La demostración de la existencia del límite de funciones: Análisis de su estudio en la Universidad

Ana Rosa Corica[1] y María Rita Otero[2]

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. [1]acorica@exa.unicen.edu.ar, [2]rotero@exa.unicen.edu.ar.

Resumen: En este trabajo presentamos resultados parciales de un estudio realizado en un curso universitario de matemática. Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico se analizó cómo se gestiona el estudio de tareas relativas a demostrar la existencia del límite de funciones de variable real. Dicha tarea cobra un lugar vital en la organización que se termina por estudiar, pues permite entrar en el estudio de otras organizaciones matemáticas que se proponen en el curso. Los principales resultados indican que hay una pérdida de sentido del estudio de la tarea. Las técnicas empleadas por los profesores contribuyen a la reducción del cálculo al álgebra. Si bien, el cálculo se apoya en nociones de álgebra, se trata de un campo donde se necesita una ruptura con ciertas prácticas algebraicas para acceder a él.

Palabras clave: límite de funciones, enseñanza de las matemáticas, enseñanza universitaria, teoría antropológica de lo didáctico.

Title: The demonstration of the functions limit existence: Analysis of its study at the University.

Abstract: In this work we show partial results of a study carried out in a mathematics university course. We analyzed from the Anthropologic Theory of the Didactic how the study of relative tasks is managed to demonstrate the existence of the functions limit of real variable. The task mentioned above is of vital importance in the organization which is finally studied, since it allows to get in the study of other mathematical organizations that are proposed in the course. The main results indicate that there is a loss of sense in the study of the task. The techniques used by the teachers would contribute to the reduction of the calculus to the algebra. Although~~,~~ the calculus rests on notions of algebra, it is about a field in which there is a need of giving up certain algebraic practices to reach the former.

Keywords: functions limit, mathematics education, higher education teaching, anthropologic theory of the didactic.

1. Introducción

Esta investigación se sitúa en la problemática de la enseñanza del cálculo en el nivel universitario. El estudio del cálculo es uno de los ámbitos en el que se ha detectado mayores dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Cada vez son más las investigaciones que centran su interés sobre el papel de la didáctica en la enseñanza de la matemática universitaria. Los investigadores han intentado mejorar la comprensión sobre las dificultades de los estudiantes y las disfunciones del sistema educativo, como también vías para superar estos problemas. Algunos estudios se ocuparon de caracterizar las dificultades y obstáculos en el aprendizaje de nociones de cálculo, acompañados por aspectos de naturaleza epistemológica, cognitiva y didáctica (Aparicio y Cantoral, 2006; Artigue, 1995; Barbosa y Mattedi, 2010; Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Godino, Contreras y Font, 2006; Sierra, González y López, 2000; Tall, 1991). Por otro lado, también se documentó que ciertos problemas derivan del tipo de estudio que se confiere a las nociones de función, límite, continuidad, diferenciación e integración (Azcárate y Deulofeu, 2000; Aparicio y Cantoral, 2003; Hitt, 1994; Tall y Vinner 1981). Así mismo, en otros trabajos se analizaron las razones que subyacen a tales dificultades y se procuró proporcionar soluciones efectivas, a través de propuestas didácticas que se sustentan en diversos marcos teóricos (Barbosa y Mattedi, 2010; Blázquez y Ortega, 2002; Espinoza y Azcárate, 2000; Fonseca, 2011a; 2011b; García y Navarro, 2010; Mamona-Downs, 2001; Rodriguez, Pochulu y Ceccarini, 2011; Tall 1986; Tall, Blokland y Kok, 1990).

En este trabajo, presentamos resultados de un estudio desarrollado en un curso de cálculo en una facultad de ciencias exactas, y adoptamos como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Dicho referencial ha resultado ser una poderosa herramienta para describir las prácticas docentes en un ámbito muy poco explorado, como es el universitario. En este trabajo, presentamos resultados de un estudio descriptivo e interpretativo de la enseñanza de la noción de límite propuesta en el curso.

En el curso bajo estudio, la responsabilidad asignada a profesores y alumnos se encuentra bien delimitada. El rol del docente es *enseñar*, en el sentido de *mostrar* a los estudiantes las praxeologías matemáticas. Aquí, las praxeologías didácticas se caracterizan por comenzar con el discurso tecnológico – teórico y luego continuar por el práctico – técnico, introducido a modo de *aplicación* de los teoremas, conceptos o propiedades enunciados. Por otro lado, los estudiantes deben aprender a *utilizar* los elementos praxeológicos que se les proporcionan hasta ser capaces de resolver por sí mismos ciertas tareas con las que se acabaran por enfrentar en el momento de la evaluación (Corica y Otero, 2009, 2011). Si pensamos la situación en términos de la dialéctica de los media y los medios (que rige toda construcción de conocimiento matemático y se caracteriza por la necesidad de disponer, para la elaboración de sucesivas respuestas provisionales a una cierta cuestión Q, de algunas respuestas preestablecidas accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los *media* (Chevallard, 2007)), en el curso bajo estudio, el papel del profesor se describe como el *media universal* que transmite a los estudiantes, mediante prácticas discursivas y ostensivas (mostrativas), aquellas respuestas praxeológicas que ellos deberán ser capaces de utilizar por sí mismos.

En este análisis de la dinámica de clase, describimos la manera en que los docentes gestionan el estudio del tipo de tareas: *Demostrar que el límite de la función $f(x)$ es l cuando x tiende a un valor real finito*. Este tipo de tareas cobra un lugar especial dentro de la organización efectivamente enseñada por dos razones: en primer lugar, consolida parte de la tecnología para efectuar la demostración de proposiciones y propiedades vinculadas al límite funcional, que se estudia durante el curso. Y en segundo lugar, se introduce a los estudiantes a la actividad de demostrar en matemática, y en todo el curso, es la única oportunidad que tienen para realizar esta tarea. Destacamos que las tareas relativas al género de tareas demostrar, siempre quedan a cargo de los profesores de las clases teóricas, donde es anulado el topos del alumno, pues su responsabilidad se reduce a reproducir lo que el profesor hace (Corica, 2010; Corica y Otero, 2009).

2. Marco teórico

En este trabajo adoptamos como referencial teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) porque resulta ser una poderosa herramienta para describir la actividad docente. En principio, tomamos el constructo teórico fundamental de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), que es la noción de *praxeología*, como base para el desarrollo de toda la investigación.

Las praxeologías u organización matemática (OM), surgen como respuestas a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan *cuestiones generatrices*. Las praxeologías constan de dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto *tipo de tareas* y cuestiones que se estudian, así como las *técnicas* para resolverlos.
- El nivel del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, en la TAD reciben el nombre de *tecnología*. Dentro del *saber* se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel *tecnología de la tecnología*) que se denomina *teoría*.

Si bien, los cuatro elementos citados son imprescindibles para construir cualquier praxeología, Chevallard (1999) también propone la noción *género de tareas*, con la que se refiere a un contenido que se encuentra especificado. La noción *tipo de tarea* supone un objeto relativamente preciso. Por ejemplo, *calcular el valor límite de una función en un punto* es un tipo de tarea, pero *calcular* es lo que se denomina un *género* de tareas (se caracteriza por solicitar un determinativo).

Junto a las tareas de concepción y organización de mecanismos de estudio, así como la gestión del medio ambiente (*Organizaciones Matemáticas*), se distinguen las tareas de ayuda al estudio, particularmente la dirección de estudio y enseñanza, cuyo cumplimiento es debido a la puesta en ejecución de técnicas didácticas determinadas (*Organizaciones Didácticas*). La consideración de los diversos procesos que conciernen a la construcción matemática permite identificar sus aspectos invariantes, es decir, las dimensiones o momentos que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis *momentos didácticos*: El momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; El momento exploratorio del tipo de tareas; El momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico, que explica y justifica las técnicas puestas en funcionamiento y permite la elaboración de nuevas técnicas; El momento de trabajo de la técnica, que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas; El momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida; El momento de la evaluación de la praxeología construida.

La TAD, desde sus comienzos con la transposición didáctica (Chevallard, 1991), fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio e investigación, no solo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino de todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en las instituciones de enseñanza como saber enseñado. Para explicar los procesos de enseñanza es necesario considerar todas las etapas de la transposición didáctica. En particular, en este trabajo nos detendremos a describir parte de la *OM efectivamente enseñada* del curso de cálculo bajo estudio. La misma es una interpretación teórica (en términos de praxeologías) de la actividad matemática desarrollada en una institución concreta, que tiene lugar en un periodo histórico determinado y que es protagonizada por una comunidad de estudio particular.

Así mismo, la *OM efectivamente enseñada* no puede ser adecuadamente *interpretada* si no se comprende también la OM a *enseñar*. Esta constituye un modelo praxeológico de la matemática que se reconstruye a partir del programa y el material que emplean los profesores del curso. A su vez, para poder comprender los hechos didácticos y matemáticos se requiere de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) (Bosch y Gascón, 2005; Gascón, 2011). Para describir la OM *efectivamente enseñada*, es necesario partir de determinadas *OM sabias* que legitiman epistemológicamente el proceso de enseñanza. El MER es elaborado por el investigador para realizar su análisis y no necesariamente coincide con la *OM sabia* de la que proviene, aunque se formula en términos próximos a ésta y a la *OM a enseñar*. El MER tiene un carácter provisional, pues la Teoría de la Transposición Didáctica indica que no existe un sistema de referencia privilegiado desde el que se observe, analice y juzgue los saberes, pero se trata de una hipótesis de trabajo que debe ser constantemente contrastada y revisada (Gascón, 2011). En nuestro trabajo, en primera instancia presentamos aspectos esenciales del MER que hemos definido y la OM a *enseñar,* y luego presentamos el análisis de algunos aspectos de la *OM efectivamente enseñada* del curso bajo estudio.

3. Metodología

En esta investigación se propone un estudio de corte descriptivo e interpretativo sobre un curso de cálculo, que se imparte en una facultad de ciencias exactas de una universidad argentina. El curso, que se compone de 283 estudiantes —cuyas edades oscilan entre los 18 y 20 años— corresponde al primer año de las carreras de Ingeniería en Sistemas, las licenciaturas en Matemática, en Física o en Tecnología Ambiental, así como los profesorados en Matemática, en Física o en Informática.

3.1. Descripción de la organización institucional

El curso dura cuatro meses, y se compone de clases teóricas (CT) y prácticas (CP), que se imparten dos veces por semana. Cada CT comprende 90 minutos, mientras que cada CP 120 minutos. Asimismo, se ofrece semanalmente una clase de consulta, que dura 120 minutos, donde los estudiantes tienen la oportunidad de hacer consultas en forma personalizada.

El curso está a cargo de un profesor (P_1), quien se ocupa exclusivamente de organizar y dirigir las CT, un coordinador (P_2), quien organiza las CP y dirige en ciertas ocasiones las CT, y de profesores que dirigen las CP. Las CT se ofrecen a todos los estudiantes en un aula tipo anfiteatro, mientras que las CP son desarrolladas en cuatro aulas. Estas clases las imparten el profesor responsable, cuya principal actividad es dirigir la sesión para las tareas propuestas, decidir las técnicas a emplear y las instancias de clase en que se abordan; y dos profesores ayudantes, que cumplen el rol de asistir a las consultas de los alumnos en forma personalizada.

La actividad en las CT se caracteriza en que el profesor muestre la resolución de las tareas, con muy baja participación de los estudiantes. En las CP el profesor también presenta la resolución de las tareas, pero hay mayores oportunidades de diálogo con los alumnos; además, se destina aproximadamente una hora de cada CP para que los estudiantes resuelvan tareas y consulten sus dudas personales.

Durante los cuatro meses que comprende el curso se propone estudiar nueve unidades temáticas, cuyo desarrollo incluye material teórico y práctico: Estructura del conjunto de los números reales; Funciones; Sucesiones de números reales; Límite y continuidad de funciones; Derivadas; La integral definida; Cálculo de primitivas; Series numéricas; Series de funciones, series de potencias y serie de Taylor.

El diseño del material teórico, que está a cargo del P_1, consta de teoremas, definiciones y proposiciones fundamentales para el proceso de estudio sobre las OM. Por su parte, el material para las CP, que diseña el P_2, básicamente se estructura del siguiente modo: una introducción, en la que se enuncian los principales teoremas, definiciones y proposiciones para realizar los tipos de tarea, y la presentación de algunos ejercicios resueltos.

La acreditación del curso propone la aplicación de exámenes individuales y escritos. Se ofrecen dos formas para la evaluación, y los estudiantes tienen que optar por una:

Modalidad promoción: Consiste en tres exámenes individuales y escritos; en cada uno se evalúa una unidad temática o módulo, y hay dos instancias para poder volver a presentarlos en caso de no aprobarlos (a estos tipos de evaluación se les denomina de compensación). Los exámenes se integran con tareas de características similares a las estudiadas tanto en las CP como en las CT, y se aprueban con 4 puntos de 10. Esta opción de evaluación permite promocionar el curso, al obtener 7 o más en cada uno de los exámenes o en los primeros exámenes de compensación.

Modalidad tradicional: Consta de un examen parcial, individual y escrito, que evalúa tareas de características similares a las desarrolladas en las CP, y también contempla dos exámenes de compensación. Los exámenes se aprueban con 4 puntos como mínimo sobre 10 puntos, ya sea en el examen parcial o en los dos de compensación. La aprobación implica solo la cursada de los módulos y requiere que los estudiantes realicen a posteriori (en un término de tres años) un examen, escrito e individual, que incluye tareas similares a las estudiadas en las CP y CT para concluir la aprobación del curso.

Los exámenes de promoción se aplican aproximadamente cada 4 ó 5 semanas, mientras que los de tradicional ocurren al finalizar todo el desarrollo del curso.

3.2. Recolección de datos

En el curso de cálculo se realizaron tres meses de observación no participante y se recabaron las versiones en audio de las clases teóricas y prácticas, las explicaciones que hicieron los profesores en el pizarrón, los apuntes de clase de los alumnos y los exámenes de los estudiantes.

La globalidad de la investigación tuvo como propósito recoger información acerca de la dinámica de la clase para el estudio de las nociones de límite y continuidad de funciones. El proceso de estudio sobre el límite funcional sucedió en dos CT y dos CP, al igual que para el estudio de la continuidad funcional. Los registros de audio de las CT se llevaron a cabo en aulas tipo anfiteatro, con un sistema que llevaba el profesor. También se registró toda la escritura del profesor en el pizarrón, lo que dio mayor claridad en el momento de reconstruir la OM.

En las CP, el sistema de audio fue llevado por un profesor ayudante, con el que se registraron la actividad del profesor responsable y también algunas consultas de los estudiantes al profesor ayudante. Tal procedimiento en las CP se llevó a cabo en dos de los cuatro cursos que se desarrollaban por cada encuentro semanal. Los datos que se utilizan aquí, corresponden a los cursos donde los profesores ayudantes llevaban el sistema de audio.

3.3. Instrumento de análisis

El análisis sobre las clases del curso requirió que fueran transcriptos los audios de la totalidad de aquellas relativas al estudio del límite funcional. Luego, a los registros de cada clase se las segmentó en episodios para distinguirlos cuando el discurso giraba en torno a una determinada tarea. Con el objeto de organizar y estudiar los datos obtenidos en cada clase, se elaboraron dos tablas:

Episodio	Género de tarea	Tarea	Técnicas	Bloque tecnológico

Tabla I

Episodio	Noción	Género de Tarea	Momento didáctico	Tipo de preguntas del profesor	Tipo de respuesta del alumno

Tabla II

La tabla I nos permitió efectuar un análisis profundo acerca del proceso de estudio. En esta tabla se colocaron los géneros de tareas junto a las tareas que los integraban. Asimismo, en la tabla se recogió el conjunto de acciones que se llevaron a cabo en el aula para resolver una cierta tarea (técnicas), y los elementos tecnológicos que aparecieron en la clase de forma explícita (bloque tecnológico).

La tabla II ofrece información para que el observador se sitúe en el proceso de estudio y lea su desarrollo de manera compacta. Constituyó un material que nos permitió hacer un análisis global sobre el proceso de estudio. En la tabla se distinguió el momento predominante del estudio en cada episodio, así como los momentos secundarios. Además, registró el tipo de preguntas que formulaba el profesor y el tipo de respuesta que se obtenía de los estudiantes.

3.4. Metodología para el análisis de los exámenes

Si bien hemos analizado todos los exámenes, en este trabajo solo consideramos aquellos que constaban de tareas vinculadas exclusivamente al tipo: *Demostrar que el límite de la función f*(*x*) *es l cuando x tiende a un valor real finito*. Dichos exámenes fueron: el primer parcial por módulo, el primer examen de compensación por módulo y el primer examen de compensación por parcial. Esto condujo a la recolección de N = 337 exámenes.

De cada examen, para cada tarea se analizó las técnicas empleadas por los estudiantes y el entorno tecnológico explícito propuesto para su justificación.

4. Análisis de resultados

4.1. El Modelo Epistemológico de Referencia

Como indicamos en un principio, el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) es empleado para analizar los hechos didáctico – matemáticos y tiene siempre un carácter provisional. El modelo elaborado en esta investigación es la mejor aproximación posible a las condiciones que imperan en la institución, asumiendo una organización didáctica donde no se separa el bloque práctico - técnico del tecnológico – teórico. Y el MER se diseñó considerando que el curso bajo estudio es desarrollado en cuatro meses, y solo el 10% de las Clases Prácticas (CP) y de las Clases Teóricas (CT) son destinadas al estudio del límite funcional; así como también el mismo período de tiempo es destinado al estudio de la continuidad funcional.

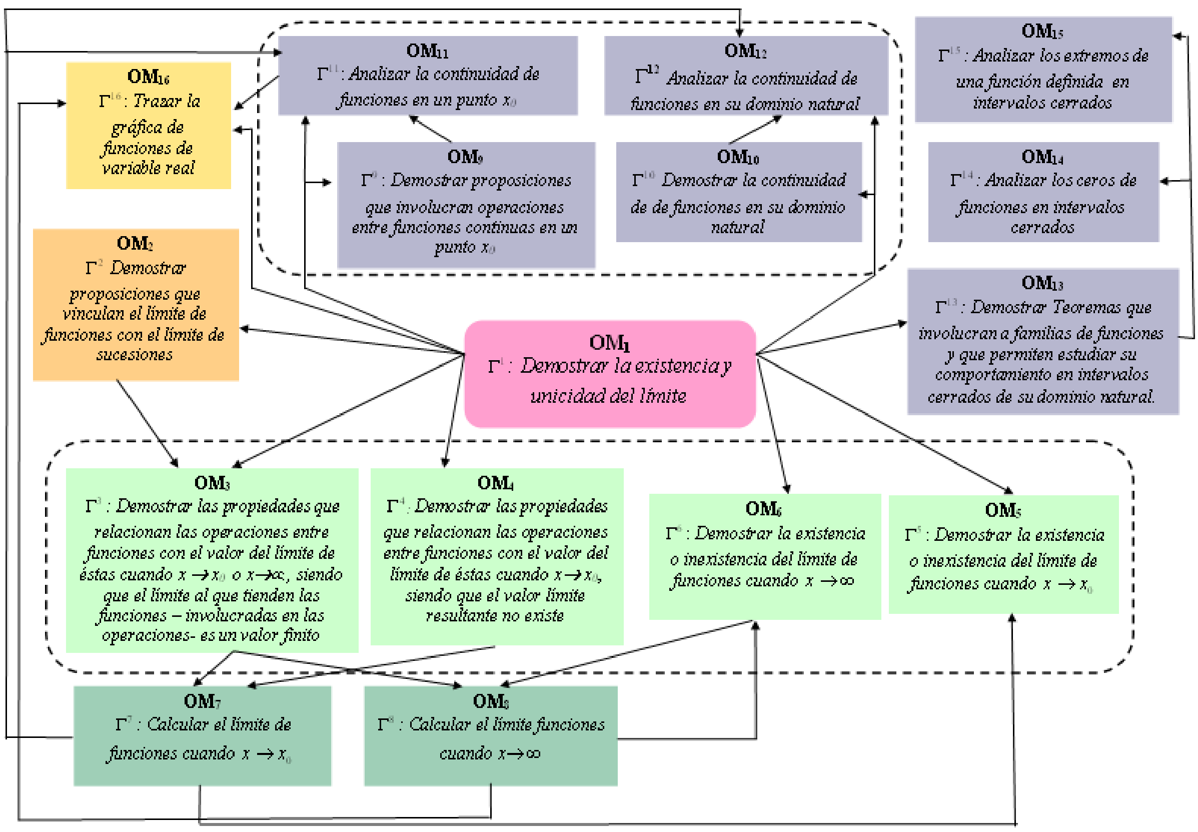
Para la descripción del MER comenzamos por indicar una cuestión generatriz inicial Q_0 que se formula mediante dos preguntas complementarias:

$Q_0^{'}$: *¿Cómo estudiar la existencia del límite de funciones?,* $Q_0^{''}$: *¿Para qué estudiar la existencia del límite de funciones?*

La pregunta $Q_0^{'}$ podría ser interpretada como una simple demanda de información, donde la respuesta podría ser del estilo: *Si o no, según sea el resultado al calcular el límite de la función: si el resultado es un número real se establece que existe el límite, en caso contrario, se establecerá que no existe el límite.* Esta respuesta podría ser natural situándonos en el grupo de estudiantes que componen al curso. Pues, numerosas investigaciones han identificado los mismos errores y dificultades en estudiantes de cursos de cálculo, en diversos entornos sociales y con diferentes rangos de habilidades. En particular, se destaca la presencia de procedimientos (tales como calcular límites) que operan en un nivel puramente algorítmico. Esto es producto de una enseñanza del cálculo esencialmente *algebraica*, al tratar el límite como un proceso algebraico *finito*, y en un intento escolar de reducir las técnicas específicas del análisis, en las que prima la utilización de condiciones suficientes, a maneras de hacer puramente algebraicas centradas en el uso de equivalencias sucesivas (Artigue, 1995). En nuestro caso, esto se reafirmaría como consecuencia de la formación que adquieren los estudiantes en el Curso de Nivelación. La aprobación de dicho curso es requisito para el ingreso a la facultad, y aquí se propone estudiar nociones de matemática desarrolladas durante toda la secundaria, entre las que se incluyen las nociones de límite y continuidad funcional. Destacamos que los tipos de tareas y técnicas propuestas en el curso de nivelación, acentuarían la tendencia de algebrizar el cálculo.

Consideramos que se propone a los estudiantes utilizar de forma naturalizada técnicas sin haberse cuestionado su pertinencia, ni las razones de ser. En este caso, la cuestión se convierte en problemática, y el tratar de resolverla genera una serie de tareas no rutinarias. Su resolución requerirá elaborar un conjunto de técnicas matemáticas que además deberán ser descrita, explicadas y justificadas mediante un entorno tecnológico – teórico. Esto es producto de considerar la cuestión $Q_0^{'}$ en un sentido fuerte. Este sentido se ve fortalecido por la presencia de $Q_0^{''}$, pues dar respuesta a esta cuestión implica el estudio de OMs donde encuentra sentido el estudio de $Q_0^{'}$, como por ejemplo el estudio de la continuidad funcional. Considerar una cuestión en su sentido *fuerte*, conduce a un proceso de elaboración de posibles respuestas que ponen en juego sucesivas OMs: cada una de ellas viene a corregir, completar y/o desarrollar las anteriores.

A partir de la cuestión generatriz inicial derivamos un conjunto de cuestiones generatrices que dieron origen a establecer 16 OM relacionadas y fundamentales, para el estudio de nociones básicas de cálculo vinculadas al límite y continuidad de funciones. En el Esquema 1 indicamos cada una de las OM que integran al MER y las relaciones que se establecen entre ellas:



Esquema 1. Modelo epistemológico de referencia

Los tipos de tareas constitutivos de cada OM corresponden a los géneros: *Demostrar* (OM_1, OM_2, OM_3, OM_4, OM_5, OM_6, OM_9, OM_{10} y OM_{13}), *Calcular* (OM_7,

OM_8), *Analizar funciones* (OM_{11}, OM_{12}, OM_{14} y OM_{15}) y *Representar gráficamente* (OM_{16}).

El género de tareas *Demostrar* engloba aquellas tareas que requieren de la formulación de una secuencia de enunciados organizados según determinadas reglas. El género de tareas *Calcular* hace referencia a tareas que implican llevar a cabo ciertos procedimientos, basados en reglas que son tomadas como verdaderas, para obtener un resultado que nos permita predecir algunos acontecimientos. El género de tareas *Representar gráficamente* engloba tareas que implican la realización de esquemas que posibilitan estudiar la noción matemática que está en juego. Finalmente, el género de tarea *Analizar funciones* involucra tareas que requieren del estudio del límite y continuidad de funciones. En el curso, éste género se ve enriquecido con el estudio de tareas relativas a la derivada de funciones.

La OM_1 es la pieza fundamental que permite la supervivencia de las demás OM que se definen a continuación. El tipo de tarea que conforma a OM_1 es Γ^1: *Demostrar la existencia y unicidad del límite.* La cuestión generatriz asociada es Q_1 : *¿Qué significa que exista el límite?*

La OM_2 queda representada por el tipo de tarea Γ^2: *Demostrar proposiciones que vinculan el límite de funciones con el límite de sucesiones*. La cuestión generatriz asociada es Q_2 : *¿Cómo se vincula el límite de funciones con el límite de sucesiones?* En el hacer de Γ^2, se gesta un entorno tecnológico que permite justificar algunas de las técnicas empleadas en el hacer de Γ^3.

La OM_3 y la OM_4 se originan a partir de la misma cuestión generatriz Q_3 : *¿Cómo demostrar la existencia del límite?* El tipo de tarea que conforma a OM_3 es Γ^3*: Demostrar las propiedades que relacionan las operaciones entre funciones con el valor del límite de éstas cuando $x \to x_0$ o $x \to \infty$, siendo que el límite al que tienden las funciones involucradas en las operaciones es un valor finito.* Y el tipo de tarea que conforma a OM_4 es Γ^4*: Demostrar las propiedades que relacionan las operaciones entre funciones con el valor del límite de éstas cuando $x \to x_0$, siendo que el valor límite resultante no existe.* El hacer de Γ^3 y Γ^4 consolida la tecnología que justifica el hacer de Γ^7. A su vez, en la OM_3 se consolida la tecnología que justifica el hacer de Γ^8.

La OM_7 y la OM_8 se las define a partir de la misma cuestión generatriz Q_4 : *¿Cómo calcular el límite?* El tipo de tarea que conforma a la OM_7 es Γ^7*: Calcular el límite de funciones cuando* $x \to x_0$. El tipo de tarea que constituye a la OM_8 es Γ^8*: Calcular el límite de funciones cuando $x \to \infty$*. En el hacer de Γ^7 y Γ^8 se establece la existencia del límite de funciones, pues las técnicas que se emplean encuentran justificación en las formulaciones establecidas en OM_3 y OM_4.

La OM_5 y la OM_6 tienen asociada la misma cuestión generatriz Q_3 : *¿Cómo demostrar la existencia del límite?* El tipo de tarea que conforma a OM_5 es Γ^5:

Demostrar la existencia o inexistencia del límite de funciones cuando $x \to x_0$. El tipo de tarea que constituye a OM_6 es Γ^6: *Demostrar la existencia o inexistencia del límite de funciones cuando* $x \to \infty$. En ambas OM se busca consolidar una técnica que permita establecer la existencia del límite de funciones.

En forma complementaria, se podría estudiar las tareas que componen a OM_7 u OM_8 y, luego, establecer la existencia del límite calculado, a partir de las técnicas que se desprenden del hacer de Γ^5 o Γ^6 según correspondiera. Esta actividad deja emerger ciertas redundancias, que resultarían útiles en el proceso de estudio.

Con relación al estudio de la continuidad de funciones, la supervivencia de esta organización se encuentra íntimamente ligada con la validez de las tareas constitutivas de la OM_1. La OM_9, OM_{10}, OM_{11} y OM_{12} se gestan a partir de la misma cuestión generatriz Q_5 *: ¿Cómo determinar la continuidad de funciones?* El hacer de Γ^9 y Γ^{10}, consolida la tecnología de Γ^{11} y Γ^{12} respectivamente. El tipo de tarea que conforma a la OM_9 es Γ^9: *Demostrar proposiciones que involucran operaciones entre funciones continuas en un punto x_0*. El tipo de tarea que constituye a la OM_{10} es Γ^{10}: *Demostrar la continuidad de funciones en su dominio natural*. Mientras que el tipo de tareas que define a OM_{11} y a OM_{12} son respectivamente Γ^{11}: *Analizar la continuidad de funciones en un punto x_0* y Γ^{12}: *Analizar la continuidad de funciones en su dominio natural*.

La OM_{13}, OM_{14} y OM_{15} se componen de tareas que procuran el estudio de funciones en intervalos cerrados, en combinación con el estudio de la continuidad de las mismas. El tipo de tarea que constituye a la OM_{13} es Γ^{13}: *Demostrar Teoremas que involucran a familias de funciones y que permiten estudiar su comportamiento en intervalos cerrados*, y la cuestión generatriz asociada es Q_6: *¿Cómo demostrar teoremas que permiten estudiar a funciones continuas en intervalos cerrados?* En esta OM, se consolida la tecnología que justifica las técnicas para el hacer del tipo de tareas que define a la OM_{14} y a la OM_{15}.

El tipo de tarea que constituye a la OM_{14} es Γ^{14}*: Analizar los ceros de funciones en intervalos cerrados* y la cuestión generatriz asociada es Q_7: *¿Cómo establecer la existencia de los ceros de una función?* El hacer de Γ^{14} consolida una técnica para el estudio de ceros de funciones. En algunas ocasiones, puede actuar como una técnica alternativa a las que conocen los estudiantes para este estudio, y, en otras, constituir una nueva técnica, para aquellos problemas que hasta el momento no podían dar respuesta.

El tipo de tarea que define a la OM_{15} es Γ^{15}: *Analizar los extremos de una función definida en intervalos cerrados* y la cuestión generatriz asociada es Q_8: *¿Cómo establecer si una función alcanza un máximo y/o un mínimo?* El estudio de Γ^{15} se enriquece con el estudio de la noción de derivada de funciones, no obstante, consideramos oportuno el estudio de esta tarea, pues permite el empleo en parte de la tecnología que se gesta en Γ^{13} y una aproximación al tipo de estudio que se podrá realizar con nociones de derivada de funciones.

Finalmente, la OM_{16} se define a partir del tipo de tarea Γ^{16}: *Trazar la gráfica de funciones de variable real* y la cuestión generatriz asociada es Q_9: *¿Cómo representar gráficamente a funciones de variable real?* Aquí, la propuesta es integrar nociones que emergen de la definición de límite y continuidad de funciones. También, en forma complementaria se puede estudiar Γ^{16} con tareas que se estudian en OM_7 y OM_8, haciendo evidente la integración entre las OM.

Con fundamento en el MER, se analizó la OM a enseñar y la OM efectivamente enseñada. Resultados parciales de dicho estudio se presentan a continuación.

4.2. Organización Matemática a enseñar

Con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en un principio analizamos el programa analítico del curso y el material editado por los profesores, en contraste con el Modelo Epistemológico de Referencia (MER).

En Corica y Otero (2012) reportamos un estudio sobre los tipos de tareas que se identifican en el material editado por los profesores del curso. Esto permitió reconocer 7 (siete) OM Puntuales (OMP), en relación a las 16 OM que definimos en el MER. Las OMP están generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de tareas. Esta noción es relativa a la institución considerada y está definida, en principio, a partir del bloque práctico-técnico (Chevallard, 1999).El conjunto de tareas que se proponen estudiar en el material, pertenecen a OMP desarticuladas, que nacen y mueren en el nivel de los temas. Destacamos que solo existe una débil conexión entre algunas de ellas, aunque en ningún caso se observó la formulación de tareas que conduzcan a la elaboración y validación de elementos tecnológicos.

Aquí nos detendremos en profundizar aspectos relacionados con el estudio del tipo de tareas: *Demostrar que el límite de la función f*(x) *es l cuando x tiende a un valor real finito*.

En el material destinado para el estudio en las clases prácticas se proponen las siguientes tareas prototípicas:

Ejemplo 1

Probar por definición que el $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Buscamos primero un δ tal que: $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| = |x^2 - 4| < \varepsilon$

Sea $|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\ |x+2|$, como por hipótesis tenemos que $0 < |x-2| < \delta$,

entonces debemos acotar el valor $|x+2|$, elegimos un $\delta = 1$, luego

$$\left.\begin{array}{c} -1 < x-2 < 1 \\ -1+2 < x < 1+2 \\ 1 < x < 3 \\ 1+2 < x+2 < 3+2 \end{array}\right\} \Rightarrow |x+2| < 5$$

reemplazando, $|x-2|\,|x+2| < 5\,\delta < \varepsilon \quad \Rightarrow \delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. Pero como ya habíamos supuesto un valor para δ , tenemos $\delta =$ mín $\{1, \varepsilon/5\}$

Reconstruimos ahora la demostración formal.
Sea $\varepsilon > 0$, si el mínimo es $\delta = \varepsilon/5$, $\Rightarrow \varepsilon/5 < 1$ entonces, $0 < |x-2| < \delta$ implica que

$$\left|x^2 - 4\right| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\ |x+2| < 5\ \delta < 5\ \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Si el mínimo es $\delta = 1$, $\Rightarrow 1 < \varepsilon/5$, luego

$$\left|x^2 - 4\right| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\ |x+2| < 5\ \ \delta < 5\ .\ 1\ < 5\ .\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Con lo que queda demostrado el límite efectivamente es 4.

Ejemplo 2

Probar por definición que si c>0 y x> 0 entonces $\lim\limits_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

Buscamos primero un δ tal que: $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| < \varepsilon$

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}$$

como por hipótesis tenemos que $0 < |x-c| < \delta$, entonces $\frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} \Rightarrow \delta = \varepsilon \sqrt{c}$

Así, formalmente, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon \sqrt{c}$, entonces $0 < |x-c| < \delta$ implica que

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{c}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{|x-c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \le \frac{|x-c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \frac{\varepsilon\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

Con lo que queda demostrado el límite efectivamente es $\sqrt{c}$.

De los ejemplos ofrecidos, destacamos que se propone una demostración de la existencia del límite funcional, en la que se concluye explícitamente lo que se demuestra. Se presentan técnicas para dos casos ejemplares. En uno de ellos es necesario realizar hipótesis acerca de δ, y se lo hace considerando $\delta = 1$, sin indicar cuál es la razón de tal selección, o si sería posible el estudio empleando otro valor de δ. En el segundo caso, la atención se concentra en cómo realizar operaciones algebraicas para poder emplear la hipótesis sobre δ.

A continuación indicamos las tareas que se proponen estudiar relativas al tipo de tareas que nos interesa en este trabajo.

Probar, usando la definición, que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3x - 2 = 4$ *b)* $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$ *c)* $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+1}{3x-2} = \frac{3}{8}$ *d)* $\lim\limits_{x \to 1/2} \frac{x^2 - 1}{2x+1} = -\frac{3}{8}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$ *f)* $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$ *g)* $\lim\limits_{x \to 1} |6x - 1| = 5$ *f)* $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + x - 5) = 7$

Para el inciso a) dar valores de $\delta > 0$ útiles para: $\varepsilon_1 = 15$; $\varepsilon_2 = 0{,}27$; $\varepsilon_3 = 0{,}001$.

De este conjunto de tareas destacamos que las técnicas necesarias para su hacer se reducen a:

- Formular las hipótesis del estudio de límites en concordancia con la definición de límite.
- Transformar $|f(x) - l|$, a partir del empleo de propiedades de módulo, en una expresión equivalente donde aparezca explícitamente $|x - x_0|$.

- Imponer restricciones sobre δ tal que permita acotar los demás términos en la expresión equivalente, si es que aparecieran.
- Acotar $|f(x)-l|$ según las restricciones impuestas a δ y determinar δ(ε) atendiendo a que esta relación cumpla con los requisitos de la definición de límite de funciones.
- Hallar el entorno simétrico alrededor de *l* a partir del valor de épsilon.
- Verificar que 0 < γ <δ se cumple que se si $|x-x_0|<\gamma$ (para el γ establecido) entonces $|f(x)-l|<\varepsilon$ (para el ε dado).

Además, para el inciso a):

- Hallar el entorno simétrico alrededor de *l* a partir del valor de épsilon dado y luego hallar los extremos del intervalo que contiene a x_0. A partir de ellos determinar el valor de δ.
- Verificar que si $|x-x_0|<\delta$ (para el δ determinado) entonces $|f(x)-l|<\varepsilon$ (para el ε dado)

Destacamos que en el hacer de las tareas propuestas, se requieren leves modificaciones en las técnicas algebraicas necesarias para su resolución. En algunas ocasiones, se requiere de la exploración de diferentes cotas de δ para demostrar satisfactoriamente. Y el entorno tecnológico inmediato que justifica esta manera de hacer, es la definición de límite funcional.

Así mismo, destacamos que las tareas propuestas se caracterizan por afirmaciones de existencia del límite funcional, en las que no presentan contradicción con la hipótesis establecida. Quedan excluidas de este estudio cuestiones del tipo: *¿Qué sucede si es falsa la afirmación, si no existe el límite? ¿Cómo se interpreta la relación entre δ y ε para asegurar la falsedad? ¿Cómo se demuestra la inexistencia del límite?* Estas cuestiones serán retomadas en nuestras próximas investigaciones, para el desarrollo de dispositivos didácticos que permitan superar la problemática reportada en nuestra investigación.

A continuación describiremos la dinámica de clase en relación al estudio del tipo de tareas que nos ocupa en este trabajo.

4.3. Organización Matemática Efectivamente Enseñada

El primer encuentro que tuvieron los estudiantes con el tipo de tareas que nos ocupa en este trabajo, fue en la primera CT, y se produjo a partir del estudio de las siguientes tareas:

T^1*:* Interpretar y cuantificar la siguiente expresión: *f*(*x*) se acerca a un número fijo *l* siempre que *x* esté muy cerca del punto x_0.

T^2*:* Interpretar la noción de existencia del límite de funciones de una variable real para funciones definidas gráficamente.

En el *hacer* de las tareas, se construye la base fundamental sobre la que se sustenta gran parte de las praxeologías que se estudian en el curso. En las técnicas empleadas por el profesor, se advierte el intento por *mostrar* la interpretación de la noción de límite a partir de representaciones simbólicas y gráficas. Luego del estudio de las tareas, el profesor escribió la definición de límite funcional:

Definición: Sea $x_0 \in \Re$ y sea *f* una función definida en todos los puntos de un intervalo abierto (a,b) que contiene a x_0, salvo quizás en el mismo x_0. Decimos que $f(x)$ tiende al número *l* cuando *x* tiende a x_0, o que $f(x)$ tiene límite cuando *x* tiende a x_0, si *f* tiene la siguiente propiedad:

Cualquiera sea el $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$) tal que, si es $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces es $0 < |f(x) - l| < \varepsilon$.

Si se verifica esta propiedad, escribimos $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

A continuación, el profesor prosiguió con el estudio de un ejemplo de tarea que tiene como propósito *ilustrar* el empleo de la definición del límite funcional. Aquí tiene lugar el primer encuentro con una tarea en la que se combinan dos tipos: *calcular el límite funcional* y *demostrar que el límite de la función f*(*x*) *es l cuando x tiende a un valor real finito*:

T^3*:* Calcular y demostrar la existencia del límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \quad siendo \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \neq 1 \\ 5 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

En la tarea T^3, el punto de interés para el estudio del límite funcional corresponde a un punto de discontinuidad de la función. Entendemos que la tarea tiene como propósito concentrar la atención en que para el estudio del límite, no interesa lo que sucede con la función en el punto x_0, sino en un entorno del mismo. Esto se infiere del protocolo que presentamos a continuación. En primer lugar, P_1 propone trazar la gráfica de la función y explorar el comportamiento de la misma en torno al punto de interés y luego realizar el estudio analítico:

> Entonces lo primero que usted hace es hacer la gráfica de la función para ver de qué se trata esta función. O sea, cómo es el asunto de esta función (...) para tener una idea, o sea que en el fondo esto es como que. Esta es una recta pero que acá tiene un problema porque cuando vale uno vale, dijimos cinco… ¿está bien? Tiene un agujero ahí eso, ¿eh? Entonces lo que nosotros queremos es ver el comportamiento cerca del uno de esa función.

Si bien, P_1 enfatiza que el estudio de la función se realiza en proximidades del punto x_0, no se remite a la definición reconstruida en T^1 y hace notar que necesariamente la función debe estar definida en un intervalo abierto que contiene a x_0.

Luego, se propone estimar el límite funcional mediante el estudio de una tabla que representa a la función, para ciertos valores de su dominio natural. Una vez postulado el posible valor límite de la función se busca establecer una relación entre δ y ε que verifique la definición de límite. En esta instancia, el profesor intenta introducir las técnicas relativas a la tarea *Demostrar que el límite de la* *función f*(x) *es l cuando x tiende a un valor real finito*. Consideramos que este intento de *demostración* no alcanza tal fin, pues la propuesta es incompleta: se determina $\delta(\varepsilon)$ pero no se prueba que para esta relación entre δ y ε se verifica la definición de límite. El profesor indica:

> Se trabaja así (…) por hipótesis esto es menor que delta sin que yo conozca el delta. Esto es menor que delta. Pero qué es lo que yo quiero que sea eso. Yo quiero que sea menor que épsilon. Entonces yo a este señor le digo delta igual al épsilon ya está (…) Entonces, ¿cuál es el delta que he encontrado? Es éste: delta igual al épsilon.

Demostrar por definición parece reducirse a encontrar $\delta(\varepsilon)$, es decir, hallar un intervalo en el que la función tiende a *l*, cuando x tiende a x_0.

Finalizado el estudio de T^3, P_1 continúa indicando los posibles *caso*s a los que se podrían enfrentar los estudiantes cuando deban realizar este tipo de tareas. En esta instancia, la CT_1 parece reducirse a establecer un conjunto de procedimientos algebraicos que deberían acudir los estudiantes según el caso. Si bien, el cálculo se apoya fuertemente en el álgebra, el énfasis que P_1 coloca sobre los cálculos algebraicos, genera pérdida de sentido del cálculo.

Observamos aquí que el profesor no insinúa ninguna explicación de por qué se puede considerar cualquier delta mayor a cero, y que resulta de alguna manera *económico* en cuanto a la realización de cálculos, si se emplea $\delta = 1$. Pero también advertimos que ningún estudiante pregunta por qué se hace así y no de otra manera. Esto da sustento empírico a la idea de que el profesor constituye la *media* universal de los estudiantes, como si se tratara de un libro. Bajo esta concepción no hay cabida a nuevas preguntas, se presenta una manera de hacer en la que no se cuestionan otras posibilidades.

A continuación, P_1 prosigue ejemplificando cómo abordar tareas relativas a *Demostrar que el límite de la función f*(x) *es l cuando x tiende a un valor real finito*, tal como indicamos a continuación.

T^4*:* Demostrar que: $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

En el hacer de esta tarea el profesor comienza por resolver algebraicamente, obviando todo el estudio previo realizado para T^3. En dicha tarea, el profesor comenzó su estudio representando la función gráficamente y luego por medio de una tabla, para interpretar el estudio del límite solicitado. Posteriormente, prosiguió con el estudio algebraico del límite. Para T^4 observamos una reducción de las técnicas, pues solo se ofrecen las técnicas algebraicas para resolver. P_1 enfatiza que la manera de hacer propuesta es suficiente para demostrar la existencia del límite conjeturado:

> Fíjese bien que el razonamiento que hemos hecho acá de alguna manera incluye otras cosas (…) No hay una mecánica acá (…) Cada ejercicio tiene su técnica. Uno arranca poniendo el esquema de trabajo: Dado el épsilon encuentra el delta tal que pase tal cosa y una vez que trabaja con la función ahí viene el problema dependiendo de cómo es la naturaleza de la función, ¿está bien? Esa la diferencia que hay. Bueno, ese digamos es el concepto de límite de funciones.

En este último protocolo se evidencia la pérdida de sentido del tipo de tareas *Demostrar que el límite de la función f*(x) *es l cuando x tiende a un valor real* *finito*. Las expresiones de P_1 sugieren que resolver el tipo de tareas que nos ocupamos aquí, consiste en hallar $\delta(\varepsilon)$ a partir de realizar una serie de procedimientos algebraicos, dependiendo de la naturaleza de la función. A pesar de que el profesor manifiesta que en el hacer de la tarea *no hay una mecánica*, sus prácticas se reducen a ofrecer técnicas con características algorítmicas para poder hallar la relación $\delta(\varepsilon)$, alejándose de la concepción de técnica propuesta en la TAD.

A continuación, la clase prosigue con el estudio del tipo de tareas: *demostrar proposiciones que vinculan el límite de funciones con el límite de sucesiones* y *demostrar la existencia del límite de funciones trigonométricas.* Si bien, se vinculan directamente con el estudio del límite funcional, el hacer de esta tarea excede los límites del trabajo.

Para el análisis de la dinámica de estudio en las CP, consideramos las prácticas desarrolladas en dos cursos: uno dirigido por el profesor que denominamos P_2 y el otro por P_3. Los estereotipos de tareas que proponen estudiar cada profesor se indican a continuación:

P_2	P_3
Probar, usando la definición, que: $T^5\ \lim_{x\to 2}(2x+5)=9$ $T^6\ \lim_{x\to 2}x^2=4$	Probar, usando la definición, que: $T^7\ \lim_{x\to 3}x^2=9$ Probar, usando la definición, que: $T^8\ \lim_{x\to 1}\lvert 6x-1\rvert=5$

Destacamos que en el curso dirigido por P_2, la tarea T^5 no forma parte de las tareas propuestas en el material para las clases prácticas, mientras que T^6, si corresponde al material para las CP. Destacamos que en el curso dirigido por P_3, todas las tareas que se estudian componen el material para las CP.

Al realizar estas tareas, ambos profesores introducen la técnica para su resolución a partir de establecer comparaciones con sucesiones. Esto se pone en evidencia en el siguiente protocolo:

> P2: (…) en un par de prácticos atrás estuvieron viendo qué era probar sucesiones por definición. El límite, probar cuándo un límite converge o no. Cuando es real ese límite y uno lo prueba por definición, esa es una de las formas más seguras o más formales para poder probar (…) Bueno, la misma idea era para funciones. Es decir, necesitamos probar de alguna manera formal lo que estamos afirmando (…) Tomamos un valor del dominio y aplicamos, le aplicamos la función y queremos saber cuánto es el valor de ese límite. Acuérdense siempre que estamos trabajando con límites que nos va a estar interesando qué es lo que está pasando alrededor de un punto, ¿bien? Y no en el punto en particular que es donde nos estamos acercando. Entonces, lo primero que vamos a definir va a ser la definición (…) Es muy parecida a la que teníamos en sucesiones. Parecida como uno la cuenta pero, pero es decir la idea general no es (…) Entonces lo que vamos a decir es que, vamos a decir así: el límite de un equis tendiendo a equis cero de una función efe de equis es ele si y solo si, ¿qué es lo que va a pasar? Para todo épsilon mayor que cero, existe un delta. Este delta, como en sucesiones va a depender de épsilon que ya elegí, ¿bien? Mayor que cero también. ¿Tal que si pasa qué? Tal que si pasa si. Ahora esto lo vamos a escribir mejor (…).

Luego de realizar una exploración e interpretación de la definición del límite de funciones, el profesor P_2 prosigue con la tarea. Reduce su actividad a emplear técnicas algebraicas, para poder encontrar la relación entre δ y ε, y se remite a lo estudiado en límite de sucesiones, distinguiendo similitudes y diferencias:

> P2: Esto es menor que épsilon. Bien ahora es donde viene toda la parte en que uno empieza a hacer cuentas. Entonces, ¿de dónde era que cuando teníamos sucesiones partíamos, de dónde trabajábamos? ¿A partir de qué empezábamos a trabajar? ¿Empezábamos a trabajar desde acá o desde el ene subcero que teníamos o empezábamos a trabajar desde acá? (…) Hay propiedades de módulo para eso. Bien, si hacemos eso. Por ejemplo como decían ustedes, sacamos barra de módulo, trasformamos todo esto como una suma, ¿cuándo uso esto? (…) Fíjense que acá la información que yo tengo metida es con módulo. Equis menos dos con barra de módulo, ¿si? Es distinto de cuando estamos con sucesiones (…) Bien. ¿Qué hubiera pasado antes? (…) Es distinto que sucesiones. En sucesiones si buscamos condiciones para sacar las barras de módulo, porque me están molestado, porque lo que yo estoy buscando ahí es un ene sub cero, ¿si? Acá lo que yo estoy buscando es poder acotar distancias y las distancias las uso con barra de módulo (…) No buscamos condiciones para sacarlos, ¿si? A las barras.

A continuación, P_2 prosigue con T^6, presentando diferentes técnicas algebraicas que deben emplear los estudiantes para encontrar la relación entre δ y ε. El profesor P_3 también inicia el estudio de T^7 haciendo referencia a sucesiones, e indica lo siguiente:

> P3: Al igual que en el límite de sucesiones, nosotros vamos a comenzar a trabajar desde lo que queremos probar. Antes buscábamos el ene cero, ahora no buscamos el ene cero, sino lo que estamos buscando es un delta y esta información es parte de nuestra hipótesis, ¿si? Entonces en algún momento tenemos que usar lo que estamos diciendo (…) El cinco, el cinco es el número más grande. Quiere decir entonces que delta, esto ya está. Eliminé las variables. Ahora es donde hago intervenir al épsilon. Estamos en la instancia, en la misma instancia que cuando en sucesiones reemplazábamos en ene y lo acotábamos por ene cero y ahí recién hacíamos coincidir el épsilon. Bueno acá llegamos a esa situación. ¿Se entiende? Entonces acá digo que sea épsilon o menor que épsilon, ¿si? (…)

Luego P_3, al igual que P_2, reduce su práctica a presentar diferentes técnicas algebraicas y de carácter algorítmico, que permitan encontrar la relación entre δ y ε. Destacamos además que no resulta clara la distinción entre el estudio del límite cuando se trata de una función con dominio discreto y continuo.

Ambos profesores concluyen sus *demostraciones* de la existencia del límite cuando se halla la relación $\delta(\varepsilon)$, en concordancia con lo estudiado en la CT. Esto se evidencia en los siguientes fragmentos de protocolos:

> P_2: Y ahora si esto puedo decir que esto es menor que épsilon y entonces delta tiene que ser menor que épsilon sobre dos. ¿Si? ¿Se entendió más o menos como es la idea entonces?
>
> P_3: Encontramos el delta entonces el límite está probado.

P_2 y P_3 enfatizan establecer la relación entre δ y ε pero no completan su demostración, no se explicita que esta relación verifica la definición del límite de funciones. Aquí no existe tal demostración, solo se establece un intervalo en torno a un punto x_0, en el que la función tomaría un cierto valor *l*. En esta instancia, observamos una diferencia entre lo que efectivamente se reconstruye en el aula y lo propuesto en el material para las CP. En el material se ofrecen ejemplos en los que la demostración es finalizada. Concluimos en que, la tarea que nace en la OM a ser enseñada como: *Demostrar que el límite de la función f*(*x*) *es l cuando x tiende a un valor real finito*, se transforma en: *Hallar un intervalo del dominio de funciones tal que el límite sea l cuando x tiende a un valor real finito*. Estos tipos de tareas se remiten a diferentes géneros de tareas, distorsionando el intento por introducir a los estudiantes a demostrar.

Destacamos además que este intento por involucrar a los estudiantes a la actividad de demostrar culmina en las clases sucesivas. En Corica (2010) se indica que para el curso involucrado en esta investigación, cuando se propone estudiar la continuidad funcional, muere por completo la actividad de *Demostrar que el límite de la función f*(*x*) *es l cuando x tiende a un valor real finito.* Se propone el cálculo del límite funcional, como medio para probar la continuidad de funciones, sin realizar la demostración de la existencia del límite tal como sucede en las clases descritas aquí. Este es otro indicador de la pérdida de sentido de la tarea. Las tareas estudiadas nacen de *cuestiones muertas*, pues se ignora de dónde proceden y hacia dónde van. Estamos frente al denominado *fenómeno de la monumentalización* (Chevallard, 2001) de las organizaciones matemáticas: los alumnos son invitados a visitarlos, pero no a construirlas. Además, la organización que se acaba por estudiar en el curso responde al *fenómeno del autismo temático del profesor* (Chevallard, 2001): Las cuestiones y temas aparecen como si siempre hubiesen existido y su estructuración siempre hubiese sido la misma.

4.4. El momento de la evaluación

Comprendemos aquí el momento de la evaluación en un sentido amplio porque no hay una correspondencia estricta con lo que se define en la TAD (Chevallard, 1999, 2004). La permanencia en el campo indica que para los profesores la evaluación se reduce al examen. En el curso bajo estudio no se evidencia un genuino momento de la evaluación, sino que se trata de una tradición más del sistema, constituyendo el momento del examen. Ciertamente, esto dista mucho de la definición que propone la TAD sobre el momento de la evaluación, pero el examen es el único elemento relativamente asimilable de la OD a la noción del marco teórico adoptado. En el curso hay una única situación de evaluación: la de examen individual y escrito.

A continuación, se presentan los resultados que arrojó el estudio de las producciones de los alumnos en los exámenes. Nuestro análisis se restringe a las instancias que involucran las tareas relativas a: *Hallar un intervalo del dominio de funciones tal que el límite sea l cuando x tiende a un valor real finito*:

- *Primer examen parcial por módulo*: compuesto por 223 exámenes, distribuidos en cuatro temas de la siguiente manera: tema 1, 58 exámenes; tema 2, 55; tema 3, 55, y tema 4, 55.
- *Primer examen de compensación por módulo*: compuesto 67 exámenes.
- *Primer examen compensación de parcial*: compuesto por 47 exámenes.

Las tareas de cada examen se detallan a continuación:

Instancia de examen		Tarea
Primer examen por módulo	Tema 1	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x}=\frac{1}{2}$
	Tema 2	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x}=1$
	Tema 3	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 1} 2x^2+3x-1=4$
	Tema 4	Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 2} 2x^2-5x+6=4$
Primer examen de compensación por módulo		Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x}{x-1}=2$
Primer examen de compensación por parcial		Demostrar usando la definición de límite que: $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x}=\frac{1}{3}$

Cuadro I. Tareas que componen a los exámenes

Los principales resultados del análisis de la producción de los estudiantes indican que, en *el primer examen por módulo* un alto porcentaje de alumnos (92%) intentó realizar la tarea, más allá de obtener resultados exitosos o no. Destacamos que las principales dificultades detectadas en las resoluciones de los estudiantes, se registraron en el hacer del tema 2. Las mismas se focalizan en considerar como hipótesis $\delta = 1$, y aquí se requiere suponer un valor de $\delta < 1$ para acotar y establecer la relación entre δ y ε. Inferimos que para los estudiantes, las acotaciones siempre deben realizarse suponiendo que $\delta = 1$. Así mismo, de todos los alumnos que realizaron los *temas* restantes, donde se puede demostrar considerando $\delta = 1$, solo dos alumnos supusieron valores de $\delta \neq 1$. Concluimos en que los estudiantes no comprenden el significado de δ y se centran en la resolución algebraica más que en demostrar la existencia del límite.

Así mismo, otra dificultad recurrente detectada en las producciones de los estudiantes, se refiere a la inadecuada manipulación algebraica de las expresiones; como así también, a la confusión del estudio del límite de funciones con el límite de sucesiones. Esto último lo atribuimos a la poca claridad que se establece en las clases prácticas y teóricas del estudio del límite de sucesiones y de funciones, tal como destacamos en la sección anterior.

Bajo los parámetros de nuestra investigación, las técnicas didácticas que emplean los profesores universitarios para enseñar a demostrar se reducen a *mostrar* la manera de hacer las tareas, y lo que provoca que las técnicas matemáticas propuestas vivan solo para ser reproducidas. En el curso, solo se propone un único tipo de tareas en que a los estudiantes se los trata de involucrar en la actividad de demostrar: *Demostrar que el límite de la función f*(*x*) *es l cuando x tiende a un valor real finito.* Dicha tarea, oculta bajo el género *Demostrar*, se reduce al género de *Calcular.* Interpretamos que en realidad, los profesores no se proponen enseñar a demostrar sino a mostrar cómo se demuestra. Esto es producto de restricciones que operan en el nivel de la pedagogía, es decir, desde donde se piensa la organización del estudio de la disciplina en la Universidad. Aquí no hay cabida a que se pregunte por qué se proponen determinadas maneras de hacer y no otras.

Solo en las clases teóricas se realizan demostración de teoremas y proposiciones, quedando exclusivamente esta tarea en manos de los profesores que dirigen dichas clases. Aquí la participación de los estudiantes es nula y su actividad se reduce a registrar lo que el profesor hace y dice. En la instancia de evaluación, en aquellas tareas donde los estudiantes deben reproducir el hacer de los profesores de las clases teóricas, prácticamente es nula la proporción de los estudiantes que pueden realizar la tarea exitosamente (Corica, Otero, 2009).

Las demostraciones ocupan un lugar central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de validación de las afirmaciones de esta ciencia (Arsac, 1987; Crespo, 2005). La esencia de la enseñanza de la demostración matemática, en general radica en ayudar a comprender la necesidad de validar las diferentes proposiciones matemáticas que se aprenden, y en sentido más amplio poder discernir la necesidad de validar de modo objetivo el conocimiento científico (Crespo, 2005). Llevar a cabo una tarea que involucre actividades de argumentación, prueba o demostración implica un trabajo a largo plazo, el cual debe centrarse en plantear problemas donde los estudiantes puedan desarrollar una actitud reflexiva y dispuesta a formular conjeturas y discutir su validez (Ferreira, Rechimont y Parodi, 2008).

5. Reflexiones finales

En este trabajo hemos presentado resultados de un estudio descriptivo e interpretativo de un curso de cálculo universitario. La descripción de la actividad matemática desarrollada en el curso, se realiza utilizando las nociones ofrecidas por la TAD. Sin embargo, es importante dejar claro que el curso transcurre dentro del paradigma monumentalista o de *visitar los saberes*, claramente opuesto a la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo que propone la TAD. Sin embargo, cualquier proceso de estudio puede ser descripto mediante los instrumentos de la TAD, como en este caso, para comprender profundamente su lógica, sus deficiencias y entonces, intentar modificarlo de una manera viable.

El intento por introducir a los estudiantes a *demostrar*, y en particular de demostrar la existencia del límite, decae desde su gestación en las clases teóricas. En el curso bajo estudio, se enfatiza la actividad en el empleo de técnicas algebraicas para poder hallar la relación $\delta(\varepsilon)$ y finalizar el estudio en dicha instancia. Las técnicas propuestas por los profesores del curso, evitan realizar un análisis interpretativo de la relación, y la tarea sufre una transformación donde el principal objetivo es hallar dicha relación y no demostrar la existencia del límite. Esto se constata con los resultados obtenidos en el momento de la evaluación: cuando a los estudiantes se les solicita realizar demostraciones donde deben suponer cotas de δ diferentes a las propuestas por los profesores en las tareas cuya resolución solo mostraron en clase, se registra un alto porcentaje de estudiantes que no resuelve adecuadamente. Si bien, el cálculo se apoya en nociones de álgebra, se trata de un campo donde se necesita una ruptura con ciertas prácticas algebraicas para acceder a él. Entrar en el campo del cálculo significa que se va a hacer un *rodeo* con la demostración $\forall\varepsilon > 0, |f(x) - l| < \varepsilon$ y que este rodeo satisfaga lo pedido. Esto significa comprender que para demostrar esta desigualdad, no hay que resolverla exactamente sino encontrar un intervalo de centro x_0, donde se pueda garantizar la desigualdad, por medio de sobre y subestimaciones. Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la noción de igualdad y desarrollar nuevas técnicas para probar igualdades.

Para los profesores que organizan el curso interesa estudiar tareas que nacen de la cuestión: *¿Cómo demostrar la existencia del límite?* Y que en realidad declina hacia: *¿Cómo hallar la relación* $\delta(\varepsilon)$*?* Si bien, estas cuestiones no dejan de ser relevantes dentro de la organización que se acaba por estudiar, las tareas condensan respuestas a cuestiones que se han perdido. Hay que reencontrar esas cuestiones que proponemos en el MER: *¿Cómo estudiar la existencia del límite de funciones?, ¿Para qué estudiar la existencia del límite de funciones?* Estas son algunas de las preguntas que perdieron sus respuestas en manos de la cultura monumentalista. Nuestros trabajos se dirigen a estudiar el desarrollo de dispositivos didácticos que permitan reencontrar las cuestiones propuestas.

6. Referencias bibliográficas

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2003). Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica. *Épsilon*, 56, 169-198.

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), 1-29.

Arsac, G. (1987). L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 8 (3), 267-312.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2), 117-134.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (2000). Investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del análisis en España. En R. Cantoral (ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 355-361). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barbosa, E. y Mattedi, A. (2010). A Análise Matemática no Ensino Universitário Brasileiro: a contribuiçao de Omar Catunda. *Boletim de Educação Matemática*, 23 (35 B), 453-476.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (4), 487-500.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 30, 67-82.

Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gómez (eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 135-160). Madrid: Edebé.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 12. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2004). Le moment de l'évaluation, ses objets, ses fonctions: déplacements, ruptures, refondation. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2007). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. En G. Gueudet e Y. Matheron (eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 344-366). Paris: IREM Paris 7.

Corica, A. (2010). *Enseñanza de límite y continuidad en la universidad: Estudio de organizaciones matemáticas y didácticas*. Tesis doctoral. Director: Dra. María Rita Otero. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina.

Corica, A. y Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, 12 (3), 305-331.

Corica, A. y Otero, M. (2011). Análisis de la dinámica de estudio en un curso universitario de matemática. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 605-626). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Corica, A. y Otero, M. (2012). Estudio sobre las Praxeologías que se Proponen Estudiar en un Curso Universitario de Cálculo. *Boletim de Educaçáo Matemática,* 26 (42B), 459-482.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el Aula. *PREMISA,* 24, 23-29.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (3), 355-368.

Ferreira, N., Rechimont, E. y Parodi, C. (2008). Diferentes Marcos en la resolución de problemas por demostrar. En P. Lestón (ed.), *21 Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 50-59). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A C.

Fonseca, C. (2011a). Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa*, 13 (3), 547 – 580.

Fonseca, C. (2011b). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, 23 (1), 97-121.

García, M. y Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *NÚMEROS*, 75 (1), 105-120.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (2), 203-231.

Godino, J., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.

Hitt, F. (1994). Teacher's difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematic*, 16 (4), 10-20.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on formal: a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.

Rodriguez, M., Pochulu, M. y Ceccarini, A. (2011). Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la compresión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones. *Educação Matemática Pesquisa*, 13 (3), 461-487.

Sierra, M., González, M. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (1), 71-85.

Tall, D. (1986). The complementary roles of short programs and prepared software for mathematics learning. *Bulletin of the IMA*, 23, 128-133.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Tall, D., Blokland, P. y Kok, D. (1990). *A graphic approach to the calculus (for IBM compatible computers)*. USA: Sunburst, Pleasantville, NY.