema algebraico no lineal. Como funciones aproximantes se adopta un conjunto de polinomios ortogonales que satisfacen las condiciones de borde geométricas

$$U = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(x) \quad (29)$$

donde U representa a los desplazamientos generalizados y los coeficientes c_i son los coeficientes incógnita a ser determinados. Los polinomios $\xi_i(x)$ son generados mediante el método de Gram Schmidt¹³ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \xi_2(x) &= (x - B_2) \xi_1(x), \dots, \xi_k(x) = (x - B_k) \xi_{k-1}(x) - C_k \xi_{k-2}(x), \\ \text{donde } B_k &= \frac{\int_0^L x \xi_{k-1}^2(x) dx}{\int_0^L \xi_{k-1}^2(x) dx}, \quad C_k = \frac{\int_0^L x \xi_{k-1}(x) \xi_{k-2}(x) dx}{\int_0^L \xi_{k-2}^2(x) dx} \end{aligned} \quad (30)$$

La elección de $\xi_i(x)$ para cada uno de los desplazamientos depende de las condiciones de borde. Por ejemplo, a continuación se muestran las diferentes funciones simples que cumplen con las condiciones de borde geométricas.

$$\begin{aligned} \text{Viga simplemente apoyada } \xi_i(x): & \begin{cases} \frac{x}{L}(L-x) & \text{para los desplazamientos } v, w \text{ y } \phi \\ x - \frac{L}{2} & \text{para los desplazamientos } \theta_z, \theta_y \text{ y } \theta \end{cases} \\ \text{Viga Cantilever } \xi_i(x): & \begin{cases} 2xL & \text{para los desplazamientos } v, w \text{ y } \phi \\ \frac{2x}{L}(2L-x) & \text{para los desplazamientos } \theta_z, \theta_y \text{ y } \theta \end{cases} \\ \text{Viga empotrada-empotrada } \xi_i(x): & \begin{cases} \left(\frac{x}{L}\right)^2(L-x)^2 & \text{para los desplazamientos } v, w \text{ y } \phi \\ \frac{x}{L}(L-x) & \text{para los desplazamientos } \theta_z, \theta_y \text{ y } \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

De esta manera, la discretización se lleva a cabo reemplazando la expresión (29) para cada uno de los desplazamientos generalizados en la ecuación variacional gobernante. Luego realizando algunos cálculos de integración a lo largo de la viga se obtienen un sistema de ecuaciones algebraicas fuertemente no-lineales y totalmente acopladas. Para el estudio del comportamiento no-lineal se calcula la matriz tangente para ser utilizada tanto en cálculo de las cargas de pandeo como en la determinación del camino de equilibrio de post-pandeo. Como criterio del estado de pandeo se utiliza las raíces del determinante de la matriz tangente⁶. Las curvas de equilibrio se analizan numéricamente por medio de un procedimiento basado en el algoritmo de Newton-Raphson. En todos los casos se utilizarán un número de términos $n = 3$ en las funciones desplazamientos (29).

4 APLICACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

La aplicación está orientada a determinar la importancia de los diferentes estados de carga, las diferentes secuencias de laminación, la influencia del pre-pandeo sobre la carga crítica y los estados de equilibrio en el post-pandeo.

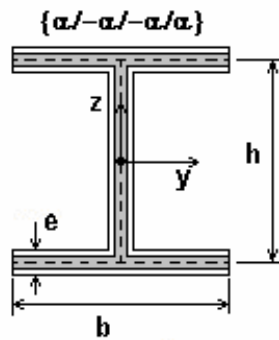


Figura 2. Sección transversal analizada

Con el fin de evaluar el comportamiento no-lineal del miembro estructural analizado, se considera una viga-I bi-simétrica de pared delgada con las siguientes características: $h = 0.6$ m, $b = 0.6$ m, $e = 0.03$ m y $L = 6$ m (ver figura 2). El material es grafito-epoxy (AS4/3501) cuyas propiedades son: $E_1 = 144$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = 4.14$ GPa, $G_{13} = 4.14$ GPa, $G_{23} = 3.45$ GPa, $\nu_{12} = 0.3$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.5$, $\rho = 1389$ kg/m³. Las secuencias de laminación consideradas son $\{0/0/0/0\}$, $\{0/90/90/0\}$ y $\{45/-45/-45/45\}$.

4.1 Viga Simplemente Apoyada

En este primer ejemplo consideramos una viga simplemente apoyada cargada por una fuerza transversal Pc en el medio de la viga (Figura 3). En el estudio de las cargas críticas de pandeo se realizaron cómputos para tres estados de carga: a.- carga ubicada en el ala superior, b.- en el centro de corte y c.- en el ala inferior de la viga (figura 3), variando el tipo de laminación y la longitud de la viga. En la tabla 1, 2 y 3 se observan los valores de carga crítica de pandeo para diferentes laminaciones y relaciones de esbeltez. Considerando dos casos de análisis: **No-Linear** (teniendo en cuenta la deformación de pre-pandeo) y **Lineal** (sin

considerar la deflexión de pre-pandeo) que corresponde a los valores de carga crítica hallados a partir de la teoría de estabilidad lineal¹⁴. Además se compararon los valores de carga de pandeo hallados a partir de la presente formulación (CC) con aquellos que se obtienen despreciando la flexibilidad por corte (SC).

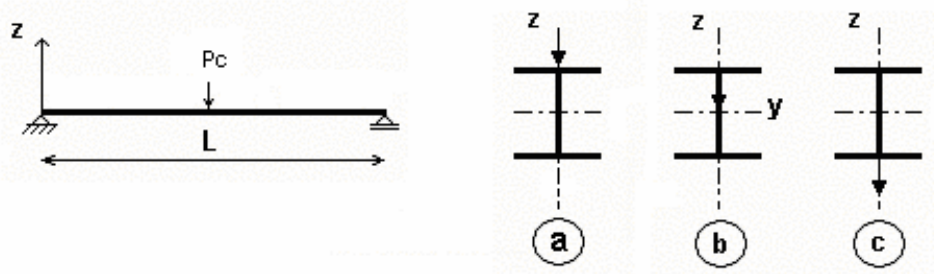


Figura 3. Viga simplemente apoyada, disposición de la carga.

De la tabla 1, 2 y 3 se observa que las cargas críticas de pandeo calculados de la teoría Lineal son conservativas comparadas con aquellas provenientes del cálculo No-Lineal. La influencia de la deformación de pre-pandeo sobre las cargas críticas se mantiene constante para las diferentes laminaciones y relaciones de esbeltez. Además, el efecto de la deformación por corte en el cálculo de las cargas de pandeo es significativo para vigas con fibras unidireccionales $\{0/0/0/0\}$ e insignificante para la secuencia de laminación $\{45/-45/-45/45\}$. Con respecto a los diferentes estados de carga, el efecto de corte es mayor cuando la carga se encuentra aplicada en el ala superior de la viga (a) y es menor cuando la carga se encuentra en el ala inferior (c).

Tabla 1. Vigas simplemente apoyadas, carga aplicada en el centroide, ($P_c \times 10^6$ N).

h/L	Análisis	$\{0/0/0/0\}$		$\{0/90/90/0\}$		$\{45/-45/-45/45\}$	
		CC	SC	CC	SC	CC	SC
0.05	No-Lineal	2.35	2.45	1.31	1.34	0.53	0.53
	Lineal	1.54	1.59	0.86	0.87	0.35	0.35
0.10	No-Lineal	16.61	18.76	9.46	10.13	2.68	2.68
	Lineal	10.93	12.38	6.23	6.68	1.77	1.77
0.15	No-Lineal	49.03	62.19	29.06	33.44	7.64	7.66
	Lineal	32.46	41.58	19.31	22.36	5.11	5.12

Tabla 2. Vigas simplemente apoyadas, carga aplicada en el ala superior, ($P_c \times 10^6$ N).

h/L	Análisis	{0/0/0/0}		{0/90/90/0}		{45/-45/-45/45}	
		CC	SC	CC	SC	CC	SC
0.05	No-Lineal	1.05	1.11	0.61	0.62	0.35	0.35
	Lineal	0.88	0.93	0.50	0.52	0.26	0.26
0.10	No-Lineal	6.86	8.52	4.10	4.62	1.46	1.47
	Lineal	5.88	7.15	3.48	3.88	1.17	1.17
0.15	No-Lineal	18.41	28.39	11.87	15.30	3.86	3.88
	Lineal	16.15	23.97	10.24	12.90	3.18	3.19

Tabla 3. Vigas simplemente apoyadas, carga aplicada en el ala inferior, ($P_c \times 10^6$ N).

h/L	Análisis	{0/0/0/0}		{0/90/90/0}		{45/-45/-45/45}	
		CC	SC	CC	SC	CC	SC
0.05	No-Lineal	5.17	5.25	2.82	2.84	0.79	0.79
	Lineal	2.66	2.71	1.46	1.47	0.45	0.45
0.10	No-Lineal	38.94	41.13	21.43	22.10	4.87	4.88
	Lineal	20.03	21.37	11.09	11.50	2.66	2.66
0.15	No-Lineal	122.70	135.97	68.70	72.96	15.09	15.12
	Lineal	63.48	71.98	35.81	38.65	8.19	8.20

En la figuras 4, 5 y 6 se muestra el camino de equilibrio de post-pandeo para los desplazamientos v , w , ϕ y θ en función de la carga crítica P_c , para una longitud de viga de 6 metros, cuando la carga es aplicada en el centroide y para una secuencia de laminación {0/0/0/0}, {0/90/90/0} y {45/-45/-45/45}, respectivamente.

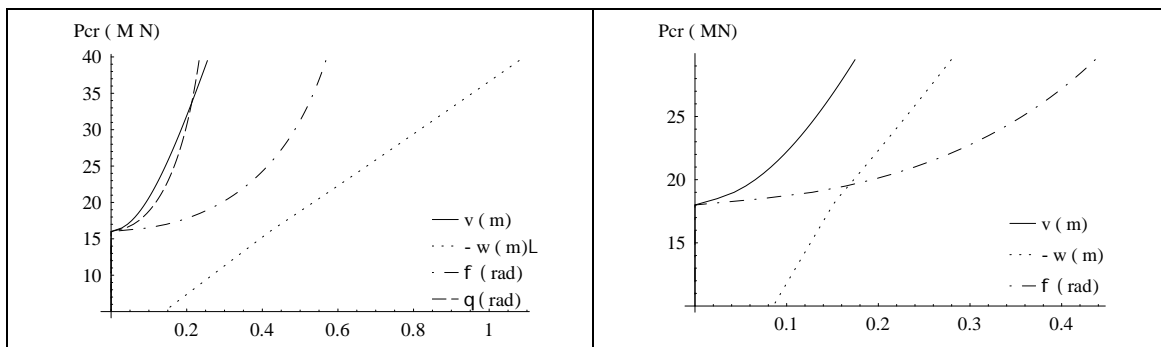


Fig. 4. Gráfico de Post-pandeo para una viga simplemente apoyada: a la izquierda (derecha) considerando (despreciando) el efecto de corte. $h/L=0.1$, {0/0/0/0}.

En los gráficos de post-pandeo se estudia la influencia de la deformación por corte en el camino de equilibrio. De los gráficos se observa que el comportamiento de post-pandeo es similar en ambos casos (considerando y despreciando la flexibilidad por corte) para la mayoría de los desplazamientos. El desplazamiento w muestra una mayor flexibilidad al considerar el corte tanto en el estado de pre-pandeo como en el de post-pandeo para la laminación $\{0/0/0/0\}$ y $\{0/90/90/0\}$. Por otra parte, los caminos de equilibrio para una laminación $\{45/-45/-45/45\}$ no presenta influencia debido a la deformación por corte.

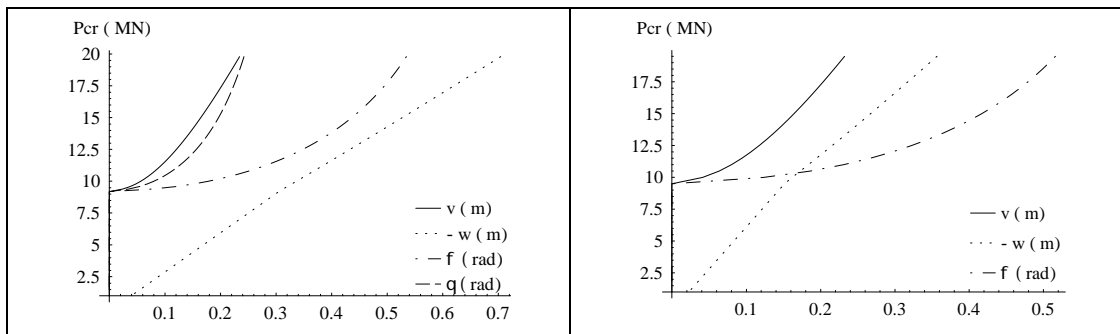


Fig. 5. Gráfico de Post-pandeo para una viga simplemente apoyada: a la izquierda (derecha) considerando (despreciando) el efecto de corte. $h/L=0.1$, $\{0/90/90/0\}$.

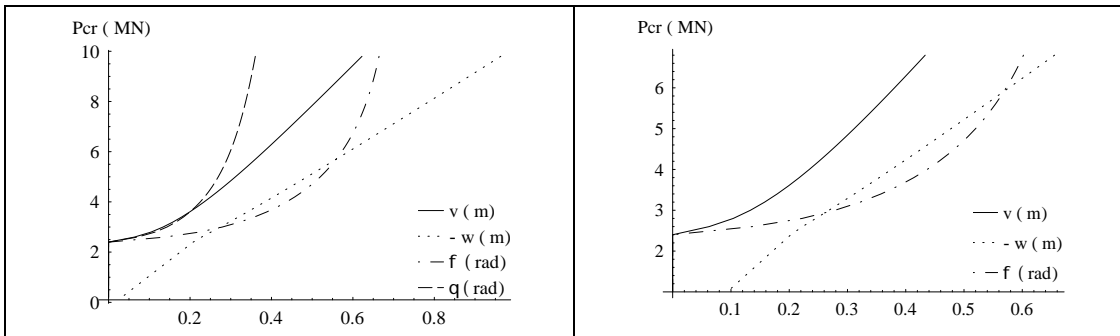


Fig. 6. Gráfico de Post-pandeo para una viga simplemente apoyada: a la izquierda (derecha) considerando (despreciando) el efecto de corte. $h/L=0.1$, $\{45/-45/-45/45\}$.

4.2 Viga Cantilever

En este ejemplo consideramos una viga cantilever cargada por una fuerza transversal P_c en el extremo libre de la viga. De igual manera que en el caso anterior se realizaron cálculos para tres estados de carga: a.- carga ubicada en el ala superior, b.- en el centro de corte y c.- en el ala inferior de la viga, variando el tipo de laminación y la longitud de la viga. En la tabla 4 se observan los valores de carga crítica de pandeo para diferentes laminaciones y relaciones de esbeltez de la viga. Considerando dos casos de análisis: **No-Lineal** (teniendo en cuenta la deformación de pre-pandeo) y **Lineal** (sin considerar la deflexión de pre-pandeo).

Tabla 4. Cargas de pandeo de Vigas cantilever, ($P_c \times 10^6$ N).

h/L	Análisis	{0/0/0/0}			{0/90/90/0}			{45/-45/-45/45}		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c
0.05	No-Lineal	0.10	0.67	1.36	0.06	0.40	0.84	0.11	0.23	0.33
	Lineal	0.097	0.39	0.69	0.06	0.23	0.39	0.07	0.10	0.12
0.10	No-Lineal	0.63	4.31	7.44	0.37	2.55	4.79	0.29	1.09	1.93
	Lineal	0.61	2.69	4.41	0.36	1.56	3.25	0.25	0.53	0.72
0.15	No-Lineal	1.87	12.39	19.06	1.11	7.60	12.7	0.57	2.90	5.77
	Lineal	1.82	7.83	11.74	1.08	4.72	7.6	0.53	1.49	2.26

Se puede observar de la tabla 4, una notable diferencia entre el análisis de pandeo Lineal y No-lineal cuando la carga es aplicada en el ala inferior (c). Esta discrepancia puede alcanzar un porcentaje de alrededor del 60% para la secuencia de laminación {45/-45/-45/45}. Por lo tanto, la carga de pandeo es función de la deformación inicial en el estado de pre-pandeo y depende fuertemente de la ubicación de la carga. Por otro lado, la laminación {0/0/0/0} presenta la mayor resistencia al pandeo lateral para esta condición de borde. En la figuras 7, 8 y 9 se muestra el camino de equilibrio de post-pandeo para los desplazamientos v , w , ϕ y θ en función de la carga crítica P_c , para una longitud de viga de 6 metros, considerando los tres estados de carga (a, b y c) y para una secuencia de laminación {0/0/0/0}, {0/90/90/0} y {45/-45/-45/45}, respectivamente.

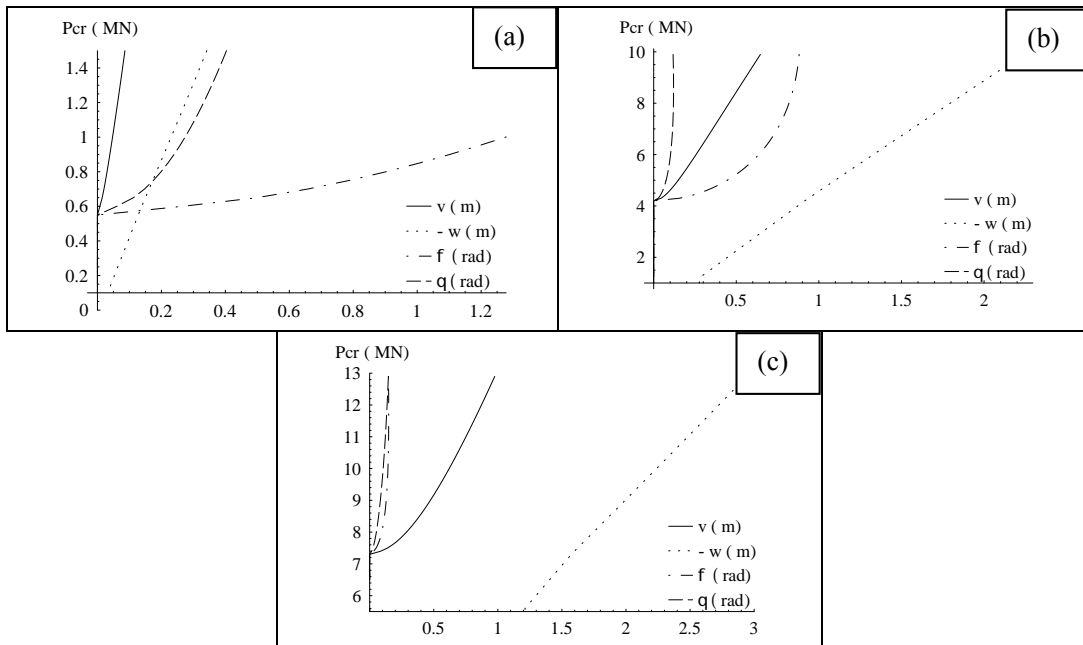


Fig. 7. Gráfico de Post-pandeo para una viga cantilever, carga aplicada en el ala superior (a), centroide (b) y ala inferior (c). $h/L=0.1$, {0/0/0/0}.

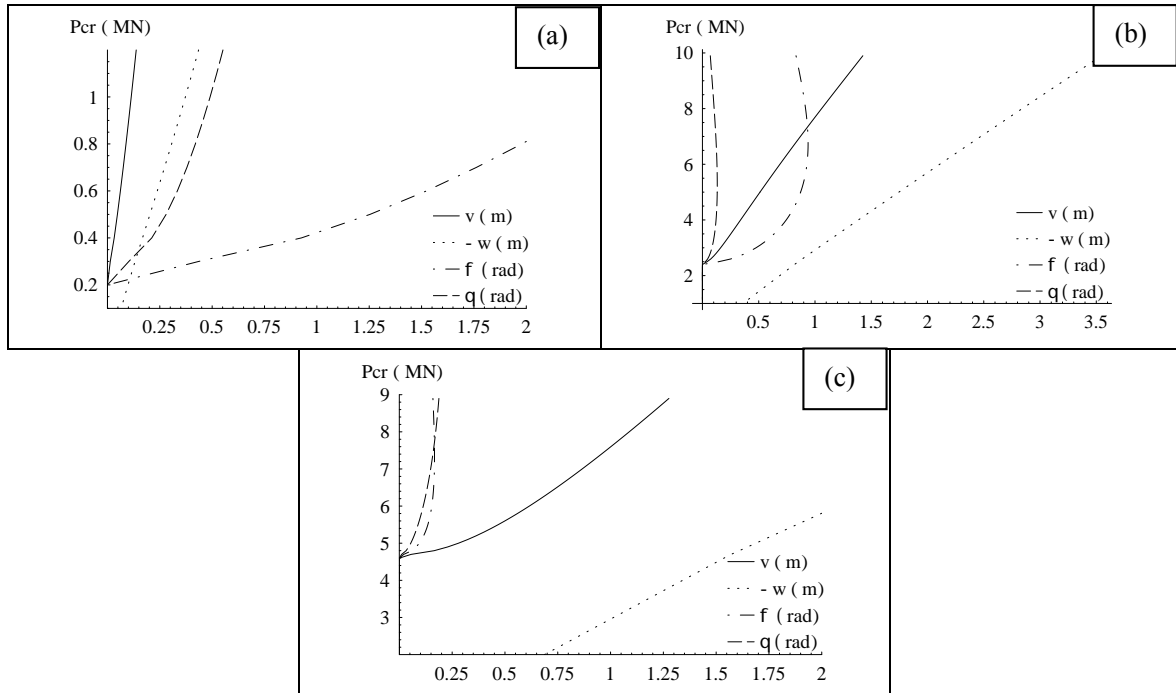


Fig. 8. Gráfico de Post-pandeo para una viga cantilever, carga aplicada en el ala superior (a), centroide (b) y ala inferior (c). $h/L=0.1$, $\{0/90/90/0\}$.

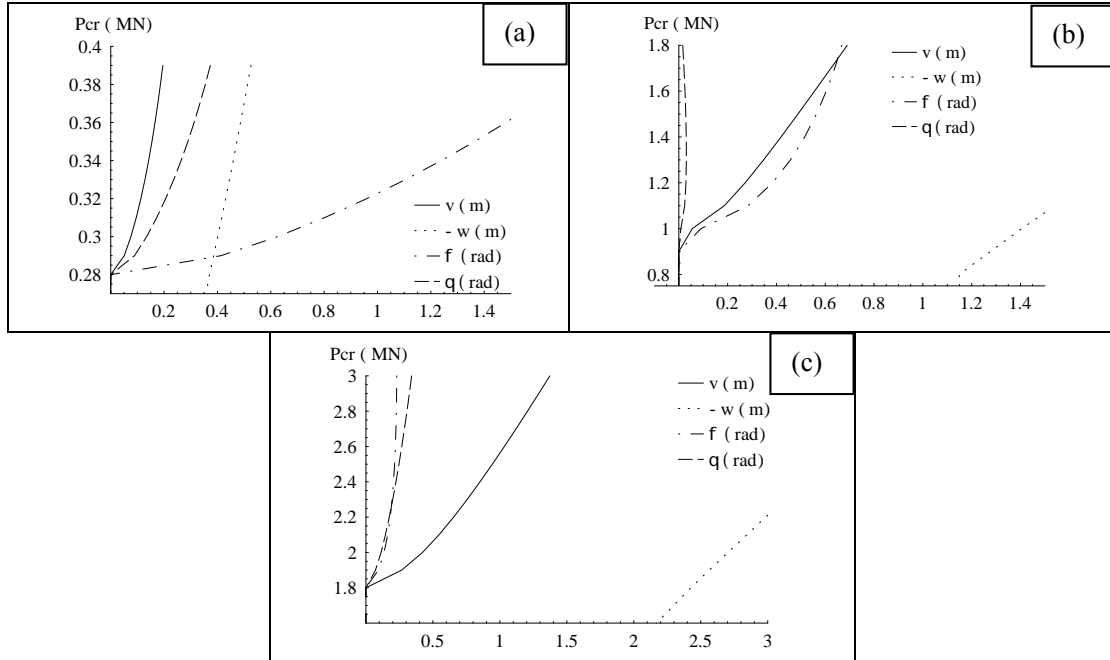


Fig. 9. Gráfico de Post-pandeo para una viga empotrada-empotrada, carga aplicada en el ala superior (a), centroide (b) y ala inferior (c). $h/L=0.1$, $\{45/-45/-45/45\}$.

Los caminos de equilibrio de post-pandeo calculados son estables y simétricos para todos los casos analizados. El punto de bifurcación depende sobre la altura donde el parámetro de carga es aplicado. De los gráficos observamos que tanto la resistencia al pandeo lateral como la deformación inicial en el estado de pre-pandeo son mayores cuando la carga es aplicada en el ala inferior (c) de la viga. La diferencia entre el análisis de pandeo Lineal y No-lineal analizada anteriormente (Tabla 4) se debe a esta gran deformación inicial de pre-pandeo. Por otro lado, la capacidad de carga remanente luego del pandeo es menor cuando la carga es aplicada en el ala superior de la viga. Debido al rápido crecimiento del desplazamiento en relación a la carga. Esto último se observa para las tres secuencias de laminación analizadas.

4.3 Viga Empotrado-Empotrada

En este último ejemplo consideramos una viga empotrada en ambos extremos y cargada por una fuerza transversal P_c en el medio de la viga. De igual manera que en los dos casos anteriores se realizaron cálculos para tres estados de carga: a, b y c.

Tabla 5. Cargas de pandeo de Vigas empotradas en los extremos, ($P_c \times 10^6$ N).

h/L	Análisis	{0/0/0/0}			{0/90/90/0}			{45/-45/-45/45}		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c
0.05	No-Lineal	4.19	22.30	78.66	2.54	12.84	48.73	0.99	3.65	13.43
	Lineal	3.53	8.84	19.83	2.11	5.07	11.19	0.76	1.44	2.59
0.10	No-Lineal	19.74	134.64	428.18	14.16	85.18	286.62	5.28	24.32	152.05
	Lineal	17.64	53.33	127.79	12.27	33.34	76.95	4.23	9.22	62.67
0.15	No-Lineal	39.74	348.99	1105.58	32.15	235.92	829.06	15.95	83.26	153.9
	Lineal	36.97	137.64	353.24	28.98	91.27	221.77	12.87	29.24	62.67

En la tabla 5 se observan los valores de carga crítica de pandeo para diferentes laminaciones y relaciones de esbeltez de la viga. Una vez más se analizan dos casos: **No-Lineal** y **Lineal**. De los valores de la tabla observamos una remarcada diferencia entre el análisis de pandeo Lineal y No-lineal cuando la carga es aplicada en el ala inferior de la viga (c). Esta última puede alcanzar un porcentaje de alrededor del 80% para la secuencia de laminación {45/-45/-45/45}, la cual es mayor que para las dos condiciones anteriores (35% para simplemente apoyada y 60% para cantilever). De igual forma que los casos anteriores la carga de pandeo depende fuertemente de la ubicación de la carga y la laminación {0/0/0/0} presenta la mayor resistencia al pandeo lateral. En comparación con las condiciones de borde anteriores, la condición empotrada-empotrada presenta mayor resistencia al pandeo lateral para todas las laminaciones y relaciones de esbeltez analizadas. En la figuras 10, 11 y 12 se muestra el camino de equilibrio de post-pandeo para los desplazamientos v , w , ϕ y θ en función de la carga crítica P_c , para una longitud de viga de 6 metros, considerando los tres

estados de carga (a, b y c) y para una secuencia de laminaci3n $\{0/0/0/0\}$, $\{0/90/90/0\}$ y $\{45/-45/-45/45\}$, respectivamente.

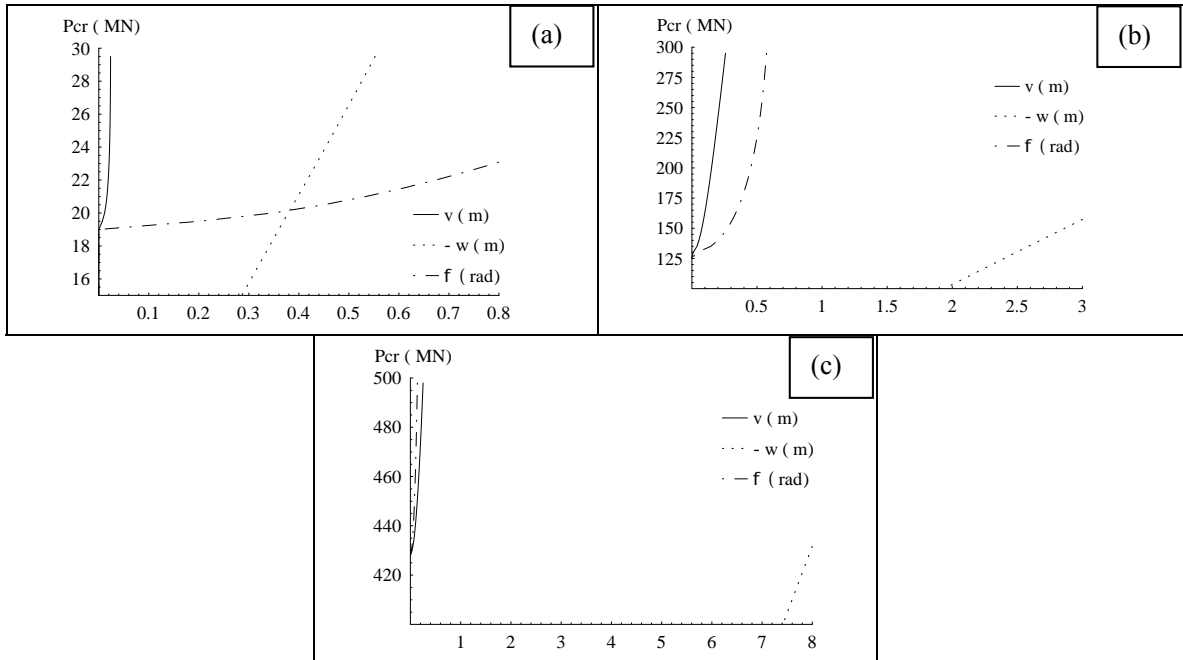


Fig. 10. Gr3fico de Post-pandeo para una viga empotrada-empotrada, carga aplicada en el ala superior (a), centroide (b) y ala inferior (c). $h/L=0.1$, $\{0/0/0/0\}$.

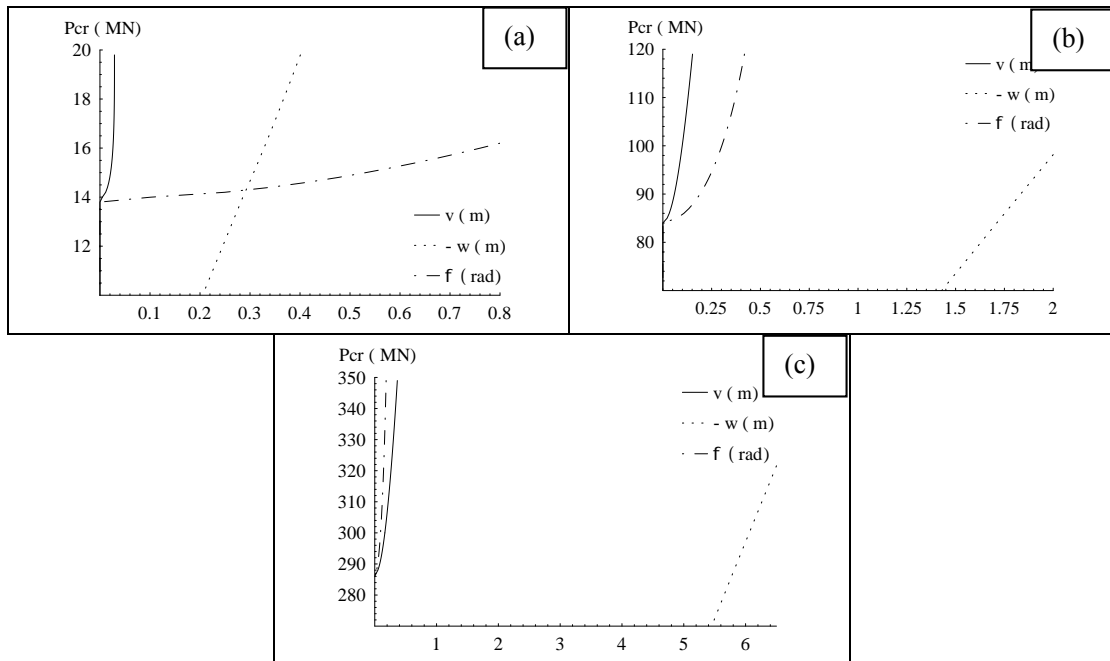


Fig. 10. Gr3fico de Post-pandeo para una viga empotrada-empotrada, carga aplicada en el ala superior (a), centroide (b) y ala inferior (c). $h/L=0.1$, $\{0/90/90/0\}$.

Se observa de los gráficos, que la deformación de pre-pandeo es muy importante cuando la carga es aplicada en el ala inferior de la viga. Por otro lado, debido al rápido crecimiento del desplazamiento- ϕ en relación a la carga, la capacidad de carga remanente luego del pandeo es limitada cuando la carga es aplicada en el ala superior de la viga. Y prácticamente nula para la secuencia de laminación $\{45/-45/-45/45\}$.

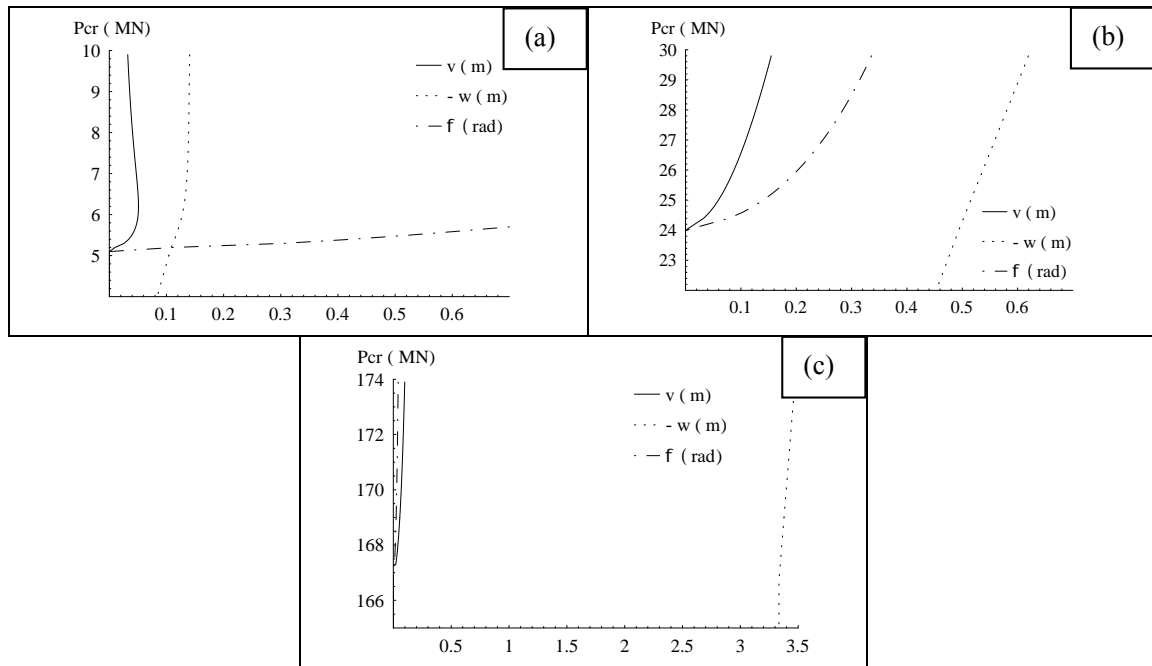


Fig. 11. Grafico de Post-pandeo para una viga empotrada-empotrada, carga aplicada en el ala superior (a), centroide (b) y ala inferior (c). $h/L=0.1$, $\{45/-45/-45/45\}$.

4.4 Validación

Con el propósito de verificación de los resultados obtenidos, realizamos dos últimos cálculos y los comparamos con aquellos obtenidos por Fraternali y Feo¹⁰. Ellos investigaron el comportamiento no-lineal de una viga-I compuesta de pared delgada. Utilizaron una malla de 30 elementos de 2-nodos a lo largo de la viga para evaluar las cargas de pandeo de una viga simplemente apoyada cargada en el centro de la viga y una viga cantilever cargada en el extremo libre. Características seccionales de la viga-I: $h = 0.05$ m, $b = 0.05$ m, $e = 0.003$ m y $L = 6$ m (ver figura 2). El material es glass-epoxy cuyas propiedades son: $E_1 = 48.3$ GPa, $E_2 = 19.8$ GPa, $G_{12} = 8.96$ GPa, $G_{13} = 8.96$ GPa, $G_{23} = 6.19$ GPa, $\nu_{12} = 0.27$, $\nu_{13} = 0.27$, $\nu_{23} = 0.6$, $L=1.062$. La secuencia de laminación considerada es $\{0/0/0/0\}$.

Tabla 6. Cargas de pandeo, viga simplemente apoyada. ($Pc \times 10^3$ N).

<i>Carga aplicada</i>	<i>Análisis</i>	<i>Modelo actual</i>	<i>Fraternali et al.</i>
Ala superior	No-Lineal	3.74	3.65
	Lineal	2.87	2.79
Centroide	No-Lineal	7.36	7.44
	Lineal	4.29	4.29
Ala inferior	No-Lineal	14.46	14.87
	Lineal	6.41	6.57

Tabla 7. Cargas de pandeo de Vigas cantilever. ($Pc \times 10^3$ N).

<i>Carga aplicada</i>	<i>Análisis</i>	<i>Modelo actual</i>	<i>Fraternali et al.</i>
Centroide	No-Lineal	2.25	2.35
	Lineal	1.35	1.35

En las Tablas 6 y 7 se observan que los resultados hallados con el presente modelo concuerdan bastante bien con aquellos obtenidos por Fraternali y Feo utilizando el método de elementos finitos.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una modificación del modelo geométrico no-lineal previamente desarrollado por los autores⁹, el cual converge en forma exacta con una generalización de la teoría de Vlasov cuando se desprecia la deformación por corte¹⁰. El modelo viga presentado es útil para investigar varios problemas de interés técnico, tal como problemas elásticos no-lineales y problemas de estabilidad bajo la acción de diferentes tipos de carga y condiciones de borde. Un enfoque tipo Ritz-Galerkin es utilizado junto con un conjunto de polinomios ortogonales para resolver las ecuaciones de equilibrio no-lineales.

Del comportamiento de pandeo y post-pandeo de vigas compuestas de pared delgada se demostró la sensibilidad de las cargas de pandeo a la deformación inicial de pre-pandeo, como así también de la influencia de la ubicación de la carga. La importancia de la flexibilidad por corte quedó establecida para las diferentes laminaciones y relaciones de esbeltez. Además, se obtuvo una buena concordancia de los resultados del presente modelo con aquellos hallados a partir del método de elementos finitos. En futuros trabajos extenderemos la presente formulación con el fin de analizar todo tipo de laminación de materiales compuestos.

6 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue realizado gracias a Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, y al CONICET.

7 REFERENCIAS

- [1] V. Vlasov, *Thin Walled Elastic Beams*, Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, (1961).
- [2] Lee J., Kim S.E., Hong K. “Lateral buckling of I-section composite beams”, *Engineering Structures*, **24**, 955-964 (2002).
- [3] V.H. Cortínez y M.T. Piovan, “Vibration and Buckling of Composite Thin-Walled Beams with Shear Deformability”, *Journal of Sound and Vibration*, **258(4)**, 701-723, (2002).
- [4] M.T Piovan, Tesis doctoral: “Estudio teórico y computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos, con sección de paredes delgadas, considerando efectos no convencionales”. Universidad Nacional del Sur, Argentina (2003).
- [5] A. Sapkás, L.P. Kollár, “Lateral-torsional buckling of composite beams”. *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 2939-2963 (2002).
- [6] F. Mohri, L. Azrar, M. Potier-Ferry, “Lateral post-buckling analysis of thin-walled open sections beams”. *Thin-Walled Structures*, **40**, 1013-1036 (2002).
- [7] Y.L. Pi, N.S. Trahair, “Prebuckling deflections and lateral buckling. II: applications”. *Journal of Structural Engineering ASCE*, **118 (11)**, 2967-2985 (1992).
- [8] Y.L. Pi, M.A. Bradford, “Effects of approximations in analysis of beams of open thin-walled cross-section - part II: 3-D non-linear behaviour”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, 773-790 (2001).
- [9] V.H. Cortínez, S.P. Machado y M.T. Piovan, “Post-Pandeo de Vigas Compuestas de Pared Delgada”, *First South-American Congress on Computational Mechanics*, 1713-1729 (2002).
- [10] F. Fraternali, L. Feo, “On a moderate rotation theory of thin-walled composite beams”. *Composites, Part B: engineering*, **31**, 141-158 (2000).
- [11] V.H. Cortínez, R.E. Rossi, “Dynamics of shear deformable thin-walled open beams subjected to initial stresses”. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, **14 (3)**, 293-316 (1998).
- [12] E.J. Barbero, *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc, (1999).
- [13] R.B. Bhat, “Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the rayleigh-ritz method”. *Journal of Sound and Vibration*, **105(2)**, 199-210, (1986).
- [14] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York. (1961).