

## SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE CONSERVACIÓN EN COJINETES TERMO-HIDRODINÁMICOS

**Gustavo G. Vignolo<sup>a,b,c</sup>, Marcelo O. Rios<sup>c</sup>, Daniel O. Barilá<sup>c</sup>, Lidia M. Quinzani<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av Alem 1253 – 8000 – Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA, [gvignolo@plapiqui.edu.ar](mailto:gvignolo@plapiqui.edu.ar)*

<sup>b</sup> *Planta Piloto de Ingeniería Química (PLAPIQUI), Universidad Nacional del Sur – CONICET Camino La Carrindanga km. 7 – CC 717 - Bahía Blanca - Buenos Aires, ARGENTINA*

<sup>c</sup> *Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Ruta Prov. N° 1, Km. 4 – 9000 – Comodoro Rivadavia - Chubut, ARGENTINA*

**Palabras Clave:** Lubricación Termo-hidrodinámica, Cojinete.

**Resumen:** Los cojinetes son elementos que limitan los grados de libertad de un rotor. Lo mantienen en su posición, soportan las solicitaciones y le permiten girar libremente. En los cojinetes hidrodinámicos una delgada película de lubricante mantiene separadas a las superficies en movimiento relativo (eje y cojinete). La ecuación diferencial gobernante se denomina ecuación de Reynolds y surge de integrar los balances de cantidad de movimiento y masa en el espesor de la película. En esta ecuación, la presión es constante en el espesor, por lo que el problema se reduce a dos dimensiones si se considera que el fluido es isotérmico. No obstante, a medida que se van incrementando las exigencias desde el punto de vista tecnológico, las condiciones de operación de las máquinas que emplean cojinetes se hacen más severas. Esto implica mayor carga unitaria y velocidad de rotación, ocasionando que la temperatura del fluido lubricante varíe notablemente como consecuencia de la disipación de energía por efectos viscosos. Por ende, la hipótesis de flujo isotérmico pierde validez y se requiere la solución acoplada de las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía.

En este trabajo se presenta la solución numérica de las ecuaciones de conservación acopladas para el caso de cojinetes lubricados con un fluido Newtoniano. Tanto la densidad como capacidad calorífica y conductividad térmica del lubricante se consideran constantes, mientras que su viscosidad es una función de la temperatura.

En el esquema de cálculo se emplean diferencias finitas en las coordenadas coincidentes con las direcciones principales del flujo y se reformulan las ecuaciones para lograr un problema de valor inicial. La integración del sistema de ecuaciones en el espesor de la película fluida se acopla, en primera instancia, con una técnica de shooting, cuyo objetivo es el cumplimiento de las condiciones de borde de las componentes de la velocidad y el flujo de calor. Posteriormente se implementa un algoritmo de diferencias finitas y colocación.

Los resultados obtenidos muestran buena concordancia con las hipótesis de cálculo y con datos experimentales y numéricos disponibles en la literatura.

## 1 INTRODUCCIÓN

Un cojinete es un elemento que permite a una parte de una máquina moverse respecto de otra con fricción y desgaste mínimos. Entre los diversos tipos de cojinete existentes, resultan de interés en este trabajo los cojinetes hidrodinámicos cilíndricos, en los cuales las superficies sólidas en movimiento relativo (eje y cojinete) son mantenidas separadas por una fina película de lubricante. La presión necesaria para ello es generada por la geometría del sistema y las condiciones del flujo. Dado que el espesor de dicha película es varios órdenes de magnitud menor que el diámetro del eje, las ecuaciones de conservación correctamente tratadas presentan términos de distinto grado de importancia. Esto permite simplificar notoriamente el sistema de ecuaciones si sólo se conservan los términos dominantes. No obstante, el conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resultante debe resolverse de manera acoplada para determinar los campos de velocidades, presión y temperatura.

En general, el análisis termo-hidrodinámico de cojinetes puede dividirse en dos categorías (Elrod, 1987). En la primera de ellas se incluye el tratamiento completo del balance de energía a lo largo del espesor de la película fluida usando métodos de diferencias o elementos finitos (Mitsui, 1987). En la segunda se emplea alguna aproximación para considerar todo el fenómeno que sucede en el espesor, usualmente empleando la distribución local de temperatura a través de algún valor “representativo” (Vignolo *et al.*, 2008). Las ventajas y desventajas de la primera radican en la exactitud del modelo a expensas de complejidad, mientras que para la segunda se gana en sencillez a expensas de exactitud del modelo. Dependiendo de las necesidades, puede optarse por uno u otro enfoque.

En este trabajo se presenta el progreso de una plataforma de cálculo, basada en otra previamente desarrollada (Vignolo *et al.*, 2009, 2010), en la que se resuelven numéricamente las ecuaciones de conservación de manera acoplada. El objetivo de esta etapa fue el de flexibilizar los algoritmos previos mediante la optimización de rutinas de generación de malla, de ecuaciones en los nodos, de variantes en las condiciones de contorno, de aproximaciones iniciales, de seguimiento de la convergencia y de representación gráfica de los resultados. Para ello, se consideró apropiado migrar el código original desarrollado en Fortran 90 a MATLAB.

MATLAB es un paquete de software que proporciona un ambiente de programación para cálculo de álgebra matricial, ampliamente extendido en cálculos científicos y de ingeniería. Puede resolver problemas numéricos complejos, con visualización de datos y resultados en una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. Algunas de sus características son compartidas en C y Fortran 90, lo que posibilita aprovechar códigos e interfaces de usuario ya desarrollados (The MathWorks Inc, 1996; Cleve, 2004). Asimismo, las funciones generales que definen las ecuaciones diferenciales en MATLAB y las operaciones 'built-in' y programadas de álgebra lineal son relativamente veloces, permitiendo almacenamiento dinámico y una sencilla recuperación de los valores de las variables. No obstante, el principal argumento para el cambio propuesto en el lenguaje de programación radica en las herramientas de MATLAB para el procesamiento en paralelo, mediante el uso del Paralell Computing Toolbox y del MATLAB Distributed Computing Server. Dado que el problema tratado requiere, según la experiencia previa y los resultados actuales, de grandes tiempos de cómputo, la posibilidad de poder ejecutar el código mediante procesamiento paralelo resulta una alternativa atrayente. De esta manera, en trabajos futuros podrá ejecutarse el algoritmo desarrollado, en paralelo mediante la introducción de cambios mínimos.

En esta instancia se detalla el desarrollo de las ecuaciones, métodos numéricos empleados y resultados obtenidos para cojinetes de longitud arbitraria, con flujo no-isotérmico de un lubricante Newtoniano.

## 2 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

En su forma más elemental, un cojinete hidrodinámico cilíndrico consta de un eje que gira (rotor) contenido dentro de un cilindro de ajuste estrecho (cojinete), cuyas superficies están separadas por una pequeña película de lubricante. Si el rotor gira a una velocidad angular  $\Omega$  y existe una fuerza  $F$  aplicada al mismo, los centros del eje y del cojinete no permanecen coincidentes, sino que muestran cierta excentricidad,  $e$  (Figura 1a). Esto genera una geometría convergente-divergente en la película fluida que, junto con el movimiento relativo entre las superficies sólidas, permite que se desarrolle presión por efectos viscosos en la misma. Se logra así capacidad para soportar la carga aplicada y evitar el contacto entre dichas superficies.

La principal hipótesis simplificadora que se considera al estudiar el flujo de lubricante es que la capa de fluido es tan delgada, comparada con el radio del cojinete, que su curvatura puede despreciarse. Así, el flujo que en principio está descrito en coordenadas cilíndricas, se trata en coordenadas cartesianas (Figura 1b).

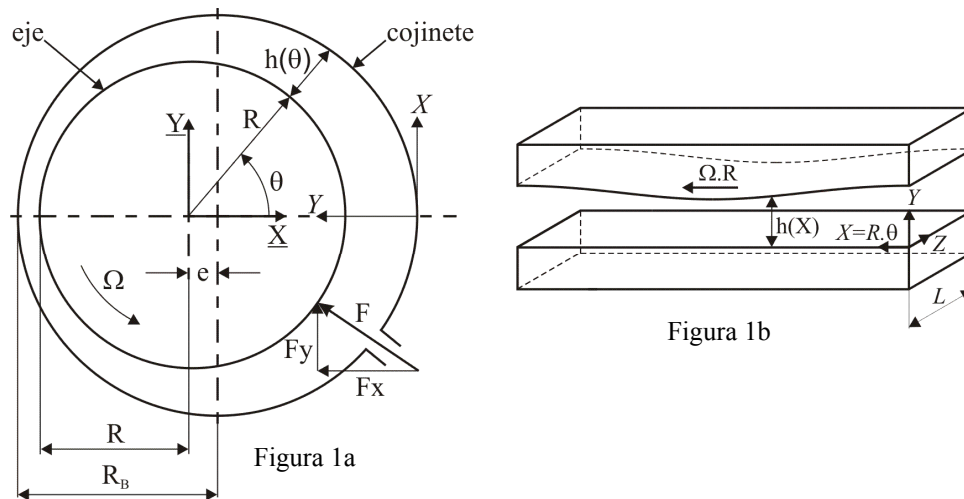


Figura 1: Geometría de un cojinete hidrodinámico (a) y de la sección de flujo equivalente en coordenadas cartesianas (b). Al despreciarse la curvatura, la coordenada  $X$  puede considerarse como  $R\theta$ .

### 2.1 Análisis dimensional

Si se considera que el fluido es Newtoniano, con densidad,  $\rho$ , y capacidad calorífica,  $C_v$ , constantes, y que el huelgo,  $c=R_B-R$ , entre el eje y el cojinete es varios órdenes de magnitud menor que el diámetro,  $D=2R$ , los términos dominantes de las ecuaciones de conservación adimensionales son:

$$\text{Balance de Masa: } 0 = \frac{1}{\pi} \frac{\partial u}{\partial \Theta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (\Theta): 0 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{R}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \frac{\mu_{(r)}}{\mu_0} \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento } (y): 0 = -\frac{L^2}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{(r)}}{\mu_0} \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$\text{Balance de Cantidad de Movimiento (z): } 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_{(T)}}{\mu_0} \left( \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\text{Balance de Energía: } \left( \frac{u}{\pi} \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v \frac{\partial t}{\partial y} + w \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\mu_{(T)}}{\mu_0} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5)$$

donde  $\lambda = \frac{kR}{Uc^2 \rho C_v}$ ,  $k$  es la conductividad del fluido,  $U$  la velocidad tangencial del eje y  $\mu_{(T)}$  es la ley de variación de la viscosidad con la temperatura. En este caso se adopta la Ley de Vogel, definida como:

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)} \quad (6)$$

que puede reescribirse de la forma

$$\mu = \mu_0 e^{-\beta_0(T-T_0)} = \mu_0 e^{-\beta_0 T_{REF}} = \mu_0 e^{-\kappa_1 t} \quad (7)$$

donde  $\kappa_1 = \beta_0 T_{REF} = \beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left( \frac{R}{c} \right)^2$  se conoce como “parámetro adimensional de aumento de temperatura”,  $\mu_0$  es la viscosidad de referencia y  $\beta_0$  es una constante que depende del fluido.

Las variables adimensionales se definen como:

$$p = \frac{P - P_0}{P_{REF}} \quad \text{con} \quad P_{REF} = \frac{\mu_0 U}{R} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \left( \frac{L}{R} \right)^2, \quad t = \frac{T - T_0}{T_{REF}} \quad \text{con} \quad T_{REF} = \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left( \frac{R}{c} \right)^2, \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{X}{\pi R}, \quad y = \frac{Y}{c}, \quad z = \frac{Z}{L}, \quad u = \frac{V_\Theta}{U}, \quad v = \frac{V_y}{U} \frac{R}{c}, \quad y \quad w = \frac{V_z}{U} \frac{R}{L}$$

Puede notarse en la Ec. (3) que, para el caso de un cojinete no isotérmico, su orden de magnitud es modificado por el coeficiente adimensional  $\kappa_1$ , esto es:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + e^{-\kappa_1 t} \left( \beta_0 \frac{\mu_0 U}{\rho C_v R} \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

La dependencia de la presión con  $y$  cobra importancia a medida que la relación  $(R/L)^2$  aumenta y a medida que el producto  $\frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$  cobra relevancia.

## 2.2 Condiciones de Borde

El problema queda parcialmente determinado por las condiciones de borde sobre las superficies del eje ( $y = \tilde{h}$ ) y del cojinete ( $y = 0$ ) para las componentes de la velocidad, por la presión exterior al sistema, y la presión y temperatura de suministro de lubricante, esto es:

$$\begin{aligned}
 u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\tilde{h}} = 1, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=\tilde{h}} = \frac{1}{\pi} \frac{d\tilde{h}}{d\Theta}, \quad w|_{y=0} = 0, \\
 w|_{y=\tilde{h}} = 0, \quad p|_{\Theta=0} = 0, \quad p|_{z=0} = p|_{z=1} = 0, \quad t|_{\Theta=0} = 0, \quad y \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=1/2} = 0
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

donde  $\tilde{h}$  es el espesor de película adimensional. Para el caso de eje y cojinete alineados (ejes paralelos) dicho espesor se define como:

$$\tilde{h} = \frac{h}{c} = 1 + \varepsilon \cos(\pi\Theta)
 \tag{11}$$

siendo  $\varepsilon = \frac{e}{c}$  la excentricidad relativa.

Para completar la formulación del problema, es necesario definir el mecanismo de transmisión de calor entre el lubricante y las paredes que lo contienen, el cual puede expresarse de diversas formas. Hay cierta cantidad de calor que se transmite desde el lubricante al cojinete, el cual es conducido por el cuerpo de éste hasta alguna interfase en la que otro fluido lo recibe y transporta (aire del ambiente o fluido de refrigeración). En este trabajo se considera, en primera instancia, que el cojinete es adiabático por lo que este flujo de calor es despreciado.

Del otro lado de la capa lubricante se encuentra la superficie del muñón. Dado que éste se mueve a alta velocidad tangencial y que la conductividad del eje suele ser elevada comparada con la del lubricante, puede asumirse que el muñón es isotérmico. Esto se debe a que un mismo punto de la superficie atraviesa zonas de distinta temperatura en un breve lapso de tiempo. Se puede considerar que alcanza una temperatura “media” de la vuelta,  $T_M$ . Bajo estas consideraciones, se tienen las siguientes condiciones de borde:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad t|_{y=\tilde{h}} = t_M
 \tag{12}$$

donde  $t_M$  es la temperatura adimensional media alcanzada por el fluido sobre la superficie del eje.

Por otra parte, ya sea que se considere flujo isotérmico o no-isotérmico, debe considerarse el hecho de que el fluido lubricante no puede soportar presiones menores a su presión de vapor. Por ello, se requiere especificar el mecanismo empleado para contemplar la cavitación. La región en la que se manifiesta este fenómeno puede abarcar gran parte de la película fluida, y llega a alterar sensiblemente el comportamiento del sistema eje-cojinete. Existen varios modelos para considerar el efecto de cavitación, siendo los más usuales en grado de complejidad creciente, los de Gümbel, Reynolds (Girón y Cortínez, 2003), Mori (Mori *et al.*, 1968) y Elrod-Adams (Girón y Cortínez, 2003; Ausas *et al.*, 2007, 2009).

En esta etapa se adopta el modelo más elemental, el cual se limita a considerar la zona convergente de la película fluida ( $0 \leq \Theta \leq 1$ ) donde las presiones son positivas, y suponer la zona divergente ( $1 < \Theta < 2$ ) con presión nula. Si bien ello presenta grandes limitaciones respecto de la conservación de la masa en la interfase entre las zonas con y sin cavitación, resulta una buena opción en esta etapa del desarrollo en la que se busca, en primera instancia, reformular el algoritmo previo y evaluar su robustez, para ser posteriormente extendido a situaciones físicas más realistas.

### 3 MÉTODO NUMÉRICO

La solución numérica del problema planteado es compleja debido al acoplamiento de las ecuaciones. En este trabajo se emplea el método de diferencias finitas en las coordenadas circunferencial y axial. Para ello se requiere emplear una transformación del sistema de coordenadas físico  $(\Theta - y - z)$ , a uno computacional  $(\xi - \eta - \varphi)$ , respectivamente) en el cual el dominio queda determinado por un prisma rectangular. El procedimiento de generación de la grilla, el cual emplea ecuaciones elípticas tipo Poisson, se detalla en [Vignolo et al., 2009](#).

El algoritmo elaborado considera diferencias centrales en los nodos interiores y diferencias hacia adelante y hacia atrás de orden dos en los extremos ([Failla et al., 1996](#)). El sistema resultante consiste de  $N$  ecuaciones diferenciales ordinarias en la coordenada  $\eta$ , donde  $N$  es el producto del número de variables por nodo por el número total de nodos. En este caso, se trabaja con ocho variables por nodo:  $u, v, w, t, \partial u / \partial \eta, \partial w / \partial \eta, \partial t / \partial \eta$  y  $p$ . Dado que las ecuaciones de conservación brindan sólo cinco de las ocho ecuaciones necesarias, se definen tres ecuaciones adicionales para las tres nuevas variables  $\partial u / \partial \eta, \partial w / \partial \eta$  y  $\partial t / \partial \eta$ , como se detallan a continuación.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= du \\
 \frac{\partial v}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\pi} \left( h_{(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - h_{(\xi)} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\
 \frac{\partial w}{\partial \eta} &= dw \\
 \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{\eta \left( \frac{L}{R} \right)^2 h_{(\xi)}^2 \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} - e^{-\kappa \eta} \kappa_1 \pi h_{(\xi)} \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - e^{-\kappa \eta} \kappa_1 \pi^2 h_{(\xi)} \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - e^{-\kappa \eta} \pi h_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + e^{-\kappa \eta} \pi \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - e^{-\kappa \eta} \pi^2 h_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)}{h_{(\xi)} \left( \pi^2 + \eta^2 \left( \frac{c}{R} \right)^2 \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 \right) \left( \frac{L^2}{c^2} \right)} \\
 \frac{\partial t}{\partial \eta} &= dt \\
 \frac{\partial du}{\partial \eta} &= \frac{\frac{L^2}{R^2} h_{(\xi)}^2 \frac{\partial p}{\partial \xi} \pi e^{\kappa \eta} + \frac{c^2}{R^2} \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial \eta} h_{(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{c^2}{R^2} \eta^2 \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{c^2}{R^2} \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial \eta} h_{(\xi)} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \pi}{\left( \frac{c^2}{R^2} \eta^2 \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 + \pi^2 \right)} + \\
 &+ \frac{\frac{c^2}{R^2} \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} h_{(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{c^2}{R^2} \eta \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{c^2}{R^2} \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) h_{(\xi)} \pi - \pi^2 \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}}{\left( \frac{c^2}{R^2} \eta^2 \left( \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \right)^2 + \pi^2 \right)} \\
 \frac{\partial dw}{\partial \eta} &= h_{(\xi)}^2 e^{\kappa \eta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \kappa_1 \frac{\partial t}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\
 \frac{\partial dt}{\partial \eta} &= \frac{h_{(\xi)}}{\pi \lambda} u \left( h_{(\xi)} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \eta \frac{dh_{(\xi)}}{d\xi} \frac{\partial t}{\partial \eta} \right) + \frac{h_{(\xi)}}{\lambda} v \frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{h_{(\xi)}^2}{\lambda} w \frac{\partial t}{\partial \varphi} - \frac{e^{-\kappa \eta}}{\lambda} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{13}$$

En el algoritmo previamente desarrollado en Fortran 90 ([Vignolo et al., 2009, 2010](#)), el sistema de ecuaciones resultante se resuelve como un problema de valor inicial por el método de Gear ([Pozrikidis, 1998](#)) acoplado a una técnica de shooting ([Kaw, 2009](#)). Asimismo, han sido evaluadas diversas alternativas para optimizar el proceso de cálculo ([Vignolo et al., 2010](#)). No obstante, en el afán de mejorar y flexibilizar el algoritmo, en esta etapa se ha optado por resolver el sistema de ecuaciones en MATLAB, preparándolo para una futura implementación en un cluster de cálculo paralelo.

### 3.1 Método de Cálculo

En primera instancia, y al igual que en el desarrollo previo, el sistema de ecuaciones fue resuelto como un problema de valor inicial acoplado a una técnica de shooting, por medio del minimizador incluido en MATLAB, `lsqnonlin`, el cual resuelve problemas de mínimos cuadrados no lineales (Shampine and Reichelt, 1997). Nuevos sistemas de ecuaciones de grado creciente de tamaño y complejidad fueron resueltos mediante este algoritmo, obteniendo buenos resultados, aunque con considerables tiempos de cálculo. En la Figura 2 se presentan los tiempos de cálculo para un sistema simplificado, de cuatro ecuaciones por nodo, de veinticinco (5x5) a ciento veintiún (11x11) nodos por plano, y once planos.

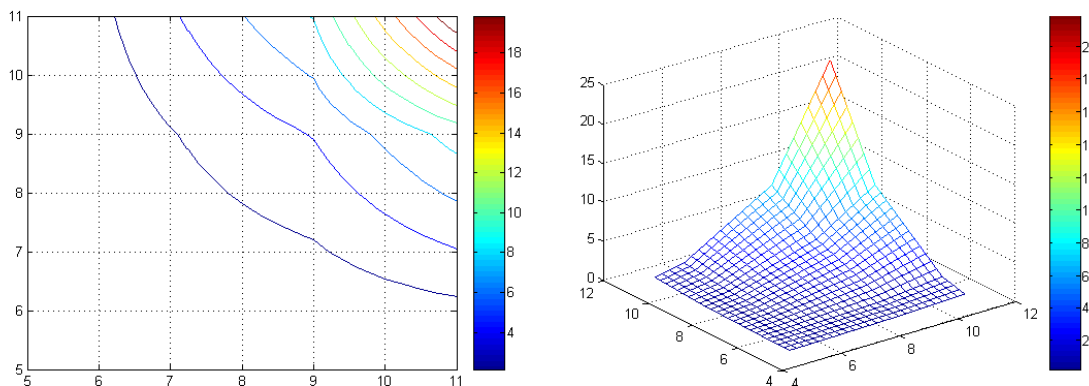


Figura 2: Tiempo de cálculo en horas para un sistema de cuatro ecuaciones por nodo en función del número de nodos empleados en cada dirección.

En busca de disminuir la demanda de tiempo de CPU, se consideraron otras variantes de cálculo, resultando atractivo el empleo del solver incluido en MATLAB, `bvp4c` (Kierzenka and Shampine, 2001). Este es un código de diferencias finitas para resolver problemas de valor de contorno (BVP) de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de colocación. El sistema se integra en el intervalo  $[a,b]$ , produciendo una solución continua y derivable en el mismo. La selección del paso y el control del error son basados en el residuo de la solución continua. Una ventaja adicional del `bvp4c` es que requiere que el sistema de ecuaciones diferenciales esté escrito como un sistema de primer orden. Esto posibilita emplear el mismo bloque de ecuaciones utilizado con cualquier método de valor inicial, abriendo la posibilidad de intercambiar métodos de solución distintos con un esfuerzo de programación acotado.

Todo BVP especifica valores o ecuaciones para la solución de sus componentes en más de un valor del dominio, y bajo esas condiciones puede no tener solución, tener un número finito, o tener infinitas. Por ello, la aproximación con que se inicia el algoritmo (`guess`) determina frecuentemente la existencia o no de convergencia a la solución deseada. Esta primera aproximación para el paso inicial deja entrever el comportamiento de la solución deseada. El código adapta el paso para obtener una solución numérica precisa con un número adecuado de puntos. En este sentido, `bvp4c` se mostró sumamente sensible al `guess` empleado, convergiendo sólo con aproximaciones iniciales de forma y orden de magnitud acordes con la solución esperada.

Para asignar las aproximaciones iniciales, `bvp4c` emplea la función `bvpinit`. La misma crea una estructura cuando se establecen el paso y el `guess` para la solución. La tolerancia del error relativo en los residuos y la tolerancia del error absoluto tienen asignados por defecto los valores  $10^{-3}$  y  $10^{-6}$ , respectivamente. Los valores de los parámetros opcionales se establecen a través de una estructura formada con la función `bvpset`. Esta se comunica a `bvp4c` mediante un argumento opcional.

El programa nODEs, desarrollado en MATLAB, resuelve de manera interactiva el problema planteado a partir de las condiciones de borde, para lo cual se provee una serie de ocho ecuaciones para cada uno de los nodos de la malla definida, un paso inicial para la integración y una aproximación inicial para calcular la solución. Luego de alcanzada la convergencia, los resultados son presentados gráficamente.

#### 4 RESULTADOS

A continuación se presentan perfiles de presión y temperatura adimensionales correspondientes a un cojinete con las características que se detallan en la Tabla 1 (Mitsui, 1987). Mitsui efectuó mediciones experimentales de presión y temperatura en un banco de ensayos de cojinetes hidrodinámicos, empleando tres tipos de aceites minerales diferentes como fluido lubricante. Asimismo, desarrolló un algoritmo de diferencias finitas para modelar el desempeño termo-hidrodinámico de los cojinetes ensayados, acoplado la ecuación de Reynolds Generalizada con el balance de energía. De las diversas configuraciones de flujo presentadas, la Tabla 1 muestra la seleccionada para la comparación.

L/D	0,7
R/C	637
L	0,7m
$\beta_0$	0,029/K
N	2250 RPM
$T_0$	44 °C
$\varepsilon$	0,44
$\mu_0$	0,0192 Pa.s
$\rho$	859 Kg/m <sup>3</sup>
$C_v$	1970 J/Kg K

Tabla 1: Características del cojinete estudiado

En la Figura 3 se muestra la evolución del perfil de presión en el centro del cojinete, y el tiempo de cálculo asociado en función de la malla escogida. Puede apreciarse que para obtener resultados aceptables se requiere de al menos 10 horas de procesamiento, en las condiciones ensayadas.

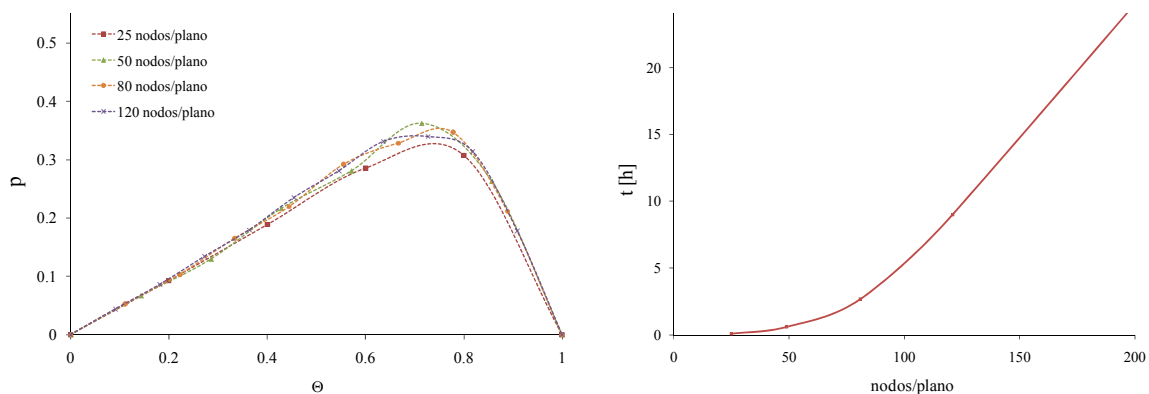


Figura 3: Evolución del perfil de presión y tiempo de cálculo en función del mallado.

En la Figura 4 se muestra la comparación entre los perfiles de presión obtenidos mediante el modelo previamente desarrollado, un modelo isotérmico, y el modelo actual. Como



consecuencia del empleo de distintos modelos de cavitación, las presiones obtenidas difieren sensiblemente. Mientras que en la versión previa se empleó uno de tipo Reynolds, en esta se emplea uno tipo Gumbel. Este último produce que el valor máximo de presión sea ligeramente mayor y posicionado a un ángulo  $\Theta$  también mayor.

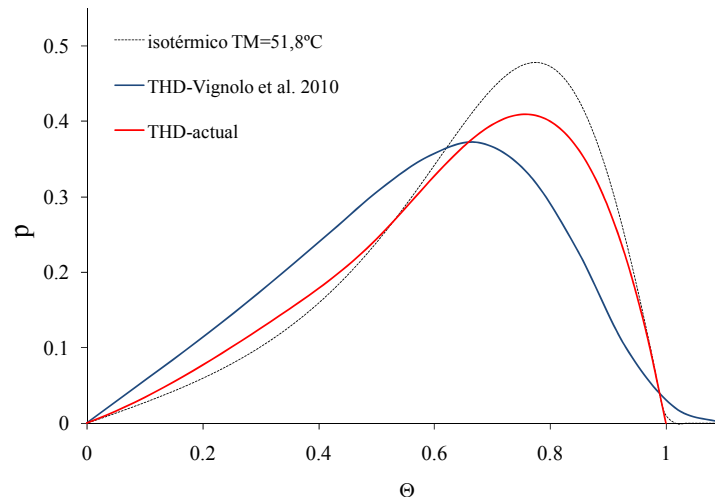


Figura 4: Evolución de la presión adimensional en función de la coordenada tangencial adimensional.

En la Figura 5 se presenta la evolución de la temperatura adimensional sobre la superficie del cojinete,  $t_c$ , (en la mitad de su longitud) obtenida mediante el algoritmo presentado, referenciada como “THD-actual”. Para su comparación se muestran resultados experimentales (Mitsui, 1987) y predicciones de la temperatura adimensional sobre la superficie del cojinete, en función de la coordenada tangencial (Mitsui, 1987; Vignolo *et al.*, 2010), referenciados de modo que se cumpla que para  $\Theta = 0$ ,  $t_c = 0$ . En concordancia con las hipótesis empleadas en esta etapa, puede verse que los valores obtenidos mediante el algoritmo presentado son mayores a los reportados por Mitsui, lo cual es consistente con el hecho que no se ha considerado transferencia de calor entre el fluido y el cojinete. A modo ejemplo, se propone en la curva referenciada como “THD-actual Q” que el cojinete transfiere calor al medio mediante convección. Para ello se ha supuesto una condición de borde convectiva con un coeficiente superficial de transmisión de calor  $\alpha=3\text{W}/\text{m}^2\text{K}$  y se ha considerado que la temperatura en el lado interno del cojinete (en contacto con el lubricante) no difiere significativamente del externo (en contacto con el medio ambiente). Nótese que dicha predicción se aproxima notoriamente a los resultados reportados por Mitsui aun habiendo empleado un modelo sumamente simplificado.

Asimismo, los valores obtenidos en la predicción THD-actual son distintos a los correspondientes al desarrollo previo, THD-Vignolo *et al.*, 2010. Esto se debe a la diferencia en los perfiles de presión, indicados en la Fig.4. El modelo que emplea la condición de borde tipo Reynolds para la cavitación (THD -Vignolo *et al.*, 2010) presenta un mayor valor de presión (y de su derivada respecto de  $\Theta$ ) para  $0 < \Theta < 0.5$ , aproximadamente. Posteriormente, el modelo que emplea condición de borde tipo Gumbel (THD-actual) muestra valores superiores. Dado que la disipación viscosa está relacionada (a través de los perfiles de tensión de corte) con las derivadas de la presión, es de esperar que para valores de  $\Theta$  pequeños el primer modelo tienda a temperaturas más elevadas mientras que el segundo modelo lo haga para ángulos mayores.

Otro efecto relacionado con la transferencia de calor considerada entre el lubricante y el

cojinete es el valor de temperatura alcanzada sobre el rotor. Mitsui propone una temperatura constante sobre el mismo calculada en función de la cantidad de calor que es capaz de evacuar el eje por sus extremos. En el algoritmo presentado, así como en los modelos previos desarrollados (Vignolo *et al.*, 2008 y 2010), se asume que la temperatura del rotor es igual a la temperatura media del fluido, en todo el dominio (Ionescu, 2005).

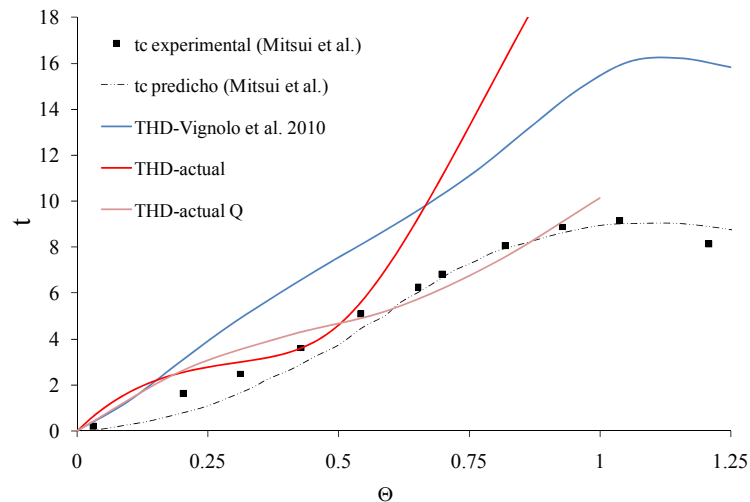


Figura 5: Evolución de la temperatura adimensional en función de la coordenada tangencial adimensional.

En la Figura 6 se muestran los campos de presión y temperatura sobre la superficie del cojinete. La presión aumenta su magnitud en la zona convergente del flujo, brindándole capacidad portante al cojinete. La temperatura del fluido lubricante se incrementa conforme éste avanza en la cuña, impulsada por la disipación viscosa generada por las tensiones de corte que se producen en el mismo.

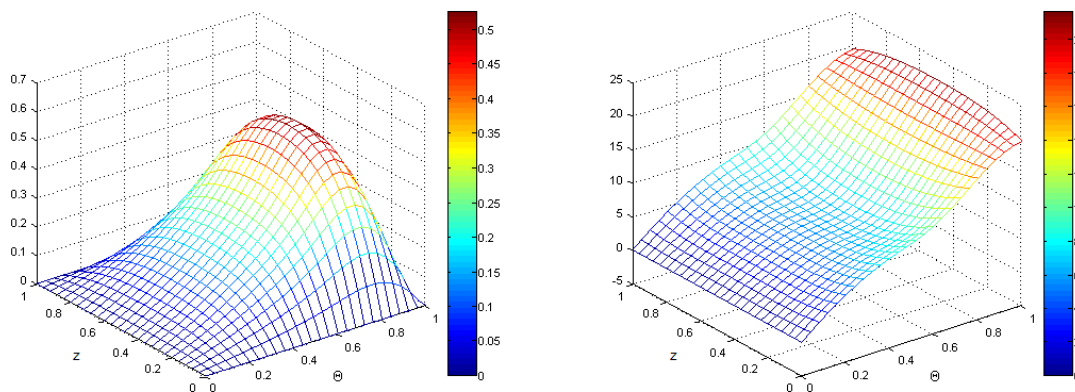


Figura 6: Distribuciones de presión (izq) y temperatura (der) adimensionales sobre la superficie del cojinete.

## 5 CONCLUSIONES

En esta etapa del trabajo sistemático que se viene llevando a cabo (Vignolo *et al.*, 2007, 2008, 2009 y 2010) para contar con herramientas analíticas y numéricas para el análisis de cojinetes en condiciones reales de uso, se ha extendido un desarrollo previo en Fortran 90 para resolver las ecuaciones de conservación en la película fluida de cojinetes hidrodinámicos no-isotérmicos. Se ha migrado el algoritmo a MATLAB en busca de flexibilidad en la evaluación de alternativas de cálculo y de procesamiento, presentación de los resultados y,

por sobre todo, facilidad de implementar su ejecución en paralelo en futuros desarrollos. Mientras que el algoritmo implementado en Fortran 90 resuelve el sistema mediante el método de Gear y shooting, el presentado en este trabajo lo hace mediante diferencias finitas y colocación. No obstante, este esquema es fácilmente adaptable a un esquema de valor inicial ya que el sistema de ecuaciones fue escrito de esa forma.

Las predicciones de este código concuerdan con las hipótesis empleadas al compararlas con soluciones preexistentes y datos experimentales. La condición de borde de cavitación empleada y transmisión de calor entre el lubricante, el cojinete y el medio modifican sensiblemente los perfiles de presión y temperatura.

## REFERENCIAS

- Ausas, R., Jai, M. and Buscaglia, G., A Mass-Conserving Algorithm for Dynamical Lubrication Problems with Cavitation, *Journal of Tribology*, 131: 031702 (7 pgs.), 2009.
- Ausas, R., Ragot, P., Bayada, G., Buscaglia, G., Ciuperca, I. and Jai, M., Avances en la Simulación Numérica de Lubricación Hidrodinámica y el Diseño de Superficies Óptimas, *Mecánica Computacional*, XXVI:1921-1942, 2007.
- Cleve, M., Numerical Computing with MATLAB, Electronic edition: The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.
- Elrod, H.G. and Brewe, D.E., Thermohydrodynamic Analysis for Laminar Lubricating Films, *Tribology Series*, 11:443-450, 1987.
- Failla, M., Sarmoria, C., Villar, M., Brandolin, A., and Quinzani, L., Extrusion of Polymeric Films from a Planar Die., *Actas del 5° Simposio Latinoamericano de Polímeros (SLAP'96) y 3° Simp. Iberoamericano de Polímeros (SIAP)*, 381-382, 1996.
- Girón, P. and Cortínez, V., Una Generalización de la Ecuación de Reynolds Para el Análisis de Problemas de Lubricación en Cojinetes, *Mecánica Computacional*, XXII:1399-1410, 2003.
- Kaw, A., *Textbook notes on the shooting method for ODE*, Chap. 08.06: Shooting Method for Ordinary Differential Equations, <http://numericalmethods.eng.usf.edu>, 2009.
- Kierzenka, J. and Shampine, L.F., A BVP Solver based on Residual Control and the MATLAB PSE, *ACM TOMS*, Vol. 27, No. 3, pp. 299-316, 2001.
- Ionescu, M. G. & Ionescu, V-C. M., An Approximate Analytical Model of Thermohydrodynamic Estimation of Finite Length Journal Bearings, *Proceedings of WTC2005*, 2005.
- Mitsui, J., A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing, *Tribology International*, 20:331-341, 1987.
- Mori, H., Yabe, H. and Fujita, Y., On the Separation Boundary Condition for Fluid Lubrication Theories of Journal Bearings. *ASLE Transactions*, 11:196-203, 1968.
- Pozrikidis, C., *Numerical Computation in Science and Engineering*, Oxford University Press, 1998.
- Shampine, L.F. and Reichelt, M.W., *The MATLAB ODE Suite*, 1997.
- The MathWorks, Inc., *Using MATLAB*, 24 Prime Park Way, Natick, MA, 1996.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O., and Quinzani, L.M., Análisis del Comportamiento del Cojinete de Longitud Finita Usando el Método de Perturbación Regular, *Mecánica Computacional*, XXVI: 592-604, 2007.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O. and Quinzani, L.M., Análisis Termohidrodinámico de Cojinetes Cortos, *Mecánica Computacional*, XXVII, 1755-1765, 2008.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O. and Quinzani, L.M., Determinación Numérica de Parámetros Físicos en la Película Fluida de Cojinetes Hidrodinámicos, *Mecánica Computacional*, XXVIII: 1689-1702, 2009.
- Vignolo, G.G., Barilá, D.O. and Quinzani, L.M., Determinación Numérica de Parámetros Termohidrodinámicos en Cojinetes, *Mecánica Computacional*, Vol XXIX: 3999-4012, 2010.