

Materiales ferromagnéticos: “¿Cómo es eso que el vector \mathbf{H} se da vuelta?”

Ferromagnetic materials: “How happen the \mathbf{H} vector points the other way round?”

M.G. González^{1,2}, L.I. Perez^{*1,3}, G.D. Santiago¹, F.E. Veiras^{1,2}

¹Departamento de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina

²Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Buenos Aires, Argentina

³Instituto de Tecnologías y Ciencias de la Ingeniería “Hilario Fernández Long”, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina

Received on September 21, 2016. Revised on November 16, 2016. Accepted on November 17, 2016.

Una de las dificultades más importantes con las que se encuentran los estudiantes de las asignaturas básicas de Electricidad y Magnetismo es la comprensión de las propiedades magnéticas de la materia. En particular, la determinación de las direcciones y sentidos de los vectores magnéticos en dispositivos simples construidos con materiales ferromagnéticos como los imanes, transformadores y electroimanes. La confusión se agudiza por la mala interpretación de las curvas \mathbf{B} - \mathbf{H} y/o \mathbf{M} - \mathbf{H} . Los libros de texto de las materias básicas no abordan el tema, aunque es posible hacer un modelo sencillo a partir de las leyes fundamentales sin recurrir a conocimientos avanzados de la teoría electromagnética. En primer lugar proponemos una estrategia para comprender bajo qué condiciones el vector \mathbf{H} puede tener el mismo o distinto sentido que \mathbf{B} en electroimanes con núcleo ferromagnético, aunque \mathbf{M} y \mathbf{B} tengan siempre el mismo sentido en dichos materiales. El desarrollo lleva en forma natural a la comprensión de la influencia de las características constructivas en la obtención de campos magnéticos más o menos intensos en imanes permanentes.

Palavras-chave: ferromagnetismo, vectores magnéticos, imanes.

One of the major difficulties that students find in the basic subjects of Electricity and Magnetism is the understanding of the magnetic properties of matter. In particular, the determination of the directions of magnetic vectors in simple devices constructed with ferromagnetic materials such as magnets, transformers and electromagnets. The confusion is compounded by the misinterpretation of \mathbf{B} - \mathbf{H} curves and /or \mathbf{M} - \mathbf{H} curves. Textbooks on basic subjects do not address the issue, although it is possible to make a simple model based on the fundamental laws without resorting to advanced knowledge of electromagnetic theory. First we propose a strategy to understand under what conditions the \mathbf{H} vector may have the same or different direction than \mathbf{B} in electromagnets with ferromagnetic core, although \mathbf{M} and \mathbf{B} always have the same direction in these materials. The development leads naturally to the understanding of the influence of the constructive characteristics in obtaining more or less intense magnetic fields in permanent magnets.

Keywords: ferromagnetism, magnetic vectors, magnets.

1. Introducción

Las propiedades elementales de los materiales magnéticos es uno de los temas tratados en las materias básicas de las Carreras de Física e Ingenierías. Incluir este tema en el currículo es esencial para la com-

prensión de dispositivos con interés tecnológico tales como transformadores, inductancias e imanes permanentes. Dada la escasa cantidad de horas asignadas a estas materias y la gran cantidad de temas que se pretende abordar, se hacen difíciles de estudiar con detalle modelos clásicos que puedan dar argumentos de cierta plausibilidad acerca del comportamiento

*Endereço de correspondência: lperez@fi.uba.ar.

de los materiales diamagnéticos y paramagnéticos lineales. Esto ocurre aún cuando se decida dar el tema Materiales Magnéticos después de la Ley de Inducción de Faraday. La descripción se circunscribe, generalmente, al sentido que tiene la magnetización en un material con respecto al campo externo aplicado y a las relaciones constitutivas entre los tres vectores magnéticos \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} . La linealidad de la relación ayuda a que el problema de la interacción de los campos magnéticos con la materia parezca sencillo. Cuando se pretenden dar ejemplos concretos, aparece la primera dificultad: las hipótesis y simplificaciones que se deben hacer para lograr una resolución analítica, aun cuando se trate de un anillo de Rowland bobinado uniformemente.

El problema se complica enormemente cuando se introducen los materiales ferromagnéticos. En este caso se apela a algún modelo clásico cualitativo (dominios o interacción entre momentos dipolares magnéticos) y se impone la evidencia experimental de que son materiales no solo no lineales sino también con histéresis. Si bien hoy en día el interés tecnológico no se reduce al uso de materiales ferromagnéticos únicamente, ellos son tan usados en la vida cotidiana que consideramos merecen seguir siendo estudiados con todo el detalle posible en las materias fenomenológicas.

Los estudiantes tienen muchas dificultades para entender “cómo funcionan” los imanes permanentes sin y con aplicación de corriente (aunque ésta sea constante) aunque los imanes se elijan estratégicamente en forma de toroide. Algunas son de índole conceptual y otras operativas: rechazan la aplicación de la Ley de Ampere en presencia de medios materiales y el uso del vector auxiliar \mathbf{H} (es decir, quieren usar el “ μ relativo”); es la primera vez que ven un fenómeno no lineal en Física; no desarrollaron habilidades para resolver gráficamente dos ecuaciones con dos incógnitas; tienen serias dificultades para interpolar en las tablas de imanación, etc. De la experiencia de aula, la aceptación de la existencia del fenómeno de histéresis no es un problema en sí mismo pero sí hay dos dificultades de comprensión importantes: la común confusión de considerar que es \mathbf{B} en lugar de \mathbf{M} el que satura, y el uso directo de la curva BH o las tablas para relacionar los campos (es decir, que el campo magnético es siempre el remanente B_r cuando no hay corriente). Esto último se debe a que les es difícil entender que las curvas o tablas describen únicamente una propiedad del

material y no son directamente aplicables a un imán de cualquier forma. Estas y otras dificultades los llevan a aferrarse a ciertos mitos que dificultan o impiden la comprensión y el aprendizaje del tema.

Los libros de texto que figuran en los programas de las materias en las Universidades Nacionales de la República Argentina son, esencialmente, libros que incluyen todos los temas de Física [1-8]. Consecuentemente, el tema está tratado muy superficialmente. Probablemente, los libros que, a nivel de las materias que nos ocupan, tratan el tema con bastante profundidad son el de McKelvey [1] y el de Roederer [9]. El primero es riguroso en la explicación de los conceptos y abarca adecuadamente el caso de inversión de \mathbf{H} siendo particularmente didácticos sus gráficos de los campos en los materiales. Ahonda en los materiales diamagnéticos y ferromagnéticos explicando con claridad el ciclo de histéresis y su implicancia tecnológica. Si bien tiene una sección especial dedicada a los imanes permanentes, el desarrollo del tema se circunscribe a toroides angostos sin corriente aplicada. El libro de Roederer [9] trata con adecuada profundidad las características de los medios magnéticos, pero su aplicación se circunscribe a solenoides. Hace especial hincapié en la medición de las propiedades de materiales ferromagnéticos.

Por otra parte, los libros de lectura complementaria no tecnológicos [10-15] se dedican a explicar los modelos clásicos sencillos de los tres tipos de materiales magnéticos. Algunos, como el de Feynman [11] y Reitz-Milford-Christy [13], en el tratamiento no-cuántico, describen algunas de sus aplicaciones apoyándose en materiales en puntos de trabajo lineales. En la mayoría de los casos se abocan a resolver “circuitos magnéticos” con aproximaciones lineales en el comportamiento de los materiales. Sin embargo, no profundizan sobre distintas posibilidades de materiales magnéticos en distintas configuraciones. Esto ha llevado a que las asignaturas de introducción a Electricidad y Magnetismo generen material propio disponible en formato electrónico [16,17].

En este trabajo proponemos una estrategia basada en la Ley de Ampere generalizada (sin considerar la corrección de Maxwell) para comprender cómo se pueden determinar las líneas de campo de \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} , tomando siempre como objeto de estudio a un anillo de Rowland sin y con muesca o “entrehierro”. La elección de esta geometría se hace para no entrar en detalles sobre la pertinencia o no del uso de muchas aproximaciones que se deben realizar cuando

el dispositivo tiene forma de marco rectangular, por ejemplo. De todas maneras, en cada caso se harán observaciones de la Ley de Gauss para el magnetismo, que consideramos ayudan no solamente a reforzar el concepto de inexistencia de cargas magnéticas sino también a entender las discontinuidades de los vectores magnéticos.

Paso a paso iremos aumentando la dificultad y veremos cuáles pueden ser los sentidos relativos de \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} y su dependencia con las características constructivas y con la corriente aplicada. Analizaremos en detalle el caso particular de núcleos ferromagnéticos sin aplicación de corriente, lo que ayudará a la comprensión de cómo se puede obtener un imán permanente a partir de un material magnetizable. Finalmente, analizaremos la influencia del tamaño del entrehierro en la intensidad del campo magnético que se puede obtener.

2. Qué usamos de las leyes de la magnetostática

Partimos de la definición del vector auxiliar \mathbf{H}

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

de la Ley de Ampere en presencia de medios materiales

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \, ds = \int \int_{S(C)} \mathbf{J}_L d\mathbf{A} = I_{L_{\text{concatenada por } C}} \quad (2)$$

donde \mathbf{J}_L e I_L indican las densidades volumétricas de corriente y corriente libres (llamadas también reales), respectivamente; de la Ley de Gauss para el magnetismo en forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

y de las condiciones de contorno entre dos medios con propiedades magnéticas diferentes (conservación de la componente normal de \mathbf{B} y la tangencial de \mathbf{H} en ausencia de corrientes en la interfaz). Como es claro de (2) excluimos la posibilidad de campos variables en el tiempo teniendo en cuenta que en el rango de frecuencias usadas en redes domiciliarias la corrección dada por Maxwell a la Ley de Ampere resulta despreciable. Como suponemos que los estudiantes ya usaron la Ley de Ampere en dispositivos como el solenoide y el toroide sin núcleo en particulares condiciones (dimensiones relativas adecuadas

de ambos dispositivos y arrollamientos muy densos), es sencillo pasar a los mismos dispositivos con materiales paramagnéticos y diamagnéticos. Si bien usar este tipo de materiales no es de particular interés en dispositivos tecnológicos, su aplicación puede fijar conceptos acerca de las direcciones relativas de los campos, las suposiciones realizadas y los cambios sufridos en el dispositivo cuando se corta parte del mismo.

Como segundo paso, analizamos los campos en un imán permanente sin corriente aplicada pero introduciendo la curva de histéresis. Agregar un entrehierro va a ser la puerta para la resolución gráfica de “circuitos magnéticos”. Como tercer paso se considera un imán permanente bajo la acción de una corriente constante con y sin entrehierro. Este es el tema más extenso.

3. Objeto de estudio y aproximaciones

En todos los casos utilizaremos las geometrías correspondientes al anillo de Rowland sin y con muesca (entrehierro). El bobinado de N espiras que transporta la corriente se supone denso y equi-espaciado, de forma tal que el campo magnético \mathbf{B} sea nulo en todos los puntos del espacio, excepto dentro del bobinado. A su vez, para abocarnos al sentido de los campos, consideraremos que el campo es azimutal y uniforme, excepto para el toroide sin núcleo donde la dependencia del campo con la coordenada radial será utilizada para la comprobación de una de las condiciones de contorno.

Si existe una corriente aplicada I en el bobinado y no hay material magnético en el núcleo, el sentido de la curva C se relaciona con la superficie que determina y se tienen en cuenta las aproximaciones (Figura 1), de

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \, ds = NI \quad (4)$$

se obtiene $H = NI/2\pi r$ (r es la coordenada radial desde el centro al núcleo del toroide y varía entre R_{int} y R_{ext}) con la dirección y sentido indicada en la Figura 2.

Como en este caso $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$ y $B = \mu_0 NI/2\pi r$, las líneas del vector \mathbf{H} tienen la misma dirección y sentido que las de \mathbf{B} y la magnetización por unidad de volumen \mathbf{M} es nula porque no existe medio material. Es didáctico, en este simple ejemplo, observar el cumplimiento de las condiciones de contorno. La

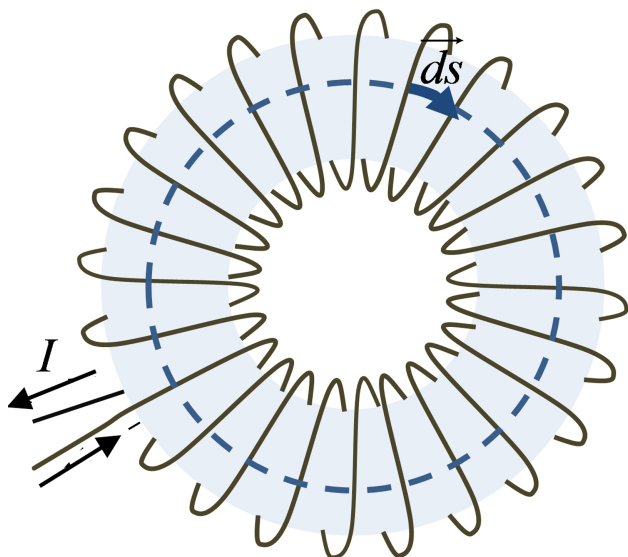


Figura 1: Toroide con N espiras muy densamente arrolladas

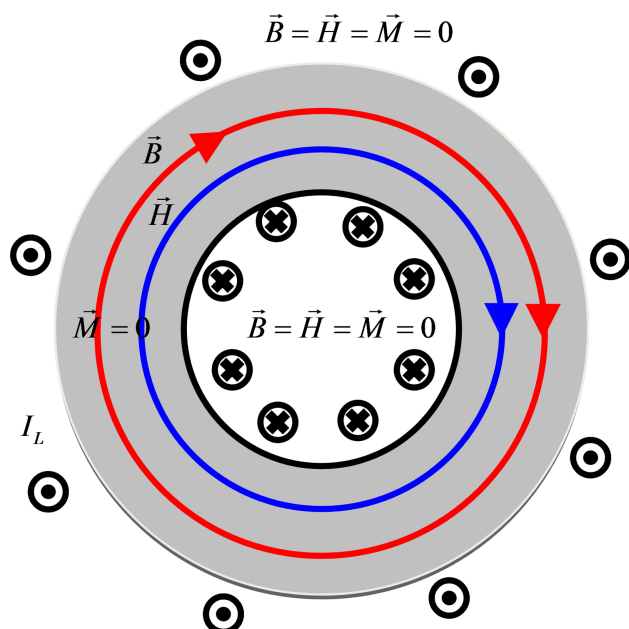


Figura 2: Esquema de los vectores magnéticos sin material en el núcleo y con una corriente aplicada I_L

condición de conservación de \mathbf{B} normal es inmediata. No así la de \mathbf{H} tangencial. Como es sabido, la condición de contorno para el vector \mathbf{H} para medios denominados 1 y 2 es

$$\mathbf{H}_{2\text{tangencial}} - \mathbf{H}_{1\text{tangencial}} = \mathbf{K}_L \quad (5)$$

donde las densidades superficiales de corriente libre son $K_L(R_{ext}) = -NI/2\pi R_{ext}$ y $K_L(R_{int}) = +NI/2\pi R_{ext}$. El sentido de circulación elegido determina el sentido de la superficie. Así, la mayor intensidad del campo en el radio interior está ligada

íntimamente a la mayor densidad de corriente. Hay que observar que el imponer campo nulo fuera del bobinado hubiera dado la respuesta a cuáles son las características de los campos haciendo solamente uso de las condiciones de contorno y de la relación constitutiva $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$. Sin embargo, consideramos que al tratarse de una asignatura fenomenológica y no axiomática es más adecuado deducir la condición de contorno del resultado.

Nos abocaremos ahora a los núcleos lineales y no-lineales, considerando que la relación entre R_{int} y R_{ext} es tal que podemos modelizar al toroide como “fino” (es decir, que se puede tomar el campo independiente de la posición). Denotaremos con L a la longitud de la circunferencia media del anillo. Si bien no existe ninguna dificultad en resolver el problema como un anillo “grosso” de material lineal o no lineal, desviaría la atención de nuestro objetivo.

4. Campos en toroides con núcleos lineales

Tratar las situaciones donde el núcleo del toroide es un material diamagnético o paramagnético solo tiene como objetivo la familiarización con los sentidos de las líneas de \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} . En estos materiales la magnetización es sostenida por el campo: cuando \mathbf{B} (o \mathbf{H}) desaparece, desaparece \mathbf{M} . Esto se cumple para la mayoría de los materiales si el campo no es demasiado intenso. Sin embargo, dado que lo que se puede manejar externamente al material es la corriente aplicada, se define la relación lineal entre \mathbf{H} y \mathbf{M} . Es decir, $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ y $\mathbf{B} = \mu_0(1+\chi)\mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$, siendo χ la susceptibilidad magnética y μ_r la permeabilidad magnética relativa. Para muchos alumnos resulta conveniente referirse desde un primer momento a la permeabilidad magnética relativa, ya que en el sistema MKS los distintos valores de la permeabilidad absoluta no son comparables de forma inmediata. Desafortunadamente, esta notación puede llevarlos a confusiones cuando los medios no son lineales.

Como los materiales diamagnéticos y paramagnéticos son introducidos en estas configuraciones al solo efecto de preparar a los alumnos para el estudio de los ferromagnéticos, se hace la primera distinción con los valores que μ_r puede tomar: es levemente menor que 1 en los diamagnéticos ($\chi < 0$) y levemente mayor que 1 en los paramagnéticos ($\chi > 0$).

De la relación constitutiva entre \mathbf{B} y \mathbf{H} surge que ellos no pueden tener sentidos contrarios, mientras que \mathbf{M} y \mathbf{H} tienen distinto sentido cuando el núcleo está hecho con un material diamagnético (Figura 3). En efecto, aplicando la Ley de Ampere y considerando que la inclusión de un material no cambia la dirección azimuthal de los campos

$$H = \frac{NI}{L} \quad (6a)$$

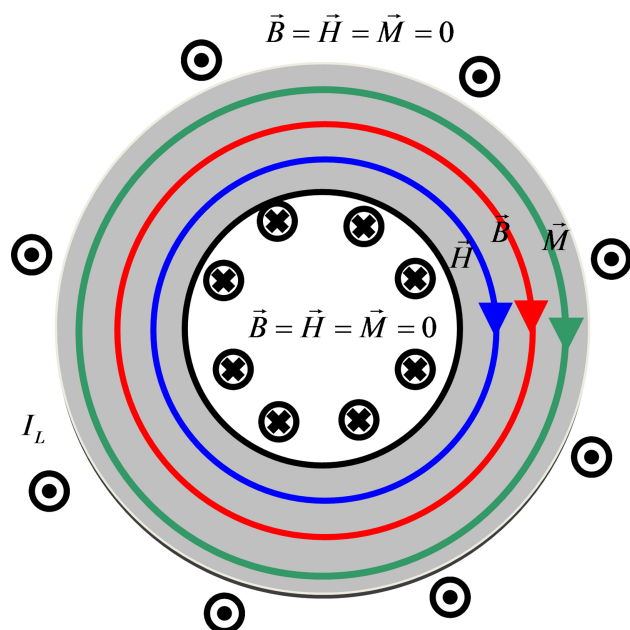
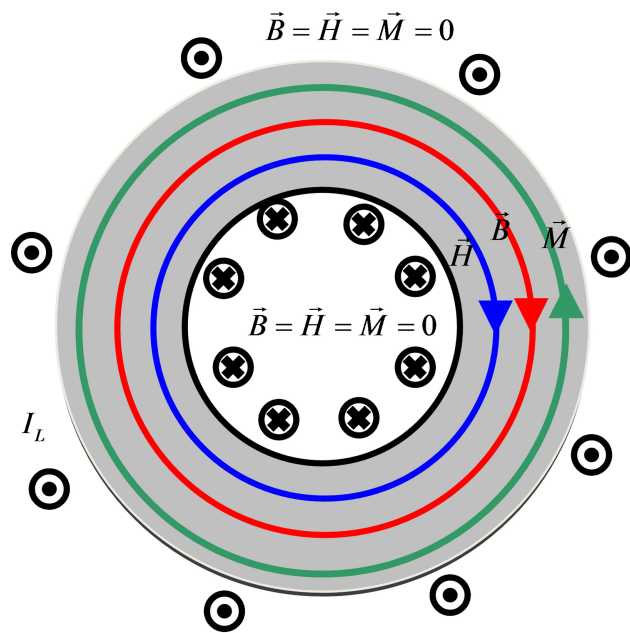


Figura 3: Vectores magnéticos en toroides diamagnéticos (arriba) y paramagnéticos (abajo).

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L} \quad (6b)$$

$$M = (\mu_r - 1) H = (\mu_r - 1) \frac{NI}{L} \quad (6c)$$

Claramente de (6), \mathbf{B} y \mathbf{H} tienen idéntico sentido y el sentido de \mathbf{M} depende de que el material sea diamagnético o paramagnético. Además, si la corriente I es nula, los tres vectores magnéticos también lo son.

¿Qué ocurre si le hacemos una muesca de espesor e uniforme manteniendo la geometría del resto? Para poder resolver el problema debemos considerar que, al estar el bobinado en las mismas condiciones que antes, los campos seguirán siendo azimuthales. Para ello, debemos pedir que los efectos de borde puedan ser despreciados. Se debe plantear la discusión de qué significa “mucho menor” basándonos en el modelo de flujo no disperso. De esta manera, se pueden determinar los campos \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} . Aplicando la Ley de Ampere se obtiene una relación entre los vectores \mathbf{H} en el material H_m y en el entrehierro H_e a través de la corriente aplicada

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = H_m(L - e) + H_e e = NI \quad (7)$$

donde los subíndices m y e indican que corresponden al material magnético y al entrehierro, respectivamente. Por la continuidad de \mathbf{B} normal, se tiene $B(r) \equiv B_m(r) = B_e(r)$ y las relaciones entre \mathbf{B} y \mathbf{H} en el material diamagnético o paramagnético y en el aire, por lo que de (7) se obtiene

$$\frac{B}{\mu_r}(L - e) + B e = \frac{B}{\mu_r}[L + e(\mu_r - 1)] = \mu_0 NI \quad (8)$$

Es decir,

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{L + e(\mu_r - 1)} \quad (9)$$

Se debe plantear en este momento la discusión de qué significa “mucho menor” basándonos en el modelo de flujo no disperso. De nuestra experiencia de aula, los alumnos se ven “tentados” a despreciar el término $H_e e$ de (7) cuando el docente “desprecia” $H_m e$ por ser habitualmente $L \gg e$. El resultado obtenido en (9) permite discutir la validez e invalidez de la operación. De la misma ecuación resulta que los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} en el material tienen los mismos sentidos que los obtenidos en ausencia del pequeño corte tanto si el material es paramagnético como si es diamagnético (recordar que $|\chi| < 10^{-5}$). Es

decir, tanto en el material como en el corte, \mathbf{B} y \mathbf{H} tienen los mismos sentidos. Con respecto a la magnetización, ésta es nula en la muesca, y en el material vale

$$M_m = \frac{B_m}{\mu_0 \mu_r} (\mu_r - 1) \quad (10)$$

Es decir, el sentido de \mathbf{M} en el material depende de que el material sea diamagnético o paramagnético. Pero es condición necesaria de que haya corriente aplicada (Figura 4).

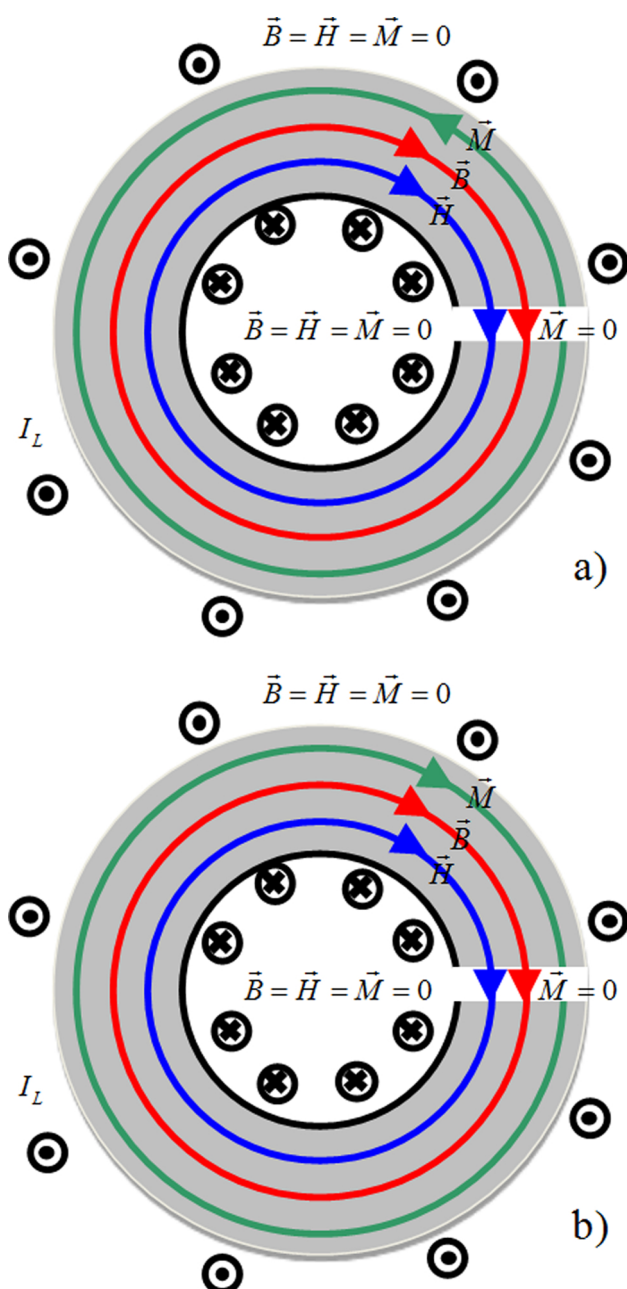


Figura 4: Toroides diamagnético (arriba) y paramagnético (abajo) con muesca o entrehierro.

5. Campos en toroides con núcleos ferromagnéticos

Consideramos adecuado que tras una clásica y breve descripción de la no-linealidad y efecto de histéresis de los materiales ferromagnéticos (haciendo hincapié a que se refiere a la magnetización M como función de H), se presenten distintas curvas mostrando la saturación de la magnetización M_{sat} . Luego se sigue con las curvas B - H con una simple explicación sobre la diferencia despreciable entre las cantidades $\mu_0 M$ y el campo magnético \mathbf{B} que lleva a que las curvas M - H y B - H no se diferencien (Figura 5) en los materiales ferromagnéticos. Lo que sí resulta importante es establecer que \mathbf{B} y \mathbf{M} tienen el mismo sentido en estos materiales. La justificación experimental de la curva B - H solamente puede darse si se trató con anterioridad el tema de Inducción Electromagnética aplicada a un “toroide” con dos arrollamientos. De no ser así (como se hace en la mayoría de las Facultades de Argentina según se desprende de los programas de las materias) se deberá tomar como un resultado experimental. Para los desarrollos que siguen se parte de un material no previamente magnetizado en forma de toroide de núcleo ferromagnético cerrado al que se le aplicará una corriente.

En segundo lugar se considerará un toroide de similares características pero con muesca o “entrehierro”. Después de estudiar el efecto del tamaño del entrehierro en las características del campo magnético útil, estableceremos las condiciones para obtener un imán permanente.

El estudio de un toroide cerrado no magnetizado previamente es útil solo a los efectos de explicar la curva de histéresis. Aplicando consideraciones de simetría, la Ley de Ampere expresada en (2) y

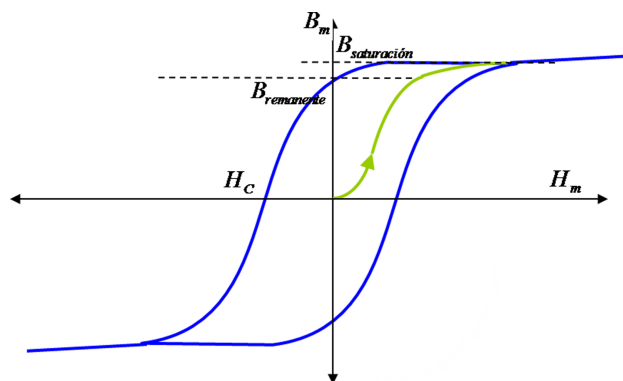


Figura 5: Curva de histéresis B - H .

su validez para distintas curvas de integración, se deduce que la única posibilidad es que en el material sea $H_m = 0$ cuando no se aplica corriente. Al aumentar la corriente (que es directamente proporcional a H_m) según se muestra en la Figura 5, se obtendrán distintos valores posibles B-H hasta llegar a la saturación del material. Claramente, cuando se disminuye la corriente hasta anularla, el campo magnético en el núcleo sería el remanente B_r . Es decir, la inexistencia de proporcionalidad entre B_m y H_m lleva a que el campo magnético B_m no sea nulo. Por otra parte, de la definición de H surge el paralelismo entre B_m y M_m .

Se puede seguir explicando el comportamiento cambiando el sentido de la corriente hasta llegar a la desmagnetización del material (H_e). Es interesante hacer la observación de la modificación que la curva B-H sufriría si se cortara la corriente en el momento en que el campo B en el material es menor que el remanente, es decir, que la curva no volvería sobre sí misma y se obtendría para corriente nula otro campo remanente menor al anterior.

Como queremos enfocarnos en las características de los imanes, “abriremos” el toroide desmagnetizado con una muesca o entrehierro de espesor e que, como en el caso de la sección anterior, consideramos de tamaño mucho menor que el largo medio del toroide. También tomamos como suposiciones (plausibles a través de comentarios breves):

1. En el aire $\mathbf{M}_e = 0$.
2. No se puede asegurar que el \mathbf{B}_m sea el mismo que en el toroide cerrado ni que sus líneas sean circunferencias.
3. En el aire (entrehierro) debe existir campo magnético \mathbf{B}_e porque sus líneas son cerradas.
4. $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_m$ por condiciones de contorno al ser uniforme la sección del toroide.

Veremos que se pueden dar muchas situaciones de acuerdo a los valores de I , L , e , N y a la historia del material. Si bien podría despreciarse el espesor del entrehierro frente a la circunferencia media del toroide desde un principio, no lo haremos con el objetivo de hacer los cálculos cuidadosamente. Aplicando la Ley de Ampere

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = H_m(L - e) + H_e e = NI \quad (11)$$

y las condiciones de contorno, se obtienen las relaciones entre los campos en el material y la corriente aplicada. Por la continuidad de la componente nor-

mal de \mathbf{B} , el campo $B_m = B_e = \mu_0 H_e$. De este modo, reemplazando con esta relación lineal entre B_m y H_e en (11), se obtiene:

$$B_m = \frac{\mu_0 NI}{e} - \mu_0 H_m \frac{L - e}{e} \quad (12)$$

y de la relación en el material $B_m = \mu_0(H_m + M_m)$ se concluye:

$$M_m = \frac{NI}{e} - H_m \frac{L}{e} \quad (13)$$

Sin embargo, esta condición no es suficiente para describir el comportamiento de los vectores magnéticos. Se debe suponer que cortar una pequeña porción del material no cambia las propiedades intensivas del mismo. Es decir, la cantidad de dipolos magnéticos que se pueden alinear (o alineados) por unidad de volumen al aplicar una cierta corriente I es independiente de que el material tenga o no un corte. Esto es equivalente a afirmar que la curva de histéresis sigue siendo la misma.

Así, el valor del campo magnético útil B_e se determina por la intersección de la curva de histéresis y la recta dada por (12). En la Figura 6 se superpone la curva de histéresis correspondiente a un material con distintas rectas que corresponden a distintos valores de corriente aplicada para un dado toroide de circunferencia media L y entrehierro e .

Un análisis de la figura se presenta en la Tabla I. Partiendo de una corriente nula, se va aumentando la corriente aplicada a un toroide con una muesca (no magnetizado previamente). A partir de cierto

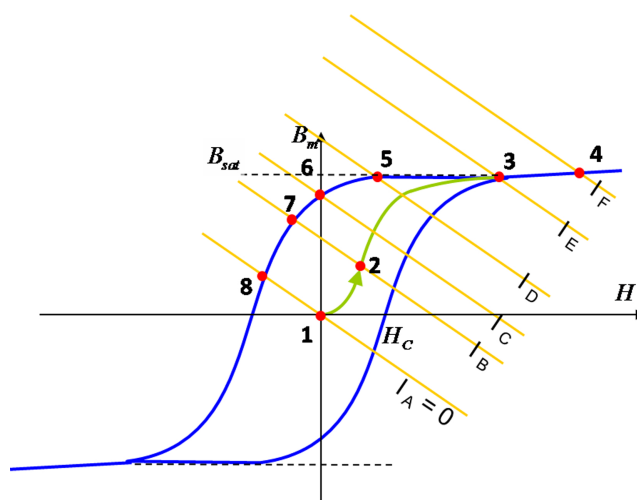


Figura 6: Determinación gráfica del campo magnético obtenido en un entrehierro para un cierto toroide con entrehierro en función de la corriente aplicada.

Tabla 1: Características de los tres vectores magnéticos en un toroide ferromagnético con muesca para distintos valores de la corriente aplicada.

1	$I_A = 0$	$B_m = H_m = 0$	$M_m = 0$
2	I_B	$B_m > 0, H_m > 0$	$M_m > 0$
3	I_C	$B_m = B_{sat} > 0, H_m > 0$	$M_m = M_{sat} > 0$
4	I_F	$B_m > B_{sat} > 0, H_m > 0$	$M_m = M_{sat} > 0$
5	I_D	$B_{sat} > B_m > 0, H_m > 0$	$M_m < M_{sat}$
6	I_C	$B_{sat} > B_m > 0, H_m = 0$	$M_m = M_{sat}$
7	I_B	$B_{sat} > B_m > 0, H_m < 0$	$M_m < M_{sat}$
8	$I_A = 0$	$B_{sat} > B_m > 0, H_m < 0$	$M_m < M_{sat}$

valor de I el aumento de B_m se debe a un aumento de H_m pero no de la magnetización porque se ha llegado al M_{sat} . Este tramo corresponde a la curva de primera imanación. Al comenzar a disminuir la corriente se logra que el campo útil sea el remanente cuando la corriente toma un valor particular I_C

$$I_C = \frac{B_{re}}{\mu_0 N I} \quad (14)$$

Para ese valor de corriente, el campo \mathbf{H} en el material es nulo. Si se sigue disminuyendo la corriente, el campo \mathbf{B} “útil” (B_m) va disminuyendo. Cuando la corriente se anula, obtenemos un toroide que sin corriente aplicada, genera un campo magnético en el entrehierro. Es decir, pudimos obtener un imán permanente.

Si se cambia el sentido de la corriente, el campo útil va disminuyendo e incluso puede ser nulo, lo que ocurre cuando la corriente es tal que

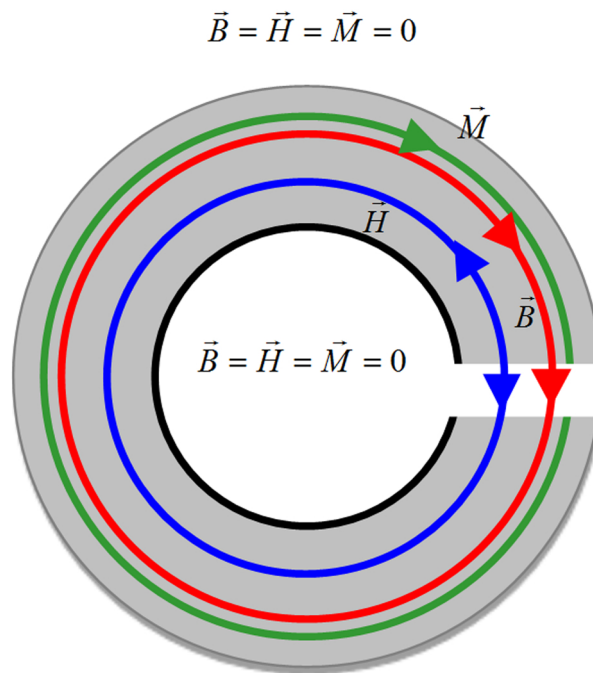
$$I_{desm} = -\frac{|H_c| L}{N} \quad (15)$$

Debe quedar claro que bajo estas circunstancias es nulo el campo \mathbf{B} pero no la magnetización \mathbf{M} . En efecto, de (13) y (15), el valor de la magnetización resulta

$$M_m = -\frac{N I_{desm}}{L - e} \quad (16)$$

Se debe observar que al llegar a que el campo magnético sea el de saturación, la disminución de la corriente aplicada lleva a que dentro del material los vectores \mathbf{H} y \mathbf{B} tengan sentidos opuestos. De lo que surge que el vector \mathbf{H} tiene distinto sentido en el material que en el entrehierro. A su vez, de la linealidad entre \mathbf{B} y \mathbf{H} en el aire y del paralelismo entre M_m y B_m se pueden establecer los sentidos de los tres vectores magnéticos (Figura 7) sin dificultad. Es decir, cuando la corriente aplicada es menor que I_C “el vector \mathbf{H} se da vuelta”.

Analicemos la obtención de imanes permanentes. ¿Cuál hubiera sido el resultado del mismo proceso

**Figura 7:** \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} en un imán permanente con entrehierro.

indicado en la Figura 6 si el toroide tuviera los mismos parámetros constructivos excepto el tamaño del entrehierro?

De la relación entre H_m y B_m correspondiente a (11) para corriente nula

$$\mu_0 H_m (L - e) + B_m e = 0 \quad (17)$$

surge que los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} nunca pueden tener el mismo sentido en el interior de un imán permanente (cuando no circula corriente). La pendiente de la recta dependerá del tamaño del entrehierro (Figura 8). Claramente, la pendiente de la recta es inversamente proporcional al valor del entrehierro. Surge notoriamente de la figura un primer resultado importante: el campo magnético en un imán permanente con muesca no es el campo magnético remanente.

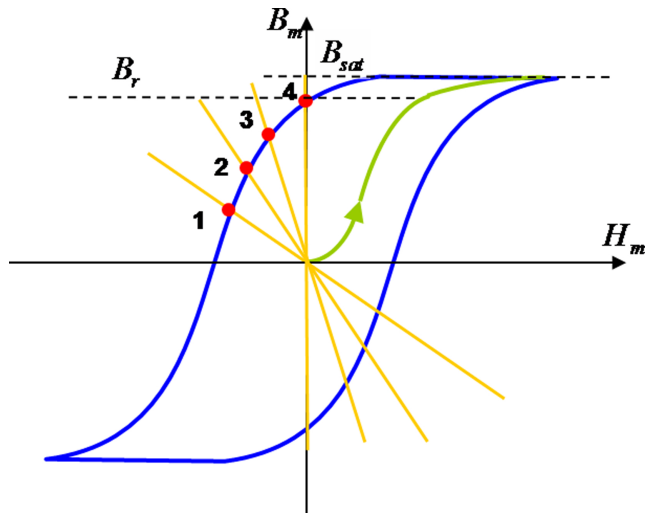


Figura 8: B y H en imanes permanentes hechos con el mismo material pero con diferentes geometrías. Cuanto más chico es el entrehierro, mayor es el campo magnético en el mismo.

Y el valor del campo útil B_e en el entrehierro va a depender fuertemente de la relación L/e .

En consecuencia, para obtener un imán permanente, el material ferromagnético debe ser imanado de forma tal que se llegue a un estado del segundo (o cuarto) cuadrante compatible con la geometría que se quiere realizar. Por otra parte, nunca se obtendrá un imán permanente si se trata de la primera imanación (o primer o tercer cuadrante).

6. Conclusiones

A partir de las dos leyes fundamentales de la Magnetostática (Leyes de Ampere y Gauss para el magnetismo), la relación constitutiva general para los medios magnéticos hemos encontrado una forma sencilla, directa y clara de describir los sentidos de los vectores magnéticos \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{M} . Tomamos como objeto de estudio un toroide de sección circular uniforme, “fino” y densamente arrollado para evitar las discusiones sobre pertinencia del seguimiento de las direcciones de los campos a la geometría del dispositivo y de la uniformidad de los campos. De esta manera, para cada situación particular, el estudiante podrá determinar cuándo los vectores son paralelos o antiparalelos sin depender de ninguna “regla”.

Además, consideramos que hemos mostrado cómo realizar un razonamiento directo y sencillo para evitar uno de los errores más comunes en los estudiantes: el considerar que en todo imán permanente y en

cualquier condición el campo magnético existente es el remanente.

Quedan para analizar y discutir imanes con otras formas y otros aspectos relacionados con la enseñanza de este tema como las “reglas” sobre el significado de toroides “finos” y “gruesos”, comparando las soluciones de resoluciones analíticas exactas y/o numéricas con las de los “toroides finos”.

Agradecimientos

Este trabajo se realizó con el apoyo del CONICET y la Universidad de Buenos Aires a través de los siguientes subsidios UBACYT 2013-2017 (20020120100025BA), UBACYT 2014-2017 (20020130100346BA), UBACYT 2016-2017 (20020150200143BA) y PIP 2012-2014 (112-201101-00676).

Referencias

- [1] McKelvey, P., Grotch, H., *Física para Ciencias e Ingeniería* (Ed. Harla, México, 1981), Tomo II.
- [2] Tipler, P.A., *Física* (Ed. Reverté SA, Barcelona, 1983).
- [3] Alonso, M., Finn, E.J., *Física* (Addison-Wesley Ibero-americana, México, 1995).
- [4] Halliday D., Resnick R., Krane K., *Física* (Cía. Ed. Continental, México, 1999), v. 2.
- [5] Young H., Freedman R., Sears, Zemansky, *Física Universitaria* (Pearson, México, 1999), v. 2.
- [6] Serway, R., *Física para Ciencias e Ingeniería* (Thomson Learning, México, 2004), v. 2.
- [7] Tipler P., Mosca G., *Física para la Ciencia y la Tecnología: Electricidad y Magnetismo* (Reverté, Barcelona, 2005), v. 2A.
- [8] Fishbane P., Gasiorowicz S., Thornton S., *Física para Ciencias e Ingeniería* (Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1994), v. II.
- [9] Roederer J., *Electromagnetismo Elemental* (Eudeba, Buenos Aires, 2015).
- [10] Purcell, E.M., *Electricidad y Magnetismo - Berkeley Physics Course* (Ed. Reverté SA., Barcelona, 1969), v. 2.
- [11] Feynman, R., Leighton, R.B., Sands, M. *Física, Electromagnetismo y Materia* (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1987), v. II.
- [12] Griffiths D., *Introduction to Electrodynamics* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999).
- [13] Reitz J., Milford F., Christy R., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética* (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1996).
- [14] Sadiku M. *Elementos de Electromagnetismo*, (Oxford University Press, Oxford, 2003).

- [15] Marshall S., Dubroff R., Skitek G., *Electromagnetismo: Conceptos y Aplicaciones* (Prentice Hall Hispano-americana, México, 1996).
- [16] Graça, C., *Eletromagnetismo*, disponível em <http://coral.ufsm.br/cograca/eletro12.pdf>, cap. 9.
- [17] Fontana M., Garea M.T., Pampillo L., Perez L.I., Sancho E., Santiago G.D., *Apuntes de Electricidad y Magnetismo: Una Docena de Conceptos Básicos*, disponível me <http://campus.fi.uba.ar/mod/folder/view.php?id=668>, cap. 8.