

Robust Control Approach for Volterra Models

S. I. Biagiola and J. L. Figueroa, *Senior Member, IEEE*

Abstract— Recently, different algorithms for identification of several uncertain nonlinear models, referred to as Volterra-type models, were introduced in the literature. This work deals with the development of a suitable robust model predictive control (MPC) scheme able to cope with the uncertain characterization of those types of models. A discrete-time multivariable algorithm with efficient computational performance is developed. A simulation example based on a multivariable distillation column is introduced to illustrate the behavior of this methodology under the presence of uncertainties and constraints on the manipulated and controlled variables.

Keywords— Model predictive control, robust control, nonlinear, model, Volterra.

I. INTRODUCCIÓN

DADO que la mayoría de los sistemas reales son de naturaleza no lineal y multivariable, el desarrollo de métodos de control para esas estructuras encuentra una aplicación directa, siendo las técnicas de diseño basadas en modelo una solución efectiva. En este enfoque, el objetivo es obtener un controlador con propiedades de lazo cerrado predeterminadas, más que identificar un modelo.

Para tal fin, los modelos Volterra de tiempo discreto (MVTD) constituyen una opción interesante, dado que pueden aproximar arbitrariamente bien cualquier sistema con memoria evanescente [1,2,3]. Sin embargo los MVTD presentan una desventaja en lo que respecta a la cantidad de parámetros requeridos para representar un cierto sistema. Recientemente, dos versiones simplificadas de los MVDT surgieron en el contexto de compensación de sistemas no lineales: los modelos polinomiales con memoria (PM) y aquellos generalizados con memoria polinomial modificados (GMPM) [4,5,6]. Las dos propiedades principales de estos modelos son su simplicidad y capacidad de generalización.

La Fig. 1 muestra una representación esquemática de los modelos PM y GMPM en su forma estándar. En este diagrama, M representa un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo (LIT), descrito por su representación en espacio de estados:

$$x_i(k+1) = A x_i(k) + b v_i(k), \quad i = 1, \dots, L \quad (1)$$

$$y_i(k) = c_i x_i(k) \quad (2)$$

donde $v_i \in \mathfrak{R}^{N_u}$, $y_i \in \mathfrak{R}^{N_y}$ y $x_i \in \mathfrak{R}^{N_x}$. En el caso del modelo PM, las entradas del i -ésimo bloque lineal es $v_i(k) = u_i(k)$ y la salida es la combinación lineal de los estados:

$$\hat{y}^{PM}(k) = \sum_{i=1}^L y_i(k) = \sum_{i=1}^L c_i x_i(k) \quad (3)$$

Para el modelo GMPM, la entrada a M es $u(k)$ y la salida es:

$$\hat{y}^{GMPM}(k) = \sum_{i=1}^L (y_i(k))^i = \sum_{i=1}^L (c_i x_i(k))^i \quad (4)$$

El proceso de identificación de ambos modelos (PM y GMPM) involucra dos etapas. En la primera se debe definir el modelo LIT (bloque M), que podría contener la información conocida sobre el sistema, o bien un modelo lineal previamente identificado. En una segunda etapa se deben determinar los parámetros $c_i \in \mathfrak{R}^{N_y \times N_x}$, con $i=1, \dots, L$. En [6] se desarrolló un procedimiento ad hoc para obtener los parámetros nominales $\hat{c} = [\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_L]$ basado en un criterio de mínimos cuadrados, y que sólo requiere datos de entrada-salida del proceso.

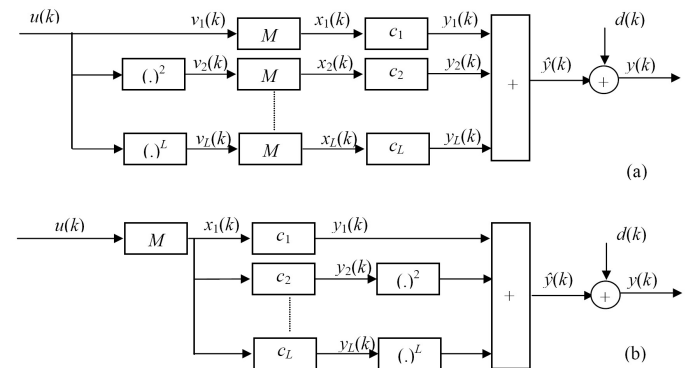


Figura 1. Modelo polinomial con memoria (a) y modelo generalizado con memoria polinomial modificado (b).

Para este tipo de modelos también es posible obtener una descripción de la incertidumbre [7]. Siguiendo el enfoque de intervalos para los parámetros, se define el conjunto:

$$\Theta = \{c : c = \hat{c} + \Delta c, \quad \Delta c_i \leq \Delta c \leq \Delta c_u\} \quad (5)$$

de modo tal que, cuando los parámetros c se emplean en la Ec. (3) (o (4)), el conjunto completo de secuencias de entradas $u(k)$ se mapea sobre el conjunto predicho de las salidas, el cual contiene los datos $y(k)$ medidos. El símbolo Δc representa un incremento en el valor del parámetro c , y los superíndices l y u simbolizan las cotas admisibles inferior y superior de los incrementos, respectivamente.

En la próxima sección se desarrolla un algoritmo de control basado en modelo, especialmente dedicado a estos modelos inciertos. En la Sección III se muestra la aplicación de la estrategia de control propuesta a una columna de destilación. Finalmente, en la Sección IV se presentan las conclusiones.

II. CONTROL PREDICTIVO ROBUSTO PARA MODELOS TIPO VOLTERRA

Una conocida fortaleza del control predictivo basado en modelos (MPC) es su capacidad para manejar problemas de control donde el cálculo fuera de línea de la ley de control es complicado o incluso inviable. Además, MPC es uno de los pocos métodos prácticos adecuados para controlar plantas con restricciones fuertes (aquellas que no pueden violarse bajo ninguna circunstancia). La filosofía de diseño general de

S. I. Biagiola, IIIE (UNS-CONICET), Bahía Blanca, Argentina, biagiola@uns.edu.ar

J. L. Figueroa, IIIE (UNS-CONICET), Bahía Blanca, Argentina, figueroa@uns.edu.ar

MPC es generar una secuencia de variables manipuladas de m movimientos (*horizonte de control*) para optimizar un desempeño definido por una función objetivo de lazo abierto en un intervalo de tiempo futuro p (*horizonte de predicción*) [8]. Esto implica que, en cada instante de tiempo, debe hallarse la solución óptima en tiempo real de un problema de control de lazo abierto para un horizonte finito [9]:

$$\min_{\Delta u(k|k), \Delta u(k+1|k), \dots, \Delta u(k+m-1|k)} J(y(k+j|k), u(k+j|k), \Delta u(k+j|k)) \quad (6)$$

sujeto a la descripción del modelo (usado para predecir la respuesta del sistema) y a las restricciones sobre la entrada y/o salida:

$$u^l \leq u(k+j|k) \leq u^u, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad (7)$$

$$\Delta u^l \leq \Delta u(k+j|k) \leq \Delta u^u, \quad 0 \leq j \leq m-1 \quad (8)$$

$$y^l \leq y(k+j|k) \leq y^u, \quad 0 \leq j \leq p-1 \quad (9)$$

donde $\Delta u(k+j|k) = u(k+j|k) - u(k+j-1|k)$ y $u(k+1|k)$ es la entrada $u(k+1)$ calculada a partir de la información disponible en el instante k . Asimismo, $y(k+1|k)$ es la salida $y(k+1)$ calculada con la información disponible en el instante de tiempo k y J es una función objetivo.

En la formulación típica de MPC el horizonte de control es menor que el horizonte de predicción, y las variaciones de las variables manipuladas para instantes de tiempo que exceden el horizonte de control son nulas (es decir, $\Delta u(k+j|k) = 0$ para $j = m, \dots, p$).

Cuando se implementa control nominal, es posible seleccionar una función objetivo $J = J_N$ con las siguientes características:

$$\begin{aligned} J_N = & \sum_{j=0}^p [y(k+j|k) - y_s(k)]^T Q [y(k+j|k) - y_s(k)]^T \\ & + \sum_{j=0}^m [u(k+j|k) - u_s(k)]^T R [u(k+j|k) - u_s(k)]^T \\ & + \sum_{j=0}^m \Delta u(k+j|k)^T S \Delta u(k+j|k) \end{aligned} \quad (10)$$

donde $u_s(k)$ e $y_s(k)$ son objetivos de estado estacionario para u e y , respectivamente. Q es una matriz de penalización simétrica semidefinida positiva, aplicada sobre las salidas. Análogamente, R y S son matrices de penalización simétricas semidefinidas positivas, aplicadas sobre las entradas y sus incrementos, respectivamente. Cabe señalar que el costo J_N formulado en la Ec. (10) corresponde al caso más general de función objetivo [10], en el que se busca simultáneamente que las salidas (y) se acerquen a sus valores de referencia, penalizar la utilización de energía (asociada a las variables manipuladas u) y el esfuerzo de control (Δu). Un caso particular de la Ec. (10) es el que considera $R = 0$.

En este caso, la salida predicha se obtiene mediante iteraciones sucesivas del modelo no lineal de las Ecs. (3) y (4), con parámetros nominales \hat{c} . Es importante señalar que la predicción $\hat{y}(k+j|k)$ depende de las variables de estado del sistema lineal (1), como así también la secuencia de entradas calculada. La solución del problema de MPC conduce a la siguiente secuencia de entradas:

$$\Delta u(k|k), \Delta u(k+1|k), \dots, \Delta u(k+m-1|k) \quad (11)$$

Sólo el primer elemento del vector de entradas calculado se implementa sobre:

- el proceso, para obtener la nueva salida medida ($y_m(k)$),
- los modelos descritos en Ecs. (3) o (4), para obtener (a) una estimación del estado basada en modelo, necesaria para proceder con los cálculos en el siguiente instante de muestreo y (b) una estimación de la salida del modelo.

$$y(k+j|k) = \hat{y}(k+j) + \hat{d}(k+j), \quad 0 \leq j \leq p \quad (12)$$

donde

$$\hat{d}(k) = y_m(k) - \hat{y}(k)$$

y

$$\hat{d}(k+j) = \hat{d}(k), \quad j = 1, \dots, p-1$$

De esta forma, la salida medida es utilizada para corregir la predicción del modelo. Dicha corrección se incorpora en calidad de perturbación (Este enfoque es muy empleado en MPC lineal (por ejemplo, en DMC) y asegura que en estado estacionario la salida predicha aproxima a la salida medida, es decir, que el sistema de control es capaz de lograr error nulo a la salida [11].) aditiva \hat{d} en el cálculo de la salida del modelo.

Con la intención es mejorar las propiedades de robustez del algoritmo de MPC, se utilizará la cuantificación de la incertidumbre que brinda la Ec. (5). En este sentido, tradicionalmente se han desarrollado diferentes herramientas, que se pueden agrupar en dos categorías fundamentales: enfoques basados en Lipschitz [12,13] y estrategias que siguen técnicas minimax [14,13,3]. La propuesta desarrollada en este trabajo utiliza el enfoque minimax, para lo cual incorpora la información suministrada en (5), utilizándola tanto en la función objetivo como en las restricciones:

- (i) La función objetivo se modifica mediante un concepto de optimización multiobjetivo [15,16]. Para ello, se lleva a cabo la siguiente redefinición de la función costo:

$$J = (1-W) J_N + W J_R \quad (13)$$

donde J_N se extrae de la expresión de la Ec. (10), J_R se establece como:

$$\begin{aligned} J_R = & \max_{c \in \Theta} \sum_{j=0}^p [y(k+j|k) - y_s(k)]^T Q [y(k+j|k) - y_s(k)]^T \\ & + \sum_{j=0}^m [u(k+j|k) - u_s(k)]^T R [u(k+j|k) - u_s(k)]^T \\ & + \sum_{j=0}^m \Delta u(k+j|k)^T S \Delta u(k+j|k), \end{aligned} \quad (14)$$

y se define W igual a:

$$W = \begin{cases} 1, & \text{si } \|y(k+j|k) - y_s\| > rad \\ 0, & \text{para los demás casos} \end{cases} \quad (15)$$

donde rad es un parámetro de diseño que brinda una medida de la proximidad entre la salida predicha y su valor de referencia.

De esta manera, la elección de W permite reducir el conservadorismo del clásico enfoque minimax y contemplar la posibilidad de error de estado estacionario nulo cuando la variable controlada está próxima al valor deseado.

- (ii) La descripción de la incertidumbre se emplea para garantizar que las restricciones no se violan para ningún parámetro $c \in \Theta$. En consecuencia, el enfoque robusto

implica modificar la restricción de la salida (Ec. (9)) del siguiente modo:

$$\{(1-W)y(k+j|k)+W \max_{c \in \Theta} y(k+j|k)\} \leq y^u; \quad (16)$$

$$1 \leq j \leq p-1$$

$$\{(1-W)y(k+j|k)+W \min_{c \in \Theta} y(k+j|k)\} \geq y^l; \quad (17)$$

$$1 \leq j \leq p-1$$

donde W es definida según la Ec. (15) y, como antes, se utiliza para reducir el conservadurismo en las cercanías del valor deseado.

La principal dificultad que se enfrenta en la solución robusta, es el esfuerzo computacional asociado a la optimización sobre el conjunto $c \in \Theta$ en las formulaciones dadas en las Ecs. (14), (16) y (17). En todos los casos, dichas tareas de optimización involucran el cálculo de los extremos de $y(k+j|k)$, el cual depende del modelo considerado. Una solución muy eficiente a estos problemas se incluye en el Apéndice.

Se debe notar que, en esta estrategia de diseño de control robusto los principales parámetros de diseño del controlador son coincidentes con los del caso nominal: el horizonte de control (m), el horizonte de predicción (p), las matrices de penalización implicadas en la función objetivo (Q, R y S), las cotas sobre las restricciones ($u^l, u^u, \Delta u^l, \Delta u^u, y^l$ e y^u). Un único parámetro adicional se incluye en la presente estrategia de control: el radio (rad) que indica la distancia admisible entre la salida predicha y el valor de referencia seleccionado para la variable controlada.

Con respecto a la representación matemática del sistema, el modelo nominal se define mediante el bloque lineal (M), el orden de la no linealidad (L) y los parámetros nominales \hat{c} . La incertidumbre se caracteriza a través de cotas sobre los parámetros (esto es, $\Delta c^l, \Delta c^u$). Es importante remarcar que tanto el esquema nominal como el robusto de MPC utilizan el modelo nominal para actualizar la estimación de la salida.

III. CONTROL ROBUSTO DE UNA COLUMNA DE DESTILACIÓN

La metodología propuesta de control robusto es evaluada mediante un ejemplo de simulación: la columna de destilación no lineal desarrollada por Skögestad y colaboradores [17]. Dicho modelo está compuesto de ecuaciones de balance y describe el proceso de destilación binaria en un equipo de 41 platos con rehervidor y condensador total.

Como la operación de destilación afecta directamente a la calidad del producto, la importancia económica del control de la separación es indiscutible en industrias de procesos químicos [18]. El desafío asociado al modelado y control de la dinámica de la destilación se debe a la marcada no linealidad del proceso, acoplamiento multivariable, perturbaciones severas y comportamiento no estacionario [17,19,20].

El proceso de separación considerado en esta sección utiliza una estructura de control LV: la entrada $u=[V_B \ L_T]^T$ es un vector formado por la corriente de vapor y la de reflujo, respectivamente. Por otra parte, la salida $y=[x_B \ x_D]^T$ es un

vector formado por las composiciones de fondo y destilado, respectivamente.

Mediante simulación de la Columna A [17] se pudieron recolectar los datos de entrada-salida requeridos del proceso no lineal considerado. Para ello, se excitó al sistema con entradas (variables manipuladas) dadas por señales aleatorias de amplitud acotada al 2% del valor nominal y distribución uniforme. La entrada se mantuvo constante durante 150 muestras, para un periodo de muestreo de 10 s. Se obtuvo un total de 30000 muestras, que fueron repartidas en partes iguales para las etapas de aproximación y validación del modelo.

En primer lugar, se realiza el procedimiento de identificación y se determina el bloque lineal (M). El modelo en espacio de estados obtenido, de orden seis, es el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1.710 & -0.300 & -0.726 & 0.285 & 0.010 & -0.010 \\ -0.177 & 1.758 & 0.166 & -0.769 & 0.007 & -0.007 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los modelos PM Y GMPM (para $L=3$) fueron identificados utilizando los datos previamente recolectados. Con la finalidad de establecer un criterio de comparación de niveles de aproximación alcanzados, también se consideró un modelo adicional, lineal. La Tabla I muestra el número de parámetros necesarios, los grados de aproximación y validación alcanzados para cada una de las salidas (x_B y x_D). Para la determinación del error se consideró el siguiente criterio:

$$E = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K (e_i(k))^2 \quad (18)$$

donde K representa el número total de muestras.

TABLA I
ERRORES DE APROXIMACIÓN Y VALIDACIÓN

Modelo	E _{aproximación}	E _{validación}	Parámetros
Lineal	18.6651	22.2848	12
PM	12.1091	13.8896	36
GMPM	1.1220	2.8756	36

Es importante remarcar que, debido a la respuesta del proceso, para el caso del modelo GMPM el término cuadrático correspondiente a x_D es sustraído. Debido a la capacidad de aproximación evidenciada por el modelo GMPM, se seleccionó esa estructura para luego realizar el diseño de MPC robusto para un modelo con incertidumbre. Para eso, es necesario calcular primero las cotas correspondientes a la incertidumbre de dicho modelo. La Tabla II muestra los parámetros nominales y las cotas de incertidumbre para cada

salida considerada. Es importante señalar que, sin pérdida de generalidad, se supone la incertidumbre concentrada en \hat{c}_1 .

TABLA II
PARÁMETROS Y COTAS PARA EL MODELO MGMP

Subsistema	c_1	c_2	c_3	$\Delta c_1 (c_1)$	$\Delta c_u (c_1)$
x_B	3.1716	0.2934	-0.4708	0.0168	0.0602
	-2.1882	4.4617	2.4815	0.0129	0.0000
	-2.5829	0.2129	-2.3686	0.0167	0.0000
	2.5633	-3.7615	1.1177	0.0129	0.0000
	0.0212	0.0205	0.1859	0.0519	0.0541
	-0.0284	-0.0371	-0.0235	0.0185	0.0655
x_D	3.6171	3.8429	0.8708	0.0000	0.0428
	-3.5421	-3.0552	4.9135	0.0495	0.0000
	-3.2085	-3.2048	-0.3343	0.0000	0.0000
	3.9710	3.6144	-4.9464	0.0000	0.0000
	0.0170	0.0264	0.1227	0.0282	0.0237
	-0.0127	-0.0198	-0.0488	0.0432	0.0280

Las Figs. 2 y 3 ilustran la salida predicha por el modelo y los datos medidos, para el caso de la estructura MGMP. Se representan ambas composiciones de salida (x_B y x_D).

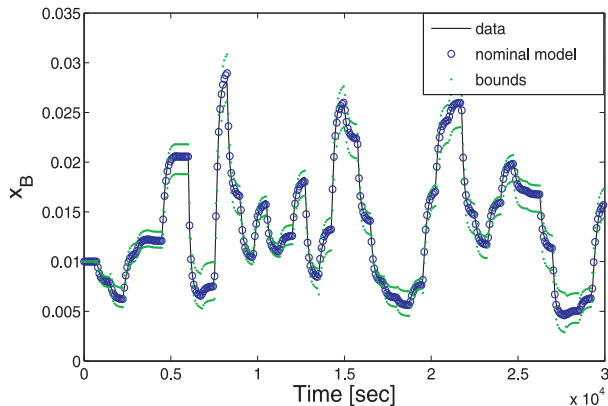


Figura 2. Composición de fondo (x_B):datos, predicción del modelo y cotas de incertidumbre.

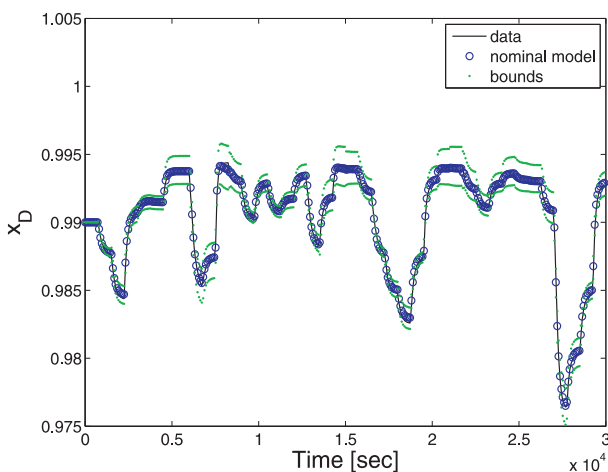


Figura 3. Composición de destilado (x_D):datos, predicción del modelo y cotas de incertidumbre.

El desempeño alcanzado por el controlador propuesto para diferentes cambios de valor deseado se muestra en las Figs. 4 y 5 para x_B y x_D , respectivamente. Estos gráficos ilustran las

respuestas obtenidas en diferentes situaciones, es decir, cuando se emplean diferentes estructuras de control. Los diferentes escenarios de control planteados son: MPC lineal nominal (denotado como LMPC), MPC no lineal para el modelo GMPM (denotado como NMPC), y dos versiones del controlador MPC robusto desarrollado en este trabajo. Estas dos versiones difieren en que una de ellas incluye la estrategia de robustificación sólo en la función objetivo (denotada como RMPC1), mientras que la otra propuesta incluye robustificación tanto en la función objetivo como en las restricciones (denominada RMPC2). Acorde con lo esperado, este último controlador evidencia una respuesta más suave que el nominal. Por otra parte, ambos superan el desempeño del controlador lineal. En todos los casos, los parámetros considerados fueron: $p=100$, $m=5$, $Q=0.6$, $R=0.001$, $S=0.01$ y $rad=0.003$. Los valores extremos admisibles para las variables se incorporaron a las restricciones como desigualdades: $0.008 \leq x_B \leq 0.019$ y $0.988 \leq x_D \leq 0.994$.

Las Figs. 6 y 7 muestran las secuencias de variables manipuladas que requiere cada controlador utilizado para alcanzar el objetivo propuesto.

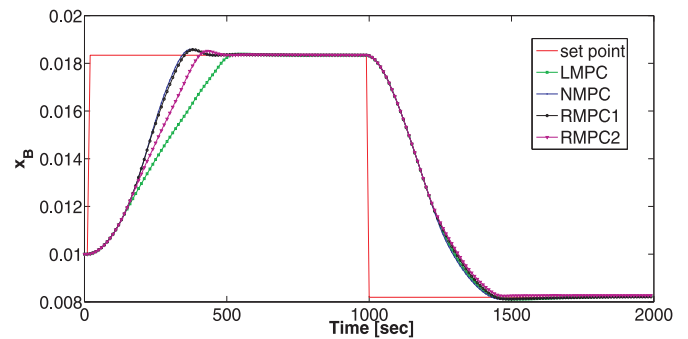


Figura 4. Variable controlada x_B .

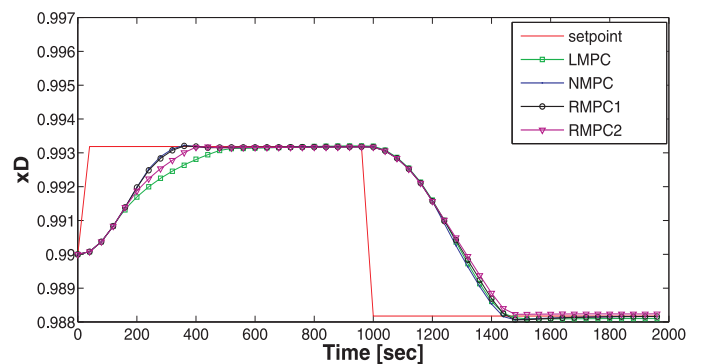


Figura 5. Variable controlada x_D .

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó el problema de control bajo restricciones de sistemas multivariables no lineales inciertos.

La estrategia propuesta se basó en la aproximación del sistema por modelos tipo Volterra. En particular se utilizaron modelos *polinomiales con memoria* y *generalizados con memoria polinomial modificados*. Éstos permiten no sólo la identificación paramétrica mediante un problema estándar de optimización, sino que habilitan la caracterización de la incertidumbre en forma muy sencilla al permitir que los

parámetros del modelo varíen dentro de un conjunto convexo alrededor de su valor nominal.

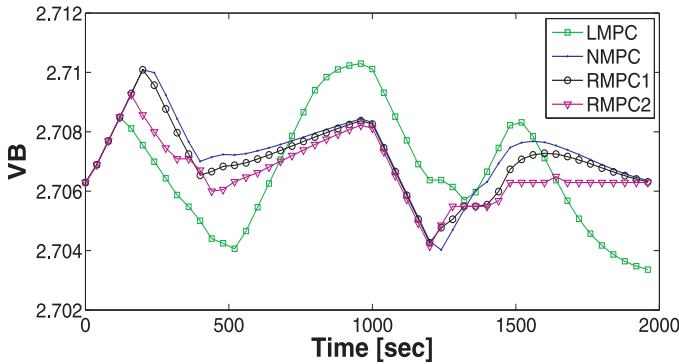


Figura 6. Movimientos requeridos de V_B para seguimiento de setpoint.

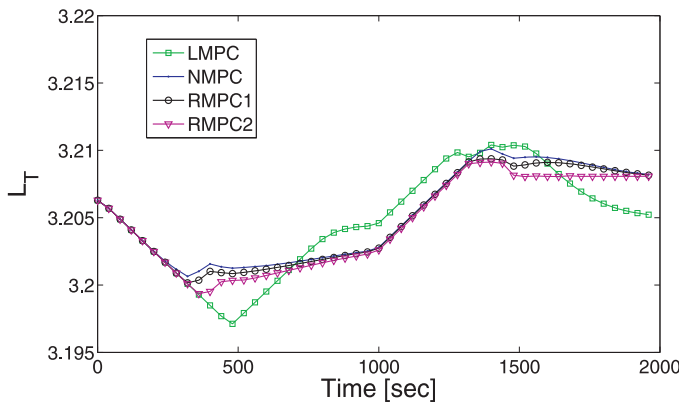


Figura 7. Movimientos requeridos de L_T para seguimiento de setpoint.

El algoritmo de control se basa en explotar la estructura de estos modelos en el contexto de un control predictivo basado en modelos que incluye restricciones. La función objetivo del controlador plantea dos términos. En uno de ellos se pesa el desempeño del sistema nominal y en otro, mediante un enfoque minimax, introduce el conocimiento de la incertidumbre. El primero de estos términos tiene preponderancia en cercanías del valor deseado de la salida, mientras que el segundo la tiene en los puntos distantes del mismo (donde el efecto de la incertidumbre suele ser crítico). De esta forma, conseguimos mantener acotado el conservadorismo típico presente en las estrategias minimax.

El mismo concepto se utilizó en las restricciones, donde el enfoque del “peor caso” sólo se introduce cuando la salida se encuentra lejos del valor deseado.

De este modo, se logra un algoritmo multivariable de control predictivo que resulta computacionalmente muy eficiente, con una buena capacidad de manejo de restricciones (por ejemplo, entrada de energía acotada) y que evidencia un desempeño robusto ante presencia de incertidumbre.

Cabe señalar que, tanto la identificación del modelo como el cálculo de la acción de control se sustentan en la información provista por los datos de entrada-salida de la planta.

La efectividad del controlador diseñado se evaluó utilizando un modelo no lineal MIMO de una columna de destilación binaria. El controlador desarrollado mostró un desempeño de alta calidad para seguimiento de valor deseado

en presencia de incertidumbre de modelo, superando el desempeño de los otros controladores y siendo capaz de llevar al sistema suavemente hacia el estado estacionario deseado.

El enfoque presentado conforma una buena propuesta cuando se requiere robustez en el control y cuando la obtención de datos experimentales para identificación no es muy costosa.

APÉNDICE.

Determinación de los extremos

En este apéndice desarrollaremos la estrategia para la determinación de los extremos de la salida de los modelos respecto del conjunto de parámetros inciertos. La formulación seguida es similar a la propuesta en [7] en el contexto de identificación robusta.

Para el modelo PM (Ec. 3) es necesario calcular los extremos (máximo y mínimo) de:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=0}^L c_i x_i(k) = c x(k), \quad (19)$$

para $c \in \Theta$, donde $x(k) = [x_1^T(k), \dots, x_L^T(k)]^T$. Dado que las entradas del vector pueden ser positivas o negativas, se propone disociarlas como $\{x^+(k) = \max(x(k), 0)\}$ y $\{x^-(k) = \min(x(k), 0)\}$. Luego, los extremos de $\hat{y}(k)$ son:

$$\max_{c \in \Theta} \hat{y}(k) = (\hat{c} - \Delta c_l) x^-(k) + (\hat{c} + \Delta c_u) x^+(k), \quad (20)$$

y

$$\min_{c \in \Theta} \hat{y}(k) = (\hat{c} + \Delta c_u) x^-(k) + (\hat{c} - \Delta c_l) x^+(k). \quad (21)$$

Por otra parte, para el modelo GMPM (Ec. 4), el extremo debe ser calculado teniendo en cuenta que:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=0}^L (c_i x_i(k))^i, \quad c \in \Theta. \quad (22)$$

En este caso, el cálculo es más complejo debido a los términos polinomiales. Por tal razón, es conveniente separar cada $x_i(k)$ independientemente, es decir, según las siguientes definiciones:

$$\{x_i^+(k) = \max(x_i(k), 0)\}$$

y

$$\{x_i^-(k) = \min(x_i(k), 0)\}$$

Luego, los extremos para cada $(c_i x_i(k))$ en el polinomio pueden interpretarse como:

$$\max_{c \in \Theta} \hat{y}_i(k) = (\hat{c}_i - \Delta c_{li}) x_i^-(k) + (\hat{c}_i + \Delta c_{ui}) x_i^+(k) = (\gamma_u)_i \quad (23)$$

y

$$\min_{c \in \Theta} \hat{y}_i(k) = (\hat{c}_i + \Delta c_{ui}) x_i^-(k) + (\hat{c}_i - \Delta c_{li}) x_i^+(k) = (\gamma_l)_i \quad (24)$$

A partir de las definiciones previas, los extremos de $\hat{y}(k)$ para el modelo GMPM se pueden expresar del siguiente modo:

$$\max_{c \in \Theta} \hat{y}(k) = \sum_{i=1, i \text{ impar}}^L ((\gamma_u)_i)^i + \sum_{i=1, i \text{ par}}^L \max\{((\gamma_l)_i)^i, ((\gamma_u)_i)^i\} \quad (25)$$

y

$$\min_{c \in \Theta} \hat{y}(k) = \sum_{i=1, i \text{ impar}}^L ((\gamma_l)_i)^i + \sum_{i=1, i \text{ par}}^L \min\{((\gamma_l)_i)^i, ((\gamma_u)_i)^i\} \quad (26)$$

De esta manera, el procedimiento de optimización utilizado para obtener el modelo de “peor caso” (Ecs. 14, 16 y

17), se puede resolver mediante expresiones algebraicas simples (Ecs. 20, 21, 25 y 26). Además, la complejidad adicional del modelo GMPM se puede reducir confinando toda la incertidumbre al primer término (es decir, c_1). En ciertos casos esta estrategia también puede conllevar a una mejora en cuanto a las propiedades numéricas de los algoritmos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el soporte financiero proporcionado por CONICET y Universidad Nacional del Sur a través de los proyectos PIP 112-201101-01005 y PGI 24/K066, respectivamente.

REFERENCIAS

- [1] S. Boyd and L.O. Chua, "Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Volterra series," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, CAS-32, no. 11, pp.1150–1161, 1985.
- [2] F.J. Doyle III and R.K. Pearson, "Identification and Control Using Volterra Models," Springer, London, 2002.
- [3] J.K. Gruber, D. Ramirez, D. Limon and T. Alamo, "Computationally efficient nonlinear Min-Max model predictive control based on Volterra series models. Application to a pilot plant," *Journal of Process Control*, vol. 23, no. 4, pp. 543–560, 2013.
- [4] D.R. Morgan, Z. Ma, J. Kim, M.G. Zierdt and J. Pastalan, "A generalized memory polynomial model for digital predistortion of RF power amplifiers," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 54, no. 10, pp. 3852–3860, 2006.
- [5] C. Schmidt, J.E. Cousseau, J.L. Figueroa, R. Wichman and S. Werner, "Nonlinearities modeling and post-compensation in continuous-time sigmadelta modulators," *IET Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 5, no. 15, pp. 1796–1804, 2011.
- [6] C. Schmidt, S.I. Biagiola, J.E. Cousseau and J.L. Figueroa, "Volterra-type models for nonlinear systems identification", *Applied Mathematical Modelling*, vol.38, no. 9–10, pp. 2414–2421, 2014.
- [7] S.I. Biagiola, C. Schmidt and J.L. Figueroa, "Model uncertainty estimation of a solid oxide fuel cell using a Volterra-type model," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 351, no.8, pp.4183–4197, 2014.
- [8] E.F. Camacho and C. Bordons Alba, "Model Predictive Control," Springer-Verlag, London, 2004.
- [9] E.S. Meadows and J.B. Rawlings, "Model predictive control," in M.A. Henson, D.E. Seborg (Eds.), *Non Linear Process Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1997, pp. 233–310.
- [10] K. Muske and J. Rawlings, "Model predictive control with linear models," *AIChE Journal*, vol. 39, no.2, pp.262–287, 1993.
- [11] J.A. Rossiter, "Model-based predictive control: a practical approach," CRC Press, USA, 2003.
- [12] J.B. Rawling and D.Q. Mayne, "Model Predictive Control: Theory and Design," Nob Hill Publishing, LLC, 2009.
- [13] V. Adetola and, M. Guay, Robust adaptive MPC for constrained uncertain nonlinear system, *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, **25**(2):155–167, 2011.
- [14] M. Diehl and J. Bjornberg, "Robust dynamic programming for Min-Max model predictive control of constrained uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.49, no.12, pp.2253–2257, 2004.
- [15] J. Darlington, C.C. Pantelides, B.Rustem and B.A. Tanyi, "Decreasing the sensitivity of open-loop optimal solutions in decision making under uncertainty," *European Journal of Operational Research*, vol. 121, no.2, pp.343–362, 2000.
- [16] F. Allgower, R. Findeisen and Z.K. Nagy, "Nonlinear model predictive control: from theory to application," *J. Chin. Inst. Chem. Engrs.*, vol 35, no.3, pp.299–315, 2004.

[17] S. Skogestad and M. Morari, Understanding the dynamic behaviour of distillation columns, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **27**(10):1848–1862, 1988.

[18] J. Riggs, M. Karim, "Chemical and Bio-Process Control," Prentice Hall, USA, 2007.

[19] S. Skogestad and I. Postlethwaite, "Multivariable feedback control. Analysis and design," John Wiley & Sons, Chichester, 2007.

[20] M. Miccio and B. Cosenza, "Control of a distillation column by type-2 and type-1 fuzzy logic PID," *Journal of Process Control*, vol.24, no.5, pp.475–484, 2014.



Silvina Biagiola, received the B.Sc. degree in chemical engineering from the Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina and the Ph.D. degree in systems control from the Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, in 1994 and 2001, respectively. Since 2005, she has been with the Universidad Nacional del Sur and CONICET. Her research interests include modelling and control of process systems.



José Luis Figueroa, received the B.Sc. degree in electrical engineering and the Ph.D. degree in systems control from the Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, in 1987 and 1991, respectively. Since 1995, he has been with the Universidad Nacional del Sur and CONICET. His research interests include control systems and signal processing. Dr. Figueroa served as Chair of the Standing Committee on Chapter Activities of the IEEE Control Systems Society between 2002 and 2004.