Polinomios recíprocos, números irracionales y ecuaciones de recurrencia. Parte I

Antonio Cafure, Nardo Giménez, Santiago Guaraglia

1 Introducción

Este artículo representa la primera parte (hay una segunda) de un trabajo más amplio que hemos elaborado. Son varias y variadas las intenciones de este conjunto de dos artículos y esperamos elucidarlas con el transcurrir de los mismos.

En términos estrictamente matemáticos, tratamos con una clase concreta de polinomios, los denominados polinomios recíprocos. Un polinomio recíproco es un polinomio que resulta invariante por inversión del orden de sus coeficientes. Por ejemplo, el polinomio

$$f = 5t^5 - 2t^4 + 41t^3 + 41t^2 - 2t^1 + 5.$$

En términos informales, un polinomio recíproco no es más que un polinomio ≪capicúa≫.

La particularidad de estos polinomios radica no solo en que constituyen una familia amplia de polinomios para los cuales existen métodos ad-hoc que simplifican -hasta cierto punto, claro- la búsqueda de las raíces de los mismos sino que, a la vez, resultan de una gran valía para desarrollar, afianzar o comprender mejor, algunas otras ideas de matemática. En este sentido, la explicitación de las nociones matemáticas aledañas, el desarrollo de ideas que no suelen estar presentes en los textos usuales, son intenciones de este artículo.

Diversos textos y artículos tratan la noción de polinomio recíproco aunque no con el enfoque que le imprimiremos en este trabajo; sería por demás excesivo citar la copiosa bibliografía relacionada con los mismos. De forma completamente arbitraria elegimos mencionar, por ejemplo, el texto de D. Kalman en

[Kal09] que presenta un tratamiento interesante sobre los métodos ad-hoc mencionados y, al mismo tiempo, brinda información sobre ciertas aplicaciones a problemas de ingeniería. Desde otra perspectiva, P. Viana y P. Murgel Veloso ([VV02]) estudian qué tipos de grupos de Galois están asociados a los polinomios recíprocos.

Tomando entonces como punto de partida este tópico concreto, otra de nuestras intenciones -no negamos que pueda ser la de mayor interés- es mostrar cómo es posible establecer vínculos con diversas nociones matemáticas y como las mismas dan lugar a diferentes problemáticas que, y hete aquí el punto, podrían tratarse en diferentes estadios de la formación de profesores de matemática. En numerosas ocasiones la lógica de la formación, los tiempos de la misma, no habilita espacios de discusión, de reflexión que no estén contemplados por dicha lógica: hay que dictar una serie de contenidos en un lapso de tiempo predeterminado y, la mayoría de las veces, actividades por fuera de este mandato quedan excluidas. Consideramos pertinente apropiarnos de unas palabras de Patricia Sadovsky, quien en su libro *Enseñar Matemática hoy* [Sad05] -en el mismo describe el estado de cosas escolar, aunque sus afirmaciones pueden hacer extensivas a la formación de profesores- escribe: "...se impone un modo de trabajo según el cual los saberes solo pueden durar un cierto tiempo en la vida de la clase, ya que luego hay que pasar a ocuparse de otros saberes, esto implica un condicionante fuerte a la hora de pensar en procesos de reconstrucción del conocimiento ...pues los tiempos del aprendizaje no se rigen por la lógica de los cuatrimestres o semestres."[1]

En este senda, esperamos aportar una serie de ideas sobre matemática generalmente ausentes en los textos matemáticos que tratan tópicos tales como polinomios, con una serie de planteos que apuntan sobretodo, retomando las ideas de Sadovsky, a que los saberes perduren. Al mismo tiempo, y esto nos coloca en situación de exponer otra de las intenciones del artículo, este planteo

[1]En el texto original, se hace mención a bimestres y trimestres.

que realizamos conlleva la revalorización de la noción de polinomio. Esta revalorización no nace de adoptar posiciones obcecadas de defensa a ultranza de contenidos matemáticos, que bien podrían no ser relevantes. Más bien nace de una convicción genuina de que dicha noción es de una potencialidad aun no desplegada en la formación docente. La riqueza de dicha noción y sus potencialidades como generadora de conocimiento matemático quedan bellamente expuestas en el gran texto de Edward Barbeau ([Bar89]) que lleva por título -nada es casual- *Polynomials*.

Aunque sea evidente, de todos modos debemos señalar que esto no es un trabajo sobre didáctica de la matemática ni somos tan osados como para pretender que este trabajo constituya una secuencia didáctica. Sin embargo, valoraríamos cualquier aporte en esa dirección y consideramos que algunas de las ideas desarrolladas a lo largo del texto, podrían ser un instrumento al momento de pensar abordajes para la enseñanza de polinomios en el nivel de formación de profesores, dependiendo de los intereses particulares.

Lo que se presenta en esta serie de artículos forma parte del curso de Álgebra del Profesorado Universitario de Educación Superior en Matemática que se dicta en la Universidad Nacional de General Sarmiento. De hecho, con algunas modificaciones, los textos se trabajan en clase. Estos textos también fueron trabajados en un stage de formación organizado por el Instituto Nacional de Formación Docente (INFOD) para profesores de matemática desempeñándose en Institutos Superiores de Formación Docente de la Patagonia. El mismo se llevó a cabo en noviembre de 2012 en la Universidad Nacional de Tierra del Fuego.

A continuación describimos brevemente el contenido de este artículo.

En la Sección 2 presentamos una noción anterior a la de polinomio recíproco. Dado un polinomio $f \in \mathbb{Q}[t]$ de grado n, expresado en la base monomial $\{1, t, \ldots, t^n\}$, definimos el polinomio $f_{\mathsf{rev}} \in \mathbb{Q}[t]$ como aquel que se obtiene invirtiendo el orden de los coeficientes de f. Estudiamos cómo se vincula esta operación con la estructura de anillo de $\mathbb{Q}[t]$ y la conocida relación que se establece entre las raíces de f y f_{rev}: si α es una raíz no nula de f entonces $1/\alpha$ es raíz de f_{rev}. Además, y este es un aspecto usualmente dejado de lado, mostramos que esta relación es un caso particular de la relación existente entre los patrones de factorización de ambos polinomios (ver Proposición 2.2).

El tratamiento de los polinomios recíprocos comienza en la Sección 3. Proporcionamos algunos ejemplos -típicos, es verdad, pero generalmente desconocidos en ámbitos de formación docente- sobre como calcular sus raíces y, continuando con lo iniciado en la Sección 2, intentamos que estos ejemplos ilustren cómo estudiar la factorización de los mismos en $\mathbb{Q}[t]$ y $\mathbb{R}[t]$, factorización usualmente elusiva.

Un comentario final sobre la organización del artículo. La presencia de un gran número de ejercicios diseminados a lo largo del texto, y no solo como colofón de cada sección, se explica por el hecho de que los mismos cobran un rol fundamental en la construcción del relato que se está narrando. Requieren que el lector se involucre de manera directa en la construcción, en la comprensión de las ideas que se intentan transmitir.

2 Invirtiendo el orden de los coeficientes de un polinomio

Consideremos un polinomio arbitrario

$f = a_n t^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Q}[t]$ de grado n.

Vamos a considerar el polinomio que se obtiene a partir de f invirtiendo el orden de los coeficientes, es decir:

$$f_{\mathsf{rev}} := a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Q}[t], \tag{1}$$

Por ejemplo, si $f = 2t^3 + 5t^2 - 3t - 4$ entonces $f_{\mathsf{rev}} = -4t^3 - 3t^2 + 5t + 2$.

Ejercicio 1 *Calcular f_{rev} en los siguientes casos.*

1. *Si* $f = t^2 - 5t + 6$, $f = t^2 - 2$, $f = t^2 - 2t$ *y* $f = t^2$;

2. *Si* $f = 3t^3 + 6t^2 - 15t - 18$, $f = 3t^3 - 6t^2 - 6t + 12$, $f = 3t^3 - 6t^2 - 6t$ *y* $f = 3t^3 - 6t^2$;

3. *Si* $f = t^4 + 4t^3 - 7t^2 - 22t + 24$, $f = 5t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 24$ *y* $f := -3t^4 - 5t^2$.

En cada caso comparar el grado de f *con el de* f_{rev} *y aventurar alguna vinculación entre los mismos.*

Ejercicio 2 *Calcular* f_{rev} *en los siguientes casos.*

1. $f = 3(t-5)(t+1)(t-2)(t-3)(t+4)t$.

2. $f = -5(t+2)^3 - 2(t+2)^2 + 3(t+2) - 1$.

3. $f = (3t^2 - 5t + 2)(-t^3 + 4t - 1) + t + 2$.

De los ejercicios se desprende que es relativamente sencillo calcular f_{rev} cuando f se expresa en potencias de t ya que, la definición (1) se basa en la representación de f en términos de (la base monomial) $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. No es el caso cuando tenemos otras representaciones de f: desarrollo en potencias de $t - a$ (la base monomial $\{1, t-a, (t-a)^2, \ldots, (t-a)^n\}$), para un $a \in \mathbb{Q}$ distinto de 0, producto o suma de otros polinomios. En resumen, la definición (1) enunciada en forma más concisa es la siguiente:

$$\text{si } f = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad \text{entonces} \quad f_{\mathsf{rev}} := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} t^k, \tag{2}$$

En virtud de los ejemplos precedentes se observa que la mayor o menor facilidad para calcular f_{rev} depende de la representación de nuestro polinomio. Elaborar una definición alternativa, independiente de la representación del polinomio tal vez facilitaría los cálculos y, quizás, permitiría avanzar en la comprensión de los conceptos. Por el momento, continuamos trabajando con la definición de partida (1) y su reescritura (2) tratando de desarrollar sus potencialidades. Si nos tomamos el trabajo de formular estos reparos es porque sabemos que hay una definición, digamos, superadora.

Después de los cálculos previos -en realidad, como consecuencia de la definición- sabemos que si f es un polinomio de grado n entonces f_{rev} tiene grado n excepto en los casos en que 0 es raíz de f: en esa situación f_{rev} es un polinomio de grado menor o igual que $n-1$

Ejercicio 3 *¿Cuál es la relación entre el grado de f y el de f_{rev} cuando 0 es raíz de f?*

Siendo $-_{\mathsf{rev}}$ una suerte de operación sobre $\mathbb{Q}[t]$ es natural preguntarse si esta operación preserva las operaciones básicas del anillo de polinomios: suma y producto. En forma más o menos inmediata encontramos que $-_{\mathsf{rev}}$ no ≪distribuye≫ con la suma (perdemos toda esperanza de que $-_{\mathsf{rev}}$ preserve la estructura de $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de $\mathbb{Q}[t]$). En cambio, con un poco más de trabajo observamos que $-_{\mathsf{rev}}$ sí ≪distribuye≫ con el producto de polinomios.

Ejercicio 4 *Verificar que son válidas las siguientes igualdades.*

1. $\big((t^2+2t+5)\cdot(3t-8)\big)_{\mathsf{rev}}$ *es igual a* $(t^2+2t+5)_{\mathsf{rev}}\cdot(3t-8)_{\mathsf{rev}}$.
2. $\big((2t^4+3t^2)\cdot(t^2-2t-4)\big)_{\mathsf{rev}}$ *es igual a* $(2t^4+3t^2)_{\mathsf{rev}}\cdot(t^2-2t-4)_{\mathsf{rev}}$.

Ejercicio 5 *Mostrar que si f y g son dos polinomios cualesquiera con coeficientes en $\mathbb{Q}$ entonces*

$$(f\cdot g)_{\mathsf{rev}} = f_{\mathsf{rev}}\cdot g_{\mathsf{rev}};$$

en otras palabras, $-_{\mathsf{rev}}$ ≪distribuye≫ con el producto de polinomios.

Ejercicio 6 *Para cada uno de los siguientes polinomios f calcular f_{rev} y las raíces de f y f_{rev}. Estudiar el tipo de raíces de cada uno, o sea, si son racionales, reales o complejas.*

1. $f = -t^3 + 5t^2 - 6t$.
2. $f = 3t^3 - 11t^2 + 8t + 4$.
3. $f = t^4 + t^3 - 4t^2 - 2t + 4$.
4. $f = t^3 - t^2 + 2$.

Ejercicio 7 *Verificar que si r es una raíz cualquiera de $2t^5 + 3t^4 - 5t^2 - 3t - 11$ entonces $1/r$ es una raíz de $-11t^5 - 3t^4 - 5t^3 + 3t + 2$.*

Ejercicio 8 *Sin calcular f_{rev} encontrar sus raíces si $f = t^4 - 3t^2 - 28$.*

El Ejercicio 7 ilustra de manera patente que, en algunas circunstancias, un caso concreto ya posee todas las características a desarrollar en el caso general. En este caso, la relación entre las raíces de f y de f_{rev} allí demostrada se extiende casi sin dificultades a un polinomio $f \in \mathbb{Q}[t]$ arbitrario. No hay impedimentos entonces para enunciar, y dejar como ejercicio, dicha generalización.

Proposición 2.1 *Sea $f \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio de grado n. Entonces r es una raíz no nula de f si y solo si $1/r$ es raíz de f_{rev}. En particular, es posible establecer una correspondencia uno a uno entre las raíces no nulas de f y las de f_{rev}.*

Ejercicio 9 *Demostrar la Proposición 2.1.*

Varias consecuencias interesantes pueden derivarse de lo hecho hasta aquí. Lo inmediato es que hemos dado con un método que nos permite obtener rápidamente un polinomio cuyas raíces sean las inversas de las raíces no nulas de un polinomio dado, sin necesidad de calcularlas. Eventualmente, si necesitáramos calcularlas, quizás sea más simple calcular las de f_{rev} en lugar de las de f.

Con esta idea en mente, por ejemplo, podemos abordar el tratamiento de un problema de álgebra lineal: calcular el polinomio característico de la inversa de una matriz inversible. En efecto, si A es una matriz inversible, los autovalores de su inversa A^{-1} son los inversos multiplicativos de los autovalores de A. De esta manera, es suficiente conocer el polinomio característico p de A (que también permite expresar A^{-1} como una combinación lineal de las matrices $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$) para calcular el de A^{-1} como p_{rev}. Un pequeño detalle: el polinomio p_{rev} no necesariamente es mónico.

Ejercicio 10 *Supongamos que A es una matriz con entradas racionales cuyo polinomio característico es $p = t^5 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^3 + \frac{2}{3}t^2 - 5t + 4$. Deducir que A es inversible, encontrar la expresión de A^{-1} como combinación lineal de $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ y, finalmente, encontrar el polinomio característico de A^{-1}.*

Otra consecuencia es que podemos comenzar a interrogarnos sobre el tipo y cantidad de raíces de f y f_{rev} (si están en $\mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$ ó en $\mathbb{C}$) y la multiplicidad de las mismas. Si $f \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio que tiene una única raíz racional no nula entonces f_{rev} también tiene una única raíz racional no nula. A la vez, si $f \in \mathbb{Q}[t]$ tiene una raíz compleja $a + b \cdot i$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $b \neq 0$, ó $a \in \mathbb{Q}$ y $a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}$, por ejemplo, resulta que $a - b \cdot i$ también es raíz de f y, por lo tanto, f posee un factor irreducible de grado 2 en $\mathbb{Q}[t]$: a saber, $t^2 - 2at + (a^2 + b^2)$. Como consecuencia del Ejercicio 5 deducimos que f_{rev} posee un factor irreducible de grado 2 en $\mathbb{Q}[t]$.

La intención del último párrafo es ilustrar que el vínculo entre las raíces no nulas de f y f_{rev} no es casual, sino que es una instancia del vínculo, más general, que se establece entre las posibles factorizaciones de f y f_{rev}, ya sea en $\mathbb{Q}[t], \mathbb{R}[t]$ ó $\mathbb{C}[t]$. Cabe la siguiente pregunta: ¿f es irreducible si y solo si f_{rev} lo es? Y para explayarnos sobre este punto apelaremos al hecho de que $-_{\mathsf{rev}}$ $\ll$distribuye$\gg$ con el producto.

Ejercicio 11 *Supongamos que $f \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio de grado n que posee n*

raíces diferentes. Decidir si f_{rev} puede tener raíces repetidas, es decir, si acaso alguna de sus raíces puede ser, por lo menos, raíz doble.

Ejercicio 12 *Para cada uno de los siguientes polinomios $f \in \mathbb{Q}[t]$, calcular f_{rev} y encontrar su factorización en irreducibles en $\mathbb{Q}[t]$.*

1. $f = (t^2 - 5) \cdot (t-2)^3$.

2. $f = (2t-5)^3 \cdot (t^3 - 3t + 1) \cdot (3t^2 - 5t + 6)^2$.

Ejercicio 13 *Supongamos que f es un polinomio con coeficientes racionales que se factoriza en $\mathbb{Q}[t]$ en la forma $f = f_1^2 \cdot f_2 \cdot f_3^3$, con f_1, f_2 y f_3 polinomios irreducibles en $\mathbb{Q}[t]$ que no tienen a 0 como raíz. ¿Cómo se factoriza f_{rev} en $\mathbb{Q}[t]$?*

Retornemos al Ejercicio 4. Los polinomios f y f_{rev} correspondientes al primer ítem de dicho ejercicio poseen el mismo *patrón de factorización* en $\mathbb{Q}[t]$. En efecto, tenemos lo siguiente:

$$f = (t^2 + 2t + 5) \cdot (3t - 8), \quad f_{\mathsf{rev}} = (5t^2 + 2t + 1) \cdot (-8t + 3).$$

Que f y f_{rev} tengan el mismo patrón de factorización en $\mathbb{Q}[t]$ significa que la factorización de los mismos en $\mathbb{Q}[t]$ consta de un factor irreducible de grado 2 y otro irreducible de grado 1. Por el contrario, en el segundo ítem del Ejercicio 4 tenemos lo siguiente:

$$f = t^2 \cdot (2t^2 + 3) \cdot (t^2 - 2t - 4), \quad f_{\mathsf{rev}} = (3t^2 + 2) \cdot (-4t^2 - 2t + 1),$$

lo cual muestra dos patrones de factorización esencialmente diferentes (era de esperar desde el momento en que f y f_{rev} no poseen el mismo grado). Con todo, es factible percatarse que la no preservación del patrón de factorización se debe a que t^2 es un factor de f; omitiendo este factor, se preserva el grado de los restantes factores irreducibles. Estamos en condiciones de proporcionar un resultado que generaliza aquel de la Proposición 2.1, en tanto que caracteriza la relación entre el patrón de factorización de f y el de f_{rev}.

Proposición 2.2 *Sea $f \in \mathbb{Q}[t]$ un polinomio de grado n. Entonces $f_1 \in \mathbb{Q}[t]$ es un factor irreducible de grado m de f, con $f_1(0) \neq 0$, si y solo si $(f_1)_{\mathsf{rev}}$ es un factor irreducible de grado m de f_{rev}. Más aún, f_1 y $(f_1)_{\mathsf{rev}}$ poseen la misma multiplicidad. En resumen, bajo estas condiciones, o sea, exceptuando factores del tipo t^s $(s \geq 1)$, los polinomios f y f_{rev} poseen el mismo patrón de factorización.*

Ejercicio 14 *Demostrar la Proposición 2.2*

Esta íntima relación entre las factorizaciones de f y f_{rev} constituye un posible abordaje para estudiar irreducibilidad en $\mathbb{Q}[t]$. A modo ilustrativo, supongamos que quisiéramos determinar si $f = 6t^5 - 9t^4 + 15t^3 - 21t^2 + 3t - 5$ es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$. A partir de la Proposición 2.2, esto equivale a estudiar la irreducibilidad de $f_{\mathsf{rev}} = -5t^5 + 3t^4 - 21t^3 + 15t^2 - 9t + 6$ en $\mathbb{Q}[t]$. El criterio de Eisenstein muestra que f_{rev} es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$ y, de esta manera, queda establecida la irreducibilidad de f en $\mathbb{Q}[t]$.

Aún cuando señalamos ciertas deficiencias de nuestras definiciones iniciales, hemos deducido una cantidad de resultados interesantes. Sin embargo, todavía persiste la incomodidad oportunamente detectada. Por caso, si $f(t)$ es la función polinómica de grado 2 cuyo gráfico pasa por los puntos del plano $(1, -1)$, $(-2, 8)$, $(5, 15)$, ¿cómo calculamos f_{rev} sin pasar por la escritura $f = at^2 + bt + c$? El momento es el apropiado para proporcionar una definición de f_{rev} independiente de la representación de f. Si $f \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio de grado n podemos calcular f_{rev} en la forma

$$f_{\mathsf{rev}}(t) := t^n \cdot f(1/t). \tag{3}$$

La ventaja de trabajar con dicha definición -equivalente a las anteriores- es que, efectivamente, no depende del modo en que se representa f.

Ejercicio 15 *Calcular f_{rev} si f es el polinomio de grado 2 definido por los puntos del plano $(1, -1)$, $(-2, 8)$, $(5, 15)$.*

Releyendo la demostración de la Proposición 2.1 dada en el Ejercicio 9 es posible que notemos que está definición estaba allí implícita. De hecho, la mayoría de las propiedades de $-_{\mathsf{rev}}$ que hemos encontrado se deducen de modo más sencillo de esta definición.

Ejercicio 16 *Utilizando (3) proporcionar una demostración alternativa tanto del Ejercicio 5 como del Ejercicio 9.*

Concluimos esta sección, señalando que la validez del conjunto de definiciones y resultados desarrollados puede extenderse a polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{C}$ ó en cualquier otro cuerpo.

3 Aparecen los polinomios recíprocos

Parte de la tarea desarrollada (la inicial, la que dio pie a la discusión) en la sección previa admite la siguiente interpretación: a cada polinomio $f \in \mathbb{Q}[t]$ le asignamos otro polinomio en $\mathbb{Q}[t]$, dado por f_{rev}. Dependiendo de la necesidad, esta asignación puede contemplarse ya sea invirtiendo el orden de los coeficientes como en (1) o en (2); ya sea como en (3), definición que se torna más conveniente pues nos despega de la manera en que representamos los polinomios.

Entre los elementos de $\mathbb{Q}[t]$ elegimos -veremos que esta elección carece de arbitrariedad- destacar aquellos polinomios que quedan fijos bajo dicha asignación; es decir, aquellos $f \in \mathbb{Q}[t]$ para los cuales $f_{\mathsf{rev}} = f$. En otros términos, los puntos fijos de la asignación. Así, tanto $t^3 + \frac{7}{2}t^2 + \frac{7}{2}t + 1$ como $t^4 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{22}{6}t^2 + \frac{5}{6}t + 1$, son dos ejemplos particulares al respecto. Este subconjunto de $\mathbb{Q}[t]$ amerita una denominación propia.

Decimos entonces que $f \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio recíproco si se verifica que

$$f_{\mathsf{rev}} = f. \tag{4}$$

Si f es un polinomio recíproco decimos que una ecuación de la forma $f(t) = 0$ es una ecuación recíproca.

En lo que sigue vamos a desarrollar una serie de métodos ad-hoc para la familia de polinomios recíprocos que facilitarán el cálculo de sus raíces y, más en general, el estudio de la factorización de los mismos.

Un polinomio recíproco $f \in \mathbb{Q}[t]$ de grado 1 se expresa en la forma $f = at+a$ y es claro que -1 es la raíz. Si $f \in \mathbb{Q}[t]$ es un polinomio recíproco de grado 2 y r es una raíz de f entonces $1/r$ *también* es raíz de f (pues lo es de f_{rev}); en definitiva, $f = at^2 + bt + a$ se factoriza en la forma

$$f = at^2 + bt + a = a(t-r)(t-1/r),$$

independientemente de si r es racional, real o compleja.

En el caso de un polinomio recíproco $f = at^3 + bt^2 + bt + a$ de grado 3, fácilmente vemos que -1 es raíz de f. Es más, obtenemos la siguiente factorización en $\mathbb{Q}[t]$:

$$f = at^3 + bt^2 + bt + a = (t+1)(at^2 + (b-a)t + a),$$

con lo cual, f se expresa como producto de polinomios recíprocos y así, llegamos a la siguiente factorización (no necesariamente en $\mathbb{Q}[t]$):

$$f = at^3 + bt^2 + bt + a = a(t+1)(t-r)(t-1/r).$$

Ejercicio 17 *Sea f un polinomio recíproco de grado impar. Verificar que -1 es raíz de f.*

Un aspecto interesante de los polinomios recíprocos es que las raíces vienen de a pares, en el sentido referido más arriba, sentido sobre el cual ahora nos explayamos. De acuerdo a la Proposición 2.1, si r es una raíz no nula de f entonces $1/r$ es raíz de f_{rev}; pero si el polinomio es recíproco resulta entonces que $1/r$ también es raíz de f. Además, como -1 es raíz de cualquier polinomio recíproco de grado impar podemos reducir la cuestión a la búsqueda de raíces o factores de polinomios recíprocos de grado par. En efecto, supongamos que

f es recíproco y que tiene grado impar. O sea que $f = f_{\mathsf{rev}}$ y, al mismo tiempo, $f = (t+1)\cdot q$. Volviendo al Ejercicio 5 tenemos que

$$f_{\mathsf{rev}} = (t+1)_{\mathsf{rev}} \cdot q_{\mathsf{rev}} = (t+1)\cdot q_{\mathsf{rev}}.$$

Como consecuencia de la unicidad de la factorización en $\mathbb{Q}[t]$ (o en el anillo de polinomios que corresponda) deducimos que $q = q_{\mathsf{rev}}$ y, de esta manera, q es un polinomio recíproco de grado par. En conclusión, es suficiente conocer entonces la mitad de las raíces de un polinomio recíproco ya que las demás se calculan como los inversos multiplicativos de aquellas.

A continuación consideramos un polinomio recíproco de grado 4 y mostramos como emprender la búsqueda de las raíces del mismo.

Ejemplo 3.1 *Consideremos el polinomio $f = t^4 + 9t^3 - 3t^2 + 9t + 1$. Ni 1 ni -1 son raíces de f, lo que en particular nos dice, criterio de Gauss mediante, que no hay raíces racionales. De este modo, podemos suponer que hay por lo menos dos raíces diferentes, digamos, r_1 y $1/r_1$ (¿por qué?). Denotamos las restantes raíces por r_2 y $1/r_2$ que, aunque diferentes entre sí, podrían coincidir con r_1 y $1/r_1$.*

Reescribimos f del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f &= (t-r_1)(t-1/r_1)(t-r_2)(t-1/r_2) \\ &= \big(t^2 - (r_1+1/r_1)\,t + 1\big)\big(t^2 - (r_2+1/r_2)\,t+1\big) \\ &= \big(t^2 - \boldsymbol{u}\,t+1\big)\big(t^2 - \boldsymbol{v}\,t + 1\big), \end{aligned} \tag{5}$$

con $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ representando las siguientes cantidades:

$$\boldsymbol{u} := r_1 + \frac{1}{r_1} \qquad \boldsymbol{v} := r_2 + \frac{1}{r_2}.$$

Tenemos una factorización de f como producto de dos polinomios de grado 2, cuyos coeficientes lineales $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no conocemos. Si conociéramos los valores explícitos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, podríamos encontrar las raíces de cada cuadrática y calcular, luego, las raíces de f. Sin embargo, eso no es todo; conocer los valores *explícitos de* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$*, es decir, conocer si pertenecen a* $\mathbb{Q}$*, a* $\mathbb{R}$ *ó a* $\mathbb{C}$*, también nos proporcionaría una factorización parcial de* f *en* $\mathbb{Q}[t]$*, en* $\mathbb{R}[t]$ *ó en* $\mathbb{C}[t]$*.*

Multiplicando los factores $t^2 - \boldsymbol{u}\,t + 1$ *y* $t^2 - \boldsymbol{v}\,t + 1$*, de la identidad (5) deducimos el siguiente sistema de ecuaciones en* $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$*:*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = -9 \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -5. \tag{6}$$

En consecuencia, $\boldsymbol{u}$ *y* $\boldsymbol{v}$ *resultan ser las raíces de la cuadrática* $t^2 + 9t - 5 = 0$ *y, por lo tanto, encontramos que*

$$\boldsymbol{u} = \frac{-9 + \sqrt{101}}{2}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{-9 - \sqrt{101}}{2}.$$

Si volvemos ahora a (5) llegamos a la siguiente factorización de f *en* $\mathbb{R}[t]$*:*

$$f = \Big(t^2 + \frac{9 - \sqrt{101}}{2}\,t + 1\Big)\Big(t^2 + \frac{9 + \sqrt{101}}{2}\,t + 1\Big). \tag{7}$$

Finalmente, calculando las raíces de estas cuadráticas obtenemos las raíces de f*. Sin embargo, si bien podemos hacerlo, no es conveniente concluir el ejemplo en este momento, no estaríamos comprendiendo del todo el sentido de lo que hicimos: no solo estamos en condiciones de calcular las raíces de* f *sino que a la vez que obtenemos una factorización parcial de* f *en* $\mathbb{R}[t]$ *(esquiva bajo otras circunstancias) podemos mostrar que* f *es* **irreducible** *en* $\mathbb{Q}[t]$*. Por cierto, notemos para empezar que la factorización en irreducibles de* f *en* $\mathbb{R}[t]$ *se obtiene como*

$$f = \Big(t^2 + \frac{9 - \sqrt{101}}{2}\,t + 1\Big) \cdot (t - r) \cdot (t - 1/r), \tag{8}$$

con r *y* $1/r$ *las raíces reales (y no racionales) del segundo factor de (7). Si* f *admitiera un factor propio, digamos* f_1*, con coeficientes en* $\mathbb{Q}$*, en particular,* f_1 *sería un factor con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *y debería poder obtenerse a partir de los factores irreducibles presentes en (8). No es demasiado esfuerzo concluir que esto no es posible mostrando, por lo tanto, que* f *es irreducible en* $\mathbb{Q}[t]$*.*

El método propuesto en el ejemplo para abordar el tratamiento de ecuaciones recíprocas de grado 4 pone de manifiesto una idea fundamental, omnipresente en matemática, que es la de separar un problema -en apariencia- difícil en varios subproblemas -aparentemente- más fáciles. Aquí, una ecuación de grado 4 en dos ecuaciones de grado 2.

Ejercicio 18 *Encontrar las raíces del polinomio del Ejemplo 3.1 y proporcionar la factorización de f en $\mathbb{R}[t]$ y en $\mathbb{C}[t]$.*

Ejercicio 19 *Consideremos el polinomio $f = 2t^4 + 5t^3 + t^2 + 5t + 2$. Siguiendo el método presentado en el ejemplo anterior, encontrar las raíces de f y decidir si f se factoriza en $\mathbb{Q}[t]$ y en $\mathbb{R}[t]$.*

Ejercicio 20 *Factorizar en $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$ y $\mathbb{C}[t]$ los polinomios $t^5 + 4t^4 + 7t^3 + 7t^2 + 4t + 1$ y $t^5 + 4t^4 + t^3 + t^2 + 4t + 1$.*

Ejercicio 21 *Aplicando el método del Ejemplo 3.1 encontrar la factorización de $f = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$ como producto de dos cuadráticas irreducibles en $\mathbb{R}[t]$ (o sea, con discriminante negativo). A continuación, utilizar esta factorización para demostrar que f es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$. ¿Cuál es la factorización de f en $\mathbb{C}[t]$?*

En el caso de ecuaciones recíprocas de grado par mayor a 5 podemos repetir el método del Ejemplo 3.1, descomponiendo el polinomio como producto de cuadráticas como indicamos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2 *Sea $f = t^6 - 5t^5 + 8t^4 - 7t^3 + 8t^2 - 5t + 1$. Factorizamos f en la forma*

$$\begin{aligned} f &= (t-r_1)(t-1/r_1)(t-r_2)(t-1/r_2)(t-r_3)(t-1/r_3) \\ &= \big(t^2 - (r_1 + 1/r_1)\,t + 1\big)\big(t^2 - (r_2 + 1/r_2)\,t + 1\big)\big(t^2 - (r_3 + 1/r_3)\,t + 1\big) \\ &= \big(t^2 - \boldsymbol{u}\,t + 1\big)\big(t^2 - \boldsymbol{v}\,t + 1\big)\big(t^2 - \boldsymbol{w}\,t + 1\big), \end{aligned} \tag{9}$$

con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *representando las siguientes cantidades:*

$$\boldsymbol{u} := r_1 + \frac{1}{r_1} \qquad \boldsymbol{v} := r_2 + \frac{1}{r_2} \qquad \boldsymbol{w} := r_3 + \frac{1}{r_3}.$$

Tenemos una factorización de f *como producto de tres polinomios de grado* 2*, cuyos coeficientes lineales* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *no conocemos. Si los conociéramos podríamos encontrar las raíces de cada cuadrática y calcular, luego, las raíces de* f*. Multiplicando los tres factores cuadráticos, de la identidad (9) deducimos el siguiente sistema de ecuaciones en* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$*:*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = 5 \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 5 \qquad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = -3. \tag{10}$$

En consecuencia, resulta que estas cantidades son las raíces de la cúbica

$$t^3 - (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})\, t^2 + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\, t - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}.$$

En nuestro caso, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *y* $\boldsymbol{w}$ *son las raíces de* $t^3 - 5t^2 + 5t + 3 = 0$*. No es difícil averiguar las raíces de esta cúbica:*

$$\boldsymbol{u} = 3, \quad \boldsymbol{v} = 1 + \sqrt{2}, \quad \boldsymbol{w} = 1 - \sqrt{2}.$$

De aquí, reemplazando en (9) obtenemos la factorización parcial de f *en* $\mathbb{R}[t]$

$$f = \Big(t^2 - 3t + 1\Big)\Big(t^2 - (1 + \sqrt{2})\, t + 1\Big)\Big(t^2 - (1 - \sqrt{2})\, t + 1\Big), \tag{11}$$

y deducimos que la factorización en irreducibles de f *en* $\mathbb{Q}[t]$ *es*

$$f = \Big(t^2 - 3t + 1\Big)\Big(t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1\Big). \tag{12}$$

Si nos interesara calcular las raíces, lo hacemos a partir de (11).

Tanto en el Ejemplo 3.1 como en el Ejemplo 3.2 hemos reducido la búsqueda de las raíces de polinomios recíprocos de grado 4 y 6 a la de polinomios de grado 2 y 3, respectivamente. Apreciamos, además, la aparición de los polinomios simétricos elementales -es algo conocido pero, de todos modos, entendemos que es pertinente recordarlo ya que no son pocas las ocasiones en que olvidamos que los coeficientes son funciones simétricas de las raíces- proporcionando los sistemas de ecuaciones (6) y (10) que dan paso a los polinomios de grados 2 y 3 indicados.

El problema es factible de ser considerado desde otra perspectiva también de relevancia, por las consecuencias que se derivan. A continuación presentamos un ejemplo con el fin de ilustrar un método alternativo al anterior.

Ejemplo 3.3 *Consideremos el polinomio recíproco* $f = 6t^6 - 35t^5 + 68t^4 - 70t^3 + 68t^2 - 35t + 6$*. Notemos en primer lugar que si* a *es una raíz de* f *(claramente distinta de* 0*) entonces también es una raíz de* f/t^3*; es decir, debe ser solución de la ecuación*

$$6t^3 - 35t^2 + 68t - 70 + 68t^{-1} - 35t^{-2} + 6t^{-3} = 0.$$

Reagrupando los términos de la ecuación anterior obtenemos

$$6(t^3 + t^{-3}) - 35(t^2 + t^{-2}) + 68(t + t^{-1}) - 70 = 0. \tag{13}$$

Esta última expresión sugiere la presencia de un polinomio que vamos a calcular con el cambio de variables $x = t + t^{-1}$*. Para eso tenemos que obtener las expresiones de* $t^2 + t^{-2}$ *y de* $t^3 + t^{-3}$ *en función de la nueva variable* x*. Como*

$$x^2 = (t + t^{-1})^2 = t^2 + 2 + t^{-2},$$

deducimos que $t^2 + t^{-2} = x^2 - 2$*. De modo similar,*

$$x^3 = (t + t^{-1})^3 = t^3 + 3t + 3t^{-1} + t^{-3} = t^3 + t^{-3} + 3(t + t^{-1}),$$

con lo cual $t^3 + t^{-3} = x^3 - 3x$*. Reemplazando estas identidades en la Ecuación 13 llegamos a la ecuación*

$$6x^3 - 35x^2 + 50x = 0.$$

Antes de avanzar en la resolución de esta ecuación de grado 3, queremos detenernos y comprender el sentido de la sustitución $x = t + t^{-1}$, qué vínculos se establecen entre las raíces de f y las de la ecuación cúbica resultante. Lo que expresa la sustitución es lo siguiente: si a es una raíz cualquiera de f entonces $a + a^{-1}$ (la suma de a y su inverso multiplicativo $1/a$) es una raíz de $6x^3 - 35x^2 + 50x$. Como f es recíproco, a y $1/a$ dan lugar a la misma raíz. Recíprocamente, si r es una raíz cualquiera de $6x^3-35x^2+50x$, entonces resulta que resolviendo la ecuación cuadrática

$$r = t + t^{-1} = \frac{t^2+1}{t}$$

obtenemos dos raíces de f: una y su recíproca. En definitiva, resolviendo esta ecuación de grado 3 podemos recuperar las soluciones de la ecuación de partida.

Las raíces de la ecuación cúbica son 0, 5/2 y 10/3 y dan lugar, respectivamente, a las tres ecuaciones cuadráticas (que además son recíprocas):

$$t^2 + 1 = 0, \quad t^2 - \tfrac{5}{2}t + 1 = 0, \quad t^2 - \tfrac{10}{3}t + 1 = 0.$$

Aunque aún no calculamos las raíces de f, sí podemos obtener la siguiente factorización parcial de f en $\mathbb{Q}[t]$:

$$f = 6(t^2+1)(t^2 - 5/2\,t + 1)(t^2 - 10/3\,t + 1).$$

Las raíces de f, proporcionadas por cada cuadrática, son i y $-i$; 2 y 1/2; 3 y 1/3.

Ejercicio 22 *Aplicar este método a los ejemplos y ejercicios previos.*

La aparente distinción entre los métodos descritos en los Ejemplos (3.2) y (3.3) desaparece cuando prestamos atención a que, en definitiva, en ambos casos, la tarea se redujo a encontrar las raíces de un polinomio de grado 3. Asumiendo que la operatoria no entraña dificultad, la conclusión es que el único obstáculo para poder encontrar las raíces de un polinomio recíproco de grado $2n$ y avanzar en la factorización del mismo, es la mayor o menor dificultad para resolver la consecuente ecuación de grado n que se origina.

Ejercicio 23 *Con la intención de generalizar las ideas desplegadas en el Ejemplo 3.3 encontrar las raíces de* $f = t^9 + 4t^8 - 3t^7 + 6t^6 - t^5 - t^4 + 6t^3 - 3t^2 + 4t + 1$ *y estudiar posibles factorizaciones de* f *en* $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{C}[t]$.

A lo largo del texto, han aparecido diversas factorizaciones de polinomios recíprocos. En algunos casos, las factorizaciones involucraban polinomios recíprocos. En el siguiente ejercicio proporcionamos alguna información al respecto.

Ejercicio 24 *Sean* f, g *y* h *polinomios con coeficientes en* $\mathbb{Q}[t]$.

1. *Mostrar que si* f *y* g *son recíprocos entonces* $f \cdot g$ *es recíproco.*
2. *Mostrar que si* $h = f \cdot g$, *con* h *y* f *polinomios recíprocos entonces* g *(el cociente) resulta recíproco.*

Ejercicio 25 *Dejamos algunas cuestiones para reflexionar.*

- *Dado* $g \in \mathbb{Q}[t]$, *¿qué tipo de polinomio es* $g \cdot g_{\mathsf{rev}}$*?*
- *Caracterizar la factorización de un polinomio recíproco. ¿Cómo se entendería la factorización* $(t-2)\cdot(t-1/2)$*?*
- *Dado un polinomio arbitrario* $h \in \mathbb{Q}[x]$. *¿Es posible encontrar un polinomio recíproco* $f \in \mathbb{Q}[t]$ *tal que al aplicarle la sustitución recíproca a* f *se obtenga* h*?*

References

[Bar89] E. Barbeau. *Polynomials.* Springer, New York, 1989.

[Kal09] D. Kalman. *Uncommon mathematical excursions. Polynomia and related realms.* The Mathematical Association of America, Washington, 2009.

[Sad05] P. Sadovsky. *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2005.

[VV02] P. Viana and P. Murgel Veloso. Galois theory of reciprocal polynomials. *Am. Math. Mon.*, 109(5):466–471, 2002.

Antonio Cafure. *Instituto de Desarrollo Humano, UNGS; Ciclo Básico Común, UBA.* e-mail: acafure@ungs.edu.ar

Nardo Giménez, Santiago Guaraglia. *Instituto de Desarrollo Humano, UNGS.* e-mail: agimenez@ungs.edu.ar

Santiago Guaraglia. *Ciclo Básico Común, UBA.* e-mail: sguarag@bigua.dm.uba.ar