ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2017, том 80, № 3, с. 275–288

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

КВАНТОВАНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ПО ФОН НЕЙМАНУ

© 2017 г. А. Б. Арбузов[1),2)*], А. Ю. Черный[1)], Д. Х. Сирило-Ломбардо[1),3)], Р. Г. Назмитдинов[1),4)], Нгуен Суан Хан[5)], А. Е. Павлов[1),6)], $\boxed{\text{В. Н. Первушин}}$[1)], А. Ф. Захаров[1),7)]

Поступила в редакцию 25.04.2016 г.

Процедура квантования фон Неймана применена к общей теории относительности. Проквантованы начальные данные для динамических переменных в планковскую эпоху, когда значения параметра Хаббла и массы Планка совпадали. Начальные данные определены с помощью ортогонального репера Фока в касательном пространстве Минковского и конформного интервала Дирака. Космологический принцип Эйнштейна применен для усреднения логарифма определителя метрики по пространственному объему видимой Вселенной. Введено расслоение общих координатных преобразований на диффеоморфизмы и преобразования начальных данных. Следуя фон Нейману, мы рассматриваем вакуумное состояние как квантовый ансамбль, вырожденный по отношению к квантовым числам невакуумных (возбужденных) состояний. Функция распределения вакуумного состояния приводит к появлению эффекта Казимира в гравидинамике по аналогии с электродинамикой. Производящий функционал пертурбативной теории в гравидинамике находится как решение квантового уравнения связи на энергию. Обсуждается область применимости гравидинамики и возможности ее использования для объяснения современных наблюдательных данных.

DOI: 10.7868/S0044002717020039

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1915 г. Эйнштейн ввел уравнения движения поля для гравитации [1]. Математическим базисом этих уравнений является их инвариантность относительно общих ковариантных преобразований в римановом пространстве-времени. Решения этих уравнений выражают компоненты метрики риманова пространства через компоненты тензора энергии-импульса материи. Кроме того, эти решения зависят от начальных данных. Эйнштейн предположил, что общие координатные преобразования имеют такой же физический статус, как и преобразования начальных данных в группе Галилея или в ее релятивистском обобщении, известном как группа симметрии специальной теории относительности (СТО) — группа Пуанкаре.

В том же 1915 г. Гильберт вывел уравнения Эйнштейна путем вариации определенного действия по компонентам метрики [2]. По сравнению с уравнениями движения действие Гильберта содержит дополнительную информацию. Развивая идеи Гильберта, Нётер доказала две теоремы [3]. Согласно этим теоремам следует различать две группы симметрии. Первая из них — глобальная группа Пуанкаре, по которой преобразуются начальные данные. Применение первой теоремы Нётер в этом случае дает законы сохранения. Вторая группа симметрии — это общие координатные преобразования (т.е. диффеоморфизмы), являющиеся объектом применения второй теоремы Нётер, которая в итоге задает связи между пространственно-временными компонентами в уравнениях Эйнштейна с начальными данными. Поэтому необходимо различать эйнштейновские диффеоморфизмы и преобразования начальных данных.

Различие между эйнштейновскими диффеоморфизмами и преобразованиями систем отсчета было выявлено в подходе к общей теории относительности (ОТО), развитом Фоком [4]. Он ввел диффео-инвариантный ортогональный базис для включения в ОТО фермионов. Таким образом он заменил метрические компоненты в ОТО на

1) Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
2) Государственный университет “Дубна”, Дубна, Россия.
3) National Institute for Plasma Physics, Argentina.
4) Universitat de les Illes Balears, Spain.
5) Hanoi University of Science, Vietnam.
6) Российский государственный аграрный университет, Москва.
7) Институт теоретической и экспериментальной физики, НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Россия.
* E-mail: arbuzov@theor.jinr.ru

диффео-инвариантные компоненты ортогонального репера (симплекса) в касательном пространстве Минковского. Используя подход Фока, можно ввести группу симметрии Пуанкаре для преобразований начальных данных в касательном пространстве.

В рамках подхода Гильберта, сформулированного в "Основах физики" [2], следующие шаги в развитии концепции преобразований начальных данных были сделаны Дираком [5] и Арновиттом, Дезером и Мизнером (АДМ) [6]. Они сформулировали так называемый гамильтонов подход Дирака—АДМ для гравитационных систем со связями, задаваемыми действием Гильберта. В таком случае группа эйнштейновских диффеоморфизмов редуцируется к своей кинеметрической подгруппе [7], включающей репараметризацию времени. Условие инвариантности относительно репараметризации времени означает, что существуют два инвариантных параметра эволюции: *геометрический* и *динамический*. Первый — это геометрический интервал, а второй может быть отождествлен с нулевой модой одного из полей в пространстве событий Уилера—Девитта [8, 9]. Тогда *энергия событий* в пространстве Уилера—Девитта является решением уравнения связи для энергии по отношению к каноническому импульсу *динамического* времениподобного поля.

Мизнер [10] предположил, что динамическая временная переменная может быть отождествлена с логарифмом космологического масштабного фактора. Последний, в свою очередь, может быть рассмотрен как нулевая мода логарифма определителя пространственной метрики в гамильтоновом подходе Дирака—АДМ к гравитационным системам со связями. Нулевая мода скалярного поля определяется путем усреднения по пространственному объему в соответствии с космологическим принципом, предложенным Эйнштейном в 1917 г. [11]. Определение динамического времени на основе космологического принципа, предложенное Мизнером, становится диффео-инвариантным, если мы ограничим пространственные диффеоморфизмы однородными преобразованиями, которые сохраняют определитель пространственной метрики.

Следуя Дираку [12], можно отождествить эйнштейновский логарифм пространственной метрики с полем *дилатона*. Дирак [12] и Дезер [13] путем выделения дилатонной степени свободы заменили стандартные эйнштейновские интервалы на конформные, которые при этом становятся наблюдаемыми. В этом случае поле дилатона отвечает и за красное смещение в космологии, и за релятивистские эффекты, такие, как аномальное смещение перигелия Меркурия и двойной угол отклонения фотонов в гравитационном поле Солнца, измеренный впервые А. Эддингтоном. Если параметр Хаббла, масса Планка и все прочие массы равнялись бы нулю, то ОТО Эйнштейна была бы конформно-инвариантной теорией. Спонтанное нарушение конформной симметрии сопровождается появлением дилатона как безмассового голдстоуна.

Сценарий спонтанного нарушения конформной симметрии в ОТО был подробно рассмотрен в работе Борисова и Огиевецкого [14]. Авторы получили действие Гильберта как совместную нелинейную реализацию аффинной симметрии всех линейных преобразований $[A(4)]$ и конформной симметрии $[C = SO(4,2)]$. Можно заметить, что такая нелинейная реализация симметрий аналогична той, что использовалась Швингером и Вайнбергом при построении феноменологических лагранжианов сильных взаимодействий с нелинейной реализацией киральной симметрии [15]. В нелинейной реализации групп симметрии в ОТО и дилатон, и все компоненты метрики являются голдстоуновскими модами. В этой картине присутствуют названные выше основные элементы рассматриваемого нами подхода к ОТО: действие Гильберта, симплекс Фока, дилатон Дирака и разделение координат на собственно полевые и те, что соответствуют голдстоуновским модам, распространяющимся по геодезическим линиям.

В работах [16—18] приведены теоретические и наблюдательные аргументы в пользу обсуждаемого разделения группы симметрии начальных данных и подгруппы общих однородных преобразований координат (дираковских диффеоморфизмов). В настоящей работе мы используем это разделение с целью построить производящий функционал теории возмущений ОТО в терминах диффео-инвариантных независимых переменных и наблюдаемых координат.

Основные элементы нашего подхода к ОТО:

1) выбор ортогональных координат вдоль геодезических линий в полевом пространстве голдстоуновских мод, что соответствует экспоненциальной параметризации диагональных компонент метрики [15];

2) расслоение эйнштейновских общих координатных преобразований на дираковские диффеоморфизмы и преобразования начальных данных;

3) введение диффео-инвариантных независимых переменных и координат.

Это позволяет нам построить самосогласованным образом диффео-инвариантные уравнения Уилера—Девитта и решить их по аналогии с подходом Вигнера к неприводимым унитарным представлениям группы Пуанкаре [19]. Определение наблюдаемых величин как диффео-инвариантов, данное Дираком, допускает различные приближения как в терминах инвариантных величин, так и в терминах других математических конструкций. Мы будем различать два приближения: *статическое* и *динамическое*. В статическом приближении пренебрегаем вкладами динамических полей и получаем в итоге описание статического взаимодействия внешних источников. В низшем порядке динамического приближения мы, наоборот, рассмотрим поведение диффео-инвариантных независимых переменных вдали от внешних источников. Следующие порядки динамического приближения представляют собой пертурбативную *гравидинамику*.

Ниже мы рассмотрим оба приближения и сравним полученные результаты с классической однородной космологической моделью Фридмана, в которой принимаем во внимание только нулевую моду дилатона, отождествляя ее с космологическим масштабным фактором. В разд. 2 вводится гравидинамика как реализация ОТО в терминах диффео-инвариантных координат и независимых переменных с соответствующими начальными данными. Раздел 3 посвящен построению производящего функционала квантовой теории возмущений, который ищется как квантовое решение энергетического уравнения связи в ОТО. Раздел 4 определяет основное приближение квантовой гравидинамики (КГД). В разд. 5 рассматривается возможность получения в рамках КГД оценок для физических наблюдаемых. В Заключении полученные результаты обсуждаются с точки зрения объединения ОТО и стандартной модели физики частиц.

2. ДИФФЕО-ИНВАРИАНТНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ В ОТО

2.1. Нелинейная реализация группы симметрии начальных данных

История уравнений движения в физике связана с именами Ньютона, Максвелла, Эйнштейна, Клейна и Гордона, Дирака, с авторами стандартной модели и современной теории струн. Понятно, что физические факты и явления описываются решениями этих уравнений, которые зависят от начальных данных. История подходов к описанию начальных данных гораздо короче, чем история уравнений. Группами симметрий начальных данных являются 10-параметрическая группа Галилея и являющаяся ее релятивистским обобщением группа Пуанкаре. Задав группу Пуанкаре как группу симметрий начальных данных, мы можем классифицировать уравнения для свободных квантованных полей в соответствии с неприводимыми унитарными представлениями этой группы, полученными Вигнером [19]. Мы будем следовать логике Вигнера, в которой постулируется приоритет группы преобразований начальных данных, а уравнения движения выводятся как инвариантные структурные соотношения в этой группе.

Подход Вигнера может быть применен к 20-параметрической аффинной группе $A(4)$. Аффинная группа обобщает 10-параметрическую группу Пуанкаре, содержащую четыре оператора трансляций $\hat{P}_{(\alpha)}$ и шесть операторов преобразований Лоренца $\hat{L}_{(\alpha)(\beta)}$, за счет добавления 10 собственно аффинных генераторов $\hat{R}_{(\alpha)(\beta)}$. Последние порождают 10 симметричных линейных трансформаций координат пространства-времени Минковского:

$$x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = \underbrace{x^\mu + y^\mu + L_{[\mu\nu]}x^\nu}_{\text{Poincaré}\,[10]} + \underbrace{R_{\{\mu\nu\}}x^\nu}_{[10]}. \qquad (1)$$

Огиевецкий доказал, что 20-параметрическая аффинная группа $A(4)$ и 15-параметрическая конформная группа в своем замыкании дают группу общековариантных преобразований координат [20]. Борисов и Огиевецкий [14] отождествили 4-координаты x^μ и 10 аффинных параметров $h_{\mu\nu}$ с голдстоуновскими модами. Они рассмотрели движение ортогонального репера в косете $K = A(4)/L$, где L является подгруппой Лоренца. Сдвиги и повороты ортогонального репера задаются линейными дифференциальными формами Маурера–Картана $\omega^P_{(\alpha)}$, $\omega^R_{(\alpha)(\beta)}$ и $\omega^L_{(\alpha)(\beta)}$. Зависимость этих форм от голдстоуновских мод $h^{\mu\nu}$ определяется алгеброй аффинной группы для коммутационных соотношений с использованием преобразований:

$$G = e^{\imath\hat{P}x}e^{\imath\hat{R}h},$$
$$G^{-1}dG = \imath\Big[\hat{P}_{(\alpha)}\omega^P_{(\alpha)} + \hat{R}_{(\alpha)(\beta)}\omega^R_{(\alpha)(\beta)} + \hat{L}_{(\alpha)(\beta)}\omega^L_{(\alpha)(\beta)}\Big],$$
$$\omega^P_{(\alpha)}[h] = \mathbf{e}_{(\alpha)\mu}dx^\mu,$$
$$\omega^L_{(\alpha)(\beta)}[h] = (1/2)\{\mathbf{e}_{(\alpha)\mu}d\mathbf{e}^\mu_{(\beta)} - \mathbf{e}_{(\beta)\nu}d\mathbf{e}^\nu_{(\alpha)}\},$$
$$\omega^R_{(\alpha)(\beta)}[h] = (1/2)\{\mathbf{e}_{(\alpha)\mu}d\mathbf{e}^\mu_{(\beta)} + \mathbf{e}_{(\beta)\nu}d\mathbf{e}^\nu_{(\alpha)}\}.$$

Эти линейные формы с условием конформной симметрии однозначно порождают действие Гильберта и теорию гравитации Эйнштейна[8)]

$$W_{\rm H} = -\int d^4x\sqrt{-g}\frac{R^{(4)}(g)}{6} \qquad (2)$$

8) Здесь и ниже мы используем естественную систему единиц, в которой $M_{\rm Pl}\sqrt{3/(8\pi)} \equiv M^*_{\rm Pl} = c = \hbar = 1$.

с интервалом, выраженным через компоненты ортогонального репера Фока:

$$ds^2 = \underbrace{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}_{\text{Einstein (1915)}} = \qquad (3)$$

$$= \underbrace{e^{-2D}}_{\text{Dirac (1973)}} \underbrace{\omega_{(\alpha)} \otimes \omega_{(\beta)}}_{\text{Fock (1929)}} \underbrace{\eta^{(\alpha)(\beta)}}_{\text{tangent}}.$$

Здесь мы использовали следующее определение для конформных компонент ортогонального репера:

$$\omega_{(\alpha)} = e^D \omega^P_{(\alpha)}(h). \qquad (4)$$

Построенная Борисовым и Огиевецким нелинейная реализация аффинной и конформной групп симметрии не только порождает действие Гильберта, но и обосновывает отождествление конформных интервалов Дирака

$$\underbrace{\widetilde{ds}^2}_{\text{Dirac}} = \omega_{(\alpha)} \otimes \omega_{(\beta)}\eta^{(\alpha)(\beta)} = e^{2D} \underbrace{ds^2}_{\text{Einstein}} \qquad (5)$$

с наблюдаемыми. В данном подходе в качестве физических переменных рассматриваются их нормальные координаты вдоль геодезических линий в косете $K = A(4)/L$, они выражаются в терминах диффео-инвариантов в касательном пространстве-времени, индексы которого заключаются в круглые скобки (α) [15].

2.2. *Диффео-инвариантное 3 + 1-расслоение*

Задача о введении начальных данных требует определения конкретной системы отсчета. Мы используем $3+1$-расслоение Дирака—АДМ [5, 6]. В этой системе отсчета конформный ортогональный репер Фока (4) принимает вид

$$\omega_{(0)} = e^{-2D} N dx^0, \qquad (6)$$

$$\omega_{(b)} = \mathbf{e}_{(b)i}[dx^i + N^i dx^0], \qquad (7)$$

где N есть функция хода,

$$N^j = N^{j\perp} + N^{j||}, \quad \partial_l N^{l\perp} = 0, \qquad (8)$$

являются векторами сдвига, D — поле дилатона, и $\mathbf{e}_{(b)i}$ являются пятью симметричными триадами с единичным определителем $|\mathbf{e}| = 1$.

Ортогональный репер Фока разделяет эйнштейновские диффеоморфизмы, т.е. общие преобразования координат,

$$x^\mu \to \widetilde{x}^\mu = \widetilde{x}^\mu(x^\mu), \qquad (9)$$

$$g_{\mu\nu} \to \widetilde{g}_{\mu\nu}(\widetilde{x}) = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\mu}{d\widetilde{x}^\alpha}\frac{dx^\nu}{d\widetilde{x}^\beta}$$

на репараметризацию риманова времени и унимодулярные преобразования пространственных координат, которые мы в дальнейшем будем называть просто диффеоморфизмами:

$$x^0 \to \widetilde{x}^0 = \widetilde{x}^0(x^0), \qquad (10)$$

$$\mathbf{e}_{(b)j} \to \widetilde{\mathbf{e}}_{(b)j}(\widetilde{x}) = \mathbf{e}_{(b)k}(x)\frac{dx^k}{d\widetilde{x}^j},$$

а также на преобразования начальных данных. Последние включают в себя сдвиги поля дилатона $D(x) \to D(x) + \text{const}$ и лоренцевские повороты компонент ортогонального репера Фока.

Репараметризация риманова времени выделяет времениподобный динамический параметр эволюции в полевом пространстве событий. Этот параметр эволюции может быть отождествлен с нулевой модой дилатона, которая находится путем усреднения по объему в терминах дираковских диффео-инвариантных форм:

$$\langle D \rangle \equiv V_0^{-1} \int\limits_{V_0} \omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} \wedge \omega_{(3)} D, \qquad (11)$$

в соответствии с космологическим принципом Эйнштейна [11]. Здесь $V_0 = \int_{V_0} \omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} \wedge \omega_{(3)}$ — это конечный диффео-инвариантный объем. В таком случае нулевая мода дилатона совпадает с логарифмом космологического масштабного фактора

$$\langle D \rangle = -\ln a = \ln(1+z). \qquad (12)$$

Величина z известна в наблюдательной астрофизике как красное смещение. Пространственное усреднение (11) может рассматриваться как глобальный проекционный оператор, тогда как ортогональный проекционный оператор

$$\overline{D} = D - \langle D \rangle \qquad (13)$$

является локальным. Соответствующие локальные функции удовлетворяют условию $\langle \overline{D} \rangle \equiv 0$.

2.3. *Физическое содержание действия Гильберта*

Прямая подстановка компонент ортогонального репера Фока (6) и (7) в действие Гильберта определяет его физическое содержание [16]:

$$W_{\text{H}} = \underbrace{W_{\text{cosmology}}}_{=0 \text{ for } V_0 = \infty} + W_{\text{wave}} + W_{\text{gravity}}, \qquad (14)$$

$$W_{\text{cosmology}} = -\int d^4x \left(\frac{d\langle D \rangle}{dx^0}\right)^2 \frac{1}{N}, \qquad (15)$$

$$W_{\text{wave}} = \qquad (16)$$

$$= \int d^4x \frac{N}{6}\left[v_{(a)(b)}v_{(a)(b)} - R^{(3)}(\mathbf{e})e^{-4D}\right],$$

$$W_{\text{gravity}} = \tag{17}$$
$$= \int d^4x \left[-v_{\overline{D}}^2 - \frac{4}{3} N e^{-7D/2} \triangle^{(3)} e^{-D/2} \right].$$

Здесь $R^{(3)}(\mathbf{e})$ — это трехмерная кривизна,

$$R^{(3)}(\mathbf{e}) = -2\partial_i \, [\mathbf{e}^i_{(b)} \sigma_{(c)|(b)(c)}] - \tag{18}$$
$$- \sigma_{(c)|(b)(c)} \sigma_{(a)|(b)(a)} + \sigma_{(c)|(d)(f)} \sigma_{(f)|(d)(c)},$$

где

$$\sigma_{(c)|(a)(b)} = \omega^L_{(a)(b)}(\partial_{(c)}) + \omega^R_{(a)(c)}(\partial_{(b)}) - \tag{19}$$
$$- \omega^R_{(b)(c)}(\partial_{(a)})$$

и

$$v_{(a)(b)} = \frac{1}{N} \Big[\omega^R_{(a)(b)}(\partial_0 - \partial_l N^l) + \tag{20}$$
$$+ \partial_{(a)} N^{\perp}_{(b)} + \partial_{(b)} N^{\perp}_{(a)} \Big],$$
$$v_{\overline{D}} = \frac{1}{N} \Big[\partial_0 (e^{-3D}) + \partial_l (N^l e^{-3D}) \Big] \tag{21}$$

задают скорости гравитационных волн и ненулевых мод дилатона. Таким образом, действие Гильберта описывает три класса явлений: космологию, гравитационные волны и потенциалы. Кинетическая часть в действии (14) не зависит от антисимметричных форм $\omega^L_{(a)(b)}$. Поэтому эти формы не являются динамическими переменными и могут играть лишь роль начальных данных:

$$\omega^L_{(a)(b)}(d) = 0. \tag{22}$$

Следуя подходу Дирака к системам со связями [5], можно наложить связи второго рода:

$$\partial_i \mathbf{e}^i_{(a)} = \omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(b)}) = 0, \tag{23}$$
$$v_{\overline{D}} = 0. \tag{24}$$

Эти связи задают нулевые начальные данные для продольных компонент и условие минимальности для гиперповерхности (24). В действии Гильберта (14) присутствуют три пространства: риманово, касательное и полевое.

2.4. Диффео-инвариантные координаты

Космологическая часть действия (14) определяет глобальную функцию хода

$$N_0^{-1} \equiv \langle N^{-1} \rangle \tag{25}$$

как результат усреднения по трехмерному объему. Действие (14), выраженное в терминах линейных форм Маурера—Картана, позволяет ввести дираковские диффео-инвариантные пространственно-временные координаты:

$$d\tau = N_0(x^0) dx^0, \tag{26}$$
$$X_{(a)} = x^i \mathbf{e}_{i(a)}. \tag{27}$$

Дифференциал пространственных диффео-инвариантных координат (27)

$$dX_{(a)} = \underbrace{\mathbf{e}_{i(a)} dx^i}_{\widetilde{\omega}_{(a)}} + x^i \underbrace{\mathbf{e}_{i(b)} \mathbf{e}^j_{(b)}}_{\delta^i_j} d\mathbf{e}_{j(a)} \tag{28}$$

выражается через пространственные компоненты репера Фока (28) и диффео-инвариантный гравитон $\omega^R_{(b)(a)}$,

$$\widetilde{\omega}_{(a)} \equiv \mathbf{e}_{i(a)} dx^i = dX_{(a)} - X_{(b)} \omega^R_{(b)(a)}(d). \tag{29}$$

Согласно подходу Дирака к системам со связями, условия (26) и (27) являются слабыми, т.е. выполняются только на поверхности связей. Эти условия могут быть использованы только после вариации действия Гильберта в терминах римановых пространственно-временных координат. Между тем диффео-инвариантные координаты в касательном пространстве необходимы для сравнения решений уравнений движения с наблюдаемыми данными. В подходе Дирака обосновывается необходимость диффео-инвариантности физических наблюдаемых. Поэтому мы предлагаем взять за основу ОТО действие Гильберта (14) и дираковский конформный интервал

$$\widetilde{ds}^2 = e^{-4D} \mathcal{N}^2 d\tau^2 - \tag{30}$$
$$- \Big[dX_{(a)} - X_{(b)} \omega^R_{(b)(a)} + \mathcal{N}_{(a)} d\tau \Big]^2 =$$
$$= e^{-4\overline{D}} \mathcal{N}^2 d\eta^2 - \Big[dX_{(a)} - X_{(b)} \omega^R_{(b)(a)} + \mathcal{N}_{(a)} d\tau \Big]^2.$$

Именно такой выбор ведет к диффео-инвариантным переменным. Дираковская концепция наблюдаемости играет определяющую роль для построения нашей модели.

Диффео-инвариантные координаты (26) и (27) позволяют трактовать формы Маурера—Картана (29) $\widetilde{\omega}_{(a)}$ и $\omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)})$ как дираковские диффео-инвариантные степени свободы. В классическом приближении можно задать нулевые начальные данные для диффео-инвариантных величин:

$$\ln \mathcal{N} = 0, \quad \mathcal{N}_{(a)} = 0, \tag{31}$$
$$D = 0, \quad \omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)}) = 0.$$

Это соответствует заданию в начальный момент плоской метрики

$$\widetilde{ds}^2 = d\eta^2 - \big[dX_{(a)} \big]^2. \tag{32}$$

Однако в квантовой теории эти решения не являются устойчивыми, так как

$$\langle D \rangle \neq 0, \quad \omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)}) \neq 0. \tag{33}$$

Ниже мы обсуждаем возможность построения устойчивого решения с помощью принципа неопределенности для сильных гравитационных волн в приближении

$$\widetilde{ds}^2 = d\eta^2 - \left[dX_{(a)} - \omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)})\right]^2. \quad (34)$$

В этом случае диффео-инвариантные координаты $X_{(a)}$, заданные (29),

$$dX_{(a)} = \widetilde{\omega}_{(a)}(d) + X_{(b)}\omega^R_{(b)(a)}(d), \quad (35)$$

являются функционалами волновых решений, выраженных через коэффициенты спиновой связности $\omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)})$ и компоненты ортогонального репера Фока. Последний удовлетворяет условиям независимости

$$\widetilde{\omega}_{(a)}(\partial_{(c)}) \equiv \frac{\mathbf{e}_{i(a)}dx^i}{\mathbf{e}_{j(c)}dx^j} = \delta_{(a)(c)}, \quad (36)$$

аналогичным тем, что имеются для случая плоского пространства, $dx^i/dx^j = \delta^i_j$. Используя связи (36), можно переписать (35) в виде

$$\frac{dX_{(a)}}{\widetilde{\omega}_{(b)}(d)} = \delta_{(a)(b)} + X_{(c)}\omega^R_{(c)(a)}(\partial_{(b)}). \quad (37)$$

В случае, когда $(a) = (b)$, эта форма упрощается:

$$\frac{dX_{(a)}}{\widetilde{\omega}_{(a)}(d)} = 1, \quad (38)$$

а в случае, когда $(a) \neq (b)$, (37) дает соотношение

$$\frac{dX_{(a)}}{\widetilde{\omega}_{(b)}(d)} = X_{(c)}\omega^R_{(c)(a)}(\partial_{(b)}), \quad (39)$$

которое позволяет связать диффео-инвариантные координаты с гравитационными волнами, как будет показано ниже в разд. 3.

2.5. Диффео-инвариантные переменные в касательном пространстве

И действие (14), и интервал (30) являются билинейными выражениями по отношению к формам Маурера–Картана. Предложенный нами выбор координат значительно упрощает решение уравнений Эйнштейна в терминах диффео-инвариантных взаимно независимых переменных. Этими переменными являются два состояния поляризации гравитонов $\omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)})$ и нулевая мода дилатона $\langle D\rangle$. Взаимная независимость позволяет этим величинам одновременно иметь нулевые начальные данные и в квантовом случае. При квантовании мы определяем канонические импульсы данных переменных стандартным образом из действия $W = \int d^4x\mathcal{L} = \int dx^0 L$:

$$P_{\langle D\rangle} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0\langle D\rangle)} = -2V_0\frac{d\langle D\rangle}{d\tau}, \quad (40)$$

$$p^R_{(a)(b)} = \mathbf{e}_{(a)j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\mathbf{e}_{(b)j})} = \frac{v_{(a)(b)}}{3}. \quad (41)$$

Соответствующие скобки Пуассона имеют вид

$$\{P_{\langle D\rangle}, \langle D\rangle\} = 1, \quad (42)$$

$$\{p^R_{(a)(b)}(x^0,\mathbf{x}), \omega^R_{(c)(d)}(x^0,\mathbf{y})(\partial_k)\} = \quad (43)$$
$$= \Pi_{(a)(b)(c)(d)}\,\partial_k\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где $\Pi_{(a)(b)(c)(d)}$ — проекционный оператор. Поле $\overline{D}$ и

$$\mathcal{N} = \frac{N}{N_0(x^0)}, \quad (44)$$

$$\mathcal{N}_{(a)} = \frac{\mathbf{e}_{(a)l}N^l}{N_0(x^0)} \quad (45)$$

играют роль диффео-инвариантных потенциалов. Вариация действия Гильберта по отношению к этим потенциалам порождает связи [5]. В частности, вектор сдвига N^l приводит к трем условиям связи на импульсы, а логарифм функции хода $\ln N$ порождает энергетическую связь. В теории возмущений эти потенциалы не являются динамическими переменными и определяют только статическое взаимодействие внешних источников.

2.6. Условия связи на импульсы

Для явного разрешения условия связи на импульсы

$$\frac{\delta W_{\rm H}}{\delta N^l} = 0 \quad (46)$$

удобно использовать разложение:

$$N_{(b)} = N^{||}_{(b)} + N^{\perp}_{(b)}, \quad (47)$$

$$\partial_{(b)}N^{||}_{(b)} = \partial_j N^j, \quad (48)$$

$$\partial_{(b)}N^{\perp}_{(b)} = 0, \quad (49)$$

$$p_{(b)(a)} = p^R_{(b)(a)} + \partial_{(a)}f^{\perp}_{(b)} + \partial_{(b)}f^{\perp}_{(a)}, \quad (50)$$

$$\partial_{(b)}p^R_{(b)(a)} = 0, \quad (51)$$

где $f^{\perp}_{(a)}$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\triangle f^{\perp}_{(a)} + \partial_{(a)}\partial_{(b)}f^{\perp}_{(a)}\right] = p^R_{(b)(c)}\partial_{(a)}\omega^R_{(b)(c)}, \quad (52)$$

которое получается из условия связи (46) после подстановки (50).

2.7. Энергетическое условие связи

Инвариантность действия Гильберта (14) относительно репараметризации времени означает, что его вариация по отношению к функции хода $\frac{\delta W_{\rm H}}{\delta \ln N} = 0$ задает энергетическую связь

$$\frac{1}{\mathcal{N}}\left[\frac{d\langle D\rangle}{d\tau}\right]^2 = \mathcal{N}\mathcal{H}, \tag{53}$$

где

$$\mathcal{H} = -\frac{\delta[W_{\rm wave} + W_{\rm gravity}]}{\delta N} = \tag{54}$$

$$= 6\left[p^R_{(a)(b)} + \partial_{(a)} f^{\perp}_{(b)} + \partial_{(b)} f^{\perp}_{(a)}\right]^2 +$$

$$+ \frac{e^{-4D}}{6}\left[\omega^R_{(a)(c)}(\partial_{(b)}) - \omega^R_{(b)(c)}(\partial_{(a)})\right]^2 -$$

$$- \frac{4}{3}e^{-7D/2}\triangle e^{-D/2}$$

является энергетической компонентой тензора энергии-импульса, а величина $f^{\perp}_{(b)}$ определена в (52). Эта энергетическая связь определяет диффео-инвариантный временной интервал (26) и диффео-инвариантную функцию хода (44):

$$\mathcal{N} = \frac{\langle\sqrt{\mathcal{H}}\rangle}{\sqrt{\mathcal{H}}} \to \langle \mathcal{N}^{-1}\rangle \equiv 1. \tag{55}$$

Усреднение условия энергетической связи (53) по пространственному объему $\left\langle \frac{\delta W_{\rm H}}{\delta \ln N}\right\rangle = 0$ приводит к энергетической связи в форме уравнения Фридмана

$$\left[\frac{d\langle D\rangle}{d\tau}\right]^2 = \langle\sqrt{\mathcal{H}}\rangle^2. \tag{56}$$

Решение этого уравнения дает соотношение между диффео-инвариантным временным интервалом и нулевой модой дилатона

$$\tau - \tau_I = \int\limits_{\langle D\rangle_I}^{\langle D\rangle_0} d\langle D\rangle \langle\sqrt{\mathcal{H}}\rangle^{-1}. \tag{57}$$

Это означает, что нулевая мода дилатона играет роль времениподобной переменной.

В гамильтоновом подходе условия энергетической связи принимают вид

$$P^2_{\langle D\rangle} - \mathbf{E}^2_U = 0, \tag{58}$$

где

$$\mathbf{E}_U = 2\int\limits_{V_0} \omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} \wedge \omega_{(3)}\sqrt{\mathcal{H}}. \tag{59}$$

Величину (59) можно трактовать как энергию Вселенной в пространстве событий Уилера–Девитта.

Ненулевые моды дилатона не являются независимыми переменными, соответственно их канонические скорости $v_{\overline{D}}$ и импульсы $P_{\overline{D}} = 2v_{\overline{D}}$ равны нулю:

$$P_{\overline{D}} = 0. \tag{60}$$

Заметим, что это равенство воспроизводит связь, полученную Дираком из условия минимальности трехмерной гиперповерхности, вложенной в четырехмерное риманово пространство [5].

Таким образом, действие Гильберта с разрешенными связями принимает вид

$$W_{c\text{-shell}} = \int d^4x p^j_{(a)}\partial_0 \mathbf{e}_{(a)j} + \tag{61}$$

$$+ \int dx^0 P_{\langle D\rangle}\partial_0\langle D\rangle = \int\limits_{\langle D\rangle_I}^{\langle D\rangle_0} d\langle D\rangle \times$$

$$\times\left[\int\limits_{V_0} \omega_{(1)} \wedge \omega_{(2)} \wedge \omega_{(3)} p^R_{(a)(b)}\omega^R_{(a)(b)}(\partial_{\langle D\rangle}) \mp \mathbf{E}_U\right],$$

где $\partial_{\langle D\rangle} = \frac{d}{d\langle D\rangle} = \langle\sqrt{\mathcal{H}}\rangle\frac{d}{d\tau}$. Полученное действие должно дополняться диффео-инвариантными данными для конечного пространственного объема и значения нулевой моды дилатона $\langle D\rangle_I$, заданными в момент квантового рождения Вселенной.

Отметим, что, стартуя с классического действия Гильберта, мы пользуемся стандартными методами квантования систем со связями. На этом пути нами воспроизводятся хорошо известные факты. При этом новым результатом нашего подхода к эйнштейновской ОТО является собственно выделение дираковских диффео-инвариантных координат и переменных с заданием для них начальных данных. Следующим шагом должно быть рассмотрение построенной нами конструкции на квантовом уровне. Мы будем называть соответствующую теорию *квантовой гравидинамикой* по аналогии с квантовыми электродинамикой и хромодинамикой. Ниже также будут определены область применимости КГД и возможность получения с ее помощью предсказания для наблюдаемых величин.

2.8. Условие связи для дилатона

Уравнение движения дилатона

$$\frac{\delta W_{\rm H}}{\delta D} = 0 \tag{62}$$

принимает вид

$$(\partial_\tau - \mathcal{N}_{(b)}\partial_{(b)})p_D = T_D, \tag{63}$$

где

$$T_D = \frac{4}{3}e^{-D/2}\triangle[\mathcal{N}e^{-7D/2}] - \mathcal{N}\partial_D\mathcal{H}. \tag{64}$$

Если поле дилатона разделено на нулевую и ненулевые моды, $D = \langle D \rangle + \overline{D}$, то (63) также расслаивается на уравнения для нулевой моды и ненулевых мод с условием связи (60).

Решение уравнения для нулевой моды дилатона $\frac{\delta W_{\rm H}}{\delta \langle D \rangle} = 0$ совпадает с решением уравнения типа Фридмана для энергетической связи, см. (57).

Уравнение для ненулевых мод

$$\frac{\delta W_{\rm H}}{\delta \overline{D}} = 0 \tag{65}$$

принимает вид

$$T_{\overline{D}} = T_D - \langle T_D \rangle = 0. \tag{66}$$

Оно определяет $\overline{D}$ как один из статических потенциалов.

Таким образом, мы применили формализм АДМ [6] для случая выбора форм Маурера–Картана в качестве первичных переменных. В этих переменных действие Гильберта приобретает вид билинейного функционала. Это означает, что мы получили модель типа сжатого осциллятора [17]. Это дает основания рассчитывать на построение квантовой теории для этой системы. Мы выразили уравнения эйнштейновской ОТО в терминах диффео-инвариантных переменных и потенциалов и получили ее версию, удобную для формулировки теории квантовой гравидинамики по аналогии с квантовой электродинамикой.

3. КВАНТОВАЯ ГРАВИДИНАМИКА

3.1. Формулировка теории

Образцом для построения квантовой гравидинамики нам послужит квантовая электродинамика. Напомним, что Эйнштейн использовал уравнения Максвелла классической электродинамики в качестве образца для построения аналогичных уравнений в классической теории гравитации. Если пренебречь динамическими переменными в обеих теориях, то в них останется статическое кулоновское взаимодействие внешних источников. Если же в конструируемой нами модели пренебречь динамическими переменными (нулевой модой дилатона и гравитонами ω^R), останутся решения типа черных дыр в изотропных координатах [16]. В противоположном случае — вдали от внешних источников — уравнения КЭД с учетом связей описывают только невзаимодействующие фотоны с двумя степенями свободы поперечной поляризации. В случае теории гравитации вдали от тяжелых тел мы аналогично получаем невзаимодействующие гравитоны ω^R с двумя степенями свободы и нулевую моду дилатона $\langle D \rangle = -\ln a = \ln(1+z)$, определяющую красное смещение z.

Эйнштейновский космологический принцип [11] определяет два класса функций, различаемых по результату действия проекционных операторов. Первый класс задает понятие энергии Вселенной, а второй определяет физическое содержание этой энергии в форме гравитационных волн и их вакуумного среднего. Если мы пренебрежем гравитонами, то система уравнений Эйнштейна будет иметь только тривиальное решение $\langle D \rangle = 0$. Если, наоборот, пренебречь дилатоном, то для гравитонов также получится только тривиальное решение $\omega^R = 0$. Однако оба эти приближения являются классическими. А в квантовой теории оба тривиальных решения невозможны вследствие принципа неопределенности. Для последовательного учета принципа неопределенности в КГД полезно построить в ней производящий функционал теории возмущений.

3.2. Производящий функционал квантовой гравидинамики

В гамильтоновом подходе уравнение энергетической связи (58) может быть проквантовано. При этом канонические переменные $\hat{P}_{\langle D \rangle}$ и $\langle D \rangle$ становятся квантовыми операторами с коммутационным соотношением $[\hat{P}_{\langle D \rangle}, \langle D \rangle] = \imath$. А условие связи приобретает вид уравнения Уилера–Девитта [8, 9]

$$\left[\hat{P}^2_{\langle D \rangle} - \mathbf{E}^2_U\right] \hat{\Psi}_{\langle D \rangle_I, \langle D \rangle_0} = 0. \tag{67}$$

По аналогии с формализмом унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре, используемом в квантовой теории поля, мы строим общее операторное решение уравнения Уилера–Девитта для Вселенной как сумму двух экспонент, упорядоченных по значениям полевого параметра эволюции $\langle D \rangle$,

$$\hat{\Psi}_{\langle D \rangle_I, \langle D \rangle_0} = \hat{A}^+_{\langle D \rangle_I} \hat{\mathbf{U}}^0_I \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{E}_{0U}}} + \tag{68}$$
$$+ \hat{A}^-_{\langle D \rangle_I} \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{E}_{0U}}} \hat{\mathbf{U}}^{I\dagger}_0,$$
$$\hat{\mathbf{U}}^0_I = T_{\langle D \rangle} \exp\left\{ -\imath \int\limits_{\langle D \rangle_I}^{\langle D \rangle_0} d\langle D \rangle \mathbf{E}_U \right\}.$$

В результате мы имеем унитарный оператор эволюции Вселенной $[\langle D \rangle | F]$ в пространстве событий в дополнение к оператору эволюции $[\langle D \rangle]$ в полевом пространстве. Функционал Уилера–Девитта описывает рождение Вселенной в момент $\langle D \rangle_I$ и ее эволюцию к моменту $\langle D \rangle_0$ в настоящем. Два члена в функционале соответствуют положительной и отрицательной энергиям. Величина $\hat{A}^{+}_{\langle D\rangle_I}$ может рассматриваться как оператор рождения Вселенной в момент $\langle D\rangle_I$, а $\hat{A}^{-}_{\langle D\rangle_I}$ является соответствующим аннигиляционным оператором с коммутационным соотношением

$$[\hat{A}^{-}_{\langle D\rangle_I}, \hat{A}^{+}_{\langle D\rangle_I}] = 1.$$

Отрицательные энергии исключаются путем вторичного квантования. После процедуры нормального упорядочения полевой гамильтониан принимает вид

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \rho_{\mathrm{Cas}} + :\widetilde{\mathcal{H}}:, \tag{69}$$

где

$$\rho_{\mathrm{Cas}} = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2} f_{\mathbf{k}} \tag{70}$$

задает энергию Казимира гравитонов с одночастичной энергией $\omega_{\mathbf{k}}$, которая может быть определена в конечном объеме по аналогии с энергией Казимира фотонов [21, 22]. При вычислении энергии Казимира расходящийся интеграл может быть регуляризован путем введения функции распределения

$$f_{\mathbf{k}} = \left[1 - \exp\left(d\sqrt{\mathbf{k}^2}\right)\right]^{-1}, \tag{71}$$

где d является параметром, задающим линейный размер конечного объема. Эта функция распределения отражает вырожденность вакуумного состояния по импульсам. Набор вырожденных состояний можно трактовать как статистический ансамбль фон Неймана [23] или как квантовый ансамбль Блохинцева [24].

Напомним, что энергия Казимира проявляется как результат применения операции нормального упорядочения к произведениям операторов в свободном лагранжиане. Естественно предположить, что в момент рождения Вселенная не была заполнена частицами и в ней доминировал вклад энергии Казимира

$$\mathbf{E}_U^I = 2\int\limits_{V_0} d^3x\sqrt{\rho_{\mathrm{Cas}}}. \tag{72}$$

Следуя Казнеру [25], мы предполагаем, что областью приложения общей теории относительности являются и рождение, и эволюция Вселенной как целого.

Ключевым для нашей модели является предположение о том, что линейный размер объема, в котором находится энергия Казимира, совпадает с горизонтом Вселенной:

$$d(a) = r(a), \quad a = e^{\langle D\rangle}. \tag{73}$$

Решение данного уравнения, найденное в работах [17, 18], соответствует так называемому жесткому уравнению состояния вещества во Вселенной со следующей связью между давлением и плотностью: $p = +1\cdot\rho$. Доминирование жесткого уравнения состояния обнаружено и при анализе данных по взрывам сверхновых типа SNe Ia [26, 27] при их анализе в конформных переменных с отождествлением наблюдаемых расстояний с конформными [28, 29]. Можно сказать, что данные по сверхновым свидетельствуют о том, что и сегодня наша Вселенная является почти пустой и энергия Казимира дает доминирующий вклад в плотность ее энергии. Доминирование вклада жесткого уравнения состояния как начальной стадии, так и в настоящее время позволяет проследить непрерывную эволюцию от начального момента, когда значение параметра Хаббла совпадало со значением массы Планка. В этом случае единственный размерный параметр, например начальное значение параметра Хаббла, полностью определяет теорию возмущений, заданную (40)—(66).

3.3. Теория возмущений

Разложение в ряд генератора эволюции может быть построено следующим образом:

$$\mathbf{E}_U = 2\int d^3x\sqrt{\rho_{\mathrm{Cas}} + :\widetilde{\mathcal{H}}:} = \tag{74}$$

$$= \mathbf{E}_U^I + \frac{\mathbf{H}_{\mathrm{QFT}}}{\sqrt{\rho_{\mathrm{Cas}}}} + \cdots,$$

$$\mathbf{E}_U^I = 2\int d^3x\sqrt{\rho_{\mathrm{Cas}}},$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{QFT}} = \int d^3x :\widetilde{\mathcal{H}}: .$$

Видно, что это разложение аналогично теории возмущений в квантовой теории поля

$$\hat{\mathbf{U}} = \underbrace{\mathbf{U}_{\mathrm{Cas}}}_{\text{Casimir miniuniverse}} \cdot \underbrace{T_{\tilde{t}}\exp\left\{-\imath\int\limits_{\tilde{t}_I}^{\tilde{t}_0} d\tilde{t}\,\mathbf{H}_{\mathrm{QFT}}\right\}}_{S\text{-matrix}},$$

где $d\tilde{t} = \frac{d\langle D\rangle}{\sqrt{\rho_{\mathrm{Cas}}}}$ совпадает с конформным временным интервалом, как будет показано ниже. Разложение сделано в предположении доминирующего вклада энергии Казимира поля гравитона.

4. ЭНЕРГИЯ ВАКУУМА ДИФФЕО-ИНВАРИАНТНЫХ ГРАВИТОНОВ

4.1. Квантовый гравитон

Построенное выше действие Гильберта естественным образом разделяется на три вклада: (глобальную) дилатонную часть (15), которая позволяет решить проблему энергии-времени в полной теории; гравитонную часть (16), которая описывает диффео-инвариантные поперечные гравитоны, и потенциальную часть (17), которая описывает статические гравитационные взаимодействия тяжелых тел, включая черные дыры.

Если в начальный момент во Вселенной не было массивных тел, последний вклад (17) можно отбросить. В этом случае второй вклад описывает точно решаемую модель для диффео-инвариантных поперечных гравитонов типа Бонди—Траутмана [18]:

$$\omega^R_{(a)(b)}(\partial_{(c)}) = \frac{\imath\sqrt{3}}{V_0}\sum_{\mathbf{k}^2\neq 0}\frac{e^{\imath\mathbf{kX}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\mathbf{k}_c g^R_{\mathbf{k}(a)(b)}, \tag{75}$$

$$g^R_{\mathbf{k}(a)(b)} = \Big[\varepsilon^{R(A)}_{(a)(b)}(\mathbf{k})g^{(A)+}_{\mathbf{k}}(\tau) + \\ + \varepsilon^{R(A)}_{(a)(b)}(-\mathbf{k})g^{(A)-}_{-\mathbf{k}}(\tau)\Big].$$

Здесь введены тензоры поляризации:

$$\varepsilon^{R(1)}_{(a)(b)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_{(a)1}(\mathbf{k})\varepsilon_{(b)2}(\mathbf{k}) + \varepsilon_{(a)2}(\mathbf{k})\varepsilon_{(b)1}(\mathbf{k})],$$

$$\varepsilon^{R(2)}_{(a)(b)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varepsilon_{(a)1}(\mathbf{k})\varepsilon_{(b)1}(\mathbf{k}) - \varepsilon_{(a)2}(\mathbf{k})\varepsilon_{(b)2}(\mathbf{k})].$$

Действие (14) является билинейным функционалом относительно диффео-инвариантных гравитонов. Следовательно, вдали от тяжелых тел гравитоны можно рассматривать на равных основаниях со свободными безмассовыми полями в квантовой теории поля.

Гамильтониан для гравитонов принимает вид

$$H^g_\tau = \sum_{\mathbf{k}^2\neq 0}\frac{p^g_{\mathbf{k}}p^g_{-\mathbf{k}} + e^{-4\langle D\rangle}\mathbf{k}^2\overline{g}_{\mathbf{k}}\overline{g}_{-\mathbf{k}}}{2}. \tag{76}$$

Решения уравнения для гравитонов можно найти в терминах конформных временных интервалов [18] $d\eta = a^2(\tau)d\tau$, где $a = e^{-\langle D\rangle}$ и

$$g^{A\pm}_{\mathbf{k}} = g^{A\pm}_{I\mathbf{k}}\exp\{\pm\imath|\mathbf{k}|(\eta-\eta_I)\}. \tag{77}$$

Эти решения описывают свободные квантовые поля в конечном объеме. Вакуумное ожидание данного гамильтониана дает энергию Казимира, определяемую одним параметром, в качестве которого можно взять значение параметра Хаббла H_0 [26, 27] в современную эпоху.

4.2. Случай свободного гравитона

Зададим метрику

$$ds^2 = d\eta^2 - dX_{(3)} - [\omega^2_{(1)} + \omega^2_{(2)}]. \tag{78}$$

Коэффициенты спиновой связности тогда принимают вид

$$\omega_{(1)(1)}(d) = -\omega_{(2)(2)}(d) = dD_1(\eta_{(-)}), \tag{79}$$

$$\omega_{(1)(2)}(d) = \omega_{(2)(1)}(d) = dD_2(\eta_{(-)}). \tag{80}$$

Функции D_1 и D_2 зависят только от координат на световом конусе

$$\eta_{(-)} = \eta - dX_{(3)}. \tag{81}$$

Таким образом, мы получаем случай сильной гравитационной волны. Коэффициенты спиновой связности являются при этом точными решениями уравнений Эйнштейна для метрики (78).

Перейдем к комплексным координатам и рассмотрим линейные дифференциальные формы и поля:

$$z = x^1 + ix^2, \quad Z(D) = X_{(1)} + iX_{(2)}, \tag{82}$$

$$D = D_1 + iD_2, \quad \omega(d) = \omega_{(1)} + i\omega_{(2)}.$$

Следовательно, интеграл от функции $Z^*(D)$ в касательном пространстве может быть найден с помощью (39):

$$\frac{dZ(D)}{dD} = Z^*(D), \quad Z(0) = Z^0, \tag{83}$$

что позволяет получить ее зависимость от времени в поле сильной гравитационной волны $D(\eta_{(-)})$. Решение (83) имеет вид

$$Z(D) = R(D)e^{i\theta(D)} \tag{84}$$

и описывает вращение векторов на комплексной плоскости (82), где все наблюдаемые величины являются диффео-инвариантами, включая спин и поляризацию гравитона. Подстановка выражения (84) в (83) дает

$$e^{i2\theta(D)}d\left[\ln\frac{R(D)}{R(0)} + i\theta(D)\right] = \tag{85}$$

$$= \cos 2\theta d\ln\frac{R}{R_0} + \frac{1}{2}d\cos 2\theta + i\sin 2\theta d\ln\frac{R}{R_0} + \\ + i\frac{1}{2}d\sin 2\theta = d\,[D_1 + iD_2].$$

Используя условие независимости $dX_{(1)}/dX_{(2)} = 0$, можно переписать решение рассматриваемых уравнений в виде:

$$R(D) = R_0\exp\left\{\sqrt{\widetilde{D}_1^2 + \widetilde{D}_2^2} - \frac{1}{2}\right\}, \tag{86}$$

$$\cos 2\theta(D) = \frac{\widetilde{D}_1}{\sqrt{\widetilde{D}_1^2 + \widetilde{D}_2^2}}, \tag{87}$$

$$\sin 2\theta(D) = \frac{\widetilde{D}_2}{\sqrt{\widetilde{D}_1^2 + \widetilde{D}_2^2}}, \tag{88}$$

$$\widetilde{D}_1 = D_1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta_0,$$
$$\widetilde{D}_2 = D_1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_0.$$

Здесь R_0, θ_0 — это начальные данные, которые можно определить как

$$R(D=0) = R_0, \tag{89}$$
$$\cos 2\theta(D=0) = \cos 2\theta_0, \tag{90}$$
$$\sin 2\theta(D=0) = \sin 2\theta_0. \tag{91}$$

Ряд теории возмущений тогда принимает вид

$$Z(0) = Z_0, \quad Z(D) = Z_0 + Z_0^* D + \mathcal{O}(D^2).$$

5. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ТЕСТЫ

5.1. Данные по сверхновым типа SNe Ia

Наблюдения взрывов сверхновых, которые принято называть стандартными свечами [26, 27], показывают, что они находятся от нас на расстояниях, бóльших, чем предсказывает космология Фридмана, где учитываются только вклады релятивистской и нерелятивистской материи. В стандартной космологии для объяснения этого явления приходится вводить дополнительный инфляционный член в уравнения эволюции. Обычно это делается либо путем введения Λ-члена, либо путем модификации законов гравитации на больших расстояниях. Между тем в работах [28, 29] было показано, что данные по сверхновым можно объяснить доминированием жесткого уравнения состояния, а не Λ-члена, если просто перейти к конформным переменным в стандартных уравнениях Фридмана. Фитирование данных показывает, что доминирующий вклад в плотность энергии Вселенной дает состояние, для которого давление и плотность связаны соотношением $p = +1 \cdot \rho$. Вообще говоря, жесткое уравнение состояния можно реализовать не единственным образом. Например, это можно сделать с помощью введения дополнительного скалярного поля [29]. Здесь же мы развиваем вариант, предложенный в [18], с отождествлением этого состояния с вакуумной энергией Казимира. Действительно, в конформных переменных космологическая эволюция энергии Казимира пустого пространства соответствует поведению жесткого состояния:

$$H(z) = \frac{d\langle D\rangle}{d\eta} = \frac{H_0}{(1+z)^2}, \tag{92}$$
$$(1+z) = e^{\langle D\rangle}, \tag{93}$$
$$d\eta = \frac{d\tau}{(1+z)^2}, \tag{94}$$

где η — конформное время, и H_0 — современное значение постоянной Хаббла.

5.2. Космологическая иерархия масштабов энергии

Планковская эпоха определяется как момент эволюции при красном смещении z_I, когда первичное значение массы Планка

$$M^*_{I\mathrm{Pl}} \equiv M^*_{\mathrm{Pl}}(z_I) = M^*_{0\mathrm{Pl}}(1+z_I)^2 \tag{95}$$

совпадало по величине с первичным значением параметра Хаббла

$$H_I \equiv H(z_I) = M^*_{I\mathrm{Pl}} = M^*_{0\mathrm{Pl}}(1+z_I)^2. \tag{96}$$

Следовательно, в нашей конформной космологической модели начальное значение красного смещения

$$z_I \simeq 10^{15}. \tag{97}$$

Как обсуждалось в работе [18], это определение планковской эпохи обосновывается применением в начальный момент эволюции Вселенной принципа наименьшего действия Планка.

Естественно предположить, что в начальный момент квантового рождения Вселенной имелась лишь одна энергетическая шкала, заданная начальным значением горизонта. Значения и массы Планка, и параметра Хаббла в этот момент определялись этим энергетическим масштабом. В современную эпоху значения массы Планка и параметра Хаббла отличаются друг от друга, поскольку они имеют разные законы эволюции. Он связаны друг с другом возрастом Вселенной, выраженном в терминах красного смещения. Эволюция энергетического масштаба какой-либо физической величины однозначно определяется ее размерностью d и конформным весом w. В частности, помимо эволюции параметра Хаббла и массы Планка мы можем рассмотреть временную зависимость массы элементарной частицы, принимающей в современную эпоху значение m_0:

$$H_0 \simeq H_I(1+z_I)^{-2} \quad \{d=1, w=2\}, \tag{98}$$
$$m_0 \simeq H_I(1+z_I)^{1} \quad \{d=1, w=-1\}, \tag{99}$$
$$M^*_{\mathrm{Pl}\,0} \simeq H_I(1+z_I)^{2} \quad \{d=1, w=-2\}. \tag{100}$$

Используя значения H_0 и M_{Pl} вместе с найденным выше первичным красным смещением z_I, мы получаем значение массы $m_0 \simeq 300$ ГэВ, имеющее порядок энергетической шкалы электрослабых взаимодействий. Другими словами, масса частицы, совпадавшая по значению в начальный момент с массой Планка, в рассматриваемой модели эволюционирует к масштабу электрослабой шкалы энергии. Ниже мы рассмотрим механизм спонтанного нарушения конформной инвариантности с возникновением массивных частиц в первичную эпоху. Отметим еще, что в рассматриваемой модели найденное значение m_0 дает порядок величины максимального возможного значения массы элементарной частицы по аналогии с гипотезой о так называемом *максимоне*, предложенной Марковым [30, 31].

Ограничимся набором квантовых полей, имеющимся в стандартной модели. Электрослабая энергетическая шкала дается массой и вакуумным средним бозона Хиггса. Кроме того, масса топ-кварка находится на этом же масштабе, что в стандартной модели выглядит как пока необъясненное случайное совпадение. Мы предлагаем применить механизм радиационного нарушения конформной симметрии, разработанный Коулменом и Вайнбергом [32] к сектору стандартной модели, объединяющему самодействие скалярного поля и его юкавское взаимодействие с топ-кварком. Как будет показано в следующем разделе, данный сектор содержит квантовую конформную аномалию, вызывающую размерную трансмутацию. При этом масштаб перенормировки естественным образом должен задаваться первичным значением параметра Хаббла H_I. Механизм Коулмена–Вайнберга приводит к возникновению ненулевых масс и конденсатов и скалярного, и спинорного полей. Поскольку константы взаимодействия в этом секторе порядка единицы, то все возникающие массы и конденсаты имеют порядок величины H_I. Поэтому, используя (98), можно связать массу топ-кварка с параметром Хаббла и массой Планка:

$$m_t \simeq H_0[1+z_I]^3, \quad m_t \simeq M^*_{\mathrm{Pl}\,0}[1+z_I]^{-1}. \quad (101)$$

Вместе с тем, конденсат топ-кварка должен иметь ту же самую энергетическую шкалу[9], т.е.

$$\langle \bar{t}t\rangle = -\gamma_t m_t^3, \quad (102)$$

где γ_t есть безразмерная постоянная порядка единицы. Чтобы найти значение γ_t, необходимо регуляризовать расходящийся интеграл по фермионной петле в ограниченном горизонтом объеме. Это можно сделать путем введения функции распределения, аналогичной той, что была введена Планком для описания излучения черного тела и для нахождения энергии Казимира (71):

$$\gamma_t = -\frac{\langle \bar{t}t\rangle}{m_t^3} = \quad (103)$$

$$= 4N_c \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+1}} f_{1,+}(\mathbf{p}) \approx 0.39,$$

$$f_{1,\pm}(\mathbf{p}) = \left[1 \pm \exp\left(\sqrt{\mathbf{p}^2+1}-1\right)\right]^{-1}.$$

[9] Фермионные конденсаты отрицательные, поскольку они формально являются интегралами по замкнутой фермионной петле с одной вершиной.

5.3. *Спонтанное нарушение масштабной инвариантности в стандартной модели*

В работе [33] предложена простая редукция стандартной модели к конформно-инвариантной теории. Как показано в [34, 35], инфракрасная нестабильность (конформная аномалия) этой теории приводит к спонтанному индуцированному квантовыми петлевыми поправками нарушению масштабной инвариантности. Этот эффект проявляется в однопетлевом приближении для эффективного потенциала поля бозона Хиггса. Здесь мы кратко повторим основные шаги этого подхода и расширим его прямым вычислением значения конденсата топ-кварка.

Рассмотрим сектор скалярного поля стандартной модели с отброшенным тахионным массовым членом. В ведущем приближении можно ограничиться наиболее интенсивными взаимодействиями бозона Хиггса, а именно, его самодействием и юкавским взаимодействием с топ-кварком:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi) \approx -\frac{\lambda}{4}\phi^4 - \frac{y_t}{2}\phi\,\bar{t}t. \quad (104)$$

Отметим, что выше мы учли только одну нейтральную компоненту исходного комплексного скалярного дублета, поскольку собственно механизм спонтанного нарушения симметрии стандартной модели остается без изменений. Повторяя стандартный механизм Браута–Энглера–Хиггса в соответствии с эйнштейновским космологическим принципом, расщепляем поле ϕ на его вакуумное среднее $\langle\phi\rangle$ и частицеподобные возбуждения — ненулевые гармоники h:

$$\phi = \langle\phi\rangle + h, \quad \int d^3x h = 0. \quad (105)$$

Аналогично и нормальное упорядочение фермионных полей в члене юкавского взаимодействия в (104) приводит к расщеплению $\bar{t}t = :\bar{t}t: + \langle\bar{t}t\rangle$. По построению $m_t = (y_t/\sqrt{2})\langle\phi\rangle$, где $y_t \approx 0.99$ есть юкавская константа связи топ-кварка и $\langle\phi\rangle = v \approx$ ≈ 246.22 ГэВ — вакуумное среднее поля бозона Хиггса.

Можно заметить, что конденсат топ-кварка заменяет тахионный массовый член скалярного поля, имеющийся в стандартной модели. В результате мы получаем потенциал хиггсовского поля с нетривиальным минимумом:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{y_t}{\sqrt{2}}\phi\langle\bar{t}t\rangle, \quad (106)$$

$$\left.\frac{dV(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=v} = \lambda v^3 + \frac{y_t}{\sqrt{2}}\langle\bar{t}t\rangle = 0,$$

$$\left.\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\right|_{\phi=v} = m_h^2 = 3\lambda v^2.$$

При этом масса частицы Хиггса в древесном приближении определяется как

$$m_{0,h}^2 = -\frac{3y_t\langle\bar{t}t\rangle}{\sqrt{2}v} \approx 131 \text{ ГэВ}, \qquad (107)$$

где использовано (102) для определения значения конденсата топ-кварка $\langle\bar{t}t\rangle \approx -(126 \text{ ГэВ})^3$ через известное значение $m_t \approx 173$ ГэВ. Стандартный механизм Браута–Энглера–Хиггса при этом полностью воспроизводится за исключением того, что значение константы самодействия скалярного поля λ оказывается в 1.5 раза меньше, чем в стандартной модели. Прямое измерение этой величины на будущем линейном электрон-позитронном коллайдере и/или после существенной модернизации на Большом адронном коллайдере послужит важным тестом различных моделей. Кроме того, отметим, что не имеется никаких феноменологических ограничений на значение конденсата топ-кварка, поскольку он не дает вкладов в адронные наблюдаемые.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При построении рассматриваемой модели мы стартовали с фундаментальных принципов аффинной и конформной симметрии и использовали нелинейную реализацию этих симметрий, предложенную Борисовым и Огиевецким [14]. Спонтанное нарушение указанных симметрий приводит к возникновению гравитонов и дилатона Дирака как голдстоуновских бозонов. Ненарушенность симметрии по группе Лоренца и необходимость введения фермионов для объединения теории гравитации со стандартной моделью дают веские основания выбора касательного пространства Минковского для определения в нем начальных данных и квантования.

Подчеркнем еще раз, что на классическом уровне развиваемая нами модель описывается действием Гильберта. Соответственно основные феноменологические предсказания ОТО, включая решения Шварцшильда, двойной угол отклонения света гравитационным полем Солнца и т.д., воспроизводятся без изменений. Тем не менее предлагаемый нами выбор переменных для квантования и определения начальных данных приводит к существенным различиям в описании космологической эволюции. В частности, стрела времени и начальное значение красного смещения получены с помощью принципа наименьшего действия Планка. Данные по сверхновым при использовании конформных переменных свидетельствуют о доминировании вклада жесткого уравнения состояния, которое соответствует энергии Казимира в конечном объеме, ограниченном горизонтом. В работе предложен механизм нарушения конформной инвариантности и генерации масс и конденсатов бозона Хиггса и топ-кварка за счет конечности объема Вселенной, ограниченной горизонтом. Для этого введена функция распределения ансамбля квантовых вакуумных состояний. Показано, что эволюция полученных масс от планковского масштаба в первичную эпоху приводит к современному электрослабому масштабу в настоящее время при условии доминирования вклада жесткого уравнения состояния.

Ранее в работе [18] было показано, что в рассматриваемой модели в ранней Вселенной возникает явление интенсивного космологического рождения электрослабых бозонов (и гравитонов). Учет последующих распадов бозонов и термализация вещества позволили сделать оценку числа фотонов в микроволновом реликтовом излучении $N_\gamma \simeq \simeq 10^{87}$, согласующуюся по порядку величины с наблюдательными данными.

Предлагаемая модель основана на предположении о том, что конформная симметрия является фундаментальным свойством законов природы и нарушена она только спонтанно за счет квантовых конформных аномалий. Возникающий при этом нарушении масштаб естественным образом связывается с планковским. Подчеркнем, что при спонтанном нарушении симметрии наблюдаемые переменные должны быть инвариантными по отношению к преобразованиям данной группы симметрий. Соответственно, если предположение о спонтанной природе нарушения конформной симметрии верно, мы с необходимостью должны использовать конформные переменные при квантовании ОТО.

Некоторые другие аспекты предлагаемой модели были рассмотрены ранее в работах [16–18, 36]. Мы планируем дальнейшее развитие модели и ее верификацию путем анализа ее предсказаний и сравнения их с наблюдательными и экспериментальными данными.

Было бы интересно также рассмотреть суперсимметричное обобщение нелинейной реализации Борисова–Огиевецкого с целью получения всех полей стандартной модели как голдстоуновских мод. В работе [37] показано, что такая суперполевая нелинейная совместная реализация ОТО и СМ может быть построена с использованием кватернионного суперрасширения супертвисторной конструкции, предложенной в [38].

Авторы благодарны участникам семинаров Института гравитации и космологии Российского университета дружбы народов и Российского гравитационного общества за плодотворные дискуссии. А. Павлов признателен Объединенному институту ядерных исследований за гостеприимство. Н.С.Х. благодарит за финансовую поддержку грант Нафостед (Nafosted) № 103.03-2012.02.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Einstein, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **44** (2), 778 (1915); **48** (2), 844 (1915).
2. D. Hilbert, Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **3**, 395 (1915).
3. E. Noether, Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl., 235 (1918).
4. V. Fock, Z. Phys. **57**, 261 (1929).
5. P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950); Proc. R. Soc. London, Ser. A **246**, 326, 333 (1958); Phys. Rev. **114**, 924 (1959); *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford Univ. Press, New York, 1982).
6. R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, in *Gravitation: an Introduction to Current Research,* Ed. by L. Witten (Wiley, New York, 1962), p. 227.
7. А. Л. Зельманов, В. Г. Агаков, *Элементы общей теории относительности* (Наука, Москва, 1989).
8. B. S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
9. J. A. Wheeler, in *Battelle Rencontres: Lectures in Mathematics and Physics, 1967*, Ed. by C. M. DeWitt and J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968), p. 242.
10. C. W. Misner, Phys. Rev. **186**, 1319 (1969).
11. A. Einstein, Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), 142 (1917).
12. P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London, Ser. A **333**, 403 (1973).
13. S. Deser, Ann. Phys. (N. Y.) **59**, 248 (1970).
14. А. Б. Борисов, В. И. Огиевецкий, ТМФ **21**, 329 (1974) [Theor. Math. Phys. **21**, 1179 (1974)].
15. S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969); Д. В. Волков, ЭЧАЯ **4**, 3 (1973); Препринт № 69-73, ИТФ (Киев, 1969).
16. B. M. Barbashov *et al.*, Phys. Lett. B **633**, 458 (2006).
17. A. B. Arbuzov *et al.*, Phys. Lett. B **691**, 230 (2010).
18. V. N. Pervushin *et al.*, Gen. Relativ. Gravit. **44**, 2745 (2012).
19. E. P. Wigner, Ann. Math. **40**, 149 (1939).
20. V. I. Ogievetsky, Lett. Nuovo Cimento **8**, 988 (1973).
21. H. B. G. Casimir, Proc. Kön. Nederl. Akad. Wetensch. **51**, 793 (1948).
22. M. Bordag *et al.*, *Advances in the Casimir Effect* (Oxford Univ. Press, New York, 2009).
23. J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, 1955), p. 418.
24. D. I. Blokhintsev, J. Phys. (USSR) **2**, 71 (1940).
25. E. Kasner, Am. J. Math. **43**, 217 (1921).
26. S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999); B. P. Schmidt *et al.*, Astrophys. J. **507**, 46 (1998).
27. A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **560**, 49 (2001); **607**, 665 (2004).
28. D. Behnke *et al.*, Phys. Lett. B **530**, 20 (2002).
29. A. F. Zakharov and V. N. Pervushin, Int. J. Mod. Phys. D **19**, 1875 (2010).
30. M. A. Markov, Prog. Theor. Phys. Suppl. E **65**, 85 (1965).
31. М. А. Марков, УФН **164**, 63 (1994) [Phys. Usp. **37**, 57 (1994)].
32. S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
33. V. Pervushin *et al.*, PoS (Baldin ISHEPP XXI) 023 [arXiv: 1209.4460 [hep-ph]]; V. Pervushin *et al.*, PoS (Baldin ISHEPP XXII) 136 [arXiv: 1502.00267 [gr-qc]].
34. A. B. Arbuzov *et al.*, arXiv: 1411.5124 [hep-ph].
35. A. B. Arbuzov *et al.*, Europhys. Lett. **113**, 31001 (2016).
36. A. B. Arbuzov *et al.*, Grav. Cosmol. **15**, 199 (2009).
37. D. J. Cirilo-Lombardo and V. N. Pervushin, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **13**, 1650113 (2016).
38. L. B. Litov and V. N. Pervushin, Phys. Lett. B **147**, 76 (1984).

VON NEUMANN'S QUANTIZATION OF GENERAL RELATIVITY

A. B. Arbuzov, A. Yu. Cherny, D. J. Cirilo-Lombardo, R. G. Nazmitdinov, Nguyen Suan Han, A. E. Pavlov, V. N. Pervushin, A. F. Zakharov

Von Neumann's procedure is applied for quantization of General Relativity. We quantize the initial data of dynamical variables at the Planck epoch, where the Hubble parameter coincides with the Planck mass. These initial data are defined via the Fock simplex in the tangent Minkowskian space–time and the Dirac conformal interval. The Einstein cosmological principle is applied for the average of the spatial metric determinant logarithm over the spatial volume of the visible Universe. We derive the splitting of the general coordinate transformations into the diffeomorphisms and the initial data transformations. Following von Neumann, we suppose that the vacuum state is a quantum ensemble. The vacuum state is degenerated with respect to quantum numbers of non-vacuum (excited) states. It has a distribution function that yields the Casimir effect in gravidynamics in analogy to the one in electrodynamics. The generation functional of the perturbation theory in gravidynamics is given as a solution of the quantum energy constraint. We discuss the region of applicability of gravidynamics and its possible predictions for explanation of the modern observational and experimental data.