补偿凸变换与半凸函数的几何奇点提取

张克威 (Kewei Zhang)[1,*]，伊琳　克鲁克斯 (Elaine Crooks)[2]，安东尼奥　奥兰度 (Antonio Orlando)[3]

谨以此文祝贺张恭庆老师八十华诞

[1] School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, University Park, Nottingham, NG7 2RD, UK；

[2] Department of Mathematics, Swansea University, Singleton Park, Swansea, SA2 8PP, UK；

[3] CONICET, Inst. de Estructuras & Dept. de Mecánica, FACET, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina

Email: kewei.zhang@nottingham.ac.uk, e.c.m.crooks@swansea.ac.uk, aorlando@herrera.unt.edu.ar

* 通讯作者

摘要　补偿凸上变换和下变换 [29, 30, 31] 是对给定函数作“紧贴”逼近的单参数单向变换。我们将它们应用到 $\mathbb{R}^n$ 中局部具有一般模的半凸／半凹函数和 DC-函数（既两个凸函数的差函数）的奇点提取。(局部）半凹函数最常见的几何例子有欧氏距离函数与平方欧氏距离函数。对于局部具有一般模的半凸函数 f，我们证明在局部意义下 x 是 f 的奇点（既不可微点）当且仅当它是 f 的 1-阶“谷点”，因而用我们的方法可以从具有一般模的局部半凸函数中提取所有的这些精细的几何奇点。更确切地讲，如果 f 是局部具有一般模的半凸函数，则“局部地”1-阶“山谷”变换在每个点 x 的极限存在，而且有显示表示 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_\lambda(f)(x)=r_x^2/4$，其中 $V_\lambda(f)(x)$ 是 f 在 x 点的“山谷”变换，r_x 是 f 在 x 点次微分 $\partial_- f(x)$ 的最小包含球面的半径 [16]。所以极限函数 $\mathcal{V}_\infty(f)(x):=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_\lambda(f)(x)=r_x^2/4$ 为我们提供了一个半凸函数奇点 1-阶“谷点”的“景观函数”。同时它也提供了补偿上凸变换 $C^u_\lambda(f)(x)$ 当 λ 趋于 $+\infty$ 时的一阶渐进展开式。对于具有局部线性模的局部半凸函数，我们进一步证明，补偿凸上变换的梯度，当 $\lambda\to+\infty$ 时的极限 $\lim_{\lambda\to+\infty}\nabla C^u_\lambda(f)(x)$ 存在，并且这个极限等于次微分 $\partial_- f(x)$ 的最小包含球面的中心。对于 DC-函数 $f=g-h$ 我们证明它的 1-阶“边缘”变换，当 $\lambda\to+\infty$ 时满足 $\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda E_\lambda(f)(x)\geq(r_{g,x}-r_{h,x})^2/4$，其中 $r_{g,x}$ 与 $r_{h,x}$ 分别是次微分 $\partial_- g(x)$ 与 $\partial_- h(x)$ 的最小包含球面的半径。

关键词　补偿凸变换，山峰变换，山谷变换，边缘变换，局部性，半凸函数，半凹函数，DC-函数，奇点提取，最小包含球面，局部逼近，局部正则性，奇点景观函数

MSC (2010) 主题分类　52A41, 41A30, 26B25, 49J52

1　引言及主要结果

大约十年前，本文第一作者将一篇关于补偿凸变换 [29] 的文章投稿到法国的非线性分析杂志，祝贺张恭庆老师七十岁寿辰。十年过去了，文 [29] 中所讨论的内容在理论上有了一些进展 [30, 31, 32, 33]。作为应用的一步，我们成功地使基于此理论的图像处理技术获得了英国专利 [34]。本文将沿着 [29] 的路线作进一步的研究。我们将用在 [29] 中引进的补偿凸变换来研究此类变换对半凸函数和半凹函数的几何逼近与几何奇点的提取。

人们通过对 Hamilton-Jacobi 方程解的研究，已经对半凸函数和半凹函数及其正则性有了较深入的了解 [7, 1, 2, 3]。DC-函数（凸函数之差）[12] 也被应用到许多优化问题 [27]。重要的半凹函数的例子包括欧氏平方距离函数。由于一般的 DC-函数与半凸／半凹函数在其值为有限的区域是局部 Lipschitz 函数 (见 [7, Theorem 2.1.7] 和 [1])，所以这些函数都是几乎处处可微的（Rademacher 定理)。关于凸／凹函数与半凸／半凹函数奇点的精细性质已经有详细的研究 [2, 3, 7]，证明半凸／半凹函数的奇点集是可矫正集 (rectifiable set)。然而从应用数学的观点看，若干自然的问题出现了。例如如何用光滑函数对此类函数进行有效的几何逼近；是否所有的奇点都是同样类型的，即对与半凹（半凸）函数，是否所有奇点都是几何“山峰”点（“山谷”点)；如何用可微性定义以外的方法有效地提取这些奇点；如何有效地测量不同奇点的“强度”。这些问题的答案在图像处理与计算机辅助设计等方面都有重要应用。例如到一个有界开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 余集的欧氏平方距离函数 $\mathsf{dist}^2(\cdot, \Omega^c)$，其奇点集 M_{Ω^c}（称为 Ω 的中轴线集 (medial axis) [5]）携带着压缩的关于 Ω 的重要几何信息。只要知道奇点集 M_{Ω^c} 及其上每一点到余集 Ω^c 的距离，则整个区域 Ω 可以完全重建。另一熟知的事实是平方距离函数 $\mathsf{dist}^2(\cdot, \Omega^c)$ 是具有线性模的 2-半凹函数 [7]。虽然中轴线集本身关于区域的扰动是不稳定的，但关于如何对被扰动的区域“稳定地”提取中轴线的问题在 [33] 中有讨论。这个问题的答案有很多实际的应用 [24]。在 [33] 中，我们对给定的闭集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 引进了中轴线映射 (medial axis map)，定义为 $M_\lambda(K)(x) = (1+\lambda)R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot, K))(x)$ 并讨论了它的一些性质，其中 $R_\lambda(f)$ 是函数 f 尺度为 λ 的山峰变换（见 [31]）。我们证明，对给定的有限尺度 $\lambda > 0$, $M_\lambda(K)$ 对中轴线集定义了一种 Hausdorff 稳定的多尺度表示，并且对任何 $x \in \mathbb{R}^n$，当 λ 趋于 $+\infty$ 时的极限 $\lim_{\lambda\to+\infty} M_\lambda(\Omega)(x)$ 存在且有表达式 $\mathsf{dist}^2(x, K) - \mathsf{dist}^2(x, \mathsf{co}(K(x)))$ ，而且所得到的极限函数为我们提供了一种对中轴线集的多尺度“景观函数”。在上面的多尺度景观函数表达式中我们有 $K(x) = \{y \in K,\ \mathsf{dist}(x, K) = |x-y|\}$，其中 $\mathsf{co}(K(x))$ 是 $K(x)$ 的凸包。

本文中的工作部分地受到 [33] 的启发，特别是关于极限表示的部分。然而本文中关于极限的结果比 [33] 所涵盖的要广泛得多。例如本文的结果可用于欧氏距离函数本身及所谓的加权的到有限点集 $K = \{x_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ 的平方距离函数 [21] $\mathsf{dist}^2_{w,b}(x, K) = \min\{w_i|x-x_i|^2 + b_i,\ x_i \in K, w_i > 0, b_i \in \mathbb{R}\}$。这些都不包括在 [33] 中。我们知道，欧氏距离函数 $\mathsf{dist}(\cdot, K)$ 在 $\mathbb{R}^n \backslash K$ 上是局部具有线性模的半凹函数 [7]。但是直接对它的奇点集的几何研究要比研究欧氏平方距离函数 $\mathsf{dist}^2(\cdot, K)$ 要难很多。关于加权平方距离函数，不难验证它是整体具线性模的半凹函数。然而就一个给定的有限尺度 $\lambda > 0$, 比较关于标准的欧氏平方距离函数奇点的研究 [33]，对加权平方距离函数奇点的直接研究难度会高很多。所以对这些更一般的情形，如果我们先研究极限的情形，相比有限尺度下的研究会容易一些。

在 [31, 32] 中, 基于补偿凸变换，我们引进了用于提取函数几何奇点的若干工具，包括对给定函数的山峰变换，山谷变换及边缘变换。对于由特征函数（点云）定义的光滑流形之间的几何相交集我们也引进了 Hausdorff 稳定的提取工具。这些工具可以在有限尺度下用于测量某类特殊奇点的强度。本文将利用这些工具渐进地提取半凸／半凹函数及 DC-函数的奇点。我们的结果表明由补偿凸变换所定义的“紧贴”逼近具有很高的逼近质量，即它们可以从半凸／半凹函数中提取直到导数阶的几何信息。

我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示标准的 n-欧氏空间，对 $x, y \in \mathbb{R}^n$，其内积与模分别用 $x \cdot y$ 和 $|x|$ 来表示。我们分别用 $\bar{A}$ 和 ∂A 来表示 $\mathbb{R}^n$ 中集合 A 的闭包与边界，$B_r(x)$ 与 $\bar{B}_r(x)$ 分别表示中心在 $x \in \mathbb{R}^n$ 且半径为 $r > 0$ 的开球与闭球体, $S_r(x) := \partial B_r(x)$ 表示中心在 $x \in \mathbb{R}^n$ 且半径为 $r > 0$ 的球面。但对凸集 A，我们也用 ∂A 来表示其相对边界，到时我们会作特殊说明。我们用 $C^1(\bar{B}_r(x))$ 表示所有在包含 $\bar{B}_r(x)$ 的开集上连续可微的实值函数，$C^{1,1}(\bar{B}_r(x))$ 表示 $C^1(\bar{B}_r(x))$ 中的子集，其上函数的导数在 $\bar{B}_r(x)$ 上 Lipschitz 连续。

在叙述我们的主要结果之前，我们首先引进 $\mathbb{R}^n$ 中函数补偿凸变换的概念。在本文中我们假设函数最多为二次增长。对于更一般的单向增长条件，见 [29]。假设 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 满足二次增长条件，即 $|f(x)| \le C_0|x|^2 + C_1$, $x \in \mathbb{R}^n$, 其中 $C_0 \ge 0$ 与 $C_1 > 0$ 为常数。我们说 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 满足线性增长条件，如果 $|f(x)| \le C_0|x| + C_1$，$x \in \mathbb{R}^n$。显然如果 f 线性增长则必二次增长。

对于满足二次增长的函数 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$，其补偿凸下变换（简称下变换）（见 [29]）当 $\lambda>C_0$，定义为

$$C^l_\lambda(f)(x)=\mathsf{co}[f+\lambda|\cdot|^2](x)-\lambda|x|^2,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

其中 $\mathsf{co}[g]$ 是给定函数 $g:\mathbb{R}^n\mapsto(-\infty,+\infty]$ 的下凸包 [22, 14]。

函数 f 的补偿凸上变换（简称上变换）（见 [29]）当 $\lambda>C_0$，定义为

$$C^u_\lambda(f)(x)=\lambda|x|^2-\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2-f](x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

不难看出，$C^u_\lambda(f)(x)=-C^l_\lambda(-f)(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$。另外如果 f 满足线性增长条件，则上下变换对一切 $\lambda>0$ 有定义。当 $\lambda,\tau>C_0$，我们还定义两个混合补偿凸变换为 $C^u_\tau(C^l_\lambda)(f)$ 和 $C^l_\tau(C^u_\lambda)(f)$。

我们知道 [31] 下变换与上变换分别是两个临界混合 Moreau 包 [19, 20, 18]，从而以数学形态学的观点看 [23, 15] 可以被视为形态开与形态闭运算 [31]。

由于我们的主要目的是描述当 $\lambda>0$ 充分大时，给定函数在山峰变换，山谷变换及边缘变换的作用之下的表现，我们引进如下局部化的补偿凸变换。由于补偿凸变换满足所谓“局部性”的性质 (见下面的命题 2.3)，我们将在后面看到我们所得到的结果将与区域选择无关。

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是非空开集，$f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 是一个局部 Lipschitz 函数，所以它在任何 Ω 的紧子集上有界。设 $x\in\Omega$ 且 $x\in G\subset\bar{G}\subset\Omega$，其中 G 是一个有界开集。设 $L_G\geq 0$ 为 $f|_{\bar{G}}:\bar{G}\mapsto\mathbb{R}$ 的 Lipschitz 常数，这里 $f|_{\bar{G}}$ 为 f 在 $\bar{G}$ 上的限制。根据 Kirszbraun's 定理 [10]，$f|_{\bar{G}}$ 可以被扩张到 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lipschitz 函数 $f_G:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$，且保持相同的 Lipschitz 常数 L_G。当然如此的扩张并不唯一。然而由于补偿凸变换的局部性，我们所得到的关于极限的结果将不依赖由 Kirszbraun's 定理所给出的 Lipschitz 扩张及有界开集 G 的选择。

下面我们对局部 Lipschitz 函数 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 在 $x\in\Omega$ 关于有界开集 G（$x\in G\subset\bar{G}\subset\Omega$）分别定义局部补偿凸下变换（简称局部下变换）与局部补偿凸上变换（简称局部上变换）为

$$C^l_{\lambda,G}(f)(x)=C^l_\lambda(f_G)(x)\quad\text{and}\quad C^u_{\lambda,G}(f)(x)=C^u_\lambda(f_G)(x),\quad x\in\mathbb{R}^n\,. \tag{1.3}$$

在 [31] 中我们分别引进了如下的山峰变换 $R_\lambda(f)$，山谷变换 $V_\lambda(f)$ 及边缘变换 $E_\lambda(f)$:

$$\begin{aligned}&R_\lambda(f)(x)=f(x)-C^l_\lambda(f)(x),\qquad V_\lambda(f)(x)=C^u_\lambda(f)(x)-f(x),\\&E_\lambda(f)(x)=C^u_\lambda(f)(x)-C^l_\lambda(f)(x)=R_\lambda(f)(x)+V_\lambda(f)(x)\quad x\in\mathbb{R}^n\,.\end{aligned} \tag{1.4}$$

这里必须指出，我们在这里定义的山谷变换总是非负的，它与 [31] 中定义的山谷变换相差一个符号。给定开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 及局部 Lipschitz 函数 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$，我们定义局部山峰，山谷及边缘变换如下。

定义 1.1. *给定 $x\in\Omega$ 及给定的有界开集 G 满足 $x\in G\subset\bar{G}\subset\Omega$，我们分别定义在 x 点关于 G 的局部山峰变换，局部山谷变换及边缘局部变换为*

$$R_{\lambda,G}(f)(x)=R_\lambda(f_G)(x),\quad V_{\lambda,G}(f)(x)=V_\lambda(f_G)(x),\quad E_{\lambda,G}(f)(x)=E_\lambda(f_G)(x). \tag{1.5}$$

设 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数，其 Lipschitz 常数为 $L\geq 0$。在 [31, Theorem 2.12 (iii)]，我们证明了对任何 $\lambda>0$，

$$C^l_\lambda(f)(x)\leq f(x)\leq C^l_\lambda(f)(x)+\frac{L^2}{4\lambda},\quad C^u_\lambda(f)(x)-\frac{L^2}{4\lambda}\leq f(x)\leq C^u_\lambda(f)(x). \tag{1.6}$$

因此如下的估计对任何 $\lambda > 0$ 成立 [31]

$$0 \leq R_\lambda(f)(x) \leq \frac{L^2}{4\lambda}, \qquad 0 \leq V_\lambda(f)(x) \leq \frac{L^2}{4\lambda}, \tag{1.7}$$

并且在 f 的任何可微点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda(f)(x_0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda V_\lambda(f)(x_0) = 0, \quad \text{hence} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda E_\lambda(f)(x_0) = 0. \tag{1.8}$$

为以后方便起见，我们分别称 $\lambda R_\lambda(f)$, $\lambda V_\lambda(f)$ 及 $\lambda E_\lambda(f)$ 为 1-阶山峰变换，1-阶山谷变换及 1-阶边缘变换。

为了便于叙述我们关于局部半凸函数的精细逼近定理，我们需要先介绍一些预备结果。首先我们需要如下关于 $\mathbb{R}^n$ 中非空紧集的最小包含球面的结果。这个问题最早是由 J. J. Sylvester 用了两行字于 1857 年对平面上的有限集提出的 [25]。接下来，在他的 1860 年的文章 [26] 中作了近一步地研究。最一般的 $\mathbb{R}^n$ 中的结果是由 Jung 于 1901 证明的 [16]。自 Jung 的工作以后有很多初等证明 [6, 28, 8] 。它们都用到凸分析中著名的 Helly 于 1923 年证明的定理 [13].

引理 1.2. *([16, 6, 28, 8]) 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为非空紧集，则*

(*i*) *存在唯一的最小闭球 $\bar{B}_r(y_0)$ 包含 K，其中半径 $r \geq 0$ 是所有包含 K 的闭球中半径最小的。球面 $S_r(x_0) = \partial B_r(x_0)$ 称为 K 的最小包含球面。*

(*ii*) *如果 d 是 K 的直径，定义为 $d := \sup\{|x-y|,\ x, y \in K\}$，则 $r \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}d$。*

(*iii*) *最小包含球面的中心 x_0 满足 $x_0 \in \mathrm{co}(K \cap S_r(x_0))$ ，这里 $\mathrm{co}(K \cap S_r(x_0))$ 是 $K \cap S_r(x_0)$ 的凸包。*

引理 1.2 (*i*) and (*ii*) 的证明可见 [6]，而 (*iii*) 的证明请看 [8, 2.6 及 6.1] 或 [11, Lemma 2]。

在本文中我们主要讨论半凸函数与半凹函数。下面是它们的定义 [7, 1]。

定义 1.3. *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一非空开凸集。*

(*i*) *函数 $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 称为在 Ω 中关于模 ω* **半凸** *如果存在非减上半连续函数 $\omega : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$，使得 $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$，且对任意 $x, y \in \Omega$ 与一切 $0 \leq s \leq 1$，*

$$sf(x) + (1-s)f(y) - f(sx + (1-s)y) \geq -s(1-s)|x-y|\omega(|x-y|). \tag{1.9}$$

(*ii*) *函数 $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 称为在 Ω 中关于模 ω* **半凹** *如果 $-f$ 在 Ω 中关于模 ω* **半凸**。

(*iii*) *对某个常数 $\lambda_0 \geq 0$，当 $r \geq 0$，如果 $\omega(r) = \lambda_0 r$ 成立, 我们称 $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 是***具有线性模的 $2\lambda_0$-半凸函数** *[7] (简称 $2\lambda_0$-半凸)。此时存在一个凸函数 $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 使得 $f(x) = g(x) - \lambda_0|x|^2$ 对一切 $x \in \Omega$ 成立 [7, Propostion 1.1.3]。函数 f 是***具有线性模的 $2\lambda_0$-半凹函数** *(简称 $2\lambda_0$-半凹) 如果 $-f$ 是具有线性模的 $2\lambda_0$-半凸函数。此时存在一个凹函数 $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 使得 $f(x) = g(x) + \lambda_0|x|^2$ 对一切 $x \in \Omega$ 成立 [7, Propostion 1.1.3]。*

(*iv*) *函数 $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 称为在 Ω 中***局部半凸** *(相应地,* **局部半凹***) 如果在任何紧凸子集 $K \subset \Omega$ 中，f 为半凸 (相应地, 半凹) 并具有模 ω_K 依赖于 K。*

(*v*) *函数 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 称为是在 Ω 中***局部具有线性模的半凸函数** *(相应地,* **局部具有线性模的半凹函数***) 如果对任何紧凸子集 $K\subset\Omega$,存在常数 $\lambda_K\geq 0$ 及凸函数 (相应地, 凹函数) $g_K:K\mapsto\mathbb{R}$ 使得当 $x\in K$, $f(x)=g_K(x)-\lambda_K|x|^2$ (相应地, $f(x)=g_K(x)+\lambda_K|x|^2$) 。*

从定义 1.3容易看出尺度为 $\lambda>0$ 的补偿凸下变换与上变换正好分别是 2λ-半凸函数与 2λ-半凹函数。事实上，它们分别是原来函数的 2λ-“半凸包”与 2λ-“半凹包”。

下面是我们关于用补偿凸上变换逼近半凸函数及奇点提取的主要结果。我们用半凸函数的 Fréchet 次微分来刻画奇点。关于次微分的定义，请见定义 2.9。关于次微分的性质，见(2.11)。

定理 1.4. (*i*) *设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为非空凸开集。如果 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 是一个局部半凸函数，而 $x_0\in\Omega$ 是 f 的奇点（不可微点），则对任何有界开集 G 满足 $x_0\in G\subset\bar{G}\subset\Omega$，我们有*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_{\lambda,G}(f)(x_0)=\frac{r_{x_0}^2}{4}, \tag{1.10}$$

其中 $r_{x_0}>0$ 是 f 在 x_0 的次微分 $\partial_-f(x_0)$ 的最小包含球面的半径。

(*ii*) *如果我们进一步假设 (i) 中的 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 是局部具有线性模的半凸函数而 $x_0\in\Omega$ 是 f 的奇点（不可微点），则对任何有界开集 G 满足 $x_0\in G\subset\bar{G}\subset\Omega$，我们有*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\nabla C^u_{\lambda,G}(f)(x_0)=y_0, \tag{1.11}$$

其中 $y_0\in\partial_-f(x_0)$ 是次微分 $\partial_-f(x_0)$ 最小包含球面的中心。

因为对任何给定的 $x\in G$，G 为 Ω 的有界开子集且 $x\in G\subset\bar{G}\subset\Omega$，在 x 的任何临域 $B_r(x)\subset\bar{B}_r(x)\subset G$，当 $\lambda>0$ 充分大时，由于补偿凸变换的局部性（见下面的命题 2.3 及 [17]), $C^u_\lambda(f_G)$ 在 $B_{r/2}(x)$ 中是一个 C^1 函数。所以 $C^u_\lambda(f_G)$ 实现了一个局部光滑上方逼近。在一个给定的奇点 $x\in G$ 这个局部光滑逼近的误差满足

$$\text{当 }\lambda\to+\infty\quad \lambda V_\lambda(f_G)(x)=\lambda(C^u_\lambda(f_G)(x)-f_G(x))\to r_x^2/4.$$

注 1.5. *对于局部半凹函数，类似定理 1.4的结果仍成立。不同之处在于我们须将山谷变换改为山峰变换从而定理 1.4(i) 应改为*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R_{\lambda,G}(f)(x_0)=\frac{r_{x_0}^2}{4}, \tag{1.12}$$

其中 $r_{x_0}>0$ 是局部半凹函数 f 在 x_0 处 (Fréchet) 超微分（superdifferential）$\partial_+f(x_0)$ 的最小包含球面的半径。定理 1.4(ii) 应改为

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\nabla C^l_{\lambda,G}(f)(x_0)=y_0, \tag{1.13}$$

其中 $y_0\in\partial_+f$ 是 $\partial_+f(x_0)$ 的最小包含球面的中心。

注 1.6. *根据定理 1.4(i) 及注 1.5，我们可以认为局部半凸函数（相应地，局部半凹函数）的奇点恰好是这个函数的“1-阶谷点”（相应地，“1-阶峰点”)。*

根据山谷变换的定义容易看出，定理 1.4(i) 给出了局部半凸函数上变换当 $\lambda\to+\infty$ 时的一个 1-阶渐进展开式:

$$C^u_\lambda(f_G)(x_0)=f_G(x_0)+\frac{r_{x_0}^2}{4\lambda}+o(1/\lambda),\ \text{当 }\lambda\to\infty, \tag{1.14}$$

其中 $o(1/\lambda)$ 是比 $1/\lambda$ 趋于 0 更快的无穷小。类似地，根据注 1.5，对局部半凹函数我们也有一个类似的 1-阶渐进展开式

$$C_\lambda^l(f_G)(x_0) = f_G(x_0) - \frac{r_{x_0}^2}{4\lambda} + o(1/\lambda),\ \text{当}\ \lambda \to \infty. \tag{1.15}$$

为使读者对补偿凸变换作用于半凸／半凹函数，相应的山峰／山谷变换以及它们的极限有一个直观的认识，我们先来考虑下面的简单例子。

例 1.7. *设 $f(x) = |x|$，$x \in \mathbb{R}$。显然，f 是一个具线性增长的凸函数。当 $\lambda > 0$，我们有*

$$\begin{aligned}
&C_\lambda^u(f)(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + \dfrac{1}{4\lambda}, & |x| \le \dfrac{1}{2\lambda}, \\ |x|, & |x| \ge \dfrac{1}{2\lambda}; \end{cases}, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{d}{dx} C_\lambda^u(f)(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \\
&\lambda V_\lambda(f)(x) = \begin{cases} \lambda^2 \left(|x| - \dfrac{1}{2\lambda}\right)^2, & |x| \le \frac{1}{2\lambda}, \\ 0, & |x| \ge \frac{1}{2\lambda}; \end{cases} \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda V_\lambda(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & x = 0, \\ 0, & x \ne 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

在这个例子中，f 在奇点 0 的次微分是 $\partial_- f(0) = [-1, 1]$。所以包含 $\partial_- f(0)$ 的最小闭区间正好等同于 $\partial_- f(0)$ 自身且其中点为 0，半径为 1。如果比较定理 1.4(i) 和 (ii)，由上面两个直接计算出的极限我们看到这正是定理 1.4的结论。 □

局部半凸／半凹函数的例子有很多 [7]。假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是开集且 $K \subset \mathbb{R}^m$ 为紧集。如果 $F : K \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 及 $\nabla_x F$ 均在 $K \times \Omega$ 上连续，则 $f(x) = \sup_{s\in K} F(s, x)$ 在 Ω 上局部半凸。如果 $\nabla_x^2 F$ 也存在并在 $K \times \Omega$ 上连续，则 f 是在 Ω 上局部具有线性模的半凸函数（见 [7, Proposition 3.4.1]）。

下面我们回到点到一个闭集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的欧氏平方距离函数与欧氏距离函数自身。它们是在奇点提取的应用中很重要的两个例子。

例 1.8. *设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为一非空闭子集，满足 $K \ne \mathbb{R}^n$。我们用 $\mathsf{dist}^2(\cdot, K)$ 来表示到 K 的欧氏平方距离函数。定义 $M_K := \{y \in \mathbb{R}^n, \exists z_1, z_2 \in K, z_1 \ne z_2\ \mathsf{dist}(x, K) = |y - z_1| = |y - z_2|\}$ 为 K 的中轴线集。熟知的事实是 M_K 恰好是 $\mathsf{dist}^2(\cdot, K)$ 的奇点集。在 [33] 中，我们证明了如下的鲁金类型的定理。设 $\lambda > 0$。如果我们定义*

$$V_{\lambda,K} := \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda\, \mathsf{dist}(x, M_K) \le \mathsf{dist}(x, K)\},$$

则对任何 $x \in \mathbb{R}^n \setminus V_{\lambda,K}$，有

$$\mathsf{dist}^2(x, K) = C_\lambda^l(\mathsf{dist}(\cdot, K))(x)$$

且

$$\overline{M_K} = \cap_{\lambda>0}^\infty V_{\lambda,K}\,.$$

作为推论，我们有 [33]

$$\mathsf{dist}^2(\cdot, K) \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n \setminus V_{\lambda,K}),$$

且

$$|\nabla\, \mathsf{dist}^2(x, K) - \nabla\, \mathsf{dist}^2(y, K)| \le 2\max\{1, \lambda\}|x - y|, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^n \setminus V_{\lambda,K}\,.$$

由于在 [33] 中，上面结果的证明依赖欧氏平方距离函数的特殊几何性质，我们还不能将它推广到更一般的半凹函数类。在 [33] 中我们对平方距离函数定义了中轴线映射
$M_\lambda(x, K) = (1 + \lambda)R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot, K)(x)$ 并证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty} M_\lambda(x, K) = \mathsf{dist}^2(x, K) - \mathsf{dist}^2(x, \mathsf{co}[K(x)]), \tag{1.17}$$

其中 $\mathsf{co}[K(x)]$ 是紧集 $K(x)=\{y\in K,\ \mathsf{dist}(x,K)=|x-y|\}$ 的凸包。

我们现在可以用定理 1.4(i) 来解释上面的极限 (1.17)。因为 $\lim_{\lambda\to+\infty} R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot,K)(x)=0$, 据 $M_\lambda(x,K)$ 的定义，我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} M_\lambda(x,K)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot,K)(x),$$

其中 $\lambda R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot,K)(x)$ 是我们的 1-阶山峰变换。现在，对 $x\in M_K$, $\mathsf{dist}^2(\cdot,K)$ 在 x 的超微分是 $\partial_+\mathsf{dist}^2(x,K)=\mathsf{co}\{2(x-y),\,y\in K(x)\}$ 从而 $\partial_+\mathsf{dist}^2(x,K)$ 的最小包含球面半径的平方 r_x^2 是 $4\Big(\mathsf{dist}^2(x,K)-\mathsf{dist}^2(x,\mathsf{co}[K(x)])\Big)$。于是 $r_x^2/4$, 作为 1-阶山峰变换的极限（见 (1.12)）恰好是 $\mathsf{dist}^2(x,K)-\mathsf{dist}^2(x,\mathsf{co}[K(x)])$ （见 (1.17), [33, Theorem 3.23]）。

例 1.9. 现在我们考虑欧氏距离函数 $\mathsf{dist}(x,K)$ 本身。一个熟知的事实是 [7, Proposition 2.2.2] 距离函数 $\mathsf{dist}(\cdot,K)$ 在 $\mathbb{R}^n\setminus K$ 中是局部具线性模的半凹函数。所以如果我们应用定理 1.4 来计算距离函数的 1-阶山峰变换的极限，我们有（见 (1.12)）

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R_\lambda(\mathsf{dist}(\cdot,K))(x)=r_x^2/4 \text{ 及 } \lim_{\lambda\to+\infty}\nabla C_\lambda^l(\mathsf{dist}(\cdot,K))(x)=y_x,\quad x\notin K,$$

其中 r_x 是超微分 $\partial_+\mathsf{dist}(x,K)$ 最小包含球面的半径，y_x 是此球面的中心。由于 $\partial_+\mathsf{dist}(x,K)=\mathsf{co}\{(x-y)/|x-y|,\ \mathsf{dist}(x,K)=|x-y|\}$, 如果我们设 $p_x\in\mathsf{co}[K(x)]$ 为 x 到凸集 $\mathsf{co}[K(x)]$ 的唯一最近点, 则有

$$r_x^2=\frac{\mathsf{dist}^2(x,K)-\mathsf{dist}^2(x,\mathsf{co}[K(x)]}{\mathsf{dist}^2(x,K)},\quad y_x=\frac{p_x}{\mathsf{dist}(x,K)}\tag{1.18}$$

通过比较 (1.17) 与 (1.18) 我们发现对 $x\notin K$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R_\lambda(\mathsf{dist}(\cdot,K))(x)=\frac{\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot,K))(x)}{4\,\mathsf{dist}^2(x,K)},$$

及

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\nabla C_\lambda^l(\mathsf{dist}(\cdot,K))(x)=\frac{\lim_{\lambda\to+\infty}\nabla C_\lambda^l(\mathsf{dist}^2(\cdot,K))(x)}{2\,\mathsf{dist}(x,K)}.$$

而对 $x\in K$, 我们总有 $R_\lambda(\mathsf{dist}(\cdot,K))(x)=R_\lambda(\mathsf{dist}^2(\cdot,K))(x)=0$。这是因为所有 K 中的点都是距离函数和平方距离函数的最小点 [29]。所以我们可以用定理 1.4 来联系 $C_\lambda^l(\mathsf{dist}(\cdot,K))(x)$ 与 $C_\lambda^l(\mathsf{dist}^2(\cdot,K))(x)$ 当 λ 趋于无穷时的渐进行为, 而后者较前者更容易研究 [33]。 □

对于 DC-函数, 即可以表示成两个凸函数之差的函数，我们有如下渐进提取边缘点的充分条件。

推论 1.10. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空凸开集。设 $g,h:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 为 Ω 上有限连续凸函数。定义 $f(x)=g(x)-h(x)$，$x\in\Omega$。取 $x_0\in\Omega$ 及有界开集 $G\subset\Omega$ 使得 $x_0\in G\subset\bar G\subset\Omega$。设 r_{g,x_0} 与 r_{h,x_0} 分别是 $\partial_-g(x_0)$ 和 $\partial_-h(x_0)$ 最小包含球面的半径。那么有

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda E_\lambda f_G(x_0)\ge\frac{(r_{g,x_0}-r_{h,x_0})^2}{4}.\tag{1.19}$$

注 1.11. *容易看出(1.19)给出的估计是已经是最优的了。如果我们令 $g(x)=h(x)=|x|$，$x\in\mathbb{R}$, 则 $r_{g,0}=r_{h,0}=1$，并且 $f\equiv 0$。从而对一切 $\lambda>0$，显然 $E_\lambda(f)(0)=0$。然而, 当 $r_{g,x_0}=r_{h,x_0}$ 时, 下面的简单例子表明 (1.19) 可以是正的。如果我们定义 $F(x,y)=|x|-|y|$，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 并令 $f(x)=|x|$, 我们有 $F(x,y)=f(x)-f(y)$。容易看出 $E_\lambda(F)(x,y)=V_\lambda(f)(x)+V_\lambda(f)(y)$, 从而根据(1.16), 我们有 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda E_\lambda(F)(0,0)=1/2>0$. 注意如果我们令 $f_1(x,y)=f(x)$ 与 $f_2(x,y)=f(y)$, 我们有 $\partial_- f_1(0,0)=[-1,1]\times\{0\}$ 和 $\partial_- f_2(0,0)=\{0\}\times[-1,1]$。再注意到 $\partial_- f_1(0,0)$ 与 $\partial_- f_2(0,0)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的最小包含球面都是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周，所以 $r_{f_1,0}=r_{f_2,0}$。一般来讲, 用次微分 $\partial_- g(x_0)$ 与 $\partial_- h(x_0)$ 来分析(1.19)的左端可能是一项需要很精细技术的工作 [27]。本文将不再进一步讨论这个问题。*

我们称补偿凸变换对函数来讲是一种“紧贴”逼近 [29]。粗略地讲就是说如果在 x_0 附近 f 是 $C^{1,1}$ 的，则存在有限的 $\Lambda>0$，使得当 $\lambda>\Lambda$ 时，我们有 $C^u_\lambda(f)(x_0)=f(x_0)=C^l_\lambda(f)(x_0)$。这就是说补偿凸上／下变换的图形在函数的光滑点处可以由上面／下面紧贴在原来的函数的图形上。如果我们考虑具线性模的半凸／半凹函数 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空开凸集，那么根据著名的 Alexandrov 定理 [9, 7]，f 在 Ω 中几乎处处二次可微, 即对几乎每个 $x_0\in\Omega$, 存在 $p\in\mathbb{R}^n$ 及一个 $n\times n$ 对称矩阵 B，使得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-p\cdot(x-x_0)-(x-x_0)\cdot B(x-x_0)}{|x-x_0|^2}=0, \tag{1.20}$$

这里我们将 $\mathbb{R}^n$ 中的向量视为列向量。我们称 $x_0\in\Omega$ 为一个 Alexandrov 点如果(1.20) 成立。

命题 1.12. *设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为非空凸开集。设 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 是一个局部具线性模的半凸或半凹函数。设 $x_0\in\Omega$ 且 G 是 Ω 的一个有界开子集，使得 $x_0\in G\subset\bar G\subset\Omega$。如果 x_0 是一个 Alexandrov 点, 则存在 $\Lambda>0$, 使得当 $\lambda\geq\Lambda$, 我们有*

$$f(x_0)=C^u_\lambda(f_G)(x_0)=C^l_\lambda(f_G)(x_0), \tag{1.21}$$

及

$$\nabla f(x_0)=\nabla C^u_\lambda(f_G)(x_0)=\nabla C^l_\lambda(f_G)(x_0). \tag{1.22}$$

注 1.13. *(i) 对于局部具有线性模的半凸函数 f，不难用补偿凸变换的局部性证明，对任何固定的 $x\in G$, 当 $\lambda>0$ 充分大，我们有 $f(x)=C^l_\lambda(f_G)(x)$。稍微杂些的部分是证明在 Alexandrov 点 x，对于有限的 $\lambda>0$，上变换 $C^u_\lambda(f_G)(x)$ 的值也达到 $f(x)$。*

(ii) 定理 1.4, 命题 1.12 及极限 (1.8) 对于补偿凸变换如何逼近局部具有线性模的半凸函数绘出了一个比较清晰的图景。

(iii) 由于在每点 $x\in G\subset\bar G\subset\Omega$, $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_{\lambda,G}(f)(x)$ 并且 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R_{\lambda,G}(f)(x)$ 存在, 我们可以分别对局部具有一般模的半凸与半凹函数定义“山谷景观映射”与“山峰景观映射”如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_\infty(f)(x)&=\lim\nolimits_{\lambda\to+\infty}\lambda V_{\lambda,G}(f)(x),\\ \mathcal{R}_\infty(f)(x)&=\lim\nolimits_{\lambda\to+\infty}\lambda R_{\lambda,G}(f)(x).\end{aligned} \tag{1.23}$$

由于局部性, (1.23)中的两个极限均与 G 的选择无关。

(iv) 由半凸函数 f 的“山谷景观映射”的定义，我们可以观察到至少三个特点:

(a) 如果 x 是一个 Alexandrov 点，则在有限时间 $\Lambda>0$ 之后，$\lambda V_{\lambda,G}(f)(x)=0$;

(b) 如果 f 在 x 点可微，则 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_{\lambda,G}(f)(x)=0$;

(c) 如果 x 是 f 的不可微点，则 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_{\lambda,G}(f)(x)=r_x^2/4>0$。

由上可见, 对于充分大的 $\lambda>0$, 同时也受限于边界 ∂G 附近点的影响，对于一个固定的 $\epsilon>0$，集合 $\{x\in G,\ \lambda V_{\lambda,G}(f)(x)>\epsilon\}$ 同时包含 f 在 G 中的奇点和大曲率点，即 $\nabla f(x)$ 不存在或 $\nabla^2 f(x)$ 的最大特征根很大的点。

在第 2节中, 我们将介绍进一步的预备结果。我们需要用它们来证明我们的主要结果定理 1.4 与推论 1.10。我们将在第 3节证明我们的主要结果。

2 一些预备结果

在本节，我们介绍一些后面要用到的补偿凸变换的基本性质。关于它们的证明细节，请见 [29, 31, 32]。我们也要介绍一些将要用到的凸分析与半凸／半凹函数方面的结果（见 [22, 14, 7]）。

补偿凸变换满足**有序性**:

$$C_\lambda^l(f)(x)\le C_\tau^l(f)(x)\le f(x)\le C_\tau^u(f)(x)\le C_\lambda^u(f)(x),\quad \tau\ge\lambda,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

对于满足二次增长条件的函数 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$，即 $|f(x)|\le C_0|x|^2+C_1$, $x\in\mathbb{R}^n$，其中 $C_0, C_1\ge 0$ 为常数，如果 $\lambda>C_0$，则如下关系式成立:

$$C_\lambda^l(f)(x)=-C_\lambda^u(-f)(x)\,.$$

如果 f 是满足二次增长条件的连续函数，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}C_\lambda^l(f)(x)=f(x),\quad \lim_{\lambda\to\infty}C_\lambda^u(f)(x)=f(x),\quad x\in\mathbb{R}^n\,.$$

如果 f 和 g 均为线性增长的函数，则当 $\lambda>0$，$\tau>0$, 我们有

$$C_{\lambda+\tau}^l(f+g)\ge C_\lambda^l(f)+C_\tau^l(g),\quad C_{\lambda+\tau}^u(f+g)\le C_\lambda^u(f)+C_\tau^u(g). \tag{2.1}$$

我们需要下面的定义（见 [4]）。

定义 2.1. *函数 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 点称为是上半可微的，如果存在 $u\in\mathbb{R}^n$ 使得*

$$\limsup_{y\to 0}\frac{f(x_0+y)-f(x_0)-u\cdot y}{|y|}\le 0\,.$$

我们需要如下的可微性结果 [17, pag 726] （更一般的结果见 [4, Corollary 2.5] ）。

引理 2.2. *设 $g:B_r(x_0)\mapsto\mathbb{R}$ 是凸函数而 $f:B_r(x_0)\mapsto\mathbb{R}$ 在 x_0 点上半可微, 且在 $B_r(x_0)$ 上，$g\le f$ 并且 $g(x_0)=f(x_0)$。则 f 与 g 在 x_0 点均可微，且 $\nabla f(x_0)=\nabla g(x_0)$。*

注意上半可微函数的一类重要例子是凹函数。下面关于 Lipschitz 函数补偿凸变换的**局部性**性质对于我们后面的证明很重要。

命题 2.3. *设 $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ 为 Lipschitz 连续函数。设其 Lipschitz 常数为 $L>0$。设 $\lambda>0$ 且 $x\in\mathbb{R}^n$。则存在 $(\tau_i,y_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,n+1$, 使得*

$$\begin{aligned}\mathsf{co}[f+\lambda|(\cdot)-x|^2](x)=\mathsf{co}_{\bar{B}_{r_\lambda}(x)}[f+\lambda|(\cdot)-x|^2](x)=\inf\Big\{\textstyle\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i[f(y_i)+\lambda|y_i-x|^2]:\\ y_i\in\mathbb{R}^n,\,\tau_i\geq 0,\ |y_i-x|\leq r_\lambda,\ \textstyle\sum_{i=1}^{n+1}\tau_i=1,\ \sum_{i=1}^{n+1}\tau_i y_i=x\Big\}\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $r_\lambda=2L/\lambda$。
进一步，存在一个仿射函数 $y\mapsto\ell(y)=a\cdot(y-x)+b$，$y\in\mathbb{R}^n$，其中 $a\in\mathbb{R}^n$，$b\in\mathbb{R}$ 满足

(i) $\ell(y)\leq f(y)+\lambda|y-x|^2$ *对一切* $y\in\mathbb{R}^n$*;*

(ii) $\ell(x_i)=f(x_i)+\lambda|x_i-x|^2$ *对* $i=1,\dots,n+1$*;*

(iii) $b=\ell(x)=\mathsf{co}[f+\lambda|(\cdot)-x|^2](x)$*。*

我们称由(2.2)定义的函数 $\mathsf{co}_{\bar{B}_{r_\lambda}(x)}[\lambda|(\cdot)-x|^2+f](x)$ 为函数 $y\in\mathbb{R}^n\mapsto\lambda|y-x|^2+f(y)$ 在 x 点关于闭球 $\bar{B}_{r_\lambda}(x)$ 的局部下凸包。

注 2.4. *(i) 命题 2.3所给出的补偿凸下变换的局部性性质也适用于补偿凸上变换。根据补偿凸下变换的位移不变性 [31], 对任何给定的 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 我们有*

$$\begin{aligned}C_\lambda^l(f)(x)&=\mathsf{co}[f+\lambda|(\cdot)-x_0|^2](x)-\lambda|x-x_0|^2,\\ C_\lambda^u(f)(x)&=\lambda|x-x_0|^2-\mathsf{co}[\lambda|(\cdot)-x_0|^2-f](x)\,,\end{aligned}\tag{2.3}$$

所以, 如果我们取 $x_0=x$, 则

$$C_\lambda^l(f)(x)=\mathsf{co}[f+\lambda|(\cdot)-x|^2](x),\quad C_\lambda^u(f)(x)=-\,\mathsf{co}[\lambda|(\cdot)-x|^2-f](x)\,.\tag{2.4}$$

由此 (2.2)所给出的正是补偿凸下变换的公式。

(ii) [29, Remark 2.1] 的一个推论就是如果 f 连续且满足线性增长条件，则在函数 $y\in\mathbb{R}^n\mapsto\lambda|y-x|^2+f(y)$ 在 $y=x$ 点下凸包定义中的下确界在某些 $\lambda_i>0$, $x_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\dots,k$, $2\leq k\leq n+1$ 处达到（见 [14, 22]），即下式成立

$$\mathsf{co}_{\bar{B}_{r_\lambda}(x)}[f+\lambda|(\cdot)-x|^2](x)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i[f(x_i)+\lambda|x_i-x|^2]$$

满足 $|x_i-x|\leq r_\lambda$, $i=1,\dots,k$，其中 $2\leq k\leq n+1$, 且 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i=x$。

下面的引理可视为定理 1.4的特例。它也是证明定理 1.4的主要工具之一。

引理 2.5. *设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 为一非空紧凸集且含有超过一个点。我们用 $S_r(-a)$ 来表示 S 的最小包含球面，其半径为 $r>0$，中心为 $-a\in\mathbb{R}^n$。考虑次线性函数 (见 [14]) $\sigma:x\in\mathbb{R}^n\to\sigma(x)=\max\{p\cdot x,\,p\in S\}$。则对任意固定的 $0\leq\epsilon<\min\{1,\,r\}$ 及任意 $\lambda>0$, 我们有*

$$C_\lambda^u(\sigma-\epsilon|\cdot|)(0)=\frac{(r-\epsilon)^2}{4\lambda},\tag{2.5}$$

$$\nabla C_\lambda^u(\sigma)(0)=-a;\tag{2.6}$$

且对任意固定的 $0 < \epsilon < \min\{1, r\}$,

$$C^u_\lambda(\sigma + \epsilon|\cdot|)(0) \le C^u_{(1-\epsilon)\lambda}(\sigma)(0) + C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(0) = \frac{r^2}{4(1-\epsilon)\lambda} + \frac{\epsilon}{4\lambda}, \tag{2.7}$$

其中

$$C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x) = \begin{cases} \epsilon\lambda|x|^2 + \dfrac{\epsilon}{4\lambda}, & |x| \le \dfrac{1}{2\lambda}, \\ \epsilon|x|, & |x| \ge \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases} \tag{2.8}$$

我们还需要下面的关于局部具有线性模的半凸函数补偿凸上变换的局部 $C^{1,1}$ 结果。

命题 2.6. *设 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 为一个 Lipschitz 函数，其 Lipschitz 常数为 $L \ge 0$。如果对某 $r > 0$，f 在闭球 $\bar{B}_{2r}(0)$ 中为 $2\lambda_0$-半凸，即 $f(x) = g(x) - \lambda_0|x|^2$ 当 $x \in \bar{B}_{2r}(0)$，其中 $\lambda_0 \ge 0$ 为常数且 $g : \bar{B}_{2r}(0) \mapsto \mathbb{R}$ 为凸函数。那么对充分大的 $\lambda \ge \lambda_0$，我们有 $C^u_\lambda(f) \in C^{1,1}(\bar{B}_r(0))$ 且*

$$|\nabla C^u_\lambda(f)(x) - \nabla C^u_\lambda(f)(y)| \le 2\lambda|x - y|, \quad x, y \in \bar{B}_r(0). \tag{2.9}$$

注 2.7. *从命题 2.6 的证明（及 [29, Theorem 4.1]，那里关于 Lipschitz 常数的估计稍欠精确）我们可以得到如下结果：如果 $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续的凸函数（例如当 $f(x) = \sigma(x)$ 为次线性函数 [14]，即 $\sigma : x \in \mathbb{R}^n \to \sigma(x) = \max\{x \cdot p,\ p \in S\}$，其中 S 为一紧凸集）则估计式(2.9)在 $\mathbb{R}^n$ 中整体成立，且 $\lambda_0 = 0$。*

我们用关于凸函数与半凸函数次微分的定义及其性质的讨论来结束本节。这些也是我们后面证明所需要的。

定义 2.8. *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空开凸集。如果 $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ 为凸函数且 $x \in \Omega$，则 f 在 x 点的次微分，由 $\partial_- f(x)$ 来表示，是由 $u \in \mathbb{R}^n$ 所定义的集合，满足（见 [14]）*

$$\text{对一切 } y \in \Omega, \quad f(y) - f(x) - u \cdot (y - x) \ge 0\,.$$

次微分 $\partial_- f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非空紧凸子集。如果我们定义次线性函数 [14, Chapter D] 为 $y \in \mathbb{R}^n \to \sigma_x(y) := \max\{u \cdot y,\ u \in \partial_- f(x)\}$ 则

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - \sigma_x(h)}{|h|} = 0, \tag{2.10}$$

其中 $\sigma_x(h)$ 定义了 f 在 x 点沿 $h \in \mathbb{R}^n$ 的方向导数。

类似于凸函数的情形，局部半凸函数也有一个由次微分定义的自然的广义导数的概念。

定义 2.9. *设 $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ 为 Ω 上定义的局部半凸函数且 $x \in \Omega$。设 G 为 Ω 的有界开凸子集，满足 $x \in G \subset \bar{G} \subset \Omega$ 且 ω_G 是 f 在 $\bar{G}$ 上的模。则 f 在 x 点的 Fréchet 次微分 $\partial_- f$ 是向量 $p \in \mathbb{R}^n$ 构成的集合，对一切 $y \in G$，满足*

$$f(y) - f(x) - p \cdot (y - x) \ge -|y - x|\omega_G(|y - x|). \tag{2.11}$$

不难证明 $\partial_- f(x_0)$ 不依赖于 G。事实上，条件(2.11)中的模函数可由一个光滑的模函数替代 (见 [1, Proposition 2.1])。与凸的情形相同，$\partial_- f(x_0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空紧凸子集。类似于凸函数的情形，我们也可以定义半凸函数在点 x 处的次线性函数 $\sigma_x(h) = \max\{p \cdot h,\ p \in \partial_- f(x)\}$。用类似于 [14, Lemma 2.1.1, Chapter D] 的证明，我们可以证明 $\sigma_x(h)$ 满足(2.10)，从而也可被视为 f 沿 h 的方向导数 [7, Theorem 3.36]。对于局部半凹函数 f，我们可以类似地引进 f 在 x 点的超微分 $\partial_+ f(x)$（superdifferential）。我们可以得到关于 $\partial_+ f(x)$ 的类似次微分的性质。

3 结果的证明

我们先假设其它结果都成立并用它们来证明我们的主要结果定理 1.4与推论 1.10。之后我们将证明其它辅助结果。

定理 1.4的证明。*第* (i) *部分:* 不失一般性，我们可以假设 $x_0=0$ 且 0 是 f 的一个奇点，并且 $f(0)=0$。设 G 为任意给定开集，满足 $0\in G\subset \bar{G}\subset\Omega$。我们可以假设对于某个 $r>0$，我们有 $\bar{B}_{2r}(0)\subset G$。由于 f 为局部半凸因而是局部 Lipschitz 函数，我们可以假设在 $\bar{B}_{2r}(0)$ 上 f 为具有模 ω_r 的半凸函数。对于任何 $x\in\bar{B}_{2r}(0)$, $\partial_- f(x)$ 非空而且

$$f(y)-f(x)-p_x\cdot(y-x)\geq -|y-x|\omega_r(|y-x|),\quad y,x\in B_{2r}(0),\ p_x\in\partial_- f(x)$$

从而, $-f$ 在 $B_{2r}(0)$ 中上半可微。根据局部性性质（命题 2.3），当 $x\in\bar{B}_{r/2}(0)$ 且 $\lambda>0$ 充分大时，我们还有

$$C^u_\lambda(f_G)(x)=\lambda|x|^2-\mathsf{co}_{\bar{B}_r(0)}[\lambda|\cdot|^2-f](x)$$

且

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(0)-\sigma_0(x)}{|h|}=0,$$

其中 $\sigma_0(h)=\max\{p\cdot h,\ p\in\partial_- f(0)\}$。注意由于我们假设 0 是 f 的奇点，故 $\partial_- f(0)$ 为紧凸集且含有超过一个点。设 $r_0>0$ 为 $\partial_- f(0)$ 的最小包含球面的半径。对于给定的 $0<\epsilon<\min\{1,r_0\}$, 存在 $0<\delta<r/2$，当 $x\in\bar{B}_\delta(0)$，我们有 $|f(x)-\sigma_0(x)|\leq\epsilon|x|$ 。这里我们用到了假设 $f(0)=0$。于是对于 $x\in\bar{B}_\delta(0)$，我们有

$$\sigma_0(x)-\epsilon|x|\leq f(x)\leq\sigma_0(x)+\epsilon|x|.$$

根据局部性性质，当 $\lambda>0$ 充分大，我们有

$$C^u_\lambda(\sigma_0-\epsilon|\cdot|)(0)\leq C^u_\lambda(f_G)(0)\leq C^u_\lambda(\sigma_0+\epsilon|\cdot|)(0).$$

根据(2.7), 我们有

$$C^u_\lambda(\sigma_0+\epsilon|\cdot|)(0)\leq C^u_{(1-\epsilon)\lambda}(\sigma_0)(0)+C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(0)=\frac{r_0^2}{4(1-\epsilon)\lambda}+\frac{\epsilon}{4\lambda}$$

从而我们得到

$$\lambda V_\lambda(f_G)(0)\leq\frac{r_0^2}{4(1-\epsilon)}+\frac{\epsilon}{4}.$$

现在根据(2.5), 我们有

$$C^u_\lambda(\sigma_0-\epsilon|\cdot|)(0)=\frac{(r_0-\epsilon)^2}{4\lambda},$$

于是

$$\frac{(r_0-\epsilon)^2}{4}\leq\lambda V_\lambda(f_G)(0)\leq\frac{r_0^2}{4(1-\epsilon)}+\frac{\epsilon}{4}.$$

最后我们在上式中就 $\lambda\to+\infty$ 取上下极限，之后让 $\epsilon\to 0+$，我们就得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda V_\lambda(f_G)(0)=r_0^2/4,$$

从而 *第* (i) *部分*的证明就完成了。 □

第 (ii) 部分的证明: 设 $x_0\in\Omega$ 为 f 的一个奇点并设 G 为一个有界开凸集，满足 $x_0\in G\subset\bar G\subset\Omega$。不失一般性，我们可以假设 $x_0=0$。由于 f 是局部具有线性模地半凸函数，我们可以假设，在 $\bar G$ 上，$f(x)=g(x)-\lambda_0|x|^2$, 其中 $g:\bar G\mapsto\mathbb{R}$ 是凸函数，$\lambda_0\geq 0$ 是常数。显然 $\partial_- f(0)=\partial_- g(0)$。由于 $f(0)=g(0)$, 我们可以进一步假设 $g(0)=0$。令 $\sigma(x)=\max\{p\cdot x,\ p\in\partial_- g(0)\}$ 为 g 在 0 点的次线性函数。

现在对任意固定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$，当 $x\in\bar B_\delta(0)$，有 $|g(x)-\sigma(x)|\leq\epsilon|x|$。所以当 $x\in\bar B_\delta(0)$，我们有

$$\sigma(x)-\lambda_0|x|^2\leq f(x)=g(x)-\lambda_0|x|^2\leq\sigma(x)-\lambda_0|x|^2+\epsilon|x|.$$

根据局部性性质, 对 $x\in\bar B_{\delta/2}(0)$, 当 $\lambda>0$ 充分大, 我们有

$$C^u_\lambda(\sigma-\lambda_0|\cdot|^2)(x)\leq C^u_\lambda(f_G)(x)\leq C^u_\lambda(\sigma+\epsilon|\cdot|-\lambda_0|\cdot|^2)(x) \tag{3.1}$$

现在我们将命题 2.6应用到 $C^u_\lambda(f_G)$, 则当 $\lambda>\lambda_0$ 充分大时, $C^u_\lambda(f_G)\in C^{1,1}(\bar B_{\delta/2}(0))$。令 $p_\lambda=\nabla C^u_\lambda(f_G)(0)$, 我们有 $|p_\lambda|\leq L_G$ 且 $C^u_\lambda(f_G)$ 是一个 L_G-Lipschitz 函数（见 [31, Theorem 3.12] 或 [7, Theorem 3.5.3]）并且当 $x\in\bar B_{\delta/2}(0)$，

$$|C^u_\lambda(f_G)(x)-C^u_\lambda(f_G)(0)-p_\lambda\cdot x|\leq 2\lambda|x|^2.$$

于是对 $x\in\bar B_{\delta/2}(0)$, 我们有

$$\begin{aligned}p_\lambda\cdot x&\leq C^u_\lambda(f_G)(x)-C^u_\lambda(f_G)(0)+2\lambda|x|^2\leq C^u_\lambda(\sigma+\epsilon|\cdot|-\lambda_0|\cdot|^2)(x)-C^u_\lambda(\sigma-\lambda_0|\cdot|^2)(0)+2\lambda|x|^2\\&=I-\frac{r_0^2}{4(\lambda+\lambda_0)}+2\lambda|x|^2.\end{aligned}$$

这里我们用到了由(2.5)给出的，当 $\epsilon=0$ 时，

$$C^u_\lambda(\sigma-\lambda_0|\cdot|^2)(0)=C^u_{\lambda+\lambda_0}(\sigma)(0)=\frac{r_0^2}{4(\lambda+\lambda_0)}.$$

根据类似证明(2.7)的方法, 我们还能得到

$$I=C^u_\lambda(\sigma+\epsilon|\cdot|-\lambda_0|\cdot|^2)(x)\leq C^u_{(1-\epsilon)\lambda}(\sigma-\lambda_0|\cdot|^2)(x)+C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x)=J_1+J_2,$$

其中

$$\begin{aligned}J_1&=C^u_{(1-\epsilon)\lambda}(\sigma-\lambda_0|\cdot|^2)(x)=C^u_{(1-\epsilon)\lambda+\lambda_0}(\sigma)(x)-\lambda_0|x|^2\\&=\Big(C^u_{(1-\epsilon)\lambda+\lambda_0}(\sigma)(x)-C^u_{(1-\epsilon)\lambda+\lambda_0}(\sigma)(0)+a\cdot x\Big)+\Big(C^u_{(1-\epsilon)\lambda+\lambda_0}(\sigma)(0)-a\cdot x-\lambda_0|x|^2\Big)\\&\leq 2\Big((1-\epsilon)\lambda+\lambda_0\Big)|x|^2+\frac{r_0^2}{4((1-\epsilon)\lambda+\lambda_0)}-a\cdot x-\lambda_0|x|^2.\end{aligned}$$

这里我们用到了(2.9), 将引理 2.5用到半凸函数 $y\mapsto\sigma-\lambda_0|x|^2$, 并有 $\nabla C^u_{(1-\epsilon)\lambda+\lambda_0}(\sigma)(0)=-a$, 其中 $-a$ 是 $\partial_- g(0)$ 的最小包含球面的半径, 同时根据引理 2.5，$C^u_{(1-\epsilon)\lambda+\lambda_0}(\sigma)(0)=r_0^2/(4((1-\epsilon)\lambda+\lambda_0))$。我们将稍后处理 $J_2=C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x)$。现在当 $\lambda>\lambda_0$ 充分大时, 我们有

$$\begin{aligned}&I-\tfrac{r_0^2}{4(\lambda+\lambda_0)}+2\lambda|x|^2\leq 2((1-\epsilon)\lambda+\lambda_0)|x|^2+\tfrac{r_0^2}{4((1-\epsilon)\lambda+\lambda_0)}-a\cdot x+C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x)\\&-\tfrac{r_0^2}{4(\lambda+\lambda_0)}+2\lambda|x|^2-\lambda_0|x|^2\leq\tfrac{\epsilon r_0^2}{4(1-\epsilon)\lambda}+8\lambda|x|^2+C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x)-a\cdot x,\end{aligned}$$

从而

$$(p_\lambda + a)\cdot x \le \frac{\epsilon r_0^2}{4(1-\epsilon)\lambda} + 8\lambda|x|^2 + C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x). \tag{3.2}$$

现在我们取

$$x_\lambda = \frac{p_\lambda + a}{2^5(1+|a|+L_G)\lambda},$$

则当 $\lambda > \lambda_0$ 充分大时，$|x_\lambda| \le 1/(2^4\lambda) < \delta/2$ 。另外还有 $|x_\lambda| < 1/(2\lambda)$ 从而在显式公式(2.8)中，

$$C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x_\lambda) = \epsilon\lambda|x_\lambda|^2 + \frac{\epsilon}{4\lambda}.$$

于是如果我们将 x_λ 代入(3.2), 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{|p_\lambda + a|^2}{2^5(1+|a|+L_G)\lambda} &\le \frac{\epsilon r_0^2}{4(1-\epsilon)\lambda} + \frac{|p_\lambda + a|^2}{2^7(1+|a|+L_G)^2\lambda} + \frac{\epsilon\lambda|p_\lambda + a|^2}{2^{10}(1+|a|+L_G)^2\lambda^2} + \frac{\epsilon}{4\lambda}\\ &\le \frac{|p_\lambda + a|^2}{2^7(1+|a|+L_G)\lambda} + \frac{\epsilon|p_\lambda + a|^2}{2^{10}(1+|a|+L_G)\lambda} + \frac{\epsilon r_0^2}{4(1-\epsilon)\lambda} + \frac{\epsilon}{4\lambda}.\end{aligned}$$

由于 $0 < \epsilon < 1$, 我们有

$$|p_\lambda + a|^2 \le 2^6(1+|a|+L_G)(\lambda+\lambda_0)\left(\frac{\epsilon r_0^2}{4(1-\epsilon)\lambda} + \frac{\epsilon}{4\lambda}\right).$$

在上面的不等式中，令 $\lambda \to +\infty$，则有

$$\limsup_{\lambda\to+\infty} |p_\lambda + a|^2 \le 2^7(1+|a|+L_G)\left(\frac{\epsilon r_0^2}{4(1-\epsilon)} + \frac{\epsilon}{4}\right).$$

最后我们令 $\epsilon \to 0+$ 从而导出，当 $\lambda \to +\infty$，有 $p_\lambda \to -a$。于是

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \nabla C^u_\lambda(f_G)(0) = -a$$

这里 $-a$ 是 $\partial_- g(0)$ 的最小包含球面的中心。第 (ii) 部分证完。 □

注 3.1. *我们还不知到对于局部具有一般模的半凸函数，定理 1.4(ii) 的某种形式是否仍然成立。如果我们想用类似于定理 1.4(ii) 的方法证明，我们须对上变换* $C^u_\lambda(f_G)(x)$ *的局部正则性了解得更多以使证明得以通过。*

推论 1.10的证明: 不失一般性，我们可以再次假设 $x_0 = 0$ 并设 $r_{g,0} < r_{h,0}$。由于 $E_\lambda(f_G)(0) = R_\lambda(f_G)(0) + V_\lambda(f_G)(0) \ge 0$, 如果 $r_{g,0} = r_{h,0}$, (1.19) 显然成立。如果 $r_{g,0} > r_{h,0}$, 由于 $E_\lambda(f_G) = E_\lambda(-f_G)$, 我们可以将问题转化到 $r_{g,0} < r_{h,0}$ 的情形。

下面，在我们的假设 $r_{g,0} < r_{h,0}$ 下，我们证明

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda(f_G)(0) \ge (r_{g,0} - r_{h,0})^2/4. \tag{3.3}$$

根据局部性 (见命题 2.3), 如果对某个 $r > 0$，$\bar{B}_r(0) \subset G$, 可见当 $\lambda > 0$ 充分大，我们有

$$\mathsf{co}[f_G + \lambda|\cdot|^2](0) = \mathsf{co}_{\bar{B}_r(0)}[g - h + \lambda|\cdot|^2](0).$$

令 $\sigma_g(x)=\max\{p\cdot x,\ p\in\partial_- g(0)\}$ 与 $\sigma_h(x)=\max\{p\cdot x,\ p\in\partial_- h(0)\}$，$x\in\mathbb{R}^n$ 分别是 g 与 h 在 0 点的次线性函数, 根据(2.10)，当 $0<\epsilon<r_{h,0}-r_{g,0}$, 我们有 $0<\delta\le r$, 只要 $x\in\bar{B}_\delta(0)$, 就使得

$$\left|\Big(g(x)-h(x)\Big)-\Big(g(0)-h(0)\Big)-\Big(\sigma_g(x)-\sigma_h(x)\Big)\right|\le\epsilon|x|$$

从而对 $x\in\bar{B}_\delta(0)$，

$$g(x)-h(x)\le\Big(\sigma_g(x)-\sigma_h(x)\Big)+\epsilon|x|+\Big(g(0)-h(0)\Big).$$

不失一般性，我们可以假设 $f(0)=g(0)-h(0)=0$。

再一次应用局部性性质, 如果 $\lambda>0$ 充分大，我们有

$$\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2+f_G](0)=\mathsf{co}_{\bar{B}_\delta(0)}[\lambda|\cdot|^2+g-h](0)\le\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2+\sigma_g-\sigma_h+\epsilon|\cdot|](0).$$

设 a_g 为 $\partial_- g(0)$ 的最小包含球面的中心并令 $\ell(x)=a_g\cdot x$，$x\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$\begin{aligned}\sigma_g(x)&=\max\{p\cdot x,\ p\in\partial_- g(0)\}-\ell(x)+\ell(x)\\&=\max\{p-a_g\cdot x,\ p\in\partial_- g(0)\}+\ell(x)\\&\le r_{g,0}|x|+\ell(x)\,.\end{aligned}$$

由于函数下凸包是仿射共变的，即 $\mathsf{co}[H+\ell]=\mathsf{co}[H]+\ell$, 可见

$$\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2+\sigma_g-\sigma_h+\epsilon|\cdot|](0)\le\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2+(r_{g,0}+\epsilon)|\cdot|-\sigma_h](0)+\ell(0).$$

因为 $\ell(0)=0$, $C^l_\lambda(H)=-C^u_\lambda(-H)$ 对具有线性增长的连续函数 H 成立, 我们可以用引理 2.5中的式(2.5) 得到

$$\begin{aligned}C^l_\lambda((r_{g,0}+\epsilon)|\cdot|-\sigma_h)(0)&=\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2+(r_{g,0}+\epsilon)|\cdot|-\sigma_h](0)\\&=-C^u_\lambda(\sigma_h-(r_{g,0}+\epsilon)|\cdot|)(0)=-\frac{(r_{h,0}-r_{g,0}-\epsilon)^2}{4}.\end{aligned}$$

所以当 $\lambda>0$ 充分大时,

$$C^l_\lambda(f_G)(0)\le-\frac{(r_{h,0}-r_{g,0}-\epsilon)^2}{4\lambda}.$$

于是

$$\lambda R_\lambda(f_G)(0)\ge\frac{(r_{h,0}-r_{g,0}-\epsilon)^2}{4}.$$

如果我们先让 $\lambda\to+\infty$, 然后让 $\epsilon\to 0+$, 我们有

$$\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda E_\lambda(f_G)(0)\ge\liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda R_\lambda(f_G)(0)\ge\frac{(r_{h,0}-r_{g,0})^2}{4}.$$

证完。 □

命题 1.12的证明: 假设 $f:\Omega\mapsto\mathbb{R}$ 是局部具有线性模的半凸函数。不失一般性，我们假设 $x_0=0$ 是一个 Alexandrov 点。令 $\lambda_0=\|B\|$ 为由公式(1.20)给出的对称矩阵 B 的算子模。对于 $\epsilon=1$, 根据 (1.20), 存在 $\delta>0$，当 $x\in\bar{B}_\delta(0)$，我们有

$$|f_G(x)-f_G(0)-p\cdot x-x^TBx|\le\epsilon|x|^2=|x|^2.$$

现在我们根据下凸包的定义，考虑仿射函数 $\ell(x) = -f_G(0) - p\cdot x$，其中 p 也由(1.20)给出。显然 $\ell(0) = -f_G(0)$。我们证明对一切 $x\in\mathbb{R}^n$，当 $\lambda>0$ 充分大，我们有 $\ell(x)\le\lambda|x|^2 - f(x)$ 从而 $-f_G(0) = \mathrm{co}[\lambda|\cdot|^2 - f_G](0)$ 于是有 $f_G(0) = C^u_\lambda(f_G)(0)$。

在 $\bar B_\delta(0)$ 上我们有

$$-f_G(x)\ge -f_G(0) - p\cdot x - x^TBx - |x|^2 \ge \ell(x) - (\lambda_0+1)|x|^2$$

从而当 $x\in\bar B_\delta(0)$ 且 $\lambda\ge\lambda_0+1$，我们有

$$\lambda|x|^2 - f_G(x)\ge \ell(x) + (\lambda-\lambda_0-1)|x|^2\ge\ell(x).$$

如果 $|x|>\delta$, 注意到 f_G 是 Lipschitz 函数，其 Lipschitz 常数为 $L_G\ge0$, 于是我们有

$$\lambda|x|^2 - f_G(x)\ge\lambda|x|^2 - L_G|x| - f_G(0),$$

然而 $\ell(x) = -f_G(0) - p\cdot x\le -f_G(0)+|p||x|$。所以 $\lambda|x|^2 - f_G(x)\ge\ell(x)$ 成立如果 $\lambda|x| - L_G\ge|p|$ 成立, 而最后的这个不等式成立如果 $\lambda\delta\ge L_G+|p|$, 即, $\lambda\ge(L_G+|p|)/\delta$ 成立。所以，如果

$$\lambda\ge\max\left\{\lambda_0+1,\ \frac{L_G+|p|}{\delta}\right\}$$

我们有 $\lambda|x|^2 - f_G(x)\ge\ell(x)$ 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立。所以 $f_G(0) = C^u_\lambda(f_G)(0)$。

由于在 G 中, $f_G(x) = f(x) = g(x) - \lambda_1|x|^2$，其中 $g:\bar G\mapsto\mathbb{R}$ 是凸函数且 $\lambda_1>0$ 是常数, 如果我们令 $\ell(x) = g(0)+q\cdot x$ 对任意固定的 $q\in\partial_-g(0)$, 则显然 $\ell(0) = g(0) = f_G(0)$。我们证明 $g(0)+q\cdot x\le f_G(x)+\lambda|x|^2$ 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立, 从而当 $\lambda>0$ 充分大，我们有 $f_G(0) = g(0) = \mathrm{co}[f_G+\lambda|\cdot|^2](0) = C^l_\lambda(f_G)(0)$。

由于 $0\in G$ 且 G 是开集, 那么存在 $\delta>0$ 使得 $\bar B_\delta(0)\subset G$。于是在 $\bar B_\delta(0)$ 中, 如果 $\lambda\ge\lambda_1$，我们有

$$f_G(x)+\lambda|x|^2 = g(x)+(\lambda-\lambda_1)|x|^2\ge g(x)\ge g(0)+q\cdot x.$$

如果 $|x|>\delta$, 类似于上变换的证明, 当 $\lambda>0$ 充分大，我们也有 $f_G(x)+\lambda|x|^2\ge\ell(x)$ 。所以当 $\lambda>0$ 充分大，$f_G(0) = C^l_\lambda(f_G)(0)$。

公式(1.22) 中的等式都是引理 2.2的直接推论。这里我们有 $C^l_\lambda(f_G)\le f_G\le C^u_\lambda(f_G)$ 及 $C^l_\lambda(f_G)(0) = f_G(0)\le C^u_\lambda(f_G)(0)$, 从而我们可导出 $\nabla C^l_\lambda(f_G)(0) = \nabla C^u_\lambda(f_G)(0) = -p$, 于是 $\nabla f_G(0) = -p$. $\square$

引理 2.5的证明: 我们先通过下面的计算来建立(2.5):

$$C^u_\lambda(\sigma-\epsilon|\cdot|)(0) = -\mathrm{co}[\lambda|\cdot|^2+\epsilon|\cdot|-\sigma](0).$$

定义

$$f_\lambda(x) = \lambda|x|^2+\epsilon|x|-\sigma(x)$$

当 $x\in\mathbb{R}^n$ 且令 $S=\partial_-f(0)$。再次定义 $S_r(-a)$ 为 S 由引理 1.2给出的最小包含球面。令

$$b = -\frac{(r-\epsilon)^2}{4\lambda}$$

并定义仿射函数 $\ell(x) = a\cdot x+b$。我们来证明 (i) 对 $p^*\in S_r(-a)\cap S$, 如果我们令

$$x^* = \frac{(|p^*+a|-\epsilon)}{2\lambda}\frac{p^*+a}{|p^*+a|}, \tag{3.4}$$

则 $f_\lambda(x^*)-a\cdot x^*=b$; 且 (ii) 如果 x^* 是 $f_\lambda(x)-a\cdot x$ 的一个最小值点，则存在某个 $p^*\in S_r(-a)\cap S$ 使得 x^* 满足(3.4) 且 $f_\lambda(x^*)-a\cdot x^*=b$。

我们首先证明 (i)。假设(3.4)成立，我们有

$$\begin{aligned} f_\lambda(x^*)-a\cdot x^* &= \lambda|x^*|^2+\epsilon|x^*|-\sigma(x^*)-a\cdot x^* \\ &= \tfrac{(|p^*+a|-\epsilon)^2}{4\lambda}-\max\{(p+a)\cdot x^*,\ p\in S\}+\epsilon\tfrac{|p^*+a|-\epsilon}{2\lambda} \\ &= \tfrac{(|p^*+a|-\epsilon)^2}{4\lambda}+\epsilon\tfrac{|p^*+a|-\epsilon}{2\lambda}-(p^*+a)\cdot x^*=-\tfrac{(|p^*+a|-\epsilon)^2}{4\lambda}=b. \end{aligned}$$

这里我们用到：x^* 的方向是沿着 p^*+a 且 $p^*+a\in\partial(S+a)$ 是实现 $\max\{(p+a)\cdot x^*,\ p\in S\}$ 的最大值点，其中 $\partial(S+a)$ 是有界闭凸集 $S+a:=\{p+a, p\in S\}$ 的相对边界 [22, 14]。

因为 $b<0$, 显然 $x=0$ 不可能是函数 $f_\lambda(x)-a\cdot x$ 的最小值点。由于函数 $f_\lambda(x)-a\cdot x$ 是连续和强制的（即当 $|x|\to+\infty$，有 $f_\lambda(x)\to+\infty$），其最小值可以达到。设 $x^*\neq 0$ 为一个最小值点，由于 $-\sigma(x)$ 上半可微且函数且当 $x\neq 0$ 时函数 $\epsilon|x|$ 可微，如果我们设 $b'<0$ 为 $f_\lambda(x)-a\cdot x$ 的最小值，即 $f_\lambda(x^*)-a\cdot x^*=b'<0$，那么根据引理 2.2, 我们有 $\nabla(f_\lambda(x^*)-a\cdot x^*)=0$, 即

$$2\lambda x^*+\epsilon\frac{x^*}{|x^*|}-(p^*+a)=0,$$

这里 $\max\{p\cdot x^*,\ p\in S\}=p^*\cdot x^*$ 且 $p^*\in\partial S$, 即 p^* 必须是 S 的一个相对边界点。显然, x^* 的方向于 p^*+a 相同。另外容易看出，由于 $x^*\neq 0$，有

$$|x^*|=\frac{|p^*+a|-\epsilon}{2\lambda}>0.$$

所以 x^* 由(3.4)确定。于是

$$b_\lambda=f_\lambda(x^*)-a\cdot x^*=-\frac{(|p^*+a|-\epsilon)^2}{4\lambda}\geq-\frac{(r_0-\epsilon)^2}{4\lambda}=b.$$

由此得到 $b_\lambda=b$, 所以 $b=\mathsf{co}[f_\lambda](0)$。由此导出

$$\lambda V_\lambda(\sigma-\epsilon|\cdot|)(0)=\lambda C^u_\lambda(\sigma-\epsilon|\cdot|)(0)=-b=\frac{(r-\epsilon)^2}{4\lambda},$$

从而(2.5)得证。

现在我们来证明(2.6), 即 $\nabla C^u_\lambda(\sigma)(0)=-a$ 。我们定义 $f_\lambda(x)=\lambda|x|^2-\sigma(x)$。我们已经看到 $\ell(x)=a\cdot x+b\leq f_\lambda(x)$ 对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 成立, 包括特殊情形 $\epsilon=0$, 其中 $-a$ 是紧凸集 $\partial\_g(0)$ 最小包含球面的中心，$b=-r^2/(4\lambda)$。由于 $f_\lambda(x)=\lambda|x|^2-\sigma(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中上半可微, 所以据 [17] 我们有 $\mathsf{co}[f_\lambda]\in C^1(\mathbb{R}^n)$。特别 $\ell(x)\leq\mathsf{co}[f_\lambda](x)$ 且 $b=\ell(0)=\mathsf{co}[f_\lambda](0)$。根据引理 2.2, 我们有 $a=\nabla\ell(0)=\nabla\,\mathsf{co}[f_\lambda](0)$。所以根据定义, $\nabla C^u_\lambda(\sigma)(0)=-a$。

下面我们建立(2.7)。根据 (2.1)，对一切 $x\in\mathbb{R}^n$ 我们有

$$C^u_\lambda(\sigma_0+\epsilon|\cdot|)(x)\leq C^u_{(1-\epsilon)\lambda}(\sigma_0)(x)+C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x).$$

在点 $x=0$, 根据 (2.5) 当 $\epsilon=0$ 时我们有

$$C^u_{(1-\epsilon)\lambda}(\sigma)(0)=\frac{r^2}{4(1-\epsilon)\lambda}.$$

同时通过直接计算容易看出 $C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(x)$ 的具体表达式由(2.8)给出。所以在 $x=0$ 点,

$$C^u_{\epsilon\lambda}(\epsilon|\cdot|)(0)=\frac{\epsilon}{4\lambda}\,.$$

证毕。 $\square$

命题 2.3的证明: 不失一般性我们假设 $x=0$。根据 [29, Remark 2.1] 我们有

$$C^l_\lambda(f)(0)=\mathsf{co}[f+\lambda|(\cdot)-x|^2](0)=\sum_{i=1}^k\lambda_i[f(x_i)+\lambda|x_i|^2 \tag{3.5}$$

其中 $2\le k\le n+1$, $\lambda_i>0$, $x_i\in\mathbb{R}^n$ for $i=1,2,\ldots,k$ 满足 $\sum_{i=1}^k\lambda_i=1$ 及 $\sum_{i=1}^k\lambda_i x_i=0$。我们定义 $f_\lambda(y)=f(y)+\lambda|y|^2$ 当 $y\in\mathbb{R}^n$。由于点 $(x_i,f_\lambda(x_i))$, $i=1,2,\ldots,k$ 位于 f 的上图 (epi-graph) $\mathrm{epi}(f_\lambda):=\{(y,\alpha),\ y\in\mathbb{R}^n,\ \alpha\ge f_\lambda(y)\}$ 的支撑超平面上, 所以存在仿射函数 $\ell(y)=a\cdot y+b$ 使得 $[(i)]$ $\ell(y)\le f_\lambda(y)$ 对一切 $y\in\mathbb{R}^n$ 和 $[(ii)]$ $\ell(x_i)=f_\lambda(x_i)$ 当 $i=1,2\ldots,k$ 时成立。根据 (ii) 及 (3.5) 我们还有 $\ell(0)=b=C^l_\lambda(f)(0)$。所以 (iii) 也成立。

为得到 r_λ 的上界估计，我们将 $y=a/(2\lambda)$ 点代入 (i) 从而估计 $|a|$ 的上界如下:

$$\frac{a\cdot a}{2\lambda}+b=\ell\left(\frac{a}{2\lambda}\right)\le f\left(\frac{a}{2\lambda}\right)+\lambda\left|\frac{a}{2\lambda}\right|^2,$$

从而

$$\frac{|a|^2}{4\lambda}\le f\left(\frac{a}{2\lambda}\right)-b=f\left(\frac{a}{2\lambda}\right)-f(0)+f(0)-b\le\frac{L|a|}{2\lambda}+\frac{L^2}{4\lambda},$$

于是 $|a|^2\le 2L|a|+L^2$。这里我们用到了 f 是 L-Lipschitz 函数及(1.7), $f(0)-b=R_\lambda(f)(0)\le L^2/(4\lambda)$ 的事实。所以我们得到 $|a|\le(1+\sqrt{2})L$。现在我们用 (ii): $a\cdot x_i+b=f(x_i)+\lambda|x_i|^2$ 得到

$$\lambda|x_i|^2=b-f(x_i)+a\cdot x_i=b-f(0)+f(0)-f(x_i)+a\cdot x_i\le L|x_i|+|a||x_i|,$$

这是由于 $b-f(0)=-R_\lambda(f)(0)\le 0$。这样我们可以导出对所有 x_i, $i=1,2,\ldots,k$,

$$|x_i|\le\frac{L+|a|}{\lambda}\le\frac{(2+\sqrt{2})L}{\lambda}.$$

所以 $r_\lambda=(2+\sqrt{2})L/\lambda$。 $\square$

命题 2.6的证明: 我们通过局部性性质（命题 2.3）将 [4, Proposition 3.7] 与 [29, Theorem 4.1] 所得到的整体 $C^{1,1}$ 性质局部化。我们将证明，当 $\lambda>0$ 充分大时, $C^u_\lambda(f)$ 在 $\bar{B}_r(0)$ 中连续可微，且满足对一切 x_0, $y_0\in\bar{B}_r(0)$,

$$-\lambda_0|y_0-x_0|^2\le C^u_\lambda(f)(y_0)-C^u_\lambda(f)(x_0)-\nabla C^u_\lambda(f)(x_0)\cdot(y_0-x_0)\le\lambda|y_0-x_0|^2, \tag{3.6}$$

其中 $\lambda_0\ge 0$ 是在 f 在 $\bar{B}_{2r}$ 上具线性模半凸，即 $f(y)=\lambda_0|y|^2-g(y)$ 的定义中所出现的常数，另外在此定义中 $g:\bar{B}_{2r}\mapsto\mathbb{R}$ 微凸函数。从(3.6) 中我们可以看到，当 $\lambda\ge\lambda_0$ 充分大时, $C^u_\lambda(f)$ 在 $\bar{B}_r(0)$ 同时为 2λ-半凸及 2λ-半凹。所以根据 [7, Corollary 3.3.8], 我们得到 $C^u_\lambda(f)\in C^{1,1}(\bar{B}_r(0))$ 且

$$|\nabla C^u_\lambda(f)(y)-\nabla C^u_\lambda(f)(x)|\le 2\lambda|y-x|$$

对一切 x, $y\in\bar{B}_r(0)$ 成立。

由于 f 是 L-Lipschitz 函数, 根据局部性性质，当 $\lambda>0$ 充分大时，对 $x_0\in\bar{B}_r(0)$ 我们有,

$$C^u_\lambda(f)(x_0)=-\,\mathsf{co}[\lambda|\cdot|^2-f](x_0)=-\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}[\lambda|x_i^{(0)}-x_0|^2-f(x_i^{(0)})]$$

其中 $1 \le k^{(0)} \le n+1$, $\lambda_i^{(0)} > 0$, $|x_i^{(0)} - x_0| \le r$。

我们定义函数 $g_\lambda(y) = \lambda|y-x_0|^2 - f(y)$。根据命题 2.3, 存在仿射函数 $\ell(y) = a \cdot (y - x_0) + b$ 使得 (i): $\ell(y) \le g_\lambda(y)$ 对一切 $y \in \mathbb{R}^n$ 成立，且 (ii): $\ell(x_i^{(0)}) = g_\lambda(x_i^{(0)})$。定义

$$\Delta_{x_0} = \left\{ \sum_{i=1}^{k^{(0)}} \mu_i x_i^{(0)},\ \mu_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k^{(0)},\ \sum_{i=1}^{k^{(0)}} \mu_i = 1 \right\}$$

为由 $\{x_1^{(0)}, \ldots, x_{k^{(0)}}^{(0)}\}$ 定义的单纯形, 那么我们可以看到 $\mathsf{co}[g_\lambda](y) = a \cdot (y - x_0) + b$ 对一切 $y \in \Delta_{x_0}$ 成立，这是由于集合 $U := \{(y, a \cdot y + b),\ y \in \Delta_0\}$ 是含在 g_λ 的上图（epi-graph）的凸包 $\mathsf{co}[\mathrm{epi}(g_\lambda)]$ 的一个面上而且 $\{(x_1^{(0)}, g_\lambda(x_1^{(0)}) \ldots, (x_m^{(0)}, g_\lambda(x_m^{(0)})\} \subset U \cap \mathrm{epi}(g_\lambda)$。

现在对一切 $y \in B_{2r}(0)$, 我们有 $\mathsf{co}[g_\lambda](y) \le g_\lambda(y)$ 同时 $\mathsf{co}[g_\lambda](x_i^{(0)}) = g_\lambda(x_i^{(0)}) = a \cdot (x_i^{(0)} - x_0) + b$ 对 $i = 1, \ldots, k^{(0)}$ 成立。进一步, 在 $\bar{B}_{2r}(0)$ 上, $g_\lambda(y) = \lambda|y-x_0|^2 - f(y)$, 这里 $f(y) = g(y) - \lambda_0|y-x_0|^2$ 是在 $\bar{B}_{2r}(0)$ 上 $2\lambda_0$-半凸的函数，其中 $g : \bar{B}_{2r}(0) \mapsto \mathbb{R}$ 是凸函数而 $\lambda_0 \ge 0$ 是常数。于是 $g_\lambda(y) = (\lambda + \lambda_0)|y - x_0|^2 - g(y)$ 在 $\bar{B}_{2r}(0)$ 中上半可微。于是从引理 2.2, 我们看到，函数 $\mathsf{co}[g_\lambda]$ 与 g_λ 都在 $x_i^{(0)}$ 可微，且

$$\nabla \mathsf{co}[g_\lambda](x_i^{(0)}) = \nabla g_\lambda(x_i^{(0)}) = 2(\lambda + \lambda_0)(x_i^{(0)} - x_0) - \nabla g(x_i^{(0)}),$$

从而对 $i = 1, \ldots, k^{(0)}$，$\nabla g(x_i^{(0)})$ 存在。如果我们在 $\bar{B}_{2r}(0)$ 中将引理 2.2应用到仿射函数 $\ell(y)$ 和上半可微函数 $g_\lambda(y)$, 我们得到 $\nabla g_\lambda(x_i^{(0)}) = a$ 当 $i = 1, \ldots, k^{(0)}$。

现在我们证明 $C_\lambda^u(f)$ 在 x_0 点可微，且 $\nabla C_\lambda^u(f)(x_0) = -a$。我们沿用 [17] 中的证明方法。由于 $\mathsf{co}[g_\lambda](x_0) = \sum_{i=1}^{k^{(0)}} \lambda_i^{(0)} g_\lambda(x_i^{(0)})$，其中 $1 \le k^{(0)} \le n+1$, 我们可以进一步假设 $\lambda_1^{(0)} \ge \cdots \ge \lambda_{k^{(0)}}^{(0)} > 0$, $|x_i^{(0)} - x_0| \le r$ （根据局部性）, 且满足 $\sum_{i=1}^{k^{(0)}} \lambda_i^{(0)} = 1$ 和 $\sum_{i=1}^{k^{(0)}} \lambda_i^{(0)} x_i^{(0)} = x_0$。于是我们有 $\lambda_1^{(0)} \ge 1/(n+1)$，现在对 $y \in \mathbb{R}^n$, 我们有

$$x_0 + y = \lambda_1^{(0)} \left(x_1^{(0)} + \frac{y}{\lambda_1^{(0)}} \right) + \sum_{i=2}^{k^{(0)}} \lambda_i^{(0)} x_i^{(0)}.$$

根据 $\mathsf{co}[g_\lambda]$ 的凸性，对 $y \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned} \mathsf{co}[g_\lambda](x_0 + y) - \mathsf{co}[g_\lambda](x_0) &\le \lambda_1^{(0)} \left(g_\lambda(x_1^{(0)} + y/\lambda_1^{(0)}) - g_\lambda(x_1^{(0)}) \right) \\ &+ \left(\textstyle\sum_{i=2}^{k^{(0)}} \lambda_i^{(0)} g_\lambda(x_i^{(0)}) - \mathsf{co}[g_\lambda](x_0) \right) = \lambda_1^{(0)} \left(g_\lambda(x_1^{(0)} + y/\lambda_1^{(0)}) - g_\lambda(x_1^{(0)}) \right). \end{aligned}$$

由于上式左端关于 y 是凸函数而右端在 $y = 0$ 点为上半可微，同时这两项在 $y = 0$ 点相等。根据引理 2.2, 我们有 $\nabla \mathsf{co}[g_\lambda](x_0) = \nabla g_\lambda(x_1^{(0)})$。所以 $\mathsf{co}[g_\lambda]$ 在 x_0 点可微。

进一步，因为 $\ell(y) \le g_\lambda(y)$ 当 $y \in \mathbb{R}^n$, 根据函数下凸包的定义, 我们有 $\ell(y) \le \mathsf{co}[g_\lambda](y)$ 当 $y \in \mathbb{R}^n$。我们还有 $\ell(x_0) = b = \mathsf{co}[g_\lambda](x_0)$。同时因为 $\mathsf{co}[g_\lambda]$ 在 x_0 点可微, 根据引理 2.2, 我们有 $\nabla \mathsf{co}[g_\lambda](x_0) = a$。所以 $\nabla C_\lambda^u(f)(x_0) = -a$。所以 $C_\lambda^u(f)$ 在 $\bar{B}_r(0)$ 中可微。梯度 $\nabla C_\lambda^u(f)$ 在 $\bar{B}_r(0)$ 中的连续性也可以从 [17] 得到。

现在我们证明，对一切 x_0, $y_0 \in \bar{B}_r(0)$, 我们有

$$C_\lambda^u(f)(y_0) - C_\lambda^u(f)(x_0) - \nabla C_\lambda^u(f)(x_0) \cdot (y_0 - x_0) \ge -\lambda_0 |y_0 - x_0|^2, \tag{3.7}$$

从而 $C_\lambda^u(f)$ 是 $\bar{B}_r(0)$ 中的 $2\lambda_0$-半凸函数。我们用前边用过的与 $C_\lambda^u(f)(x_0)$ 相关的记号。我们看到 (3.7) 等价于

$$\lambda|y_0-x_0|^2-\mathsf{co}[g_\lambda](y_0)+\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)+\nabla\,\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)\cdot(y_0-x_0)\geq-\lambda_0|y_0-x_0|^2,$$

它又等价于

$$\mathsf{co}[g_\lambda](y_0)-\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)-\nabla\,\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)\cdot(y_0-x_0)\leq(\lambda+\lambda_0)|y_0-x_0|^2.$$

注意我们有

$$\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)=\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}g_\lambda(x_i^{(0)}),\quad \nabla\,\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)=a,\quad \nabla\,\mathsf{co}[g_\lambda](x_i^{(0)})=\nabla g_\lambda(x_i^{(0)})=a.$$

因为 $y_0\in\bar{B}_r(0)$ 而 $|x_i^{(0)}-x_0|\leq r$, 我们有

$$y_0+(x_i^{(0)}-x_0)\in\bar{B}_{2r}(0)\quad\text{and}\quad\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}\Big(y_0+(x_i^{(0)}-x_0)\Big)=y_0\,.$$

从而

$$\mathsf{co}[g_\lambda](y_0)\leq\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}\,\mathsf{co}[g_\lambda](y_0+(x_i^{(0)}-x_0))\leq\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}g_\lambda(y_0+(x_i^{(0)}-x_0)).$$

我们还有

$$\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)=\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}[g_\lambda(x_0+(x_i^{(0)}-x_0))]$$

及

$$\nabla\,\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)\cdot(y_0-x_0)=a\cdot(y_0-x_0)=\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}a\cdot(y_0-x_0)=\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}\nabla g_\lambda(x_0+(x_i^{(0)}-x_0)\cdot(y_0-x_0).$$

我们注意到在 $\bar{B}_{2r}(0)$ 中, f 是 $2\lambda_0$ $-$半凸函数，且 $f(y)=g(y)-\lambda_0|y-x_0|^2$，其中 $g:\bar{B}_{2r}(0)\mapsto\mathbb{R}$ 为凸函数。于是

$$\begin{aligned}
&\mathsf{co}[g_\lambda](y_0)-\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)-\nabla\,\mathsf{co}[g_\lambda](x_0)\cdot(y_0-x_0)\\
&\leq\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}\Big(g_\lambda(y_0+(x_i^{(0)}-x_0))-g_\lambda(x_0+(x_i^{(0)}-x_0))-\nabla g_\lambda(x_0+(x_i^{(0)}-x_0))\cdot(y_0-x_0)\Big)\\
&=\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}(\lambda+\lambda_0)\Big(|(y_0-x_0)+(x_i^{(0)}-x_0))|^2-|(x_i^{(0)}-x_0))|^2-2(x_i^{(0)}-x_0)\cdot(y_0-x_0)\Big)\\
&-\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}\Big(g(y_0+(x_i^{(0)}-x_0))-g(x_0+(x_i^{(0)}-x_0))-\nabla g(x_0+(x_i^{(0)}-x_0))\cdot(y_0-x_0)\Big)\\
&\leq(\lambda+\lambda_0)|y_0-x_0|^2.
\end{aligned}$$

这里我们用 $\sum_{i=1}^{k^{(0)}}\lambda_i^{(0)}(x_i^{(0)}-x_0)=0$ 并且 g 是凸函数并在 $x_i^{(0)}$ 点可微。所以 $C_\lambda^u(f)$ 在 $\bar{B}_r(0)$ 中是 $2\lambda_0$-半凸函数。同时，根据上变换的定义，$C_\lambda^u(f)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中为 2λ-半凹函数, 因此，特别对 x_0, $y_0\in\bar{B}_r(0)$,

$$C_\lambda^u(f)(y_0)-C_\lambda^u(f)(x_0)-\nabla C_\lambda^u(f)(x_0)\cdot(y_0-x_0)\leq\lambda|y_0-x_0|^2. \tag{3.8}$$

结合 (3.7) 与 (3.8) 我们可断定当 $\lambda \geq \lambda_0$ 充分大时，$C^u_\lambda(f)$ 在 $\bar{B}_r(0)$ 中既是 $2\lambda_0$-半凸的也是 2λ-半凹的。所以根据 [7, Corollary 3.3.8], 我们得到 $C^u_\lambda(f) \in C^{1,1}(\bar{B}_r(0))$ 并且当 $\lambda \geq \lambda_0$ 充分大，我们有估计

$$|\nabla C^u_\lambda(f)(y) - \nabla C^u_\lambda(f)(x)| \leq 2\lambda |y-x|, \qquad y,\ x \in \bar{B}_r(0).$$

□

参考文献

[1] P. Albano, *Some properties of semiconcave functions with general modulus*, J. Math. Anal. Appl. **271** (2002) 217-231.

Anal. Non-Lin. H. Poincaré Inst. 10 (1993) 289-312.

[2] G. Alberti, L. Ambrosio, P. Cannarsa, *On the singularities of convex functions*, Manuscripta Math. **76** (1992) 421-435.

[3] P. Albano, P. Cannarsa, *Structural properties of singularities of semiconcave functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999) 719-740.

[4] J. M. Ball, B. Kirchheim, J. Kristensen, *Regularity of quasiconvex envelopes*, Calc. Var. PDEs **11** (2000), 333-359.

[5] H. Blum, *A transformation for extracting new descriptors of shape*, Prop. Symp. Models for the Perception of Speech and Visual Form (W. W. Dunn ed.), MIT Press (1967) 362-380.

[6] L. M. Blumenthal, G. E. Wahlin, *On the spherical surface of smallest radius enclosing a bounded subset of n-dimensional euclidean space*, Bull. Amer. Math. Soc. **47**, (1941). 771-777.

[7] P. Cannarsa, C. Sinestrari, Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control, Birkhäuser, Boston, 2004.

[8] L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, *Helly's theorem and its relatives* In: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. VII, pp. 101-180. AMS, Providence, RI (1963)

[9] L. C. Evans, Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. AMS, Providence, RI, Second Edition, 2010.

[10] L. C. Evans, R. F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[11] K. Fischer, B. Gärtner, *The smallest enclosing ball of balls: combinatorial structure and algorithms*, Int. J. Comput. Geom. Appl. **14**, (2004) 341-378.

[12] P. Hartman, *On functions representable as a difference of convex functions*, Pacific J. Math. **9** (1959), 707-713.

[13] E. Helly, *Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftichen Punkten*, Jber. Deutsch. Math. Verein **32**, (1923) 175–176.

[14] J.-B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, Fundamentals of Convex Analysis, Springer, 2001.

[15] P. T. Jackway, *Morphological scale-space*, In: Proceedings 11th IAPR International Conference on Pattern Recognition. The Hague, The Netherlands: IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, (1992), pp. 252-255.

[16] H. W. E. Jung, *Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst*, J. Reine Angew. Math. **123** (1901), 241-257.

[17] B. Kirchheim, J. Kristensen, *Differentiability of convex envelopes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333** (2001), 725-728.

[18] J. M. Lasry and P. L. Lions, *A remark on regularization in Hilbert Spaces*, Israel Math. J. 55 (1986) 257-266.

[19] J.-J. Moreau, *Proximaté dualité dans un espace Hilbertien*, Bull. Soc. Math. Fr. 93 (1965) 273-299.

[20] J.-J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire "Sur les équations aux dérivées partielles". Lecture Notes, Collége de France, 1966.

[21] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S. N. Chiu, Spatial Tessellations – Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. John Wiley & Sons, Second Edition, 2000.

[22] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton Univ. Press, 1966.

[23] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 1, Academic Press, London, 1982

[24] K. Siddiqi, S. M. Pizer (Eds), Medial Representations, Springer, New York, 2008.

[25] J. J. Sylvester, *A question in the geometry of situation*, Quarterly J. Pure and Appl. Math. **1** (1857) 79-79.

[26] J. J. Sylvester, *On Poncelet's approximate valuation of surd forms*, Philosophical Magazine **20** (1860) 203-222.

[27] J.-B. Hiriart-Urruty, *Generalized differentiability, duality and optimization for problems dealing with differences of convex functions*, In: Convexity and duality in optimization (Groningen, 1984), 37-70, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, 256, Springer, Berlin, (1985).

[28] S. Verblunsky, *On the circumradius of a bounded set*, J. London Math. Soc. **27** (1952) 505-507.

[29] K. Zhang, *Compensated convexity and its applications*, Anal. nonlin. H. Poincare Inst. **25** (2008) 743-771.

[30] K. Zhang, *Convex analysis based smooth approximations of maximum functions and squared-distance functions*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008) 379-406.

[31] K. Zhang, A. Orlando, E. C. M. Crooks, *Compensated convexity and Hausdorff stable geometric singularity extraction*, Math. Models Methods Appl. Sci. **25** (2015) 747-801.

[32] K. Zhang, A. Orlando, E. C. M. Crooks, *Compensated convexity and Hausdorff stable extraction of intersections for smooth manifolds*, Math. Models Methods Appl. Sci. **25** (2015) 839-873.

[33] K. Zhang, E. C. M. Crooks, A. Orlando, *Compensated convexity, multiscale medial axis maps and sharp regularity of the squared distance function*, to appear in SIAM J. Math. Anal.

[34] K. Zhang, A. Orlando, E. C. M. Crooks, UK Patent: *Image Processing*, Publication Number: GB2488294, 28th of October (2015).