

SOLUCIONES ANALÍTICAS SIMPLIFICADAS PARA EL DISEÑO ÓPTIMO DE VIGAS COMPUESTAS DE PAREDES DELGADAS

Florencia Reguera^{a,b,c} y Víctor H. Cortínez^{a,b}

^a Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional (FRBB), 11 de Abril 461, 8000, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.frbb.utn.edu.ar>

^b CONICET, Argentina

^c Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>

Palabras clave: Optimización multiobjetivo, vigas de paredes delgadas, materiales compuestos.

Resumen. En este trabajo se presenta un enfoque analítico para diseñar vigas compuestas de paredes delgadas utilizando un modelo estructural previamente desarrollado por Cortínez y Piovan (*J Sound Vib*, 258(4):701-723), el cual contempla la flexibilidad por corte en forma completa. El problema de diseño se establece en base a una técnica de optimización multiobjetivo empleando el método de criterio global y se formula de manera de minimizar la inversa de la carga de pandeo, la deflexión y el peso de la viga. La estabilidad global de la estructura se evalúa mediante expresiones analíticas aproximadas, cuya forma general se obtiene empleando la técnica de Rayleigh y sus coeficientes se determinan a través de un ajuste a partir de resultados de elementos finitos. La aplicación de tales fórmulas ofrece una gran eficiencia computacional, lo cual es de fundamental importancia en los problemas de optimización multiobjetivo. La estabilidad local se verifica de manera simplificada, modelando las paredes de la viga como placas individuales restringidas rotacionalmente por las placas adyacentes. Además, se consideran restricciones de resistencia y flexibilidad. Se estudia, en particular, el comportamiento de vigas bi-simétricas sometidas distintos estados de carga y diferentes condiciones de borde, construidas con laminados simétricos y balanceados. El problema de diseño óptimo es resuelto mediante la aplicación de la técnica heurística *simulated annealing*, dado que admite el uso de variables discretas y aseguran la convergencia global del problema.

1 INTRODUCCIÓN

La aplicación de materiales compuestos en la construcción de estructuras civiles, mecánicas y aeronáuticas se ha incrementado considerablemente en los últimos años. Las estructuras construidas con estos materiales presentan diversas ventajas con respecto a materiales convencionales, tales como alta rigidez y resistencia con respecto a su peso propio, mejorada resistencia a la fatiga y a la corrosión. La manera de construir tales estructuras da lugar a otra de sus ventajas que es su gran versatilidad, lo que a su vez origina un aspecto negativo basado en la dificultad de realizar el diseño estructural mediante los métodos clásicos. En general, esto ha motivado el desarrollo de métodos de diseño computacionales, implementados en base a algoritmos de optimización matemática que posibilitan el diseño automático de estructuras a fin de cumplir determinados objetivos de la mejor manera posible.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de diseño óptimo multi-objetivo para vigas de pared delgada de secciones abiertas construidas con materiales compuestos simétricos y balanceados, minimizando el peso de la estructura, su deformación y maximizando el momento crítico de pandeo. Además, se contemplan aspectos de resistencia, flexibilidad e inestabilidad seccional en forma aproximada. De esta manera, el problema de diseño se plantea desde un punto de vista completamente analítico.

El análisis estructural se realiza en base al modelo estructural desarrollado por Cortínez y Piovan (2002); Cortínez y Piovan (2006); el cual considera en forma completa efectos de flexibilidad por corte. En este trabajo, se incluyen efectos de distorsión seccional contemplados en forma simplificada, siguiendo la metodología desarrollada en Kollár (2003).

Por tratarse de un problema de optimización con variables discretas, la aplicación de técnicas convencionales de optimización basadas en gradiente se hace inviable. Además, la optimización del diseño de materiales compuestos lleva a un problema de optimización global con múltiples óptimos locales y un espacio de diseño complejo. Por ello, se hace uso del método *Simulated Annealing*, el cual es un método heurístico que converge a soluciones óptimas de carácter global.

2 ANÁLISIS ESTRUCTURAL

2.1 Teoría

En esta sección se describe en forma sintetizada la formulación teórica del modelo estructural desarrollado por Cortínez y Piovan (2002); Cortínez y Piovan (2006), el cual permite realizar análisis estáticos, dinámicos y de inestabilidad de vigas de pared delgada construidas con materiales compuestos, de secciones transversales abiertas y cerradas. El mismo contempla la flexibilidad por corte debida a flexión y a alabeo torsional no uniforme, teniendo en cuenta otros efectos no convencionales, tales como efectos de corte en el espesor, efectos inerciales, efectos higrotérmicos y efectos de curvatura.

2.1.1 Hipótesis

Se considera una viga de pared delgada de sección transversal arbitraria construida con material compuesto (ver Figura 1). Los puntos del elemento estructural son referidos a un sistema cartesiano ortogonal $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, en el cual el eje x es paralelo al eje longitudinal de la viga, mientras que \bar{y} y \bar{z} son los ejes principales de la sección. Los ejes y y z son paralelos a los principales, con origen en el centro de corte O . Por otro lado, se define un sistema curvilíneo (x, s, n) en la línea media de la sección transversal. Las coordenadas de los puntos ubicados sobre la línea media se definen como Y y Z (o bien, \bar{Y} y \bar{Z}).

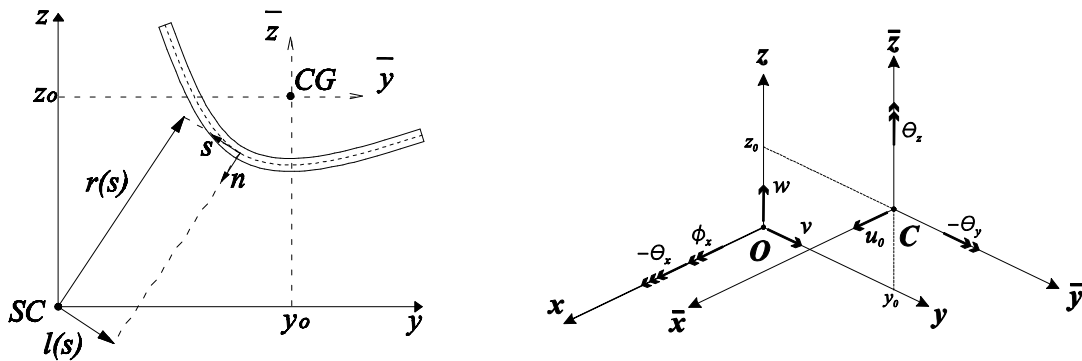


Figura 1: Detalle de los sistemas de coordenadas y definición de los desplazamientos generalizados.

El presente modelo estructural se basa en las siguientes hipótesis:

- 1) La sección transversal es rígida en su propio plano.
- 2) La distribución de alabeo se asume dada por la función de Saint-Venant para vigas isótropas.
- 3) Los esfuerzos placa y las resultantes de momento correspondientes a la tensión circunferencial σ_{ss} y la fuerza resultante correspondiente a γ_{ns} son despreciables y no se consideran.
- 4) El radio de curvatura de la placa es despreciado.
- 5) La curvatura de la placa debida al giro se expresa de acuerdo a la teoría de placas clásica.
- 6) La secuencia del laminado es asumida como simétrica y balanceada, o especialmente ortótropa (Barbero, 1999).

2.1.2 Ecuaciones cinemáticas

De acuerdo a las hipótesis expuestas anteriormente, el campo de desplazamientos propuesto se asume expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_0(x) - \theta_z(x) \bar{y}(s, n) - \theta_y(x) \bar{z}(s, n) - \theta(x) \omega(s, n) \\
 u_y &= v(x) - \phi(x) z(s, n) \\
 u_z &= w(x) + \phi(x) y(s, n)
 \end{aligned} \tag{1}$$

siendo u , v y w los desplazamientos del centro de gravedad, θ_y y θ_z , los giros flexionales, ϕ_x es el giro torsional y θ , la variable de alabeo. Además,

$$\begin{aligned}
 \bar{y}(s, n) &= \bar{Y}(s) - n \frac{dZ}{ds}, & \bar{z}(s, n) &= \bar{Z}(s) + n \frac{dY}{ds} \\
 y(s, n) &= Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, & z(s, n) &= Z(s) + n \frac{dY}{ds}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Por otro lado, y_0 y z_0 son las coordenadas del centroide de la sección, medidas desde el centro de corte O , por lo que

$$\bar{y}(s, n) = y(s, n) - y_0, \quad \bar{z}(s, n) = z(s, n) - z_0 \tag{3}$$

La función de alabeo ω considera el alabeo primario y secundario en vigas de pared delgada y se encuentra definida en Cortínez y Piovan (2002).

2.1.3 Ecuaciones constitutivas

Reemplazando las expresiones del campo de tensiones, establecido en el trabajo de Cortínez y Piovan (2002), en el principio variacional de Hellinger-Reissner, integrando con respecto a s y tomando variaciones con respecto a los esfuerzos viga generalizados, se obtienen las siguientes expresiones constitutivas:

$$\begin{aligned} N &= \widehat{EA} \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad M_z = -\widehat{EI}_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, \quad M_y = -\widehat{EI}_y \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \\ B &= \widehat{EC}_w \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad T_{sv} = \widehat{GJ} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \\ T_w \end{Bmatrix} = G[S] \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} - \theta_z \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_y \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} - \theta \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Donde A representa el área de la sección transversal, I_y e I_z son los momentos de inercia de segundo orden con respecto a los ejes y y z , respectivamente y C_w , la constante de alabeo. Los módulos elásticos equivalentes (E , G) se definen de acuerdo a las ecuaciones constitutivas de la lámina. Las expresiones de las características seccionales utilizadas aquí pueden verse en forma detallada en Kollár (2003); Barbero (1999). La matriz S contiene los coeficientes de corte, cuyas expresiones se encuentran detalladas en el artículo desarrollado por Cortínez y Piovan (2002).

2.1.4 Ecuación de movimiento variacional unidimensional

Teniendo en cuenta las hipótesis asumidas en el modelo y considerando variaciones con respecto a los desplazamientos en el principio de Hellinger-Reissner se obtiene la siguiente expresión:

$$L_K + L_{KG} + L_M + L_P = 0 \quad (6)$$

Donde,

$$\begin{aligned} L_K &= \int_0^L [N \delta u' - M_y \delta \theta'_y - M_z \delta \theta'_z + B \delta \theta'_x + Q_y \delta (v' - \theta_z) \\ &\quad + Q_z \delta (w' - \theta_y) + T_w \delta (\phi'_x - \theta_x) + T_{sv} \delta \phi'_x] dx, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} L_{KG} &= \int_0^L \left\{ \frac{N^0}{2} \delta \left[(w')^2 + (v')^2 + \frac{I_s}{A} (\phi')^2 + 2y_0 (\phi' w') - 2z_0 (\phi' v') \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{M_z^0}{2} \delta \left[\beta_z (\phi')^2 + 2\phi' w' \right] + \frac{M_y^0}{2} \delta \left[\beta_y (\phi')^2 - 2\phi' v' \right] + \frac{B^0}{2} \delta \left[\beta_w (\phi')^2 \right] \right\} dx, \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} L_M &= \int_0^L \rho \left[A \ddot{u} \delta u + I_z \ddot{\theta}_z \delta \theta_z + I_y \ddot{\theta}_y \delta \theta_y + C_w \ddot{\theta}_x \delta \theta_x + A (\ddot{v} - z_0 \ddot{\phi}_x) \delta v \right. \\ &\quad \left. + A (\ddot{w} - y_0 \ddot{\phi}_x) \delta w + (-Az_0 \ddot{v} + Ay_0 \ddot{w} + I_s \ddot{\phi}_x) \delta \phi_x \right] dx, \end{aligned} \quad (7c)$$

$$L_p = \int_0^L (-q_x \delta u - q_y \delta v - q_z \delta w + m_z \delta \theta_z + m_y \delta \theta_y - b \delta \theta_x - m_x \delta \phi_x) dx + \left[\bar{N} \delta u - \bar{M}_z \delta \theta_z - \bar{M}_y \delta \theta_y + \bar{B} \delta \theta_x + \bar{Q}_y \delta v + \bar{Q}_z \delta w + (\bar{T}_w + \bar{T}_{sv}) \delta \phi_x \right]_{x=0}^{x=L} \quad (7d)$$

2.2 Cálculo de deflexiones y análisis de falla

A partir del modelo estructural expuesto en la sección anterior, pueden calcularse en forma prácticamente exacta tanto los desplazamientos como las tensiones en la viga, mediante la aplicación de métodos numéricos. Sin embargo, aquí se consideran ciertas simplificaciones en tal sentido, que permitan formular el problema de diseño en forma analítica a fin de realizar el diseño preliminar de la estructura.

La deflexión máxima que se produce en la viga depende de las condiciones de borde y de las cargas a las que está sometida la misma. En el presente trabajo se analizan dos casos particulares de diseño: una viga simplemente apoyada y una viga bi-empotrada, ambas sometidas a cargas combinadas de flexión y compresión. Para la realización de un diseño preliminar, se puede asumir que la deflexión es igual al producto de dos términos. El primero es el correspondiente al caso de flexión sin carga axial y sin considerar efectos de corte, y el segundo término está dado por un factor de amplificación que considera tales efectos en forma aproximada, como se expresa a continuación.

$$\tilde{\delta}_{\max} = \frac{\alpha_p}{1 - \alpha_c} \delta_{\max}^B \quad (8)$$

Donde los coeficientes α_p (Timoshenko y Gere, 1961) y α_c (Kollár, 2003) están dados por las siguientes expresiones:

$$\alpha_p = \frac{1}{1 - \frac{(kL)^2 P}{\pi^2 \widehat{EI}_y}}, \quad \alpha_c = \frac{1}{1 + \frac{(kL)^2 \widehat{GS}_z}{\pi^2 \widehat{EI}_y}} \quad (9)$$

La constante k depende de las condiciones de borde. En la [Tabla 1](#) se presentan las expresiones de las deflexiones máximas para los dos diseños aquí propuestos.

En diseños preliminares, además, se puede asumir que el momento flector es soportado principalmente por las alas y la fuerza de corte por el alma ([Barbero, 1999](#)). De esta manera, la tensión por flexión puede ser aproximada por la fórmula utilizada para materiales isótropos:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{P}{A} \quad (10)$$

Donde M_y es calculado en forma análoga a los desplazamientos flexionales, considerando el factor de amplificación correspondiente. Su expresión analítica está dada en la [Tabla 1](#) para los casos analizados en este trabajo.

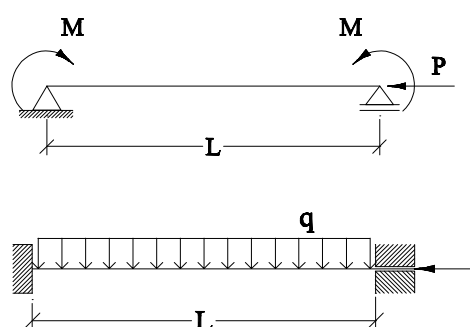
Por otro lado, a partir de la fórmula de Jourawski se puede determinar, en forma aproximada, la tensión de corte en el alma.

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z S_z}{e I_y} \quad (11)$$

Donde S_z es el momento estático, Q_{zmax} es la fuerza de corte máxima, I_y es el momento de inercia y e es el espesor del alma.

Una vez halladas las tensiones en la viga, puede verificarse la resistencia del laminado mediante la aplicación de un criterio de falla determinado. En este caso, se adoptan como referencia los valores de resistencia que ofrece el laminado en correspondencia con la falla de la primera capa bajo el criterio de falla de Tsai-Wu. Los valores de las resistencias a tracción (F_{xt}), a compresión (F_{xc}) y a corte (F_{xy}) se pueden hallar en los gráficos dados por Barbero (1999), en función del laminado y del material. De esta manera, deben verificarse las siguientes expresiones:

$$\frac{\sigma_{xt}^{\max}}{F_{xt}} \leq F.S., \quad \frac{\sigma_{xc}^{\max}}{F_{xc}} \leq F.S., \quad \frac{\tau_{xy}^{\max}}{F_{xy}} \leq F.S. \quad (12)$$



$$\delta_{\max}^{SA} = \frac{M_y L^2}{8EI_y} \frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}, \quad M_{y\max}^{SA} = M_y \frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}, \quad k=1$$

$$\delta_{\max}^{EE} = \frac{q_z L^4}{384EI_y} \frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}, \quad M_{y\max}^{EE} = -\frac{q_z L^2}{12} \frac{\alpha_p}{1-\alpha_c}, \quad k=0,5$$

Tabla 1: Deflexiones y momentos máximos para vigas simplemente apoyadas y bi-empotradas.

2.3 Soluciones analíticas para pandeo flexo-torsional

Dado que la inestabilidad de la estructura puede ser preponderante al momento de realizar el diseño estructural, en esta sección se proponen fórmulas analíticas que determinen en forma aproximada las cargas de pandeo flexional y lateral-torsional en vigas compuestas de sección transversal bi-simétrica. En particular, se contemplan dos condiciones de borde: simplemente apoyado y bi-empotrado, bajo un estado de flexo-compresión. Sin embargo cabe destacar que la metodología expuesta puede aplicarse, con igual aproximación, a otras condiciones de borde.

Para hallar las cargas críticas de pandeo, se propone una solución tipo Rayleigh-Ritz. Para ello, los desplazamientos son aproximados mediante las siguientes funciones espaciales, las cuales deben verificar las condiciones de borde esenciales, ser continuas y diferenciables en todo el dominio:

$$U_{(x)} = \alpha_i \psi_{i(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (13)$$

Donde,

$$\{U\} = \{u, v, w, \phi, \theta_y, \theta_z, \theta\} \quad (14)$$

Reemplazando las ecuaciones constitutivas (4-5) y las expresiones genéricas de los desplazamientos dadas por (13) en la expresión de trabajos virtuales (6), y tomando las variaciones con respecto a los coeficientes α_i , se obtiene la matriz de rigidez K_t . Algunos términos de esta matriz se anulan, debido a la geometría de la sección transversal y al estado de carga. Esto genera un acople flexo-torsional en el plano xy y un desacople flexional en el plano xz . Las matrices de rigidez correspondientes se describen a continuación.

$$[K_t]^{xy} = \begin{bmatrix} \int \psi_2'^2 (\widehat{GS}_y + P) dx & -\int M_y \psi_4' \psi_2' dx & \dots \\ -\int M_y \psi_4' \psi_2' dx & \int \psi_4'^2 (\widehat{GS}_\omega + \widehat{GJ} + PI_0) dx & \dots \\ -\int \widehat{GS}_y \psi_6 \psi_2' dx & 0 & \dots \\ 0 & -\int \widehat{GS}_\omega \psi_7 \psi_4' dx & \dots \\ -\int \widehat{GS}_y \psi_6 \psi_2' dx & 0 & \dots \\ 0 & -\int \widehat{GS}_\omega \psi_7 \psi_4' dx & \dots \\ \int (\widehat{EI}_z \psi_6'^2 + \widehat{GS}_y \psi_6'^2) dx & 0 & \dots \\ 0 & \int (\widehat{EC}_\omega \psi_7'^2 + \widehat{GS}_\omega \psi_7'^2) dx & \dots \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K_t]^{xz} = \begin{bmatrix} \int \psi_3'^2 (\widehat{GS}_z + P) dx & -\int \widehat{GS}_z \psi_5 \psi_3' dx \\ -\int \widehat{GS}_z \psi_5 \psi_3' dx & \int (\widehat{EI}_y \psi_5'^2 + \widehat{GS}_z \psi_5'^2) dx \end{bmatrix} \quad (16)$$

Luego, el estado de pandeo está dado por la condición de singularidad de la matriz de rigidez:

$$\det(K_t^{xy}) = 0, \quad \det(K_t^{xz}) = 0 \quad (17)$$

De aquí, se obtiene una ecuación cuadrática que determina el momento crítico, dado por la siguiente expresión:

$$M_{cr} = \sqrt{\eta_0 I_0 (P - P_z) (P - P_\phi)} \quad (18)$$

Donde,

$$P_z = -\widehat{GS}_y \left(1 - \frac{1}{\frac{\widehat{EI}_z}{\widehat{GS}_y L^2} \eta_1 + \eta_2} \right) \quad (19)$$

$$P_\phi = -\frac{\widehat{GS}_\omega}{I_0} \left(1 + \frac{\widehat{GJ}}{\widehat{GS}_\omega} - \frac{1}{\frac{\widehat{EC}_\omega}{\widehat{GS}_\omega L^2} \eta_3 + \eta_4} \right) \quad (20)$$

De la segunda expresión de (17), se obtiene:

$$P_y = -\widehat{GS}_z \left(1 - \frac{1}{\frac{\widehat{EI}_y}{\widehat{GS}_z L^2} \eta_5 + \eta_6} \right) \quad (21)$$

Cabe destacar que P_y , P_z y P_ϕ son las cargas de pandeo flexionales y torsional de una viga simplemente apoyada sometida sólo a esfuerzo axial ($M_y = 0$).

Los coeficientes η_i son adimensionales y están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{\int \psi_2'^2 dx \int \psi_4'^2 dx}{\left(\int \psi_2' \psi_4' dx\right)^2}, & \eta_1 &= L^2 \frac{\int \psi_2'^2 dx \int \psi_6'^2 dx}{\left(\int \psi_2' \psi_6' dx\right)^2}, & \eta_2 &= \frac{\int \psi_2'^2 dx \int \psi_6'^2 dx}{\left(\int \psi_2' \psi_6' dx\right)^2} \\ \eta_3 &= L^2 \frac{\int \psi_4'^2 dx \int \psi_7'^2 dx}{\left(\int \psi_4' \psi_7' dx\right)^2}, & \eta_4 &= \frac{\int \psi_4'^2 dx \int \psi_7'^2 dx}{\left(\int \psi_4' \psi_7' dx\right)^2} \\ \eta_5 &= L^2 \frac{\int \psi_3'^2 dx \int \psi_5'^2 dx}{\left(\int \psi_3' \psi_5' dx\right)^2}, & \eta_6 &= \frac{\int \psi_3'^2 dx \int \psi_5'^2 dx}{\left(\int \psi_3' \psi_5' dx\right)^2} \end{aligned} \quad (22)$$

Estos coeficientes están en función de los desplazamientos y pueden ser estimados para diferentes condiciones de borde proponiendo una única solución analítica espacial para cada desplazamiento. Lógicamente, en el caso particular de vigas simplemente apoyadas los coeficientes η_i son constantes y fáciles de hallar dado que se conoce la solución exacta de los desplazamientos (ver [Tabla 2](#)).

En este trabajo se estiman las expresiones de los coeficientes η_i para una viga compuesta tipo I, bi-empotrada sometida al estado de carga que se muestra en el esquema de la [Tabla 1](#). Para ello, se proponen las funciones ψ_i tales que coincidan con los desplazamientos estáticos obtenidos resolviendo las ecuaciones de equilibrio para estados de carga flexo-torsionales. De esta manera, se estima la variación de estos coeficientes con respecto a las características seccionales ([Tabla 2](#)). A partir de allí, se minimiza el error medio cuadrático que generan estas expresiones al ser comparadas con datos obtenidos a través del método de elementos finitos, el cual está basado en el modelo estructural desarrollado en la sección 2.1.

| VIGA SIMPLEMENTE APOYADA | |
|---|--|
| $\eta_0 = \eta_2 = \eta_4 = \eta_6 = 1, \quad \eta_1 = \eta_3 = \eta_5 = \pi^2$ | |
| VIGA BI-EMPOTRADA | |
| $\eta_0 = \bar{\eta}_0 f_0, \quad \eta_1 = 42\bar{\eta}_1 f_1, \quad \eta_2 = \bar{\eta}_2 f_1$ | |
| $\eta_3 = 42\bar{\eta}_3 f_2, \quad \eta_4 = \bar{\eta}_4 f_2, \quad \eta_5 = 42f_3, \quad \eta_6 = f_3$ | |
| $f_0 = 1 - 0.8 \frac{e}{h} + 37 \left(\frac{e}{h}\right)^2 - 176 \left(\frac{e}{h}\right)^3, \quad f_1 = \frac{2520 \widehat{EI}_z^2 + 84 \widehat{EI}_z \widehat{GS}_y L^2 + \widehat{GS}_y^2 L^4}{\left(42 \widehat{EI}_z + \widehat{GS}_y L^2\right)^2}$ | |
| $f_2 = \frac{2520 \widehat{EC}_w^2 + 84 \widehat{EC}_w \widehat{GS}_\omega L^2 + \widehat{GS}_\omega^2 L^4}{\left(42 \widehat{EC}_w + \widehat{GS}_\omega L^2\right)^2}, \quad f_3 = \frac{2520 \widehat{EI}_y^2 + 84 \widehat{EI}_y \widehat{GS}_z L^2 + \widehat{GS}_z^2 L^4}{\left(42 \widehat{EI}_y + \widehat{GS}_z L^2\right)^2}$ | |
| $\bar{\eta}_0 = 2,5639 \text{ si } b/L < 0,06, \quad \bar{\eta}_0 = 2,0786 \text{ si } b/L \geq 0,06$ | |
| $\bar{\eta}_1 = 0,795, \quad \bar{\eta}_2 = 1,002, \quad \bar{\eta}_3 = 0,767, \quad \bar{\eta}_4 = 1,002$ | |

Tabla 2: Coeficientes η_i para hallar las cargas de pandeo críticas.

En principio, se ajustan los parámetros $\bar{\eta}_1$ y $\bar{\eta}_2$ comparando los valores de la carga crítica

axial P_z obtenidos según la expresión (19) con los hallados con el método de los elementos finitos, variando el valor de la esbeltez b/L . Análogamente, se realiza el ajuste de los parámetros $\bar{\eta}_3$ y $\bar{\eta}_4$. El ajuste del parámetro $\bar{\eta}_1$ se realiza en forma similar, pero variando el estado inicial de carga combinado para diferentes secciones transversales. Los distintos problemas de ajuste planteados se resolvieron mediante la implementación de algoritmos genéticos en Matlab.

2.4 Pandeo local

La inestabilidad local resulta ser otra de las restricciones importantes que debe considerarse al plantear el problema de diseño cuando se trata de vigas de paredes delgadas. En este trabajo se evalúa la carga crítica de pandeo local en forma simplificada, haciendo referencia a las hipótesis adoptadas por Kollár (2003). Es decir, el análisis de pandeo local de vigas de paredes delgadas se estudia modelando cada segmento de la sección transversal como una placa de gran longitud, asumiendo que los ejes comunes a dos o más placas permanecen rectos. Luego, la carga de pandeo se determina considerando a cada pared como una placa individual restringida rotacionalmente por el segmento adyacente.

Por lo tanto, primero se considera a cada pared de la sección como una placa simplemente apoyada y se calcula la carga crítica para cada una de ellas, según las expresiones dadas en Kollár (2003). En el caso particular de una viga tipo I, las cargas críticas de las alas y del alma son las siguientes:

$$\begin{aligned} (N_{x,cr})_{ala} &= \frac{12D_{66}}{(b/2)^2} \\ (N_{x,cr})_{alma} &= \frac{\pi^2}{h^2} \left(2\sqrt{D_1D_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Donde los parámetros D_{ij} son las rigideces flexionales de la placa compuesta (Barbero, 1999; Kollár, 2003). Luego, se debe evaluar a qué pared corresponde la menor carga crítica y sobre ella realizar el análisis de pandeo, el cual es sintetizado a continuación.

$$\begin{aligned} \text{si } (N_{x,cr})_{ala} < (N_{x,cr})_{alma}, \quad \tilde{k} &= \frac{D_{22}}{h} \left(1 - \frac{(N_{x,cr})_{ala}}{(N_{x,cr})_{alma}} \right) \\ N_{x,cr} &= \frac{\sqrt{D_1D_2}}{(b/2)^2} \left[K \left(15.1\eta\sqrt{1-\nu} + 6(1-\eta)(1-\nu) \right) + \frac{7(1-K)}{\sqrt{1+4.12\zeta}} \right] \quad \text{cuando } K \leq 1 \\ N_{x,cr} &= \frac{\sqrt{D_1D_2}}{(b/2)^2} \left[15.1\eta\sqrt{1-\nu} + 6(K-\eta)(1-\nu) \right] \quad \text{cuando } K > 1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{si } (N_{x,cr})_{ala} > (N_{x,cr})_{alma}, \quad \tilde{k} &= \frac{2D_{22}}{b/2} \left(1 - \frac{(N_{x,cr})_{alma}}{(N_{x,cr})_{ala}} \right) \\ N_{x,cr} &= \frac{\pi^2}{h^2} \left(2\sqrt{1+4.139\xi}\sqrt{D_1D_2} + (2+0.62\xi^2)(D_{12} + 2D_{66}) \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Donde,

$$\xi = \frac{1}{1+10\zeta}, \quad \zeta = \frac{D_{22}}{\tilde{k}L_y}, \quad v = \frac{D_{12}}{2D_{66} + D_{12}}$$

$$K = \frac{2D_{66} + D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{1+(7.22-3.55v)\zeta}}$$
(26)

3 DISEÑO MULTI-OBJETIVO

3.1 Esquema de la formulación multi-objetivo

Para resolver el problema de diseño se implementa el método de criterio global (Rao, 1996) que involucra múltiples funciones objetivo. El criterio global se define como la suma de los cuadrados de las desviaciones relativas de cada función objetivo individual respecto a su solución factible óptima.

Por lo tanto, el problema multi-objetivo restringido involucra la minimización de n funciones objetivo, sujetas a m restricciones:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_{j(x)}, \quad j=1,2,\dots,n \\ g_{i(x)} \leq & 0, \quad i=1,2,\dots,m \\ x^L \leq & x \leq x^U \end{aligned}$$
(27)

De esta manera, minimizando las funciones individuales, se obtiene la solución factible ideal $f_{j(x^*)}$ para cada función objetivo. Luego, el método de criterio global propone resolver el problema (28) bajo las mismas restricciones que el problema (27), formulando el problema de optimización global de la siguiente manera:

$$\min \quad F_{MCG} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\frac{f_{j(x)} - f_{j(x^*)}}{f_{j(x^*)}} \right)^p$$
(28)

Donde p generalmente es igual a 2 y α_j es un parámetro de ponderación arbitrario.

3.2 Diseño de vigas compuestas bi-simétricas

Se considera una función objetivo global de acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, minimizando tres funciones objetivo, considerando al parámetro α_j unitario (Dávalos y Qiao, 1999). Por un lado, se contempla la maximización del momento crítico de pandeo (Ec. (18)), o bien, la minimización de la inversa del mismo. Por otro lado, se minimiza la deflexión máxima en la viga, obtenida a partir de las expresiones simplificadas dadas en la sección 2.2 (Tabla 1). Además, se propone minimizar el peso de la viga, expresado como el área de la de la misma. Las dimensiones de la sección transversal y la secuencia de laminación se establecen como variables de diseño. Cabe recordar, que de acuerdo a las hipótesis asumidas en la sección 2.1.1 el laminado debe ser simétrico y balanceado. Por lo tanto, las tres funciones a minimizar en forma individual, sujetas a las restricciones (30), son:

$$f_{1(x)} = \frac{1}{M_{cr(x)}}, \quad f_{2(x)} = \delta_{(x)}, \quad f_{3(x)} = A_{(x)}$$
(29)

Una vez resuelto cada uno de estos problemas, se resuelve el problema de optimización multi-objetivo utilizando la expresión (28), contemplando las restricciones globales propuestas a continuación:

$$\begin{aligned}
(b, h, e) > 0, & \quad \text{mín}(b, h)/e \geq 10 \\
M_y \leq M_{ycr}, & \quad P \leq P_{cr} \\
\sigma_{xc} \cdot e \leq N_{x,cr}, & \quad F.S._{\min} \leq 1 \\
A \leq A_{\max}, & \quad \delta \leq \delta_{\max}
\end{aligned} \tag{30}$$

Donde, P y M_y son las cargas iniciales (ver [Tabla 1](#)), M_{ycr} se determina de acuerdo a la expresión (18), P_{cr} corresponde a la menor carga crítica de la triple comparación entre las expresiones (19), (20) y (21), teniendo en cuenta los parámetros de ajuste establecidos en la [Tabla 2](#). Luego, la tensión σ_{xc} está dada por la ecuación (10), la carga de pandeo local $N_{x,cr}$ se estima de acuerdo a lo establecido en la sección 2.4, el factor de seguridad $F.S.$ se obtiene según las expresiones indicadas en (12), la deflexión δ se determina de acuerdo a lo indicado en la [Tabla 1](#) y, por último, la deflexión máxima y el área máxima se establecen según los requerimientos de la estructura.

3.3 Técnica de optimización

El problema de diseño multi-objetivo formulado en la sección anterior, es un problema complejo, con múltiples óptimos locales y definido a través de variables discretas. Por tal motivo, para su resolución deben aplicarse técnicas de optimización heurísticas que permitan obtener soluciones óptimas de carácter global. En este caso, se utilizó el método *Simulated Annealing*, introducido originalmente por [Kirkpatrick et. al. \(1983\)](#), el cual se basa en la generación de soluciones factibles en forma aleatoria, cuya principal característica es evitar la convergencia local en problemas de gran escala.

El esquema general del algoritmo está detalladamente explicado en [Kirkpatrick et. al. \(1983\)](#) y ha sido presentado por los autores en otros trabajos ([Reguera, Vidal, Cortínez, 2007](#); [Reguera, Cortínez y Piovan, 2009](#)). Sin embargo, es conveniente aclarar que para implementar este algoritmo exitosamente es preciso tomar una serie de decisiones en lo que se refiere al control de la temperatura. Por un lado, para que la solución final sea independiente de la solución inicial y el proceso de optimización no quede atrapado en un mínimo local, la temperatura inicial debe ser lo suficientemente alta tal que al iniciar el algoritmo todas las soluciones puedan ser aceptadas con la misma probabilidad. Una expresión adecuada de la temperatura inicial T_0 es expuesta por [Dréo y Pétrowski \(2006\)](#), dada por:

$$T_0 = r \cdot \max \Delta C_{ij} \tag{31}$$

Donde ΔC_{ij} es la variación de la función objetivo y r es mucho mayor que 1.

Por otro lado, la función que determina y controla el descenso de la temperatura tiene un papel fundamental en la eficiencia del método, puesto que define el criterio de convergencia del algoritmo. En este trabajo se aplica el siguiente esquema de enfriamiento, desarrollado por [Vidal \(2003\)](#):

$$T_{i+1} = \frac{T_i}{1 + T_i^2} \tag{32}$$

Su implementación logra disminuir los tiempos de cálculo, ya que la temperatura disminuye a mayor velocidad que en el esquema geométrico, aún cuando las temperaturas iniciales son altas.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Introducción

A continuación se analizará el comportamiento estructural de vigas de paredes delgadas de sección transversal tipo I, compuestas por laminados simétricos y balanceados a fin de validar las fórmulas analíticas propuestas para el cálculo de cargas críticas flexo-torsionales. Luego, se realizarán dos diseños multi-objetivo contemplando diferentes condiciones de borde y estados de carga. Para ello, se utilizarán dos materiales diferentes, cuyas propiedades mecánicas se dan en la [Tabla 3](#).

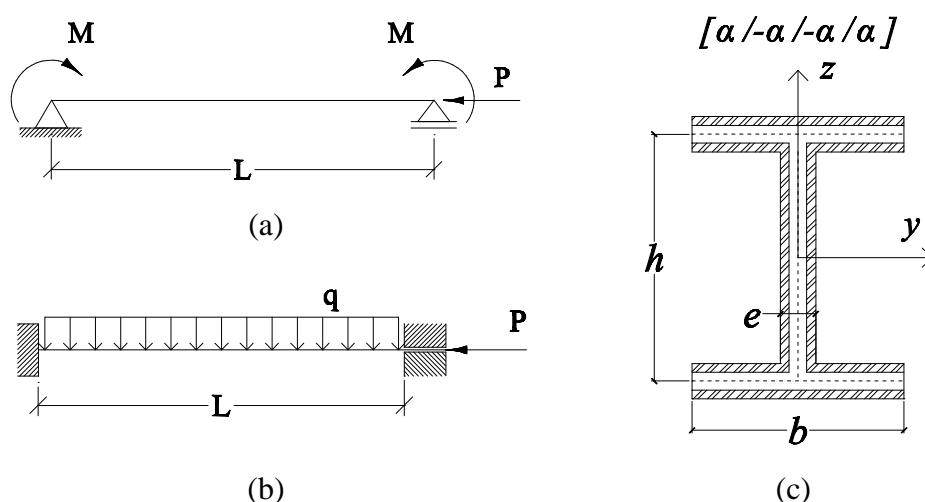


Figura 2: Sección transversal y condiciones de borde analizadas.

| PROPIEDADES | Grafito/Epoxi | Fibra de vidrio/Poliester |
|-----------------------|---------------|---------------------------|
| Módulo de Young [GPa] | | |
| E_1 | 144 | 37,90 |
| E_2 | 9,65 | 11,30 |
| Módulo de corte [GPa] | | |
| $G_{12} = G_{13}$ | 4,14 | 3,30 |
| G_{23} | 3,45 | 3,03 |
| Coficiente de Poisson | | |
| $\nu_{12} = \nu_{13}$ | 0,3 | 0,3 |
| ν_{23} | 0,5 | 0,4 |

Tabla 3: Características de los materiales considerados.

4.2 Validación de las expresiones analíticas

A fin de contemplar el error que se produce al emplear las expresiones analíticas propuestas en la sección 2.3, se comparan los resultados obtenidos mediante la utilización de las mismas con aquellos obtenidos mediante la aplicación del método de elementos finitos.

Se considera una viga compuesta de AS4/3501 Grafito/Epoxi, empotrada en sus dos extremos (libre de desplazamientos axiales en el extremo derecho), sometida a una carga axial de compresión y una carga uniformemente distribuida tal como se muestra en la [Figura 2 \(b\)](#). En la [Figura 3](#) se muestran los resultados obtenidos para diferentes estados de carga combinatorios críticos, para distintas esbelteces (b/L), considerando los laminados $[0/0]_s$ y $[0/90]_s$, siendo $h = 0,30$, $b = 0,15$ y $e = 0,01$.

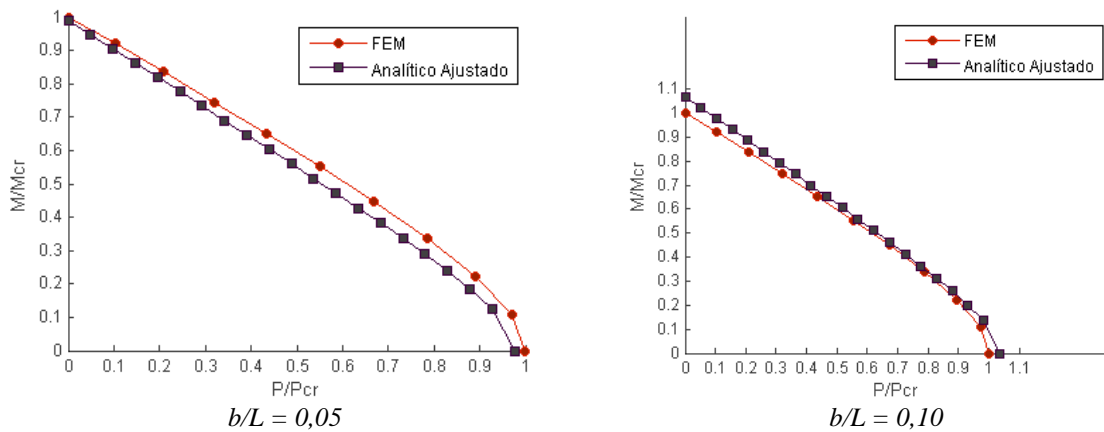


Figura 3: Cargas de pandeo para una viga bi-empotrada. Laminado [0/0]_s.

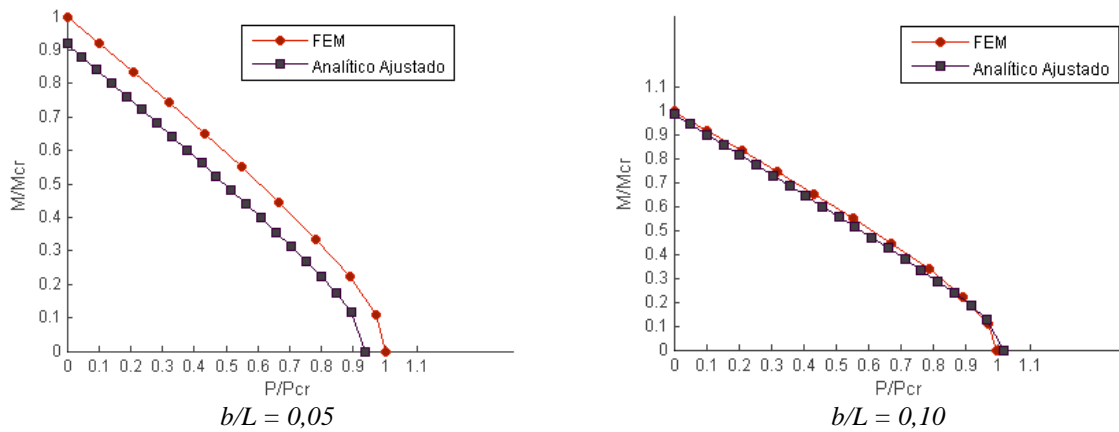


Figura 4: Cargas de pandeo para una viga bi-empotrada. Laminado [0/90]_s.

En la [Figura 4](#) se observa que los errores máximos alcanzados son del orden del 10 %, los cuales pueden considerarse aceptables si se tiene en cuenta que se pretende realizar un diseño preliminar de la estructura.

4.3 Diseño óptimo

Como aplicación de la propuesta de diseño desarrollada en la sección 3, a continuación se analiza una viga compuesta de fibra de vidrio y poliéster, de 6 m de longitud, bajo las dos condiciones de borde dadas en la [Figura 2](#). En ambos casos se resuelven primero los tres problemas de optimización establecidos en la ecuación (29) y luego se aplica el método de criterio global (Ec. (28)).

Las variables de diseño se establecen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h &= [0,1 : 0,01 : 0,6]m, & b &= [0,1 : 0,01 : 0,6]m, & e &= [0,004 : 0,004 : 0,06]m \\
 \text{LAMINADOS: Caso SA: } & [0/0]_s, [0/90]_s, [45/-45]_s & & & & (33) \\
 \text{Caso EE: } & [0/0]_s, [0/90]_s & & & &
 \end{aligned}$$

Las resistencias máximas a tracción, compresión y corte para el material utilizado, en función del laminado elegido son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 [0/0]_s, \quad F_{xt} = 903MPa, \quad F_{xc} = 379MPa, \quad F_{xt} = 44MPa \\
 [0/90]_s, \quad F_{xt} = 104MPa, \quad F_{xc} = 112MPa, \quad F_{xt} = 44MPa
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

En ambos casos, el área máxima se establece en $0,05 \text{ m}^2$ y la deflexión máxima es acotada superiormente de acuerdo a los límites convencionales utilizados en este tipo de estructuras. En este caso, consideramos:

$$\delta_{\max} = L/400 \tag{35}$$

En el caso de la viga simplemente apoyada se adoptan como cargas iniciales $P = -1.10^5 \text{ N}$ y $My = 1.10^4 \text{ Nm}$. En el caso de la viga bi-empotrada, la carga axial es la misma y $q_z = -310^3 \text{ N/m}$. Bajo estas condiciones, los resultados óptimos encontrados se expresan en la [Tabla 4](#). Comparando los resultados obtenidos para cada una de las funciones analizadas con el valor correspondiente al óptimo global, se ve claramente que las funciones que tienden a aumentar el área tienen más peso. Sin embargo, la ponderación de cada función objetivo depende fundamentalmente de los requerimientos del diseño (ver Ec. (28)).

Los tiempos de cálculo fueron del orden de 10 segundos por cada problema de optimización resuelto, lo cual confirma la eficiencia del algoritmo de optimización implementado. Cabe destacar que se utilizó un procesador DualCore Intel Wolfdale de 2533 MHz, con 2044 MB de memoria RAM.

| | <i>Simplemente apoyada</i> | <i>Bi - empotrada</i> |
|------------------------|----------------------------|-----------------------|
| $f_{1(x^*)} [I/Nm]$ | $3,66.10^{-7}$ | $8,24.10^{-8}$ |
| $f_{2(x^*)} [m]$ | $0,000561$ | $0,000252$ |
| $f_{3(x^*)} [m^2]$ | $0,00792$ | $0,00384$ |
| F_{MCG} | $6,81$ | $25,12$ |
| <i>Laminado óptimo</i> | $[0/0/0/0]$ | $[0/0/0/0]$ |
| (b^*, h^*, e^*) | $(0,60;0,60;0,012)$ | $(0,55;0,60;0,012)$ |
| $M_{cr(x^*)} [Pa]$ | $1,18.10^6$ | $4,16.10^6$ |
| $\delta_{(x^*)} [m]$ | $0,0014$ | $0,0007$ |
| $A_{(x^*)} [m^2]$ | $0,0216$ | $0,0204$ |

Tabla 4: Diseño óptimos.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se formuló y se resolvió un problema de optimización multi-objetivo para el diseño de vigas compuestas de pared delgada a partir de un modelo estructural, que contempla efectos no convencionales, implementado mediante fórmulas analíticas aproximadas para el análisis de inestabilidad global de vigas bi-simétricas sometidas a diferentes condiciones de borde. El diseño propuesto fue resuelto satisfactoriamente a través de la aplicación de la técnica de optimización *Simulated Annealing*, determinando las dimensiones de la sección transversal de la viga y el laminado óptimo que minimizan conjuntamente el peso de la viga, la deflexión de la misma y maximizan el momento crítico de pandeo, además de verificar restricciones de resistencia, inestabilidad local y deformación máxima.

Los resultados obtenidos fueron acordes a los objetivos esperados en cuanto a que se logró establecer una formulación completamente analítica para el diseño preliminar de vigas de paredes delgadas compuestas que además ofrece una gran eficiencia computacional, aún resolviendo un problema de optimización multi-objetivo de gran escala y multi-modal.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo recibido por la Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional y por el CONICET. El presente artículo forma parte del estudio de tesis doctoral realizado por Florencia Reguera, bajo la dirección de Víctor H. Cortínez y Marcelo T. Piovan, en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur.

REFERENCIAS

- Barbero, E. J., *Introduction to Composite Materials Design*, Taylor and Francis Inc., 1999.
- Cortínez, V. H., Piovan, M. T., Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4):701-723, 2002.
- Cortínez, V. H., Piovan, M. T., Stability of composite thin-walled beams with shear deformability. *Computers and Structures*, 84:978-990, 2006.
- Dávalos, J. F., Qiao, P., A computational approach for analysis and optimal design of FRP beams. *Computers and Structures*, 70:169-183, 1999.
- Dréo, J., Pétrowski, A. *Metaheuristics for hard optimization*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- Kirkpatrick, S, Gelatt, C. D., Vecchi, M. P., Optimization by Simulated Annealing. *Science*, (20), 4598: 671-680, 1983.
- Kollár, L. P., Springer, G. S., *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, 2003.
- Rao, S., *Engineering Optimization – Theory and Practice*, John Wiley & Sons Inc., 1996.
- Reguera, F., Cortínez, V. H., Piovan, M. T., Diseño de vigas compuestas mediante elementos finitos, *Mecánica Computacional XXVIII, Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 2009.
- Reguera, F., Vidal, M. C., Cortínez, V. H., Diseño óptimo de vigas de pared delgada construidas con material compuesto. *Modelización Aplicada a la Ingeniería, Vol. II, Legnani, Jacovkis, Armentano Editores, SeCyT UTN-FRBA*, ISBN: 978-950-42-0082-6, 2007.
- Timoshenko, S. P., Gere, J. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.
- Vidal, M.C., *Un procedimiento heurístico para un problema de asignación cuadrática*. Tesis Mg. Matemática. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur, 2003.