

RINCE

**Revista de Investigaciones del Departamento de Ciencias Económicas de
La Universidad Nacional de la Matanza**

Artículo de investigación

El tratamiento de la volatilidad en series de tiempo financieras

Autora: María de las Mercedes Abril¹

Resumen:

El objetivo primordial de esta investigación es el de examinar los métodos para tratar una gran variedad de datos con irregularidades que suceden en series de tiempo y en especial en aquellas referidas a la actividad financiera. Los modelos autorregresivos integrados de promedios móviles (o **modelos ARIMA** según sus siglas en inglés) son frecuentemente considerados como los que proveen la base principal para el modelado de cualquier serie de tiempo. Ahora bien, dada la tecnología actual, puede haber alternativas más atractivas y por sobre todo más eficientes. Numerosas series de tiempo financieras no tienen una media constante y también en la mayoría de los casos se observan fases en donde reina una relativa tranquilidad seguido de períodos de importantes cambios, o sea que la variabilidad cambia a través del tiempo. Dicho comportamiento es lo que recibe el nombre de **volatilidad**. Gran parte de la investigación actual se concentra en extender la metodología clásica de Box y Jenkins basada principalmente en los modelos de tipo **ARIMA** para analizar este tipo de comportamiento. Presentaremos un resumen de los métodos para el tratamiento de la volatilidad, la cual se define como la varianza de una variable aleatoria, comúnmente un retorno en el área financiera, condicional a toda la información pasada.

¹ Docente- investigadora del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas (CONICET) y de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Tucumán.
RINCE – N°10 Vol. 5 (Diciembre 2014) – Artículo de Investigación
ISSN 1852-3239 - <http://rince.unlam.edu.ar>

Palabras claves: Series de Tiempo Financieras, Variables Aleatorias, Varianza, Volatilidad.

Title: Treating volatility financial time series

Abstract:

The primary objective of this research is to examine methods to treat a wide variety of data irregularities that occur in time series and in particular to those related to the financial activity. The autoregressive integrated moving average (**ARIMA models in short**) are often regarded as providing the main basis for modeling any time series. However, given current technology, there may be more attractive alternatives and above all efficient. Many financial time series have a constant mean and in most cases we can observe phases where there is a relative tranquility followed by periods of significant change, that is, the variability changes over time. Such behavior is what is called **volatility**. Much of the current research focuses on extending the classical methodology formulated by Box and Jenkins and mainly based on **ARIMA** type models to analyze this type of behavior. We will present a short summary of the methods for the treatment of volatility, which is defined as the variance of a random variable, commonly a return in the financial area, conditional on all past information.

Key words: Financial Time Series, Random Variables, Variance, Volatility.

1. Modelado de series de tiempo financieras

1.1. Introducción

Numerosas series de tiempo financieras no tienen una media constante y en la mayoría de los casos se observan fases en donde reina una relativa tranquilidad seguido de períodos de importantes cambios. Gran parte de la investigación actual se concentra en extender la metodología clásica establecida por primera vez por Box y Jenkins para analizar este tipo de comportamiento. Una característica presente en las series de tiempo que se refieren a activos financieros es lo que se conoce como **volatilidad**, que puede ser definida de varias maneras, pero que no es directamente observable.

El objetivo de esta investigación es presentar un resumen de los métodos para el tratamiento de la volatilidad, la cual se define como la varianza de una variable aleatoria, comúnmente un retorno en el área financiera, condicional a toda la información pasada.

Existen tres enfoques para el cálculo de la volatilidad en el área financiera:

1. Relacionar el precio de mercado observado con aquel que surge de la aplicación de algún tipo de modelo. En este caso obtenemos lo que se llama volatilidad implícita, que usualmente se basa en la fórmula introducida por primera vez por los economistas Black y Scholes para el caso específico de opciones europeas. Esta fórmula supone normalidad en los precios y volatilidad constante.
2. Otra manera consiste en modelar directamente la volatilidad de la serie de retornos utilizando alguna familia de modelos ya conocidos, como ser los llamados modelos de tipo **ARCH** o **GARCH** o bien los llamados **modelos de volatilidad estocástica**. Vamos a presentar modelos de este tipo para tratar a la volatilidad.
3. Una tercera alternativa consiste en modelar la volatilidad por medio de una media de una función de los últimos k retornos del activo en estudio. Obtenemos en este caso la llamada **volatilidad histórica**.

1.2. Modelos ARCH

Los modelos **ARCH** o **modelos autorregresivos con heterocedasticidad condicional** fueron presentados por primera vez por Engle en el año 1982 con el objetivo de estimar la varianza de la inflación. La idea básica de este modelo es que el retorno y_t no se encuentra correlacionado serialmente pero la volatilidad (o varianza condicional) depende de los retornos pasados por medio de una función cuadrática.

En los modelos convencionales, la varianza del disturbio se supone que es constante. Sin embargo, puede verse que muchas series referidas a la actividad financiera presentan períodos en donde la volatilidad es inusualmente grande seguido de períodos de relativa tranquilidad. En estas circunstancias, el supuesto de varianza constante, también llamado **homocedasticidad** resulta ser un tanto inapropiado.

El ejemplo más simple de la clase de modelos heterocedásticos condicionales multiplicativos propuestos por Engle (1982) es aquel de primer orden, que no requiere un ajuste previo de la serie que estamos analizando, o sea y_t , y está dado por la expresión que sigue:

$$y_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2} = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad (1)$$

donde, de ahora en adelante, el parámetro de la volatilidad se definirá como

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2. \quad (2)$$

el cual adoptará una definición diferente de acuerdo a cada modelo. Además ε_t es un proceso con media 0 y varianza 1, ε_t e y_{t-1} son independientes entre sí y α_0 y α_1 son constantes tales que $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 > 0$ (usualmente tomamos a $0 < \alpha_1 < 1$ para asegurarnos la condición de estacionariedad). Las expresiones (1) y (2) constituyen lo que en la literatura recibe el nombre de **modelo autorregresivo con heterocedasticidad de orden 1 o modelo ARCH (1)** dado que h_t se encuentra asociado a un modelo autorregresivo de primer orden.

En un modelo **ARCH**, la estructura de los disturbios es tal que las medias condicionales y no condicionales son todas iguales a cero. Es más y_t es serialmente no correlacionada. El punto central es que los disturbios no son independientes ya que se encuentran relacionados por medio de sus segundos momentos. La varianza condicional es en sí misma un proceso autorregresivo que da como resultado disturbios condicionales heterocedásticos. Cuando un valor de y_{t-1} se aleja de cero, entonces la varianza de y_t tenderá también a ser grande. De esta manera, un modelo **ARCH** como el que se ha planteado podrá captar los cambios repentinos en una serie de tiempo definida por medio de y_t .

1.3. Modelos GARCH

Bollerslev (1986, 1987 y 1988) extendió el trabajo original de Engle desarrollando una técnica que permite que la varianza condicional sea un proceso autorregresivo y de promedios móviles (o proceso **ARMA** de acuerdo a sus siglas) en sí mismo. Esa extensión dio como resultado lo que se denomina **modelo autorregresivo generalizado con heterocedasticidad condicional**

o **modelo GARCH**, en forma más breve. La idea se basa en el hecho que un modelo **ARMA** puede ser más parsimonioso, en el sentido de tener menos parámetros, que un modelo autorregresivo o un modelo de promedios móviles puro. Del mismo modo un modelo **GARCH** puede ser usado para describir la volatilidad con menos parámetros que un modelo **ARCH**.

Un modelo **GARCH** de orden m y s ; o modelo **GARCH** (m, s) se define de la siguiente manera:

$$y_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t \quad (3)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j} \quad (4)$$

donde ε_t es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con media cero y varianza uno, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m-1$, $\beta_j \geq 0$,

$$j = 1, \dots, s-1, \alpha_m > 0, \beta_s > 0, \sum_{s=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1, q = \max(m, s).$$

El punto importante es que la varianza condicional de y_t está dada por $E_{t-1}(y_t^2) = h_t$ donde $E_{t-1}(\cdot)$ es la esperanza manteniendo constante la información hasta el momento $t-1$.

Los beneficios de utilizar un modelo **GARCH** resultan evidentes; un modelo **ARCH** de orden superior puede tener una representación **GARCH** más parsimoniosa que resulta más fácil de identificar y estimar. Esto es particularmente cierto ya que todos los coeficientes en la expresión (4) deben ser no negativos. Más aun, para asegurarnos que la varianza condicional sea finita, todas las raíces características de la ecuación polinomial asociada a (4) deben encontrarse dentro del círculo unitario. Claramente podemos observar que cuanto más parsimonioso sea el modelo, menores serán las restricciones que tengamos que imponer a los coeficientes y más sencillo será, consecuentemente, su proceso de estimación.

2. Modelos de volatilidad estocástica

Los modelos de la familia **ARCH** suponen que la varianza condicional depende de los retornos pasados. El modelo de volatilidad estocástica o modelo **MVE** (o **SV** según sus siglas en inglés), propuesto por primera vez por Taylor (1980, 1986) no parte de este supuesto. Este modelo tiene como premisa el *RINCE* – N°10 Vol. 5 (Diciembre 2014) – Artículo de Investigación
 ISSN 1852-3239 - <http://rince.unlam.edu.ar>

hecho de que la volatilidad depende de sus valores pasados pero es independiente de los retornos pasados del activo financiero bajo análisis.

Denotemos como σ_t^2 a la varianza condicional, es decir, $\sigma_t^2 = E(y_t^2 | F_{t-1})$ donde F_{t-1} es toda la información del proceso hasta el momento $t-1$.

Diremos que la serie bajo estudio sigue un modelo del tipo SV, si

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (5)$$

$$\sigma_t = \exp\left(\frac{h_t}{2}\right), \quad (6)$$

donde ε_t es una serie estacionaria con media igual a cero y varianza uno y h_t es otra serie estacionaria con densidad de probabilidad dada por una función $f(h)$.

2.1. Estimación de los modelos de volatilidad estocástica

Los modelos de tipo **MVE** presentan una seria dificultad y es que su estimación es sumamente complicada. Para intentar solucionar esta cuestión es posible utilizar el enfoque propuesto por Durbin y Koopman (1997a, 1997b, 2000) que consiste en utilizar un procedimiento de cuasi verosimilitud por medio de la utilización del denominado **filtro de Kalman**. En este caso, el modelo definido en las ecuaciones (5) y (6) puede ser reexpresado de la forma

$$y_t = \sigma \varepsilon_t e^{\frac{h_t}{2}} \quad (7)$$

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t, \quad (8)$$

donde $\sigma = \exp(\alpha_0 / 2)$. Una forma equivalente está dada por

$$\log(y_t^2) = \kappa + h_t + u_t, \quad (9)$$

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t, \quad (10)$$

donde $u_t = \log(\varepsilon_t^2) - E[\log(\varepsilon_t^2)]$ y $\kappa = \log(\sigma^2) + E[\log(\varepsilon_t^2)]$

Las ecuaciones (9) y (10) se encuentran expresadas en lo que en la literatura recibe el nombre de *forma de espacio de estado*. La fórmula (9) recibe el nombre de **ecuación de observación o ecuación de medida** y la fórmula (10) recibe el nombre de **ecuación de estado o ecuación de transición**.

3. Modelos financieros

Retomando el tema que acabamos de abordar podemos decir que en un modelo estándar de espacio de estado la varianza del error observacional definido por ε_t , frecuentemente se supone que es constante. En el análisis de series de tiempo financieras suele verse que la varianza del error observacional está sujeta a una sustancial variabilidad a través del tiempo. La variabilidad de los modelos para este tipo de series puede ser captada por medio de los modelos de volatilidad estocástica.

Sin embargo, es necesario tener en cuenta que constituye un problema sumamente complicado realizar la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros de los modelos **SV**. Las técnicas lineales Gaussianas solo ofrecen estimadores aproximados por máxima verosimilitud de los parámetros y pueden ser aplicadas únicamente para el caso del modelo básico **SV**. Las técnicas que desarrollaremos para solucionar este contratiempo se basan en lo que se conoce con el nombre de **muestreo de importancia** (o en inglés con el nombre de **importance sampling**) y son tan precisas como se requiera para saldar las dificultades que se presentan en este tipo de situaciones.

Ahora bien, la pregunta que surge a continuación es porque no usamos una formulación más clásica como ser un modelo de tipo **GARCH** si es que este tipo de modelos resulta tener una estimación tan compleja. De forma muy resumida podemos decir que los modelos **SV** aunque han tenido un desarrollo teórico menor y presentan una estimación más compleja constituyen una alternativa válida, interesante y mucho más flexible que los modelos **GARCH**. Debemos notar también que los nuevos modelos que han surgido de la investigación teórica en años recientes tienen características estructurales y una construcción más próxima a los modelos **SV** que a los modelos **GARCH**, es por eso que se tenderá a utilizar más los primeros que los últimos.

4. Muestreo de importancia

Lo que nos proponemos hacer a partir de este punto es desarrollar una metodología lo más exhaustiva posible para el análisis de observaciones provenientes de modelos no Gaussianos y no lineales, es decir, aquellos modelos que estudian con mayor frecuencia el comportamiento de las series que describen fenómenos de la actividad financiera. Debido a que no existen técnicas

puramente analíticas para analizar información de este tipo, nuestra metodología tendrá que basarse principalmente en la simulación. Estas técnicas de simulación fueron extendidas por Durbin y Koopman (2000) para proveer un análisis para el caso de modelos clásicos por un lado y Bayesianos por otro.

Todos los métodos que veremos utilizan la metodología de simulación y además el **muestro de importancia** y las **variables antitéticas**.

Denotemos a los vectores apilados $(\alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ y (y'_0, \dots, y'_n) como α e y . Ya que dichos vectores están conformados por los elementos que hacen a la formulación de espacio de estado que especificamos con más detalle en la siguiente subsección, podemos decir que α estará conformada por n vectores inobservables de orden $1 \times m$, mientras que y estará compuesta por n vectores de observaciones de orden $1 \times p$.

De acuerdo con el enfoque clásico, la gran mayoría de los problemas que consideraremos se centrarán esencialmente en la estimación de la media condicional denominada \bar{x} y definida como

$$\bar{x} = E[\mathbf{x}(\alpha)|\mathbf{y}] = \int \mathbf{x}(\alpha) p(\alpha|\mathbf{y}) d\alpha. \quad (11)$$

para una función arbitraria $\mathbf{x}(\alpha)$ dado el vector de observaciones \mathbf{y} , y donde la densidad condicional $p(\alpha|\mathbf{y})$ depende de un vector desconocido de parámetros ψ . En las aplicaciones basadas en la inferencia clásica ψ se reemplaza por su estimador de máxima de verosimilitud $\hat{\psi}$ mientras que en análisis Bayesiano ψ es tratado como un vector aleatorio.

En la práctica, como no disponemos de expresiones explícitas para $p(\alpha|\mathbf{y})$ buscaremos en su lugar una densidad tan próxima a $p(\alpha|\mathbf{y})$ como sea posible para la cual se puedan realizar extracciones aleatorias, y con una muestra de esa densidad aproximada realizamos un ajuste apropiado a la fórmula (11). Esta técnica es la que recibe en la literatura especializada el nombre de **muestreo de importancia** y la densidad *que* se deriva por medio de la aplicación de la misma se denomina **densidad de importancia**. La aproximación a la densidad y demás detalles se encuentran a continuación.

4.1. Implementación práctica del muestreo de importancia

Las ideas básicas que hacen al muestreo de importancia se basan por lo general en α e y , ya que estos son los vectores básicos dentro de un modelo de espacio de estado, el cual resultará de crucial utilidad para nuestro análisis. Sin embargo, para el cálculo computacional práctico es importante expresar las fórmulas en términos de variables que sean lo más simples posibles. En particular, en lugar de los α_t , por lo general será más conveniente trabajar con los términos de disturbio de estado, o sea, $\eta_t = \mathbf{R}'_t(\alpha_t - \mathbf{T}_t\alpha_{t-1})$.

Es necesario recordar que esta última expresión proviene de la representación de espacio de estado de una serie de tiempo. Esta formulación relaciona el vector de disturbios $\{\varepsilon_t\}$ con el vector de observaciones $\{y_t\}$ a través de lo que se denomina **proceso de Markov** $\{\alpha_t\}$. Una expresión conveniente para de la forma de espacio de estado es

$$\begin{aligned} y_t &= \mathbf{Z}_t\alpha_t + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t), \\ \alpha_t &= \mathbf{T}_t\alpha_{t-1} + \mathbf{R}_t\eta_t, & \eta_t &\sim N(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_t), \end{aligned}$$

donde para $t=1, \dots, n$, y_t es un vector de orden $p \times 1$ de observaciones, α_t es un vector de orden $m \times 1$ inobservables denominado *vector de estado*, ε_t es un vector de disturbios o errores observacionales de orden $p \times 1$, las matrices del sistema $\mathbf{Z}_t, \mathbf{T}_t, \mathbf{R}_t, \mathbf{H}_t$ y \mathbf{Q}_t tienen dimensiones dadas por $p \times m, m \times m, m \times k, p \times p$ y $p \times k$ respectivamente y las tres primeras suelen ser conocidas. A la primera ecuación del sistema que acabamos de presentar se la conoce como *ecuación de medida*, mientras que la segunda recibe el nombre de *ecuación de estado* o *ecuación de transición*.

Por medio de la sustitución repetida de la relación $\alpha_t = \mathbf{T}_t\alpha_{t-1} + \mathbf{R}_t\eta_t$, para $t=1, \dots, n$, podemos expresar a $\mathbf{x}(\alpha)$ como una función de α_0 y de η . Luego suprimiremos la dependencia en α_0 y escribiremos a $\mathbf{x}(\alpha)$ como una función de η de la forma $\mathbf{x}^*(\eta)$. Podemos ver que la expresión (11) quedará de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}^*(\eta)|y] = \int \mathbf{x}^*(\eta) p(\eta|y) d\alpha, \quad (12)$$

Luego del correspondiente tratamiento algebraico, dicha fórmula puede expresarse como

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{E_g [\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\eta})w^*(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})]}{E_g [w^*(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})]} \text{ siendo } w^*(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) = \frac{p(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})}{g(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})}. \quad (13)$$

Acá E_g denota la esperanza respecto de la densidad de importancia, definida como $g(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})$, la cual es la densidad condicional de $\boldsymbol{\eta}$ dado \mathbf{y} en el modelo de aproximación y

$$p(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n p(\boldsymbol{\eta}_i) p(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\theta}_i)$$

donde $\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{Z}_i \boldsymbol{\alpha}_i$.

Para las situaciones donde la ecuación de estado no es lineal y Gaussiana, la fórmula (13) nos dará la base para los estimadores de una simulación. Cuando el estado es lineal y Gaussiano $p(\boldsymbol{\eta}_i) = g(\boldsymbol{\eta}_i)$ y en lugar de $w^*(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})$ en la expresión (13) tomamos

$$w^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \frac{p(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\theta}_i)}{g(\boldsymbol{\epsilon}_i)}. \quad (14)$$

Las simulaciones se encontrarán basadas en extracciones aleatorias de $\boldsymbol{\eta}$ de la densidad de importancia $g(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})$ por medio de un suavizador de las simulaciones. Una *variable antitética* es una función de una extracción aleatoria de $\boldsymbol{\eta}$ la cual es equiprobable con $\boldsymbol{\eta}$. Esta es una técnica que se utiliza para reducir la varianza del estimador de la media. El objetivo es inducir una correlación negativa entre las sucesivas simulaciones o replicaciones del modelo que se llevan a cabo para obtener una muestra con la que podamos calcular el estimador deseado.

5. Análisis desde el punto de vista Bayesiano

Es de destacar que las mismas ideas que hemos desarrollado acerca del muestreo de importancia y de las variables antitéticas pueden seguir siendo empleadas haciendo solo unos pocos cambios para el caso Bayesiano. En el enfoque Bayesiano, el vector de parámetros $\boldsymbol{\psi}$ es considerado como aleatorio con una densidad a priori dada por $p(\boldsymbol{\psi})$, a la cual la tomaremos como adecuada para comenzar. En primer lugar obtenemos una serie fórmulas análogas a las
 RINCE – N°10 Vol. 5 (Diciembre 2014) – Artículo de Investigación
 ISSN 1852-3239 - <http://rince.unlam.edu.ar>

que vimos para el caso clásico. Supongamos que deseamos calcular la media posterior

$$\bar{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})|\mathbf{y}]$$

de una función $\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})$ del vector de estado apilado $\boldsymbol{\alpha}$ dado el vector apilado de observaciones \mathbf{y} . Esta es una formulación general que nos permite no solo estimar medias posteriores de cantidades de interés, tales como la tendencia o el componente estacional de la serie bajo estudio, sino también las matrices de varianzas posteriores y las funciones de distribución y densidades posteriores de funciones escalares del estado. Estimaremos a $\bar{\mathbf{x}}$ por medio de técnicas de simulación basadas en el muestreo de importancia y las variables antitéticas análogas a las que vimos para el caso clásico.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \int \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}) p(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\alpha}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\alpha} \\ &= \int \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}) p(\boldsymbol{\alpha}|\mathbf{y}) p(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) d\boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\alpha}.\end{aligned}\tag{15}$$

Para llevar a cabo la parte práctica correspondiente a este desarrollo teórico, debemos expresar las fórmulas que ya tenemos en términos de variables que sean lo más sencillas posibles. Esto significa que necesitamos emplear, hasta el mayor grado posible, aquellas fórmulas que se basan en los términos de disturbio de un modelo de espacio de estado dados por $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{R}'_t(\boldsymbol{\alpha}_t - \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1})$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\theta}_t$ para $t = 1, \dots, n$. Por medio de la sustitución repetida para $\boldsymbol{\alpha}_t$ obtenemos en primer a $\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha})$ como una función $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\eta})$ de $\boldsymbol{\eta}$. Después se puede ver que en lugar de la expresión (15) tendremos la media posterior de $\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\eta})$

$$\bar{\mathbf{x}} = \int \mathbf{x}^*(\boldsymbol{\eta}) p(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y}) p(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\psi}, \mathbf{y}) d\boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{\eta}.\tag{16}$$

Por medio de una serie de reducciones obtenemos la siguiente expresión

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{E_g[\mathbf{x}^*(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{z}^*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})]}{E_g[\mathbf{z}^*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{y})]}\tag{17}$$

donde

$$\mathbf{z}^*(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}, y) = \frac{p(\boldsymbol{\psi})g(\mathbf{y}|\boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})} \frac{p(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}|\boldsymbol{\psi})}{g(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{y}|\boldsymbol{\psi})}, \quad (18)$$

donde E_g denota la esperanza respecto a la densidad de importancia $g(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})$, $g(\boldsymbol{\psi}|\mathbf{y})$ esta dada por una aproximación normal para el caso de muestras grandes y además $g(\mathbf{y}|\boldsymbol{\psi})$ es la verosimilitud para un modelo lineal Gaussiano de aproximación que se calcula mediante la utilización del filtro de Kalman.

Al igual que en el caso clásico, la gran mayoría de los problemas que consideraremos se centrarán esencialmente en la estimación de esta media. A partir de ella podremos calcular todos los estadísticos de interés que sean necesarios para nuestro análisis.

6. Ilustración de algunos de los métodos presentados

En nuestro ejemplo empírico consideramos la serie de cantidades de dólares estadounidenses por cada libra esterlina británica, a la que denominamos tasa de cambio libra/dólar, que está constituida por los registros diarios de esas cotizaciones desde el 1 de Octubre de 1981 hasta el 28 de Junio de 1985 inclusive. Solamente se toman los datos de aquellos días que son laborables en el sistema cambiario británico, por lo tanto el total de observaciones es igual a 946. Si denotamos a la tasa de cambio diaria libra/dólar como x_t , las observaciones que consideraremos para nuestro estudio serán los retornos definidos como $y_t = \log x_t - \log x_{t-1}$ con $t = 2, \dots, n$ siendo $n = 946$.

Un modelo de volatilidad estocástica con media cero de la forma

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma \exp\left(\frac{1}{2}\theta_t\right)\varepsilon_t, & \varepsilon_t &\sim N(0,1) \\ \theta_t &= \phi\theta_{t-1} + \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, \sigma_\eta^2), & 0 < \phi < 1, \end{aligned} \quad (19)$$

para $t = 2, \dots, n$ es el que vamos a usar para poder analizar este tipo de datos. Dicho modelo fue formulado por primera vez por Harvey, Ruiz y Shephard (1994). El nivel de θ_t determinará la cantidad de volatilidad y el valor de ϕ nos dará la autocorrelación presente en el proceso de volatilidad.

6.1. Estimación a través del muestreo de importancia

Para ilustrar la estimación por máxima verosimilitud de los parámetros en el modelo SV usando muestreo de importancia, consideremos el logaritmo de la densidad Gaussiana del modelo definido en (19) que está dado por

$$\log p(y_t|\theta_t) = -\frac{1}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2}\theta_t - \frac{y_t^2}{2\sigma^2} \exp(-\theta_t). \quad (20)$$

El modelo de aproximación lineal, necesario para el proceso de estimación, puede ser obtenido mediante la linealización de las dos primeras derivadas (método que será objeto de otra investigación) del logaritmo de la densidad observacional con

$$\tilde{H}_t = 2\sigma^2 \frac{\exp(\tilde{\theta}_t)}{y_t^2} \quad \tilde{y}_t = \tilde{\theta}_t - \frac{1}{2}\tilde{H}_t + 1$$

para lo cual \tilde{H}_t es siempre positiva. El proceso iterativo puede comenzar igualando $\tilde{H}_t = 2$ e $\tilde{y}_t = \log(y_t^2/\sigma^2)$ para $t=1, \dots, n$ ya que de la fórmula (19) se tendrá que $(y_t^2/\sigma^2) \approx \exp(\theta_t)$. Cuando y_t es igual a cero o es muy cercano a ese valor, debe ser reemplazado por un valor constante pequeño para evitar problemas numéricos; esto solo es necesario para obtener el modelo de aproximación por lo tanto no se aleja del tratamiento exacto. El número de iteraciones requeridas es usualmente menor a diez.

Por lo general el primer interés está centrado en la estimación de los parámetros. Para el método de muestreo de importancia, tomamos $N=100$ replicaciones para computar el logaritmo de la función de verosimilitud. Durante el proceso de estimación se toman los mismos números aleatorios para cada evaluación del logaritmo de la verosimilitud de modo que ese logaritmo sea una función suave de los parámetros. Entonces, luego de la optimización numérica, obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\hat{\sigma} = 0,6368 \quad \hat{\psi}_1 = \log \hat{\sigma} = -0,4561 \quad EE(\hat{\psi}_1) = 0,1033$$

$$\hat{\sigma}_\eta = 0,1726 \quad \hat{\psi}_2 = \log \hat{\sigma}_\eta = -1,7569 \quad EE(\hat{\psi}_2) = 0,2170$$

$$\hat{\phi} = 0,9731 \quad \hat{\psi}_3 = \log \frac{\hat{\phi}}{1-\hat{\phi}} = 3,5876 \quad EE(\hat{\psi}_3) = 0,5007$$

donde EE denota el error del estimador por máxima verosimilitud.

Nuestro segundo interés a la hora de analizar un conjunto de datos como éste suele estar por lo general en estimar la volatilidad subyacente, definida por θ_t . Vamos a cumplir con este cometido por medio de la aplicación del muestreo de importancia. Como la volatilidad se refiere a la varianza del error observacional de los retornos, y como la varianza es una medida cuadrática siempre no negativa, entonces, no va a ser de importancia el signo de los retornos. Por lo tanto, existe la posibilidad de tomar $|\log x_t - \log x_{t-1}|$ donde x_t denota la cotización diaria de la libra esterlina en términos del dólar estadounidense.

En la **Figura 1** se presentan los datos de los valores absolutos de las primeras diferencias del logaritmo de la cotización diaria de la libra esterlina en términos de dólar estadounidense junto con la estimación de los componentes nivel más volatilidad, también conocidos como nivel más señal, es decir, $\kappa + \theta_t$. Observamos que las estimaciones capturan precisamente las características salientes de la volatilidad en la serie de tiempo bajo estudio. En la **Figura 2** se presenta la estimación de la volatilidad θ_t de la serie.

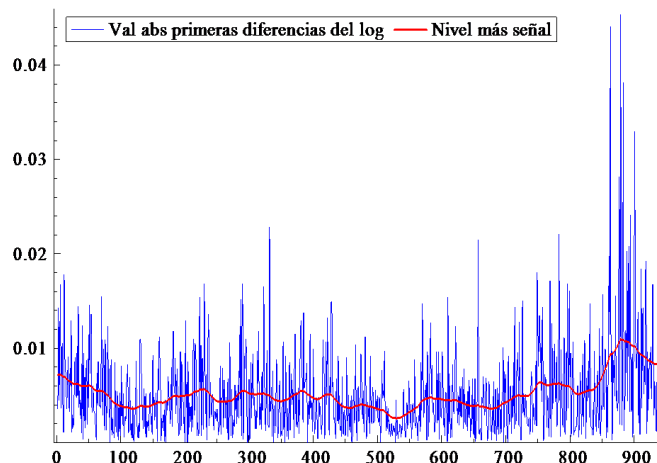


Figura 1: Valores absolutos de los retornos de la tasa de cambio diaria libra/dólar en Gran Bretaña para el período comprendido entre el 1 de Octubre de 1981 y el 28 de Junio de 1985 junto con la estimación suavizada del nivel más la señal.

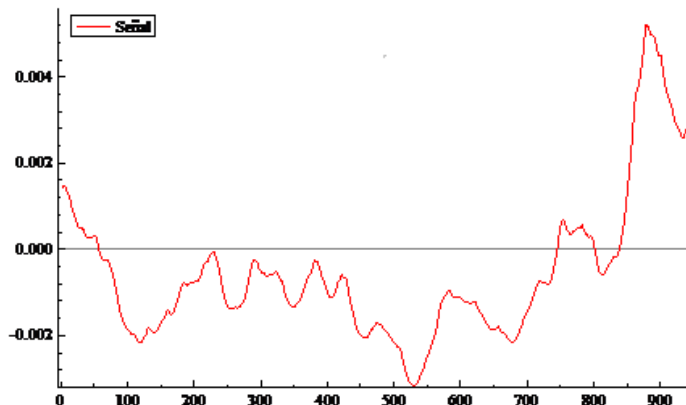


Figura 2: Estimación suavizada de la volatilidad para la serie de valores absolutos de los retornos de la tasa de cambio diaria libra/dólar en Gran Bretaña para el período comprendido entre 1 de Octubre de 1981 y el 28 de Junio de 1985.

7. Paquetes de computación para los métodos de espacio de estado

El uso tanto de los métodos de espacio de estado como de otros que utilizan formulaciones basadas en este enfoque y que hemos presentado en este resumen se mejora dentro de los trabajos empíricos con la implementación de paquetes específicos de computación en econometría y series de tiempo. El programa **STAMP (Structural Time Series Analyser, Modeler and Predictor)**, apareció por primera vez en 1982 y fue desarrollado por Simon Peters y Andrew Harvey en la London School of Economics. Ha sido ampliamente reconocido como uno de los primeros paquetes estadísticos basados primariamente en los métodos de espacio de estado. El programa **STAMP** incluye opciones para la estimación por máxima verosimilitud, control de diagnóstico, extracción de señales, y procedimientos de predicción aplicados a modelos estructurales de series de tiempo. **STAMP** puso estas funciones en un menú de sistema razonablemente amigable. Las versiones recientes incluyen facilidades extendidas para el análisis de modelos univariados y multivariados, detección automática de cambios estructurales y outliers, y predicción. La versión actual fue desarrollada por Koopman, Harvey, Doornik y Shephard (2010) y la información más reciente puede ser obtenida en la siguiente dirección electrónica <http://stamp-software.com/>

Muchos programas de computación conocidos de estadística y econometría tienen opciones para el uso de los métodos de espacio de estado. Una visión completa de los paquetes de computación disponibles con opciones para el uso de estos métodos se encuentra en un número especial del *Journal of Statistical Software* que fuera editado por Commandeur, Koopman y Ooms (2011). Allí se muestra que muchas herramientas para los modelos de espacio de estado están disponibles en los softwares para el análisis de series de tiempo. Un ejemplo de un paquete de computación para el análisis de modelos de espacio de estado es el **SsfPack** de Koopman, Shephard y Doornik (1999, 2008).

SsfPack es un conjunto de rutinas en lenguaje C diseñado para realizar cálculos que involucren el análisis estadístico de modelos univariados y multivariados puestos en la forma de espacio de estado. El paquete permite el tratamiento de diferentes formas de espacio de estado, desde un modelo simple invariante en el tiempo hasta modelos mucho más complicados y estadísticamente refinados que varían en el tiempo. Contiene funciones que ponen modelos estándares tales como los **ARIMA** y modelos de tipo **spline** en la forma de espacio de estado. Tiene rutinas disponibles para el filtrado, suavizado y además el suavizado de las simulaciones. Son también provistas funciones listas para ser usadas para la realización de tareas estándares como el cálculo de la verosimilitud, la predicción y la extracción de señales. La documentación sobre esas rutinas puede verse en Koopman, Shephard and Doornik (1999). Una documentación más detallada de la versión actualizada, que es la 3.0, está en Koopman, Shephard and Doornik (2008). **SsfPack** puede ser usada para implementar, ajustar y analizar modelos de espacio de estado lineales, Gaussianos, no lineales y/o no Gaussianos dentro de muchas áreas del análisis de las series de tiempo.

8. Conclusiones

En este trabajo se han presentado distintos métodos para el tratamiento de las series de tiempo relacionadas principalmente con la actividad financiera y se ha intentado mostrar la evolución de los mismos de una manera muy resumida. Particularmente, se ha cubierto un amplio rango del análisis de irregularidades en los datos y se ha mostrado que alguno de los problemas

estadísticos asociados a su estudio pueden ser tratados mediante el uso del enfoque de espacio de estado o de modelos que utilicen este enfoque.

Los desarrollos iniciales de la metodología de espacio de estado tuvieron lugar en el campo de la ingeniería y no en la estadística y comenzaron con el importante trabajo de Kalman (1960). Kalman mostró dos hechos cruciales. En primer lugar, estableció que una clase muy amplia de problemas puede ser formulado a través de modelo lineal simple. En segundo lugar, mostró que debido a la naturaleza Markoviana de estos tipos de modelos y de otros asociados a ellos, los cálculos necesarios para la aplicación práctica pueden ser desarrollados de una manera recursiva muy conveniente a la hora de realizar la computación.

La ventaja clave de este enfoque, asociado en especial a las últimas formulaciones que hemos presentado, es que está basado en el análisis estructural del problema. Los diferentes componentes que hacen a cualquier serie de tiempo, tales como tendencia, estacionalidad, ciclo y variaciones calendarias, junto con los efectos de variables explicativas e intervenciones, son modelados de forma separada antes de ser integrados a un modelo general. Es de la responsabilidad del investigador identificar y modelar cualquier rasgo que requiera especial tratamiento en situaciones particulares. En contraste, el enfoque clásico trabajado por Box y Jenkins y ampliamente utilizado en la mayoría de los análisis es una "*caja negra*" en la cual el modelo adoptado depende puramente de los datos sin ningún análisis previo de la estructura del sistema que generó los mismos.

Una segunda ventaja es la inmediata posibilidad de incorporar dentro de la estructura del sistema los cambios conocidos que suceden en el tiempo.

Estos modelos cubren una amplia gama de formulaciones, entre las cuales se encuentran algunas de la que hemos presentado en este breve resumen y también incluyen los modelos del tipo de los establecidos por Box y Jenkins.

Es muy fácil incorporar ciclos y observaciones perdidas. Además, las variables explicativas pueden ser agregadas a ellos sin ninguna dificultad. Más aún, los coeficientes de regresión asociados pueden variar estocásticamente en el tiempo si ello fuera necesario en las aplicaciones empíricas. Ajustes por días laborables y otras variaciones calendarias pueden fácilmente ser incorporadas a la formulación de los modelos asociados a este enfoque.

Si estas son las ventajas del modelado asociado al enfoque de espacio de estado, uno se pregunta cuáles son sus desventajas relativas a enfoques más clásicos que llevan más tiempo de utilización a la hora de realizar investigaciones empíricas. La principal desventaja es la falta de información, conocimiento y de programas de computación relativos a estos modelos dentro de la comunidad estadística.

La conclusión general que podemos extraer de esta presentación es que la metodología asociada a los modelos que hemos introducido en especial en el final de la misma provee un esquema unificado y práctico de suma utilidad para el tratamiento de las series de tiempo irregulares, que son las que más trataremos a la hora de analizar fenómenos referidos a la actividad financiera.

9. Referencias

BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-27.

BOLLERSLEV, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative process and rates of return. *Review of Economics and Statistics*, 69, 542—547.

BOLLERSLEV, T. (1988). On the correlation structure for the generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Time Series Analysis*, 9, 121—132.

COMMANDEUR, J., KOOPMAN, S. J. y OOMS, M. (2011). Statistical software for state space methods. *Journal of Statistical Software*, 41, Issue 1.

DURBIN, J. y KOOPMAN, S. J. (1997a). Monte Carlo maximum likelihood estimation for non-Gaussian state space models. *Biometrika*, 84, 669-84.

DURBIN, J. y KOOPMAN, S. J. (1997b). *Time Series Analysis of non-Gaussian observations based on state space models*. Preprint. London School of Economics.

DURBIN, J. y KOOPMAN, S. J. (2000). Time Series Analysis of non-Gaussian observations based on state space models from both classical and Bayesian perspectives. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 62, 3-57.

ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.

KALMAN, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 82D, 35-45.

KOOPMAN, S. J., HARVEY, A. C., DOORNIK, J. A. y SHEPHARD, N. (2010). *STAMP 8.3: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. Timberlake: London.

KOOPMAN, S. J., SHEPHARD, N. y DOORNIK, J. A. (1999). Statistical algorithms for models in state space form using SsfPack 2.2. *Econometrics Journal*, 2, 113-66. <http://www.ssfpack.com/>

KOOPMAN, S. J., SHEPHARD, N. y DOORNIK, J. A. (2008). *Statistical Algorithms for Models in State Space Form: SsfPack 3.0*. Timberlake: London.

10. Bibliografía general

ABRIL, JUAN CARLOS (1997). *Series de tiempo irregulares: un enfoque unificado*. Conferencia invitada pronunciada durante el XXV Coloquio Argentino de Estadística. Sociedad Argentina de Estadística. Noviembre de 1997.

ABRIL, JUAN CARLOS (1999). *Análisis de Series de Tiempo Basado en Modelos de Espacio de Estado*. EUDEBA: Buenos Aires.

ABRIL, JUAN CARLOS (2004). *Modelos para el Análisis de las Series de Tiempo*. Ediciones Cooperativas: Buenos Aires.

ABRIL, MARÍA DE LAS MERCEDES (2014). *El Enfoque de Espacio de Estado de las Series de Tiempo para el Estudio de los Problemas de Volatilidad*. Tesis Doctoral en Estadística. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

BLACK, F. Y SCHOLES, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 635-654.

BOLLERSLEV, T., CHOU, R. Y. y KRONER, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, 5—59.

BOLLERSLEV, T., ENGLE, R. F. y NELSON, D. B. (1994). Arch Models. En *Handbook of Econometrics*, Vol. IV (eds. R. F. Engle and D. L. McFadden), 2959—3038. North. Holland: New York.

BOX, G. E. P. Y JENKINS, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, Inc: San Francisco.

BOX, G. E. P. y JENKINS, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (Revised ed.). Holden-Day, Inc: San Francisco.

BRITTEN-JONES, M. y NEUBERGER, A. (2000). Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility. *Journal of Finance*, 55. 839-866.

DURBIN, J. y KOOPMAN, S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods* (2nd Edition). Oxford University Press: Oxford.

ENGLE, R. F. y BOLLERSLEV, T. (1986). Modelling persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 1, 1-50.

ENGLE, R.F. y PATTON, A. J. (2001). What good is a volatility model. *Quantitative Finance*, 1, 237 - 45.

HARVEY, A. C., RUIZ, E. y SHEPHARD, N. (1994). Multivariate stochastic variance models. *Rev. Econom. Stud.*, 61, 247-64.

HARVEY, A. C. y SHEPHARD, N. (1993). Structural time series models, en *Handbook of Statistics, Vol. 11: Econometrics* (G. S. Maddala, C. R. Rao y H. D. Vinod, Eds.), 261-302.

KOOPMAN, S. J., HARVEY, A. C., DOORNIK, J. A. y SHEPHARD, N. (1995). *STAMP 5.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. Chapman and Hall: London.

KOOPMAN, S. J., HARVEY, A. C., DOORNIK, J. A. y SHEPHARD, N. (2000). *STAMP 6.0: Structural Time Series Analyser, Modeller and Predictor*. Timberlake Consultants: London.

LU XINHONG. (2007) *Analysis of Financial Time Series by Econometric Models*. Doctoral Thesis in Economics. Hiroshima University, Hiroshima, Japan.

MORETIN, P. A. (2008). *Econometria Financeira. Um Curso em Séries Temporais Financeiras*. Universidade de São Paulo: São Paulo.

TAYLOR, S. J. (1980). Conjectured models for trend in financial prices tests as forecasts. *J. of The Royal Statistical Society, B*, 42, 338—62.

TAYLOR, S. J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. John Wiley: Chichester.

TAYLOR, S. J. (1994). Modelling stochastic volatility. *Mathematical Finance*, 4, 183- 204.