

1 Hablemos de la esfera.

Les propongo mirar una prueba de la ¿conocida? profunda fórmula sobre los poliedros debida a Euler:

$$V - L + C = 2$$

y de paso revisar algunas ideas sobre la esfera y algunas otras superficies.

La demostración que veremos es debida a Adrien-Marie Legendre y, a decir de los historiadores, parece ser la primera prueba "correcta" pues se argumenta que la original de Euler no era completa. De todos modos Euler es quien encontró esta profunda relación y nos dio la oportunidad de agregar esta gota a los "ríos de tinta" que por ella han corrido. Diría que el crucial papel de Euler en este asunto es similar al del personaje de dibujos animados que abre una "puerta secreta" y sin querer, su curiosidad e inteligencia descubren un mundo.

La prueba de Legendre, es sencilla, pero tiene la virtud de mostrar con claridad un hecho de la mayor importancia. Esto es que la fórmula expresa en verdad una propiedad de la esfera la cual se manifiesta en particular en los poliedros convexos. Para acceder a la prueba haremos primero algunos comentarios sobre la geometría esférica.

En la geometría plana las figuras geométricas sencillas como los polígonos se construyen usando puntos y rectas que son los objetos "básicos" de dicha geometría. En la esfera los objetos básicos son también los puntos pero las rectas son reemplazadas por los círculos máximos en ella. Así dos puntos, que no sean ambos polos, determinan un único círculo máximo que los contiene. Por otra parte a los ángulos esféricos (formados por dos círculos máximas que se cortan en un punto) se les asigna como su "medida" la del ángulo plano que forman las rectas tangentes en el plano tangente correspondiente al punto de intersección.

En la geometría plana la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es $2rectos = \pi$ pero en la geometría esférica la cosa no es tan simple como ya observara Menelao de Alejandría. En efecto, en la geometría esférica la suma de los ángulos interiores de un triángulo se ve "perturbada" por el **área** del triángulo en cuestión aunque de una manera bastante razonable. Para enfatizar la naturaleza de los triángulos a considerar donde sus lados son arcos de círculo máximo en la esfera (es decir "geodésicas" de su geometría intrínseca) agregaremos el adjetivo "geodésico" a los triángulos a considerar.

En efecto tenemos el siguiente resultado del siglo XVII obtenido por T. Harriot y A. Girard independientemente

Teorema 1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico en la esfera de radio 1 es igual a

$$\text{Suma} = \pi + A$$

siendo A su área. ■

Ejemplo: Tomemos el triángulo esférico que es un "octante" de \mathbb{S}^2 (es decir la octava parte de la esfera). Este triángulo, llamémoslo Δ , tiene tres ángulos "rectos" lo cual se ve observando los ángulos formados por las tangentes a los

lados en cada vértice. Cada ángulo mide, por nuestra definición, $\frac{1}{2}\pi$. Así la suma de los ángulos interiores es:

$$\text{Suma} = \frac{3}{2}\pi$$

Vemos así que el "exceso" sobre los triángulos planos es, *para este triángulo*, $\frac{1}{2}\pi$.

Por otro lado, usando el notable cálculo realizado por Arquímedes del área de la esfera, sabemos que:

$$(\text{Área de } \mathbb{S}^2) = 4\pi r^2.$$

Recordando aquí que $r = 1$ y el área de un octante es $\frac{1}{8}$ del área total de la esfera tenemos:

$$\text{Área de } \Delta = \frac{1}{8} (\text{Área de } \mathbb{S}^2) = \frac{1}{2}\pi$$

y tenemos así que el exceso es justamente **el área** del triángulo en cuestión como asegura el teorema ??.

El Teorema ?? se generaliza fácilmente para polígonos geodésicos en la esfera. Los polígonos geodésicos en la esfera se construyen, como los triángulos, usando, como lados, arcos de círculos máximos.

Teorema 2. La suma de los ángulos interiores de un polígono geodésico en la superficie de la esfera de radio 1 es igual a

$$\text{Suma} = (n - 2)\pi + A$$

siendo n el número de lados y A su área.

Demostración. Basta fijar un vértice, trazar todas las diagonales posibles partiendo de él, aplicar Teorema ?? a cada uno de los $(n - 2)$ triángulos obtenidos y sumar. ■

1.1 Euler y Legendre.

Supongamos tener la esfera \mathbb{S}^2 de radio 1 "cubierta" (o subdividida) con un número C de polígonos geodésicos.

Podemos numerar nuestros polígonos

$$\{P_1, P_2, \dots, P_C\}$$

El lector de vena futbolística puede pensar en la pelota "vieja" de fútbol con "cascos" hexagonales y pentagonales.

Figura

La subdivisión de nuestra esfera no puede ser demasiado arbitraria por lo cual debemos exigir que el conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_C\}$ cumpla las siguientes condiciones:

$$\mathbb{S}^2 = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_C \tag{1}$$

Cada **par** de polígonos P_j y P_k (se sobrentienden distintos) en $\{P_1, P_2, \dots, P_C\}$ debe cumplir **uno y sólo una** de las siguientes condiciones:

(a)	P_j y P_k	no tienen puntos en común.	(2)
(b)	P_j y P_k	tienen sólo un vértice en común.	
(c)	P_j y P_k	tienen sólo un lado en común.	

Cada polígono P_j es "indefinido" pero tiene un número de lados que denotamos por n_j (mismo subíndice j que el polígono correspondiente $j = 1, 2, \dots, C$). Cada polígono tiene obviamente también n_j vértices. Para un dado polígono P_j en cada uno de sus vértices tenemos un ángulo interior que denotamos con

$$\alpha_{i,j}, \quad \begin{array}{|c|} \hline i = 1, \dots, n_j, \\ \hline j = 1, \dots, C \\ \hline \end{array}$$

Indicaremos con V , el número total de vértices que tenemos en la esfera y con L el número total de lados en ella. Además denotaremos con A_j el área del polígono geodésico P_j .

La suma de los ángulos interiores del polígono P_j es claramente

$$\alpha_{1,j} + \alpha_{2,j} + \dots + \alpha_{n_j,j} = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{i,j}$$

y aplicando el Teorema 2 podemos expresar esta suma de otro modo. En efecto, en el polígono P_j , tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{i,j} = (n_j - 2)\pi + A_j, \quad j = 1, \dots, C \quad (3)$$

Podemos ahora sumar nuestro resultado (3) sobre **todos** los C polígonos que tenemos, lo que podemos escribir como:

$$\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{i,j} = \sum_{j=1}^C (n_j - 2)\pi + \sum_{j=1}^C A_j$$

lo que es equivalente a

$$\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{i,j} = \pi \sum_{j=1}^C n_j - \sum_{j=1}^C 2\pi + \sum_{j=1}^C A_j \quad (4)$$

Ahora hacemos las siguientes sencillas observaciones:

$$\sum_{j=1}^C 2\pi = 2\pi C \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^C A_j = \text{área de } \mathbb{S}^2 = 4\pi, \text{ recordar } r = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^C n_j = 2L \quad (7)$$

pues cada lado es lado común de **dos** polígonos así al sumar todos los polígonos estamos sumando dos veces cada lado.

De este modo tenemos:

$$\pi \sum_{j=1}^C n_j = 2\pi L. \quad (8)$$

Por otra parte, en cada vértice, la suma de los ángulos interiores a todos los polígonos que contienen dicho vértice es 2π y así vemos que:

$$\sum_{j=1}^C \sum_i \alpha_{i,j} = 2\pi V.$$

De este modo, la suma completa (4) se convierte en:

$$2\pi V = 2\pi L - 2\pi C + 4\pi.$$

y dividiendo ahora por 2π ambos miembros de esta igualdad obtenemos

$$V = L - C + 2$$

o lo mismo

$$V - L + C = 2. \quad (9)$$

Es importante notar que esta ecuación expresa una "propiedad" de **todos** los conjuntos $\{P_1, P_2, \dots, P_C\}$ independientemente de los particulares valores de V , L y C que les corresponda y por tanto es una **propiedad intrínseca de la esfera \mathbb{S}^2** .

Es claro que podemos subdividir cada uno los polígonos P_j del conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_C\}$ en triángulos (mediante sus diagonales partiendo de un vértice como en Teorema 2) y obtenemos así un nuevo "dibujo" en \mathbb{S}^2 formado exclusivamente con triángulos esféricos $\{T_1, T_2, \dots, T_K\}$ **los cuales claramente cumplen** (1) y (2).

Vemos ahora que la fórmula (9) sigue siendo cierta para este nuevo "dibujo" pues en nuestra prueba no mencionamos nunca que "tipo" de polígonos usamos. Por supuesto ahora deben usarse los V , L y C correspondientes a $\{T_1, T_2, \dots, T_K\}$ (ahora $C = K$). El lector dubitativo debe recorrer la demostración de arriba "**mutatis mutandis**" es decir cambiando lo que es necesario cambiar en la nueva situación (ej. $C = K$). y el nuevo significado de $A_j = \text{área de } T_j$.

No hace falta cambiar el Teorema 2 por el 1.

Conviene sin embargo (aunque $n_j = 3$ para todo j) mantener la suma

$$\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{i,j} = \pi \sum_{j=1}^C n_j - \sum_{j=1}^C 2\pi + \sum_{j=1}^C A_j$$

lo cual mantiene la validez de (7) (con K en lugar de C) y a su vez mantiene (8) (también con K en lugar de C).

Esta propiedad de la esfera que hemos descrito, se lo denomina la **Característica de Euler de la esfera** \mathbb{S}^2 y se denota

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 2.$$

En este punto es importante señalar que esta división de la esfera en los triángulos $\{T_1, T_2, \dots, T_C\}$ no necesita ser por **triángulos geodésicos** como hemos usado en nuestra "demostración" o sea los triángulos pueden ser más generales pero nuestra "**triangulación**" $\{T_1, T_2, \dots, T_C\}$ **debe** cumplir la condición (2) para todo par de triángulos T_j y T_k distintos en ella. Con esta liviandad en nuestra exigencia para todas ellas sigue valiendo la fórmula (9).

El lector puede verificar este hecho "experimentalmente" con un globo y una tiza de color, cubriendo el globo con triángulos y asegurándose de que su dibujo cumpla (1) y (2).

Nuestra mente matemática inmediatamente se pregunta ¿Y si tomo otra superficie distinta de la esfera?

Para hacer las cosas sencillas y no complicarnos la vida, vamos a considerar superficies que "quepan" (sin entrecruzamientos) en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^3 como las esfera y que, como ella, sean "compactas". Esto último significa que el subconjunto de \mathbb{R}^3 que ellas forman en el ambiente es "cerrado y acotado". Lo de haber sin entrecruzamientos en \mathbb{R}^3 puede expresarse diciendo que son "orientables".

De todos modos no usaremos para nada estas propiedades ya que miraremos superficies específicas que las tienen y no necesitamos destacar que tal es el caso.

Consideramos el toro ("doughnut", rosca de reyes, salvavidas) el toro doble, triple, etc. (estas son todas las superficies compactas orientables).

Aquí

Pensemos en el toro \mathbb{T}^2 de la figura siguiente:

Aquí

Podemos pensar un "dibujo" en \mathbb{T}^2 como en la siguiente figura

Aquí

si el lector siente reparos en que la última figura **sea** un toro puede "inflarla" hasta alcanzar la forma usual. Esto define una "cubierta" del toro con polígonos (en este caso rectángulos o trapecios) que de nuevo cumplen las condiciones (1) y (2).

Contemos ahora los vértices, lados y caras de nuestro dibujo. Tenemos

Toro \mathbb{T}^2	
$V =$	16
$L =$	32
$C =$	16

$$V - L + C = 0$$

Esta cuenta ha sido hecha para una particular manera de cubrir el toro con rectángulos. Claramente podemos agregar a nuestro dibujo una de las dos diagonales de cada rectángulo (o trapecio) y obtenemos así una **triangulación** de nuestra superficie, cumpliendo las condiciones (1) y (2). Es claro que, al hacer esto, se agregan lados y caras a nuestro dibujo pero, por cada nuevo lado se agrega una cara nueva y así la cuenta de Euler no se altera.

El lector, sin duda, tratará de producir un ejemplo de una triangulación de \mathbb{T}^2 , donde la cuenta de Euler (9) no resulte nula. Pero siempre que la triangulación cumpla (1) y (2) estará condenado al fracaso (o en alguna medida al éxito) porque esta es nuevamente una **propiedad del toro** que no depende de la triangulación. Esta se expresa:

$$\chi(\mathbb{T}^2) = 0$$

Ahora queremos considerar la situación de "doble toro" (ver fig. ?) que denotaremos por \mathbb{M}^2 . Deberíamos producir una triangulación de \mathbb{M}^2 y hacer nuevamente la cuenta $V - L + C$. Sin embargo podemos hacer algo distinto en este caso. Podemos construir nuestra superficie \mathbb{M}^2 "**pegando**" dos toros o, como dicen los topólogos, haciendo la **suma conexa** de dos toros.

La **suma conexa** de dos superficies, digamos M_1 y M_2 que se denota usualmente por $M_1 \# M_2$ se construye cortando un disco **abierto** D^2 (de dimensión 2) en cada una de ellas y "pegando" ambas superficies, mediante una identificación adecuada, de los bordes que quedan en cada una de ellas. Por supuesto hay detalles técnicos para implementar esta definición pero desde el punto de vista topológico estos son los más sencillos posibles.

Usando el hecho de que ya tenemos una **triangulación** en nuestro toro \mathbb{T}^2 la tarea resulta mucho mas sencilla pues queremos hacer la a **suma conexa** de dos toros, es decir de \mathbb{T}^2 consigo mismo.

En efecto, tomamos \mathbb{T}^2 y su triangulación dada $\{T_1, T_2, \dots, T_C\}$. Elegimos uno de los triángulos, digamos el T_1 y **cortemos el interior** de este triángulo y lo tiramos dejando su borde en el toro cortado. Ahora tomamos dos copias del toro cortado y la pegamos por el borde del triángulo extraído, mediante la identificación obvia (cada vértice de T_1 consigo mismo y cada lado también consigo mismo de manera obvia). Esta manera de hacer la suma conexa cortando un triángulo en vez de un disco, como sería su definición, está debidamente justificada por equivalencia topológica. En la Topología es "lo mismo" un triángulo (no degenerado) que un disco cerrado (son "homeomorfos").

Tenemos así

$$\mathbb{M}^2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$$

Ahora para obtener la característica de Euler de \mathbb{M}^2 aplicamos el siguiente Lema que es más general y permite calcular la característica de Euler de la suma conexa de dos superficies no necesariamente iguales.

Lema Se cumple $\chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = \chi(\mathbb{T}^2) + \chi(\mathbb{T}^2) - 2 = -2$

Demostración.

Hacemos la suma conexas sacando, como indicamos arriba, un triángulo de cada uno y uniendo de modo que los vértices y lados de cada uno de los triángulos removidos se peguen con los del otro.

Entonces, indicando con $V(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2)$ el número de vértices de $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ (y similarmente L y C), tenemos:

$$\begin{aligned}V(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) &= V(\mathbb{T}^2) + V(\mathbb{T}^2) - 3 \\L(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) &= L(\mathbb{T}^2) + L(\mathbb{T}^2) - 3 \\C(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) &= C(\mathbb{T}^2) + C(\mathbb{T}^2) - 2\end{aligned}$$

(obsérvese que los tres vértices del *triángulo cortado* son **contados dos veces** en la suma $V(\mathbb{T}^2) + V(\mathbb{T}^2)$ y similarmente para los tres lados)

Ahora

$$\begin{aligned}V - L + C &= (V(\mathbb{T}^2) + V(\mathbb{T}^2) - 3) - (L(\mathbb{T}^2) + L(\mathbb{T}^2) - 3) + (C(\mathbb{T}^2) + C(\mathbb{T}^2) - 2) \\&= \chi(\mathbb{T}^2) + \chi(\mathbb{T}^2) - 2\end{aligned}$$

y probamos el lema. ■

Tenemos entonces

$$\chi(\mathbb{M}^2) = \chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = -2$$

Ahora el lema nos permite obtener la característica de Euler de una suma conexas de m toros.

$$\mathbb{Q}^2(m) = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2}_m$$

Para esto aplicamos inducción en el número de sumandos y el lema anterior y obtenemos:

$$\chi(\mathbb{Q}^2(m)) = (-2)(m - 1).$$

Una observación trivial es que la esfera y el toro son diferentes (adivino la sonrisa del lector pensando en el agujero del toro) pero la verdad es que ninguno de los dos tiene agujeros. La diferencia entre ellos es la "libertad" de la esfera. Ella no puede ser "encadenada" pues puede zafar fácilmente de una cadena puesta a su alrededor. En cambio sí puede serlo el toro pasando la cadena por el "supuesto" agujero y podemos así aprisionarlo. El toro doble está en peores condiciones pues podemos aprisionarlo con dos cadenas en vez de una y $\mathbb{Q}^2(m)$ mucho peor si $m > 2$.

Llamemos g al *número de cadenas* que pueden "aprisionar" nuestra superficie. El número g es llamado el *género* de la superficie (que coincide obviamente con el número de supuestos agujeros en la superficie). Así la esfera tiene $g = 0$, el toro $g = 1$ y $\mathbb{Q}^2(m)$ tiene justamente $g = m$. Vemos así que si pensamos que la esfera es la suma conexas de 0 toros (lo cual no parece un desatino demasiado grande) tenemos $\mathbb{S}^2 = \mathbb{Q}^2(0)$, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{Q}^2(1)$, etc. de modo que:

$$\chi(\mathbb{Q}^2(g)) = 2 - 2g$$

Es importante mencionar aquí que la definición de **Característica de Euler** se "extiende" a espacios topológicos de gran generalidad y es uno de los más importantes "invariantes" usados en topología y geometría. El nombre viene de que todo empezó con Euler.

1.2 Algunas aplicaciones.

La fórmula de Euler tiene numerosas aplicaciones y podemos mencionar alguna de ellas.

Desde la época de Euclides y tal vez antes, es conocido que existen cinco poliedros convexos regulares. La demostración de Euclides fue hecha desde la Geometría métrica de \mathbb{R}^3 . Estos poliedros son conocidos como los *Sólidos Platónicos* y son: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro. Podemos probar fácilmente que estos son todos usando (9).

Supongamos tener un poliedro regular convexo \mathbb{P} que tiene V vértices L lados y C caras. Como \mathbb{P} es regular, cada cara es **el mismo polígono regular** (es decir todas las caras son polígonos **congruentes** con n lados). Obviamente $n \geq 3$.

Por la regularidad de \mathbb{P} , a cada vértice concurren el mismo número m de lados. Obviamente m es también el número de caras que contienen ese vértice y debe ser $m \geq 3$. Llamamos, como siempre, C al número total de caras de \mathbb{P} .

Como cada cara contribuye con n lados y cada lado es común a **dos** caras, el número total de lados L es:

$$L = \frac{1}{2} (Cn)$$

Similarmente cada cara contribuye con n vértices pero en cada vértice se juntan m caras. Entonces el número (Cn) está contando cada vértice m veces de modo que

$$V = \frac{1}{m} (Cn)$$

Substituyamos esto en la fórmula de Euler

$$2 = V - L + C = \frac{1}{m} (Cn) - \frac{1}{2} (Cn) + C = C \left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \right) = 2$$

y sacando común denominador tenemos

$$C \left(\frac{2n - mn + 2m}{2m} \right) = 2$$

con lo cual:

$$C = \frac{4m}{2n - mn + 2m}. \tag{10}$$

Aquí tenemos $C > 0$ y $m \geq 3$ luego $4m > 0$ y vemos que para que $C > 0$ en la fórmula (10) debe ocurrir que:

$$2n - mn + 2m > 0. \tag{11}$$

y ahora observamos que los únicos pares (n, m) que pueden satisfacer (11) son:

$$(n, m) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$$

Tenemos así

Sólidos Platónicos

\mathbb{P}	n	m	$2n - mn + 2m$	V	L	C
tetraedro	3	3	3	4	6	4
octaedro	3	4	2	6	12	8
icosaedro	3	5	1	12	30	20
cubo	4	3	2	8	12	6
dodecaedro	5	3	1	20	30	12

Obviamente, existen poliedros convexos no regulares. La pelota de fútbol (desinflada, con caras planas) es un ejemplo. Ella tiene 12 pentágonos y 20 hexágonos, 60 vértices y 90 lados. Ella es igual a uno de los "fullerenos" el C_{60} .

Obsérvese que *no puede haber* un "dibujo" en la esfera S^2 formado solamente con hexágonos que cumpla (1) y (2) y con $q > 2$ hexágonos.

Lema (no) No hay poliedros esféricos (en S^2) con $q > 2$ caras hexagonales solamente y con $m \geq 3$ caras concurrendo a cada vértice.

Comentario. Notemos sin embargo que, obviamente, podemos tener nuestro poliedro con $q = 2$ caras hexagonales tomando los dos hemisferios y poniendo como vértices 6 puntos distintos igualmente repartidos sobre el ecuador. De hecho para este ejemplo las "caras" pueden tener cualquier número $h \geq 2$ de lados (para $h = 2$ tenemos $C = L = V = 2$). Notemos que también $m = 2$.

Demostración del Lema (no). Supongamos que existe una partición de S^2 con $q > 2$ caras hexagonales y $m \geq 3$ caras concurrendo a cada vértice.

Entonces tenemos:

$$L = \frac{6q}{2}, \quad V = \frac{6q}{m}, \quad C = q.$$

Insertando estos en la fórmula de Euler tenemos

$$2 = V - L + C = \left(\frac{6q}{2}\right) - \left(\frac{6q}{m}\right) + q$$

es decir

$$\frac{2}{m}q(2m - 3) = 2$$

o equivalentemente:

$$q(4m - 6) = 2m$$

Como $q > 2$ debe ocurrir

$$2m = q(4m - 6) > 2(4m - 6) = 8m - 12$$

y así m debe cumplir la desigualdad

$$2m > 8m - 12 \iff 12 > 6m.$$

Esto **nunca ocurre** ya que $m \geq 3$. ■

Lema Si tenemos una superficie \mathbf{M}^2 que soporta un poliedro con sólo q caras hexagonales ($q \geq 2$) y con tres caras concurrendo a cada vértice. Entonces

$$\chi(\mathbf{M}^2) = 0$$

Demostración.

En estas condiciones tenemos:

$$L = \frac{6q}{2}, \quad V = \frac{6q}{3}, \quad C = q$$

Insertando estos en la fórmula de Euler

$$V - L + C = \left(\frac{6q}{3}\right) - \left(\frac{6q}{2}\right) + q = 0,$$

Tenemos así

$$\chi(\mathbf{M}^2) = 0$$

■

¿Podemos cubrir el toro con q caras hexagonales ($q \geq 2$) y 3 caras en cada vértice?

La respuesta es claramente **si** porque se puede cubrir el plano con hexágonos. Corte un adecuado rectángulo y construya un ejemplo.

1.3 Hexágonos y pentágonos.

Proposición. Sea \mathbb{P} un poliedro esférico (en \mathbb{S}^2) con $p > 0$ caras pentagonales y $q \geq 0$ caras hexagonales, tal que a cada vértice concurren tres caras. Entonces \mathbb{P} tiene exactamente 12 caras pentagonales.

Demostración.

Claramente tenemos

$$C = p + q, \quad L = \frac{5p + 6q}{2}, \quad V = \frac{5p + 6q}{3}$$

Insertando estos en la fórmula de Euler tenemos

$$2 = V - L + C = \left(\frac{5p + 6q}{3}\right) - \left(\frac{5p + 6q}{2}\right) + (p + q) = \frac{1}{6}p,$$

luego

$$p = 12. \quad \blacksquare$$

Nuevamente la pelota de futbol es un ejemplo pero hay muchísimos mas, ver, por ejemplo, fotografías de pelotas de golf.

Comentario. Observar que en el caso $q = 0$ tenemos los dodecaedros *no necesariamente regulares* (con caras no necesariamente congruentes).

Para terminar cabe destacar que existen sólo cuatro **poliedros regulares no convexos** (ver Web). Ellos no cumplen la identidad de Euler porque no son homeomorfos a la esfera.

Lecturas posibles.

El lector inquieto, que disponga de una conexión a la RED (Web), puede encontrar todo lo aquí expuesto y mucho mas sobre la fórmula de Euler y muchos temas asociados.