Sobre las Relaciones de Incerteza de Heisenberg entre Tiempo y Energía: Una nota didáctica

Gastón Giribet[1,2]
[1]Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Ciudad Universitaria, Pab. I, c.p. 1428, Buenos Aires, Argentina
[2]Instituto de Física de La Plata, Universidad Nacional de La Plata. La Plata, Argentina

Esta nota fue escrita originalmente para los alumnos del curso introductorio a la mecánica cuántica dictado en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, y tiene el fin didáctico de discutir el significado de las relaciones de incerteza entre tiempo y energía presentando un brevísimo resumen de los trabajos clásicos.

I. PRELIMINARES

El principio de incerteza entre tiempo y energía representa uno de los ejemplos más concisos de aquellos aspectos que suelen ser tratados con cierta displicencia en las discusiones de los libros de texto y cursos introductorios de mecánica cuántica. Independientemente de las razones de esto, no es difícil notar que el tratamiento de este tema deja entrever cierto soslayo intencional de los aspectos medianamente sutiles. Esto es así aún cuando resulta ser un punto conceptual de cierta importancia en el ámbito didáctico precisamente por su propiedad de suscitar confusiones entre quienes se ven frente a él por primera vez. Las confusiones se deben principalmente a dos aspectos: a) La viciosa búsqueda de quienes, sin razones demasiado rigurosas, emprenden la piadosa tarea de aunar los papeles que desempeñan la variable temporal y los observables correspondientes a la posición en mecánica cuántica. b) Por otro lado, una razón para confusas interpretaciones resulta del poco empleo que del principio de incerteza entre tiempo y energía se hace en los cursos de mecánica cuántica, lo cual es fuente de que en muchas ocasiones este tema sea tratado de manera poco profunda. Esto último es, entre poco más, origen de digresiones ociosas al respecto.

Según nuestro entender, un tratamiento moderadamente satisfactorio del tema debe, al menos, dar respuesta acabada a las preguntas recurrentes de los alumnos iniciados en la formulación matemática de la teoría cuántica; a saber: a) ¿Cuál es el significado del tiempo t que aparece en el principio de indeterminación entre tiempo y energía? b) ¿Es factible definir un operador tiempo que permita realizar el observable correspondiente? c) Simplemente, ¿incerteza o indeterminación?

A pesar de que éstos no son muchos, es ciertamente posible encontrar algunos textos que tratan el tema con el detalle adecuado. Aquí, a modo de ejemplo, preferimos llamar la atención sobre la referencia [1], que discute variantes de la desigualdad de Heisenberg entre tiempo y energía de manera precisa y sistemática.

II. EL PRINCIPIO DE INCERTEZA DE HEISENBERG

Dispersión e incerteza

En su formulación original (cf. [2]), las relaciones de incerteza de Heisenberg aparecen vinculadas a la relación de conjugación existente entre ciertos pares de cantidades físicas; $v.g.$ el tiempo y la energía. Dicha conjugación, como bien sabemos, es usualmente entendida como debida al hecho de que ciertos pares de magnitudes intervinientes en la formulación de la teoría se encuentran relacionadas mediante la transformada de Fourier; esta relación deviene sin mucho desarrollo en la inecuación de Heisenberg

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

En parte, debemos esta forma de presentación a los libros clásicos de texto, los cuales nos explican casos particulares como ejemplos heurísticos para entender tales relaciones. La línea general de estos argumentos es la siguiente: Si entendemos que un estado físico de un sistema cuántico en un determinado instante t está caracterizado por la función de onda [34] $\psi(t)$ y tenemos presente que el espectro de la distribución de las componentes de energía que conforman dicho *paquete* de ondas está dado por su transformada de Fourier $\tilde{\psi}(E/\hbar)$, entonces podemos definir las desviaciones de dichas cantidades según

$$\begin{aligned}(\Delta t)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi(t)|^2 (t-t_0)^2 \\ (\Delta E)^2 &= \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dE |\tilde{\psi}(E/\hbar)|^2 (E-E_0)^2\end{aligned}$$

siendo

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi(t)|^2 t \qquad E_0 = \frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dE |\tilde{\psi}(E/\hbar)|^2 E$$

Es un ejercicio *standard* de análisis matemático mostrar que de estas definiciones se deduce (1) sin mayor dificultad. De esta manera, tenemos la primera y más simple presentación de las relaciones de incerteza. Según esto, la relación (1) debe entenderse como la inecuación satisfecha por las desviaciones definidas a partir de la distribución en energías de los estados constituyentes de un paquete de ondas que depende en el tiempo dada la función $\psi(t)$.

En efecto, esta interpretación (cf. [3]) es la adecuada cuando se trata con problemas en los que se refiere a los tiempos característicos de deformación de un paquete de ondas o cuando se trata del estudio de estados que decaen. Asumiendo conceptos básicos de la mecánica cuántica, esta es una deducción rigurosa de la inecuación (1) en el caso en el cual se trata con estados del tipo mencionado. No obstante, la intención de tratar la relación (1) en un contexto más general persiste; discutiremos aquí algunas de las interpretaciones que decoran la bibliografía.

El tiempo como un operador

Por otro lado, y lo que lleva en germen quizá la principal fuente de confusión cuando se trata de la energía y el tiempo, las restantes relaciones de incerteza pueden derivarse en el marco de la formulación de la teoría en términos de la teoría de operadores. De hecho, es usual presentar la deducción de Robertson [5], quien mostró que la simple consideración de la desigualdad de Schwarz satisfecha por los vectores de un espacio de estados sobre el cual actúan operadores autoadjuntos A y B lleva a una relación general de la forma

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 \tag{2}$$

y luego, ésta deviene en

$$\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{3}$$

si el par de operadores satisfacen $[A,B]=i\hbar$ (cf. [12]).

Como sabemos, ésta es la deducción que suele presentarse en los cursos avanzados de mecánica cuántica; y es, de suyo, el disparador primordial de algunas dudas pertinentes de cualquier alumno medianamente atento que intenta una conciliación entre la demostración de (3) y la expresión (1).

El punto central es que ante esta presentación de las relaciones de incerteza, es ineluctable preguntarse cómo entra en este contexto la relación entre el tiempo y la energía. En efecto, es difícil sentirse cómodo con el hecho de simplemente asumir que las relaciones de incerteza entre tiempo y energía son de una “naturaleza distinta a las restantes”, como podemos leer en algún libro de texto (ver por ejemplo [7]). Aunque, por otro lado, también es cierto que una mirada rápida a los principios básicos de mecánica cuántica nos basta para convencernos de que el tiempo entra en escena de una manera distinta a las demás magnitudes. Esto es, si bien es cierto que (2) nos sugiere casi inmediatamente la idea de iniciar el juego de definir un operador tiempo que represente al observable $t=\langle T\rangle$, reconocemos también sin demasiada dificultad que, como señaló enfáticamente Dirac alguna vez, el tiempo en mecánica cuántica es *ab initio* un parámetro caracterizado por un número real t y, por ende, no puede aplicarse la deducción de Roberston a los casos particulares en los cuales esta cantidad se ve involucrada como parte de una relación de incerteza.

Es el tiempo un parámetro en mecánica cuántica y no un operador. Así, la incorporación de un operador que realice tal observable no puede sino estar caracterizando un observable que refiere a cierto “(sub)sistema reloj” [19] o, en forma aún más genérica, a cierto observable que, dada la naturaleza del problema particular en cuestión, le es dado llevar unidades de tiempo. Lo cierto es que un operador T de tal suerte no puede representar, en términos generales, ningún elemento intrínseco de la descripción mecanocuántica. Esto es usualmente mencionado en algunos libros de texto; por ejemplo, en [8] se enfatiza (como lo hizo originalmente Dirac en [11]) el hecho de que t refiere a un c-número en mecánica cuántica y que, por lo tanto, la cantidad $[t,H]$ es idénticamente nula; no obstante, la relación (1) es válida a pesar de esto (cf. [9], [10]).

Asimismo, más allá de esta aserción, nada nos impide emprender la tarea lúdica de explorar las implicancias de asumir la existencia de un operador T que satisfaga las siguientes reglas de conmutación con el hamiltoniano del sistema

$$[H,T]=i\hbar \tag{4}$$

Como primera observación, notamos que la ecuación de Heisenberg nos lleva inmediatamente a que

$$\frac{dT}{dt}=\frac{i}{\hbar}[T,H]=1 \tag{5}$$

Por lo tanto, (2) nos permitiría reobtener (1) reemplazando Δt por el observable correspondiente $\Delta T=\sqrt{\langle(\Delta T)^2\rangle}$ y así reobtendríamos dicha relación de incerteza como caso particular del cálculo de operadores. Otro aspecto interesante de la suposición de la existencia de un operador con las propiedades de T es que, en su carácter de *conjugado* al hamiltoniano, los elementos de matriz $\langle t|\psi_n\rangle$ formados por los vectores $|t\rangle$ del espectro de T (si éstos existen) y los autoestados $|\psi_n\rangle$ del hamiltoniano tendrían la forma $\langle t|\psi_n\rangle \sim e^{i\frac{E_n t}{\hbar}}$, que es precisamente la dependencia temporal de la función de onda, de manera análoga a como los elementos $\langle x|\psi_n\rangle$ representan la dependencia en términos de la posición.

Sin embargo, más allá de las digresiones relacionadas a la definición del operador T, Pauli elevó al rango de teorema la observación de que la existencia de un operador que satisfaga (4) y que además posea un espectro continuo implicaría que el espectro del hamiltoniano no sea discreto y acotado inferiormente [6]. Esto es básicamente debido a que T generaría en ese caso las traslaciones en el espectro de H, las cuales estarían caracterizadas por un parámetro real que recorrería dicho espectro. De esta manera, vemos que no es posible incluir en la descripción, para el caso general, un operador hermítico T que represente al tiempo de manera tan ingenua. No obstante, permítasenos mencionar el clásico ejemplo particular del operador [35]

$$T=\frac{m}{2}\{X,P^{-1}\} \tag{6}$$

el cual, además de ser un producto simétrico de potencias de operadores localmente autoadjuntos, resuelve la ecuación $[H,T]=i\hbar$ para el hamiltoniano de una partícula libre de masa m. Volveremos a mencionar este operador en las próximas secciones cuando mencionemos la crítica de Aharonov y Bohm a las interpretaciones clásicas de la relación (1). Es importante notar la singularidad existente en el espectro de P^{-1} en (6). Otros ejemplos que permiten soslayar la prohibición implícita por el teorema de Pauli son aquéllos que corresponden a hamiltonianos que no están acotados inferiormente. Tal es el caso del hamiltoniano de una partícula gravitante, sometida al potencial $V(x)=mg\ X$, que admite $T=\frac{1}{mg}P$ como definición del operador que realiza

(5), siendo mg una constante del problema. La discusión del “tiempo como un operador” no puede considerarse completa sin referir al artículo [18], el cual se discute el tema de una interesante forma; en particular, se comenta la relación existente entre la definición de un “operador tiempo” y la definición de un observable correspondiente a la entroía.

III. INTERPRETACIONES LOCKIANAS DEL PRINCIPIO DE INCERTEZA

La deducción de Mandelstam-Tamm

Volviendo a la interpretación de la relación (1) en el contexto de la descripción de estados tipo “paquetes” que decaen o se deforman en el tiempo, cabe mencionar con particular atención la celebrada deducción que Mandelstam y Tamm presentan en [17]. En ese artículo, los autores comienzan señalando la existencia de una “conexión general entre la dispersión del espectro de energías de un cierto estado y la permanencia en el tiempo de sus magnitudes físicas”, caracterizadas éstas por los observables del sistema. Ellos se valen de dicha “conexión” para definir una formulación cuantitativa de la relación (1). El análisis de [17] comienza con la consideración de la ecuación de Ehrenfest-Heisenberg para un dado operador A

$$\langle \frac{dA}{dt} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle \tag{7}$$

Luego, teniendo en cuenta (2), se llega a mostrar que se satisface la siguiente relación entre cocientes incrementales

$$\langle \Delta H \rangle \delta t \geq \frac{\hbar}{2} \frac{\langle A(t+\delta t) - A(t) \rangle}{\delta A} \tag{8}$$

donde δA refiere al valor promedio que la cantidad ΔA adquiere en el intervalo de tiempo infinitesimal δt. Se deduce entonces la siguiente fórmula

$$\langle \Delta H \rangle \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{9}$$

donde Δt es el valor que minimiza el intervalo de tiempo δt en el cual el valor medio de cierta cantidad A se ve modificado en una cantidad igual a su promedio (ver [17] para los detalles).

Un tratamiento análogo al presentado por Mandelstam y Tamm es descripto en la referencia [28] por Shalitin. En este caso, se define la cantidad siguiente

$$\Delta T = \frac{\Delta A}{\frac{d}{dt} |\langle A \rangle|} \tag{10}$$

donde, por supuesto, ΔA y $\langle A \rangle$ están referidos a un estado particular del sistema. Así definido, ΔT mide el intervalo de tiempo en el cual la cantidad $\langle A \rangle$ es confinada en un intervalo de incerteza ΔA en torno a su valor medio. Esto es, el análisis presentado en [28] (al igual que el presentado en [17]) se basa en la definición de una medida de la “identidad” del estado que evoluciona en el tiempo [36].

Shalitin trata a modo de ejemplo una aplicación de esta forma de interpretar la relación de incerteza entre tiempo y energía al caso de estados metaestables caracterizados por el operador proyector $A = |\psi\rangle\langle\psi|$. En este análisis, $|\psi\rangle$ es un estado del sistema que satisface, en alguna aproximación, la relación $|\frac{d}{dt}\langle A \rangle| = \frac{1}{\tau}\langle A \rangle$ dado que se tratan en consideración estados con un comportamiento de la forma $\langle A \rangle \sim e^{-t/\tau}$. Luego, el simple reemplazo del comportamiento del estado metaestable en la definición de ΔT de arriba lleva a obtener que en el límite de largos tiempos se cumple

$$\Delta H \tau \sim \hbar. \tag{11}$$

Shalitin comenta luego la comparación con la interpretación usual basada en la regla de oro de Fermi para transiciones [16]. Así, aparece el tiempo característico τ de decaimiento del estado metaestable como cantidad interviniente en una relación de equivalencia que involucra a la incerteza ΔH.

La relacion (11) es usualmente referida en las aplicaciones en física de partículas, donde los tiempos de vida media τ de estados inestables aparecen en relación con el principio de Heisenberg. No obstante, notemos que elementos adicionales, tales como la forma particular de la evolución de los estados, debe ser asumida para reducir la inecuación de Heisenberg a una relación de identidad (realizada por el símbolo $\sim$) que involucre el tiempo medio τ. Es a esto a lo que nos habituamos cuando estudiamos la relación (1) como relacionada con la regla de oro de Fermi en el desarrollo de teoría de perturbaciones.

Sobre otras interpretaciones

Por último, nos permitimos llamar la atención sobre una interesante derivación de la desigualdad (1) empleando el formalismo de matriz densidad. Esta deducción se debe originalmente a Eberly y Singh [26] y fue didácticamente desarrollada en [27] por Blanchard. En este contexto, la incerteza en el tiempo Δt está medida en términos de la derivada temporal de la matriz densidad en el *picture* de Schrödinger, siendo

$$(\Delta \tilde{t})^{-2} = \frac{1}{4} \left\langle \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 \right\rangle \tag{12}$$

que satisface la desigualdad (1) para la incerteza en la energía ΔE, definida ésta según

$$(\Delta E)^2 = \left\langle (H - \langle H \rangle)^2 \right\rangle, \tag{13}$$

y es posible mostrar que una desigualdad del tipo (1) se cumple entre $\Delta \tilde{t}$ y ΔE. Esta descripción propone un criterio de selección ya que según este análisis los estados puros, a diferencia de los estados mixtos, satisfacen la mínima relación de incerteza, *i.e.* $\Delta E \Delta \tilde{t} = \hbar/2$. Asimismo, esto nos advierte de la diferencia que existe con la desigualdad de Heisenberg propiamente dicha, ya que no es difícil idear ejemplos en los que la desigualdad estricta $\Delta E \Delta t > \hbar/2$ se verifica aún para estados puros. Volvamos, en este punto, a llamar la atención sobre la referencia [18].

IV. LOS PROCESOS DE MEDICIÓN Y RELACIÓN DE INCERTEZA

La crítica de Aharonov-Bohm

En un reconocido artículo de Landau y Peierls [14] (ver también [15]), en el cual se ensayaba tempranamente sobre las limitaciones que están implícitas en el intento por extender al rango relativista las cantidades físicas definidas en la mecánica ondulatoria, se concluye la existencia de ciertas limitaciones [37] deducidas del hecho de asumir que la energía no puede ser medida con arbitraria exactitud en un corto lapso de tiempo debido a la afección provocada por el mismo proceso de medición aún en el caso de mediciones predecibles. Los autores afirman esto escudándose en la referencia explícita al punto de vista de Bohr al respecto.

Así, la interpretación sugerida en [14] descansa en la idea de que en un tiempo Δt no puede hacerse una medición en la energía de un sistema para la cual la discriminación sea menor [38] que $\hbar/\Delta t$.

Expuesto este punto de vista, según el cual se propone la interpretación de la inecuación (1) es que existe un límite en la determinación de la medición de la energía relacionada con el tiempo de duración de dicha medición, debemos mencionar el embate crítico que Aharonov y Bohm iniciaron al respecto en [19]. En este artículo, se critica la interpretación de Landau y Peierls arguyendo que una afirmación semejante no puede estar implícita en la formulación matemática de la teoría cuántica y que, por lo tanto, no puede ser considerada como la interpretación adecuada de (1). También señalan que los ejemplos presentados en la literatura ($e.g.$ en las referencias [14] y [17]) no son lo suficientemente generales como para inferir a partir de ellos la interpretación final. A modo de epílogo de su trabajo, Aharonov y Bohm presentan como contraejemplo un proceso de medición en el cual puede medirse la energía de un sistema en un tiempo finito y con arbitraria exactitud.

En [19] se indica también que la interpretación errónea de (1) se debe a una mala lectura del punto de vista de Bohr y se enfatiza que, de ser cierta una relación de incerteza entre el tiempo de duración de una medición y la precisión de la misma, ésta debería ser demostrable a partir del formalismo de la teoría ($v.g.$ en términos del cálculo de operadores). Así, ellos tratan el caso particular del operador T definido en (4) como aquél que corresponde al observable del tiempo medido por el aparato de medición, acentuando la diferencia entre el tiempo del aparato de medición y el tiempo *interno* del sistema [39]; este último conmuta con el hamiltoniano del aparato de medición. Según este análisis, (1): la relación es satisfecha para los observables del reloj.

La crítica de Aharonov y Bohm [40] deja constancia de que la interpretación de la relación (1) como relacionada al tiempo y a la precisión de una determinación en el valor de la energía es, si no incorrecta, sólo válida en casos particulares celosamente elegidos. Y es esta nuestra primera conclusión. La que, por su parte, hace a la cuestión terminológica entre incerteza e indeterminación. A saber: el principio de Heisenberg no está vinculado con la indeterminación en el proceso de medición, sino con la incerteza cuántica intrínseca de la función de onda y el espectro de energía asociado a dicha función.

Sobre el proceso de medición de un observador interno

Pocos años atrás, Aharonov y Reznik retomaron en [20] la pregunta acerca de si hay alguna conexión entre la desigualdad (1) y el acto de la medición de la energía. En el contexto del artículo [20], a diferencia de los casos tratados en [19], el proceso de medición de la energía y el tiempo empleado en tal proceso refieren a una medición que se realiza desde el mismo sistema; esto es, una medición realizada por un "observador interno". Aharonov y Reznik arguyen que en los "sistemas cerrados" es posible asociar una relación del tipo (1) al proceso de (auto)medición de la energía E, dada con una precisión ΔE, si se realiza tal estimación en un intervalo Δt (cf. [13], [21]). En palabras de los autores, se lee "*This time-energy uncertainty principle for a closed system follows from the measurement back-reaction on the system.*".

V. OTRAS DIGRESIONES AL RESPECTO

La discusión en el contexto de las teorías relativistas

Siguen en la lista de las discusiones más frecuentes en la literatura referidas a la interpretación de (1) aquéllas que se basan en esa piadosa búsqueda de razones que permitan al tiempo y a las coordenadas esenciarse en la formulación de la mecánica cuántica. Mencionábamos esto anteriormente. Estas discusiones se centran muy frecuentemente en el mito de que la asimetría que establece el papel particular del tiempo en la formulación original implica de alguna manera una incompatibilidad con los principios de covariancia de la relatividad especial. Por supuesto que esta idea es falaz; bien sabemos que la entera formulación de la mecánica cuántica entra en el marco de las teorías relativistas de campos sin que sea el papel privativo del tiempo un riesgo para la invariancia de Lorentz.

No obstante, no debe entenderse de esto que no se reconoce que la exploración del significado de los aspectos cuánticos en el ámbito de la relatividad especial sea un tema de merecida atención. Existen diversos e interesantes artículos que tratan tales temas. Por ejemplo, Hilgevoord señala en [22] aspectos sutiles de la interpretación de la variable temporal t en comparación a una confusión usual que él remarca entre las coordenadas espaciales y los observables de posición (cf. [23]). Básicamente, lo que Hilgevoord propone es que la simetría entre la variable temporal y las coordenadas espaciales está, de hecho, manifiesta debido precisamente a que en ambos casos la desigualdad de Heisenberg refiere a los parámetros t y x y no al hecho de que alguno de ellos esté eventualmente relacionado con un operador que lo realice. Esto se vincula con la idea de que, al intentar formular una teoría relativista de partículas, se llega a la teoría de campos donde, sin abandonar ningún precepto de la formulación cuántica, surge "el campo" $\Phi(x,t)$ como protagonista principal, el cual es ahora "el ente a ser cuantizado". Así, las coordenadas, relegadas al papel de parámetros de la variedad donde el campo se formula, acompañan a la definición del nuevo par conjugado $\Pi(x,t), \Phi(x,t)$.

Siguiendo con nuestro recorrido bibliográfico, pueden encontrarse en la literatura diversos ensayos sobre extensiones del principio de incerteza al caso relativista proponiendo relaciones entre el tiempo propio y el observable correspondiente a las masas de las partículas, de la forma $\Delta\tau\Delta m \sim \hbar/2c^2$.

También es frecuente verse frente a otros argumentos basados en la consideración del campo gravitatorio ya que, de hecho, algunos aspectos privativos de las teorías de gravedad amplían en gran medida la gama de aspectos interesantes relacionados con las relaciones de incerteza: La inclusión del tiempo de Planck $t_{Planck} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$ como nueva escala en la teoría, el advenimiento de las teorías formuladas sobre geometrías no conmutativas y la consideración de objetos fundamentales extendidos como cuerdas o D-branas son ejemplos de nuevos elementos que proponen un feraz y nuevo terreno para el estudio de estos temas en la física teórica.

Puebla la literatura la gama más diversa de discusiones relacionadas, que van desde interesantes tratados de interpretación hasta las más extravagantes digresiones.

La falacia de la incerteza cuántica como margen para la conservación de la energía

En otro contexto, resulta interesante comentar algunas otras disquisiciones también relacionadas con el principio de Heisenberg. Es éste el caso de un argumento heurístico que, aún cuando falto de rigor, es usualmente utilizado para apuntalar la interpretación de los procesos de interacción entre partículas fundamentales como promovida por el intercambio de partículas virtuales que "viven" un tiempo menor al intervalo $\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$ a costa de una nimia violación de la energía en la cantidad ΔE exigida por su propia existencia. Esta imagen bosquejada de lo que luego se formaliza en términos de la electrodinámica cuántica, establece que las partículas virtuales (*v.g.* fotones virtuales) que portan la interacción (*resp.* electromagnética) entre las partículas cargadas deben su existencia a una violación de la conservación de la energía que sólo ocurre en un período de tiempo protegido por el principio de incerteza. Si bien no es difícil mostrar que esta imagen de los hechos es incorrecta (o al menos incontrastable), vale en muchos casos como ilustración, y hasta resulta eficaz para obtener información de las interacciones a partir de ella. Por ejemplo, si consideramos que la interacciones entre dos electrones está mediada por la emisión de uno de estos fotones virtuales que transmite una energía de interacción ΔE, y suponemos que la vida de este portador es Δt del orden de

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar,$$

entonces nos basta tener en cuenta que el fotón viaja a la velocidad de la luz c y que en ese tiempo puede recorrer una distancia $r = c\Delta t$ para obtener que la energía total intermediada en el proceso estaría dada por $E(r) = \frac{e^2}{\hbar c}\Delta E$, ya que $\frac{e^2}{\hbar c}$ refiere a la probabilidad de que este tipo de proceso ocurra [41], siendo e la carga eléctrica del electrón. De esta manera, la energía mediada en la interacción estará dada por

$$E \sim \frac{e^2}{r} \tag{14}$$

que precisamente coincide con el potencial eléctrico (cf. [24]). Siguiendo las referencias de la literatura es posible toparse con artículos en los cuales se aventuran extrapolaciones de estas ideas a terrenos tales como el de la cosmología [25] o la física hadrónica [24].

Hay una inevitable conclusión a la que se arriba luego de explorar las diversas aristas del problema de la interpretación del principio de incerteza entre tiempo y energía. Esta conclusión hace a la innumerable cadena de falacias en la que se ve envuelto dicho principio cuando se lo trata en un contexto didáctico. Dichas falsas interpretaciones son promovidas, de manera exclusiva, por un trato imprudente del tema. Un ejemplo conciso del alcance de dichas digresiones es la referida arriba acerca de la extrapolación exagerada de la incerteza cuántica como motivo para la existencia de los "portadores virtuales" en los procesos de interacción. De hecho, no hace falta un doctorado en lógica formal para reconocer que ninguna ley de la física basada en una ecuación (*e.g.* la ley de Coulomb) puede ser derivada de una inecuación como (1) sin agregar, aunque más no sea entre líneas, hipótesis adicionales. Sobre este punto, valga otra objeción: Si verdaderamente el potencial (14) puede ser obtenido a partir de la consideración del principio de Heisenberg y poco más, entonces surge la pregunta acerca de cómo se explica que no haya una derivación análoga del potencial coulombiano en un espacio de dimensionalidad genérica d (que bien sabemos que está dado por $E \sim \frac{e^2}{r^{d-2}}$, [42]). Si estos argumentos sobrevivieran deberíamos, pues, inferir que el principio de Heisenberg nos habla de la dimensionalidad del espacio y de las cualidades del caso $d = 3$, y claro que todo esto no tiene sentido alguno.

Las confusiones conceptuales que están en germen en este tipo de argumentos se ponen de manifiesto con razones similares a las que usamos para explicar el hecho de que coexistan tantas y tan diversas interpretaciones de (1). A saber: El principio de incerteza de Heisenberg, entendido éste como un carácter intrínseco de la formulación de la teoría cuántica y, por ende, independiente del problema tratado en cada caso particular, no puede sino referir a elementos básicos de la teoría tales como la existencia de una magnitud fundamental $\hbar$, la ecuación de Schrödinger o las propiedades algebraicas del hamiltoniano y del espacio de estados sobre el cual éste actúa. Es por eso que la inclusión de artefactos tales como observables con dimensiones de tiempo representados por operadores autoadjuntos así como magnitudes de escalas típicas de dispositivos de medición no pueden llevar *per se* la razón de ser ni el significado de (1). Esto es, el significado de (1) no puede depender de la carga del electrón, ni de la velocidad de la luz, ni de la escala de Planck.

A modo de corolario: Magnitudes y escalas

En efecto, si hay algún vestigio de verdad en los sofismas atacados anteriormente, éste no puede estar relacionado más que con la casualidad o con el simple hecho de que sólo una verdad de perogrullo se esconde atrás de atribuirle a (1) un nuevo significado. El significado del principio de incerteza de Heisenberg es aquel que se relaciona con las campanas de dipersión de las distribuciones en el espectro de energías que discutimos al comienzo. Su significado está claro en los casos en los cuales se trata con configuraciones que nos permiten hablar de "paquetes de onda" y es lo que se discute, por ejemplo, en las interpretaciones *alla* Mandelstam y Tamm.

Por supuesto que cuando la pregunta acerca del significado de cierta expresión se dirige hacia una teoría fundamental y tan de base como la mecánica cuántica, la respuesta habría de resultar más fácil. Esto es así por cuántos menos elementos hay de los cuales puede depender el significado de lo que se desea entender (en este caso, el significado de (1)). Por esto, cualquier significado del principio de incerteza debe estar, como señalaron tempranamente Aharonov y Bohm, en la descripción matemática de la teoría.

Por su parte, dada la austeridad a la hora de contar los elementos básicos en la formulación de la teoría cuántica [43], no debe resultar demasiado sorprendente que la sola inclusión de unas pocas cantidades con dimensiones de tiempo y energía a la hora de atacar un problema particular nos lleve a obtener relaciones del tipo $\Delta t \Delta E \sim \hbar$, o bien $\Delta t \Delta E < \hbar$, o bien $\Delta t \Delta E > \hbar$, o bien $\Delta t \Delta E = 177\hbar$; pero esto no es más que una casualidad cuya frecuencia es bien explicada por la generalidad y frugalidad del formalismo, lo que lleva a que no haya, *ab initio*, demasiadas magnitudes con unidades de *tiempo* $\times$ *energía*.

En resumen, no debemos interpretar que cada relación que lleve tiempos y energías del lado izquierdo y una constante relacionada con $\hbar$ del lado derecho resulta ser una manifestación hasta entonces desconocida del principio (1). Basta para convencernos de esto considerar otro ejemplo: Recientemente se ha argüído que la cuantización canónica de la gravedad lleva a que los estados puros evolucionan naturalmente hasta convertirse en estados mixtos debido a una decoherencia inducida por la no-existencia de relojes ideales clásicos, los cuales son reemplazados en esta teoría por "relojes cuánticos" [32]. Así, aparecería en este tratamiento de la gravedad cuántica una escala de tiempos de decoherencia t_{decoh} que, combinada con la escala de Planck t_{Planck} para definir la cantidad $(\Delta t)^2 = t_{decoh} t_{Planck}$, deviene en una relación

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar$$

donde $E/\hbar$ es la frecuencia asociada a la dispersión en el espectro de energías de los estados del sistema que está bajo estudio. Y esto tiene poco (si no es que absolutamente nada) que ver con (1). En efecto, esto resulta en una modificación de la mecánica cuántica en uno de sus basamentos: el carácter del tiempo. Por lo cual una conexión de esto con el principio de Heisenberg es, si no nula, para nada evidente.

VI. SOBRE LA NATURALEZA DEL TIEMPO EN MECÁNICA CUÁNTICA

El tiempo cosmológico

Retomemos ahora el tema de los observables de tiempo. La inclusión de operadores temporales T que reemplacen al c-número t con el que la mecánica cuántica nació no es adecuada más allá de los (no tan generales) ejemplos en los cuales se le puede asignar el papel de reloj a alguna parte del sistema que rige cierto período de algún subproceso (*e.g.* de medición).

Para precisar esto, demos un ejemplo de contexto en el cual la búsqueda de un operador T que realice el observable de tiempo en la teoría cuántica adquiere sentido: éste es el caso del programa de cuantización de modelos cosmológicos provenientes de la acción de Einstein-Hilbert para el campo gravitatorio. La gravedad es un ejemplo de lo que se conoce como modelo hamiltoniano con un vínculo cuadrático y, en particular, el vínculo existente en este caso se traduce en el hecho de que el hamiltoniano H se anula idénticamente, *i.e.* $H = 0$.

La versión cuántica de tal ecuación se conoce con el nombre de ecuación de Wheeler-De Witt. Luego, la cuantización de tal tipo de teoría requiere como paso previo la identificación de un operador temporal T [44] que permita ser identificado con *el tiempo del sistema* y que satisfaga estar globalmente bien definido. Esto último es, entre otras cosas, pedir que el operador $[H, T]$ sea definido positivo sobre el espacio de funciones de onda ψ, que adquieren en este contexto la interpretación de *funciones de onda del universo* [31]. En muchos de los modelos cosmológicos cuánticos que representan universos homogéneos, el operador tiempo T, que siempre está vinculado a los grados de libertad de la geometría (universo) en cuestión, es directamente identificado con el radio del universo en expansión u otra variable asociada, *e.g.* alguna medida de la anisotropía, *etc*. Así, cuando la pregunta se refiere al universo en su totalidad el parámetro temporal no es tratado como un elemento externo (ver [33] para un *review* de este tema).

Ahora bien, peculiaridades tales como la representación del tiempo en la cuantización de modelos cosmológicos resultan ser un débil argumento como para extrapolar semejante realización al terreno de la teoría cuántica en un contexto general. En todo caso, cualquier intento por hacerlo conforma, en sí, una generalización de la teoría.

El tiempo y los relojes

Siguiendo con esta observación, hay en la literatura intentos por escindir al tiempo de su carácter de parámetro independiente de los procesos físicos que transcurren en él. Se ensayó la posibilidad de *rever* el concepto de evolución temporal en mecánica cuántica basándose en la referencia a un subproceso físico que oficia, de este modo, de *elemento reloj*. Por ejemplo, Wootters trata en [30] el ejemplo de un sistema de partículas, el cual le sirve para mostrar que el la evolución temporal descrita en términos del parámetro t es reemplazable por la correlación cuántica entre las distintas partículas del sistema usando una de ellas como "reloj". Con grandilocuencia, Wootters afirma como conclusión que "no es necesario incluir al tiempo como un elemento básico en la descripción del mundo".

VII. CONCLUSIONES

Condensando, pues, en forma de corolarios aquellas conclusiones que derivamos, podemos enunciar los siguientes:

a) La controversia terminológica entre incerteza e indeterminación se plantea, de forma más precisa, en términos de la pregunta acerca de si es correcta la interpretación del principio de Heisenberg (1) como involucrando a la precisión en una medición de la energía realizada en un intervalo Δt y que arroja un resultado con indeterminación ΔE. La respuesta a esta pregunta es negativa y ha sido expuesta en el trabajo de Aharonov y Bohm con lucidez. Es esta una de las más frecuentes confusiones.

b) Acerca de la cuestión de si existe un operador tiempo que realice el observable correspondiente de manera de aunar (1) con los casos que son tratables con la deducción de Robertson, podemos responder lo siguiente: La existencia de un operador temporal T en mecánica cuántica no es una propiedad general de todo caso estudiado. Cierto es que hay ejemplos en los cuales es factible definir un operador de tal suerte; no obstante, en tales casos, y como resulta evidente, el observable $\langle T\rangle$ refiere a una cantidad particular y propia de dicho ejemplo y no es el tiempo t que la mecánica cuántica contempla en sus fundamentos. La existencia de T tal que $\langle T\rangle$ resulte monótono en el tiempo t es una particularidad del hamiltoniano particular bajo estudio y no representa una razón para pretender que t resulte reemplazado en la formulación de la teoría cuántica. Las sutilezas del ejemplo de la cosmología cuántica son desarrolladas con pericia en la literatura.

c) También podemos dar una razón para la frecuente aparición de falaces interpretaciones de la desigualdad de Heisenberg. Este fenómeno se debe, como mencionábamos, a la simplicidad de los ejemplos tratados usualmente que, sumada a la austeridad del formalismo de la teoría, hacen fácil incurrir en el error de relacionar cualquier relación del tipo $\Delta t\Delta E \sim \hbar$ con la desigualdad (1). Por supuesto, cuando los ejemplos y modelos estudiados aumentan en complejidad y adquieren más estructura (*i.e.* más elementos con unidades en un sistema) las relaciones funcionales involucrando tiempos y energías características se multiplican. Para expresar esto en forma aún más concisa: La discusión del principio de incerteza mediante ejemplos particulares introduce escalas de energía y de tiempos que son propios de dichos ejemplos. Así, algunas relaciones entre dichos tiempos y energías pueden satisfacer relaciones análogas a (1). No obstante, extrapolar conclusiones a partir de esto es riesgoso ya que puede llevar a errores de interpretación. El mejor ejemplo es, acaso, el de los métodos ideados para medir la energía de una partícula libre basándose en el "tiempo de vuelo" de ésta, lo que llevó al error de asociar (1) al acto de medición; interpretación que, como mencionamos, fue criticada en [19] con agudeza.

d) Por último, enfaticemos que no hay forma de deducir identidades del tipo $\Delta E\tau \sim \hbar$ a partir de (1) sin asumir elementos adicionales. Esto es tan cierto cuanto que no hay conexión directa entre el principio de Heisenberg y una licencia para la violación de las leyes de conservación en la naturaleza.

De esta manera, reconocemos que aún en aquellos momentos en los cuales nos permitimos disfrutar de los argumentos heurísticos y tratamientos cualitativos de los fenómenos, no debemos perder de vista que toda consideración seria en física debe estar sustentada, casi por definición, por una formulación precisa de los entes intervinientes en términos de relaciones matemáticas y, sumado a esto, de una específica estructura semántica que dé cuenta del significado unívoco de cada representación.

[1] P. Busch, in: *Time in Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 69 (2002).
[2] W. Heisenberg, Z. Phys. **43**, 172 (1927).
[3] N. Bohr, Nature Suppl., April 14th, 580 (1928).
[4] E. Schrödinger, Proc. The Prussian Acad. of Sci. XIX, 269 (1930).
[5] H.P. Robertson, Phys. Rev. **34**, 163 (1929).
[6] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik 2nd edition, Vol. 245, (Berlin: Springer) (1933).
[7] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1995).
[8] Y.S. Kim y M.E. Noz, *Phase Space Picture of Quantum Mechanics*, World Scientific Lecture Notes in Physics **40**, 1991.
[9] P.A.M. Dirac, Proc. Roy.Soc. (London) **A114**, 234, 1930.
[10] P.A.M. Dirac, Proc. Roy.Soc. (London) **A114**, 710, 1930.
[11] P.A.M. Dirac, *The Principle of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London, 1958.
[12] E.U. Condon, Science LXIX, 573, May 3 (1929).
[13] A. Einstein, R. Tolman y B. Podolsky, Phys. Rev. **37** (1931).
[14] L.D. Landau y R. Peierls, Z. Phys. **69**, 56 (1931).
[15] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz y L.P. Pitaevskii, *Curso de Física Teórica: Teoría Cuántica Relativista*, Vol. 4, Parte I, Reverté (1975).
[16] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica: Teoría Cuántica no Relativista*, Vol. 3, Reverté (1971).
[17] I. Mandelstam y I. Tamm, J. of Phys. Vol. IX **4**, 249 (1945).
[18] B. Misra, I. Prigogine and M. Courbage, in the *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **76**, 4768 (1979).
[19] Y. Aharonov y D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961).
[20] Y. Aharonov y B. Reznik, Phys.Rev.Lett. **84**, 1368 (2000).
[21] Y. Aharonov, S. Massar y S. Popescu, Phys. Rev. **A66**, 052107 (2002).
[22] J. Hilgevoord, Am. J. Phys. **64**, 1451 (1996).
[23] P.E. Hussar, Y.S. Kim y M.E. Noz, Am. J. Phys. **53**, 142 (1985).
[24] R.C. Harvey, Am. J. Phys. **41**, 67 (1973).
[25] E. Tyron, Nature, November 14th, 396 (1973).

[26] J.H. Eberly y L.P.S. Singh, Phys.Rev **D7**, 359 (1973).
[27] C.H. Blanchard, Am. J. Phys. **50**, 642 (1981).
[28] D. Shalitin, Am. J. Phys. **52**, 1111 (1984).
[29] J.A. Wheeler y W.H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, Princeton Series in Physics (1983).
[30] W. Wootters, Int.J.Th.Phys. **23**, 8 (1984).
[31] A.O. Barvinsky, Phys.Rep. **230**, 237 (1993).
[32] R. Gambini, R. Porto y J. Pullin, *Realistic clocks, universal decoherence and the black hole information paradox*, arXiv:hep-th/0406260.
[33] C. Simeone, *World Scientific Lecture Notes in Physycs*, **69**, World Scientific, (2001).
[34] Tomemos por caso un *paquete* de ondas como el estado físico en consideración
[35] Obsérvese que otros ordenamientos de este operador satisfacen las mismas propiedades
[36] En este sentido, podemos referirnos al carácter lockiano de las definiciones de los artículos [17] y [28]
[37] Los autores discuten la imposibilidad de satisfacer la llamada *condición de repetitividad* en el contexto de la mecánica cuántica relativista
[38] Landau y Peierls concluyen explícitamente que no puede existir una medición predecible en la mecánica ondulatoria salvo si se trata de cantidades constantes en el tiempo. Cabe mencionar que en la referencia [15] se detallan los resultados [14] enfatizando la relación entre el principio de incerteza y la existencia de la velocidad de la luz en su carácter de velocidad máxima
[39] Hasta donde alcanzamos a ver, la discusión original de Aharonov y Bohm no cierra satisfactoriamente este punto dada una pobre definición formal de lo que ellos denominan tiempo $interno$
[40] Hoy podemos encontrar en la literatura renovadas discusiones acerca de la interpretación del principio de incerteza entre tiempo y energía para sistemas cerrados haciendo nuevamente hincapié en la incerteza del tiempo como debida a la medición de una cierta porción del sistema considerada como $reloj$ en un contexto análogo al presentado en [19].
[41] Como muestra el cálculo a primer orden en la electrodinámica cuántica.
[42] Notemos que los argumentos cinemáticos empleados no son dependientes de la dimensionalidad del espacio plano que se considere.
[43] y más específicamente, dada la escasez de cantidades fundamentales que involucren escalas temporales y de energía a parte de $\hbar$
[44] que estará dado en términos de los grados de libertad del campo gravitatorio g_{ij} y de sus variables canónicas conjugadas π_{ij}.