ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

Lógica de Segundo Orden y el Modelo Estándar de la Aritmética

Eduardo Alejandro Barrio
Universidad de Buenos Aires - Conicet

Introducción

El propósito de este artículo es defender la tesis según la cual el uso de la lógica de segundo orden es la mejor opción para capturar el modelo estándar de la aritmética.[1] Esta idea no es novedosa y ha sido sostenida por otros autores, dentro de los que por supuesto se destaca Stewart Shapiro (1991). En este caso, Shapiro vincula la utilización de recursos de orden superior a la plausibilidad del estructuralismo en matemática. Es bien conocido que desde el punto de vista del estructuralismo, la aritmética es acerca de una *única estructura*, la estructura estándar de la aritmética. Pero, como consecuencia del Teorema Löwenheim-Skolem, las teorías de primer orden son satisfechas por modelos no estándar que no instancian esta estructura. De esta manera, los defensores del estructuralismo deben dar una explicación acerca de cómo fijar una única estructura singular como la interpretación pretendida de nuestro lenguaje de la aritmética. Y dado el resultado de categoricidad de la aritmética de segundo orden, esa explicación puede ofrecerse adoptando recursos que trasciendan la utilización de lenguajes con cuantificación de primer orden. Sin embargo, diversos argumentos han sido presentados para mostrar que la adopción de tales recursos es inaceptable. Fundamentalmente, porque habría buenos motivos para dudar del carácter lógico de los recursos de orden superior. El objetivo de este trabajo es responder a cada una de esas críticas, intentando brindar indirectamente razones para la adopción de los mencionados recursos como individuadores del modelo estándar de la aritmética.

1. A lo largo del presente artículo, uso *capturar* como sinónimo de *representar formalmente* los rasgos más importantes de una noción intuitiva dentro de una teoría formal. Es usual considerar que una propiedad numérica es capturada en una teoría formal si se cumple que para cualquier número natural, si ese número tiene la propiedad en cuestión, entonces la teoría es capaz de probar un teorema que afirma que ese número cumple esa propiedad. Al mismo tiempo, si ese número no tuviera esa propiedad, la teoría debería ser capaz de probar la negación de tal afirmación. Como es fácil de ver, esta noción depende de la riqueza expresiva de los axiomas y reglas de inferencia de la teoría. Para mayor precisión ver Smith, P. (2013).

1. Los modelos de la aritmética

Consideremos la secuencia de números naturales: 0, 1, 2, . . . No es claro si ellos existen, y si fuera así, qué tipo de existencia ellos tendrían. ¿Cuál es su naturaleza de las presuntas entidades sobre las cuales habla la aritmética? ¿Qué son los números naturales? son preguntas centrales de la filosofía de las matemáticas. Usamos lenguajes para intentar hablar de los números naturales y teorías formales para tratar de capturar todas aquellas características fundamentales que podemos probar usando recursos lógicos. Esas teorías pueden recibir diversas interpretaciones, usualmente llamadas *modelos.* Un lenguaje para expresar la aritmética tendrá, además de las expresiones lógicas usuales, al menos los siguientes símbolos no lógicos: la constante individual *0* y el símbolo de función *Suc*. Intuitivamente las fórmulas compuestas por tales símbolos deberán poder ser interpretadas de forma tal que las mismas hablen acerca de los números naturales y sus propiedades. La secuencia de números naturales se destaca por tener cierta estructura. Un sistema de números consiste en una colección de objetos (llamados "números naturales") y ciertas relaciones sobre esa colección, digamos, la relación de *sucesor*. Y esta relación de sucesor relaciona los números en un modo tal que los axiomas de Peano se satisfacen. De esta forma, la teoría formulada con los mencionados axiomas logra hacer afirmaciones acerca de la estructura de los números naturales. Así, un sistema de números naturales es una estructura compuesta por $\langle N, Suc \rangle$ que hace verdaderos los axiomas y teoremas de Peano. La pregunta por la *unicidad* de esa estructura adquiere importancia cuando es fácil advertir que diversas estructuras podrían jugar el papel buscado: Así, por ejemplo,

> Los números de Zermelo: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$ (donde "y es el sucesor de x" significa "$y = \{x\}$"),

y

> Los ordinales de von Neumann: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$ (donde "y es el sucesor de x" significa "$y = x \cup \{x\}$")

podrían servir de interpretación correcta de los mencionados símbolos aritméticos en el contexto de los axiomas y teoremas de Peano. Pero, ¿qué hay en común subyaciendo a estas secuencias? La explicación de Shapiro (1997) acerca de la naturaleza de los números es que ellos son lugares en *estructuras*, donde las estructuras son concebidas como universales. Esta idea es el núcleo central de la posición estructuralista en filosofía de las matemáticas. En palabras de Hellman "mathematics is concerned principally with the investigation of structures [...] in complete abstraction from the nature of individual objects making up those structures".[2] Del mismo modo Shapiro escribe: "[P]ure mathematics is the study of structures, independently of whether they are exemplified in the physical realm, or in any realm for that matter".[3] En la misma dirección, Benacerraf (1965) afirma que la aritmética—y otras teorías matemáticas— deberían ser concebidas como teorías que hablan acerca de una única estructura.

2. Hellman, G. (1989: vii).

3. Shapiro, S. (1997: 75).

Ciertos resultados de la teoría de modelos parecen alentar esta posición. Así, sabemos que para cualquier estructura finita, su teoría completa sólo será satisfecha por estructuras las cuales todas son isomórficas entre sí. Dado que una teoría es categórica si y sólo si para cualquier par de estructuras que satisfagan sus axiomas esas estructuras son isomórficas, cuando se cumple esta condición hay un interesante sentido en el cual los modelos de esas teorías son equivalentes. Dentro de una teoría matemática, cuál de las copias isomórficas sea usada no hace diferencia y por esa razón, las estructuras pueden ser tratadas como el mismo objeto matemático para todos los propósitos. Los objetos isomórficos pueden ser tratados como si fueran idénticos.

Sin embargo, el Teorema Löwenheim-Skolem muestra que cualquier teoría que es satisfecha por un modelo infinito también tendrá modelos de cardinalidad más grande. Es decir, si una teoría de primer orden tiene modelos infinitos, entonces tiene modelos no isomórficos entre sí (por tener dominios con diferentes cardinalidades). Por lo tanto, la categoricidad se pierde. Esto significa que la aritmética de Peano y toda teoría aritmética correcta formulada en un lenguaje de primer orden tiene modelos que instancian estructuras diferentes. Los llamados "modelos no-estándar de la aritmética" no son definitivamente el modelo pretendido de la aritmética. Ellos ejemplifican estructuras diferentes del modelo estándar. Desafortunadamente, ningún conjunto de axiomas expresados en primer orden es capaz de capturar el modelo estándar de la aritmética.[4] Más aún, estos resultados pueden resultar desalentadores para el tipo de teorías que esperamos caractericen un único referente.[5] Por ejemplo, puede mostrarse que la teoría de la aritmética verdadera será satisfecha por un continuo de pares de estructuras contables no isomórficas (Kaye, 1991). Esto es particularmente desalentador ya que va en contra de nuestras intuiciones según la cual el lenguaje y la práctica aritmética refiere a una única estructura.

4. Una de las cuestiones que surge es la posibilidad de investigar teorías que sean categóricas en algunas cardinalidades particulares. Por ejemplo, el conocido Teorema de Morley de categoricidad muestra que si una teoría es categórica en un cardinal incontable, entonces lo será también en todo carnalidad incontable. Ver por ejemplo, Chang and Keisler (1973). Este resultado es de gran importancia.

5. Para mayores precisiones sobre este punto véase Roffé, A. este volumen.

Todos estos problemas muestran que ningún conjunto de oraciones de un lenguaje de primer orden serán capaces de capturar el modelo pretendido de la aritmética. Y esto es claramente un problema para el estructuralismo matemático. Si diferentes estructuras satisfacen los axiomas de la aritmética de primer orden, tanto aquellas que incluyen números estándar como las que además incluyen números no estándar, el estructuralismo parece ser una posición incorrecta.

Por supuesto, es posible adoptar una estrategia "externa" fijando una condición sobre los modelos que tenga el efecto de eliminar los modelos no estándar. En esta dirección, el propio Benacerraf (1965) ha requerido que la estructura sea una ω-secuencia y que el orden de sus elementos sea recursivo.[6] Por supuesto, únicamente el modelo estándar tiene un orden de tipo ω. Por ello, el requerimiento adicional según el cual el orden de la estructura sea recursivo es innecesario para seleccionar el modelo estándar de la aritmética. Por esa razón, Benacerraf (1996) eliminó el requerimiento de recursividad y concluyó 'any old ω-sequence would do after all'. En suma, de acuerdo a su propuesta, los modelos no estándar son eliminados por medio de una restricción sobre el tipo de orden de los elementos del modelo. Recientemente, esta estrategia ha recibido diversas críticas. En esta dirección, Halbach & Horsten (2005) han afirmado que el requisito de Benacerraf es circular. Así, ellos han sostenido:

6. Para una discusión de esta estrategia, ver Da Ré, B. en este volumen.

> This requirement, however, is very bold and, in a sense, it begs the question. It is like requiring that the model should be isomorphic to the standard model of arithmetic. But it is exactly the task to spell out what the natural numbers are, and the structuralist has just dismissed the conception of the natural numbers as a single 'given' model. Using the concept of the natural numbers in explaining what the natural numbers are is begging the question. And the concept of an -sequence comes very close to doing just this. Benacerraf cannot explain the notion of an -sequence by saying that an -sequence is an ordering with the same order-type as the natural numbers. Usually the concept of an -sequence is defined in a set-theoretic framework: An -sequence is something isomorphic to the von Neumann ordinals. The von Neumann ordinals are defined in set theory. Now the structuralist has to look at the structure of sets. The problems of nonstandard models recurs here because there are also nonstandard models of set theory (if set theory is consistent). That is, there are models of set theory whose finite ordinals are not well-ordered 'from outside'.[7]

7. Halbach, V. & Horsten, L. (2005: 175).

Como alternativa a la posición de Benacerraf, Halbach & Horsten, argumentan que deberíamos mantener la lógica de primer orden, pero que la estructura de los números naturales son sistemas de notaciones con operaciones recursivas que satisfacen los axiomas de Peano. Un problema para este enfoque es su alcance limitado. Tomemos los números enteros. Ellos también tienen un modelo pretendido, pero la solución de Halbach & Horsten no captura inmediatamente este modelo pretendido. Otro problema es, nuevamente, si no estamos frente a un caso de circularidad: la posición de Halbach & Horsten requiere que podamos diferenciar entre procedimientos computables arbitrarios estándar y no estándar y no está claro que tal cosa pueda hacerse.

2. Adoptando Recursos de Segundo Orden

La lógica de segundo orden difiere de la lógica de primer orden en que sus variables y sus cuantificadores no sólo incluyen la posibilidad de hablar de individuos sino también de subconjuntos del universo de discurso. Ella permite expresar mediante sus fórmulas conceptos que no pueden ser expresados en los lenguajes de primer orden. Así, la fórmula:

$$(\exists P2)\ (\forall x)\ (P2(x))$$

permite expresar que hay una propiedad que todos los objetos tienen. Del mismo modo, podemos hablar de la existencia de una relación no reflexiva

$$(\exists R2)\ \ (\exists x)\ (\neg\ (R2\ (x)))$$

Debe notarse, sin embargo, que este hablar de propiedades y relaciones es en algún sentido intuitivo y metafórico. Sólo estamos hablando extensionalmente sobre las mismas. La cuestión aquí es cuáles extensiones deberían estar disponibles para que nuestros usos de los cuantificadores de orden superior capturen las propiedades y relaciones entre números? La respuesta tiene que ser la siguiente: todo subconjunto arbitrario finito o infinito de los números naturales. Debemos estar dispuestos a permitir cuantificar sobre subconjuntos de números aún cuando estos no estén determinados por la posesión de alguna característica especial que los reúna.

El cálculo deductivo de la lógica de segundo orden también está basado en reglas y axiomas que garanticen que sus cuantificadores tengan alcance sobre todos los subconjuntos del dominio. Ellos se presentan como una extensión de los axiomas de la lógica de primer orden. Es clave el agregado del Axioma Esquema de Comprensión:

$$X2\quad \forall xn\ ((X2)\ xn \leftrightarrow \phi(xn))$$

bajo la condición de que X^2 no aparezca libre en ϕ. Intuitivamente, el axioma dice que hay una propiedad (relación) que es poseída justo por los objetos que cumplen la condición ϕ. Es decir, toda fórmula del lenguaje de orden superior determina una relación. Si la fórmula ϕ misma contiene variables de orden superior ligadas, entonces la correspondiente instancia del axioma esquema de comprensión se dice impredicativa. Crucialmente, este principio lógico tendrá la función de garantizar la existencia genuina de los subconjuntos de los elementos del dominio (en este caso, números naturales) que podrán estar bajo el alcance de los cuantificadores de segundo orden. Nos permite definir propiedades numéricas por medio de la referencia de una fórmula ϕ la cual ella misma podría involucrar cuantificación de segundo orden.

Es claro que la gran capacidad expresiva de los lenguajes de segundo orden se debe a la riqueza de los dominios de cuantificación. Las variables de segundo orden tienen un alcance sobre el conjunto de *todos los subconjuntos* del dominio del modelo. Esto es, sus valores están dados por el conjunto potencia del dominio. De esta manera, si el dominio del modelo es infinito numerable, tal como es el caso con el universo de los números naturales, habrá incontables colecciones de objetos. Como consecuencia de esa riqueza expresiva, la noción de *validez universal* en los lenguajes de orden superior es intratable como resultado de la riqueza expresiva de tales lenguajes. Esto es, no hay ningún sistema axiomático finitista que pueda tener suficiente capacidad de prueba como para demostrar como teoremas todas las fórmulas universalmente válidas. Es decir, la lógica de orden superior es incompleta. Las nociones de *validez universal* y *teoremicidad* no son extensionalmente equivalentes. La lógica de orden superior no es compacta: esto es, no es cierto que para todo conjunto de fórmulas del lenguaje que tenga modelo, hay un subconjunto finito que tiene modelo.

Por supuesto, esto no quiere decir que para teorías como la aritmética no sea posible dar una axiomatización parcial para iluminar aspectos epistémicos. La presentación axiomática "más completa" es la teoría Z_2. Este sistema es una teoría de primer orden cuyos cuantificadores son interpretados por medio de dos dominios diferentes (two-sorted). Sus axiomas son los usuales axiomas de usuales de la aritmética de Peano, a los que se les agrega el axioma de inducción y el de comprensión. Este último juega un papel esencial en su poder deductivo, ya que se permite que cualquier fórmula abierta que pueda formar parte del axioma de comprensión sea una instancia de aplicación de inducción. Intuitivamente, toda "propiedad expresable" en el lenguaje será una instancia sobre la cual se pueda aplicar inducción. Sin embargo, si el objetivo es capturar el conjunto de todas las oraciones aritméticas verdaderas, aún esta teoría resultará insuficiente.

Un resultado importantísimo para nuestra discusión acerca de la captura del modelo estándar de la aritmética es el siguiente. La lógica de segundo orden no cumple el Teorema Löwenheim-Skolem. Por ese motivo, la aritmética de segundo orden es categórica. Esto es, si reemplazamos en la axiomatización de Peano (formulada en primer orden) el axioma esquema de inducción matemática por el axioma de inducción expresado con cuantificación de segundo orden:

$$\forall X^2([X^2 0 \wedge \forall x(X^2x \rightarrow X^2Sx)] \rightarrow \forall x X^2x)$$

todos los modelos que satisfacen este conjunto de axiomas son isomórficos. Con respecto a la capacidad de prueba, el agregado al cálculo deductivo de primer orden axiomas ligados a la cuantificación de segundo orden se logra mayor poder deductivo. Así, la aritmética de segundo orden prueba todo lo que prueba la aritmética de primer orden, pero además logra probar fórmulas que el mencionado sistema de primer orden no logra probar. En particular, la oración canónica de Gödel para la aritmética de primer orden (cuya representación intuitiva es: "Esta oración no tiene una prueba en la aritmética de primer orden") es probable en la aritmética de segundo orden. Sin embargo, asumiendo la consistencia de la aritmética de segundo orden, por supuesto, ella no puede probar su propia oración de Gödel. Semánticamente, los logros de la aritmética de segundo orden son realmente sorprendentes: Su propia oración de Gödel es válida. Es decir, asumiendo consistencia, los axiomas de la aritmética de segundo orden son suficientes para implicar semánticamente todas las verdades del lenguaje aritmético de segundo orden. Esto inmediatamente muestra su incompletitud: hay oraciones semánticamente válidas que no pueden ser probadas. Es decir, la aritmética de segundo orden establece semánticamente todas sus verdades, aunque no es capaz de probarlas.

Este resultado abre una estrategia distinta para capturar el modelo estándar de la aritmética. La aritmética de primer orden tiene modelos estándar y no estándar. Sus modelos no son categóricos y su incompletitud muestra que hay oraciones verdaderas en el modelo estándar que no pueden probarse. La aritmética de segundo orden sólo tiene modelos isomórficos. Es decir, es categórica. Si bien es incompleta, es capaz de implicar semánticamente todas las verdades aritméticas, incluyendo su propia oración de Gödel. Por eso, siguiendo a Shapiro, podemos usar recursos lógicos de segundo orden para fijar el mencionado modelo de la aritmética. Si los modelos isomórficos no hacen diferencias significativas en la caracterización de esa estructura que llamamos números naturales, hemos encontrado un modo de capturar esa estructura. Claro, la pérdida de la completitud del sistema lógico subyacente es un precio a pagar: aparentemente completitud y categoricidad son dos fuerzas que tiran en direcciones opuestas.

En suma, la adopción de recursos de segundo orden abre la posibilidad de dar una caracterización lógica del modelo estándar de la aritmética. Esto es un logro en si mismo, frente al problema de cómo capturar el mencionado modelo. Pero, si se tiene simpatías con el estructuralismo, tal opción, además, abre la puerta de dar una explicación lógica acerca de las características de la estructura que caracteriza los números naturales.

3. Interferencias y otros presuntos problemas

Diversos argumentos pueden elaborarse en contra de la estrategia que recomiendo adoptar para capturar el modelo estándar de la aritmética. Muchos de los más importantes han sido presentados por Quine (1970). Es sabido que de acuerdo a su punto de vista, la lógica de segundo orden es "set theory in sheep's clothing".[8] Y dado que la lógica debe ser distinta y más fundamental que la teoría de conjuntos y cualquier otra teoría matemática, el mencionado sistema de orden superior no sería, de acuerdo a su opinión, lógica genuina. El propósito de este apartado es presentar los variados matices de esta línea argumentativa que de ser adecuada produciría profundas complicaciones a la estrategia de recurrir a la cuantificación de segundo orden para expresar la interpretación estándar de la aritmética.

8. Quine, W. (1970: 66–68).

Argumento de la metateoría inapropiada:

Un punto importante a destacar para apoyar la estrategia de capturar el modelo estándar de la aritmética usando recursos de orden superior, es que la lógica de segundo orden cumple un papel importante en la representación de aspectos significativos de la práctica matemática. Dada la imposibilidad de capturar por medio de un sistema de prueba finitista la totalidad de las fórmulas y argumentos válidos de los mencionados lenguajes, es decir, dada la incompletitud mencionada en el punto anterior, el uso de recursos semánticos es el único medio que tenemos para presentar la corrección de los razonamientos matemáticos en general. Es bien conocido, además, que los lenguajes de primer orden son incapaces de expresar conceptos como finitud, los distintos cardinales infinitos. De esta manera restringirse a los lenguajes de primer orden sacrifica poder expresivo por supuestas ganancias ontológicas y epistémicas. Como parte de tales ganancias, podríamos pensar que la práctica matemática no acepta resultados sin pruebas formales rigurosas y que los desacuerdos serían muy usuales, si no fuera parte de la práctica matemática el obtener pruebas. Sin embargo, si bien es claro que modelar la descripción de la práctica como una axiomatización es útil, no imprescindible. Hay dos conceptos de *consecuencia lógica*: como *demostración* o como *preservación de verdad*. La adopción de recursos de segundo orden en matemática es atractiva porque aunque uno de los propósitos de la lógica sea brindar el ideal de justificación de oraciones a partir de otras oraciones, ese ideal no tiene por qué verse como una demostración finitista, sino que puede verse como un análisis de las estructuras conjuntistas involucradas para la transmisión de verdad de premisas a conclusión cuando hay razonamientos matemáticos involucrados.

Por supuesto, podría replicarse que si un sistema lógico no es completo, no tenemos seguridad epistémica acerca de las propiedades semánticas utilizadas para valuar la preservación de verdad. Esto es, por sus supuestas limitaciones metalógicas, la lógica de segundo orden estaría caracterizando de manera inapropiada la idea de que un conjuntos de premisas finito justifica a priori una conclusión. Así, de acuerdo a esta posición, la completitud es un fuerte desideratum en lógica. Por lo tanto, la lógica de segundo orden usada para capturar el modelo estándar de la aritmética no califica como lógica. Y la presunta captura estará viciada.

Pero, en primer lugar, ¿por qué la lógica no tendría nada que decir cuando falla la completitud? Es decir, cuando no hay una superposición precisa entre lo que se puede demostrar con reglas finitarias y lo que se puede justificar de acuerdo a las estructuras que preservan verdad, ¿por qué deberíamos abandonar la tarea de analizar lo que es válido y lo que no lo es? Desde un punto de vista general, la lógica es acerca de la validez de cualquier tipo de argumentos, no sólo de aquellos que, dadas las limitaciones epistémicas humanas, somos capaces de representar por medio de una axiomaticación finita. Incluso nosotros, seres humanos epistémicamente limitados, podemos darnos cuenta que una forma de razonar puede preservar la verdad de premisas a conclusión sin que la información contenida en las premisas pueda codificarse de forma finita. En especial, en el caso de la matemática, la *regla omega* es un típico ejemplo de validez intuitiva que esencialmente involucra infinitas premisas. Podemos fácilmente darnos cuenta que tal manera de razonar carece por completo de contra-ejemplos, sin que exista una prueba finita que partiendo de un número finito de premisas complete una derivación de la conclusión general. Y en segundo lugar, limitar la lógica a campos donde la completitud esté presente, parece una petición de principio contra la lógica de orden superior. O al menos, parece trazar una línea arbitraria entre lo lógico y lo no lógico. ¿Por qué no hacer lo mismo con la indecibilidad y consecuentemente declarar a la lógica de primer orden fuera de los límites de la lógica?

Argumento del compromiso ontológico:
Según Quine, adoptar cuantificadores de segundo orden compromete irremediablemente con conjuntos porque:

> Ser es ser el valor de una variable.
>
> Las asignaciones a las variables de orden superior son conjuntos.

Por supuesto, este argumento requiere la aceptación de (i) como criterio de compromiso ontológico y podría replicarse que ese punto no está más allá de disputa. Pero, aún concediéndolo, hay otras alternativas para interpretar las asignaciones semánticas a las variables de orden superior que desvinculan a las mismas de la teoría de conjuntos. Así, es bien conocido que Boolos (1984) ha seguido otra dirección: la interpretación plural de los cuantificadores de segundo orden evita el compromiso con conjuntos. Y recuérdese que no hace falta un compromiso ontológico con entidades plurales, sino simplemente con formas plurales de hablar, para construir una interpretación con las mismas características que la usual presentación conjuntista. Podría replicarse que la cuantificación requiere el compromiso con entidades conjuntistas: el dominio del modelo que fija el alcance de la cuantificación de orden superior. Pero, tal réplica estaría mal enfocada, ya que lo mismo podría decirse de la cuantificación de primer orden. Por otra parte, sólo el prejuicio singularista (todo en uno) obliga a reunir en una única entidad colectiva como dominio de cuantificación. Boolos muestra como se obtienen los mismos recursos expresivos que la interpretación conjuntista de los lenguajes de orden superior adoptando formas plurales de hablar de *todos los conjuntos* sin compromisos ontológicos con el conjunto de todos los conjuntos (que por otra parte, como es conocido, produce inconsistencias).

Además, no es claro que el slogan "lógica sin compromisos ontológicos" deba cumplirse para "filtrar" sistemas lógicos. La semántica usual de las lógicas modales parece estar comprometida con mundos posibles (usualmente vistos como *objetos específicos* dentro del universo de los objetos) y no por ello se sostiene que tales sistemas inferenciales deberían ser expulsados del dominio de la disciplina.

Argumento de la universalidad de la lógica:
Una línea recurrente contra la adopción de recursos de orden superior apela a la universalidad y neutralidad de la lógica. La lógica es universal (se aplica en todos las disciplinas) y neutral respecto de su tema. Pero si la relación de *consecuencia* fuera

ISSN 0590-1901 (impresa) / ISSN 2362-485x (en línea)
Cuadernos de filosofía /62 .2014

relativa a la teoría de conjuntos que se adopte y esta se apoya en conjeturas que no están suficientemente claras, la lógica dejaría de ser universal. Del mismo modo, la lógica de segundo orden, vista como una codificación de las propiedades de ciertas estructuras matemáticas, carece de neutralidad. Por lo tanto, la lógica de orden superior no es lógica (es matemática).

Una manera de profundizar esta idea es reclamar no tener que incluir entidades especiales cuando evaluamos la admisibilidad de un potencial modelo. Esto es, lo que sería *constitutivo* a una expresión lógica es *ser insensible a las identidades particulares de objetos*. Así, tales nociones deberían ser inmutables a cualquier permutación arbitraria del dominio de objetos. Su contenido debería permanecer inalterado bajo toda permutación de los modelos que permita alterar las interpretaciones. Más aún, las constantes lógicas no deberían ser sensibles a la particular presencia de individuos en el dominio. Una ventaja de este criterio, además, es que parece estar filosóficamente bien motivado: la invariabilidad bajo permutación parece reflejar tanto la formalidad de las nociones lógicas[9], su generalidad[10] como la neutralidad de la lógica respecto de su tema. Las nociones invariantes son formales y neutrales en el sentido de no depender de la identidad o elección particular de los objetos de un dominio de discurso. Este criterio, además, parece al menos inicialmente exitoso para clasificar lo que intuitivamente parece lógico y lo que no.[11] De este modo, la objeción sería que validez no es una noción lógica, ya que es un predicado que se aplica a objetos específicos: fórmulas de un lenguaje. Su aplicación requiere la existencia de fórmulas como objetos del dominio.

9. Sher, G. (1991).

10. Tarski, A. (1986).

11. Por ejemplo, los conectivos veritativo-funcionales y los cuantificadores de primer orden pasan este test. Los nombres propios en general y predicados como *ser mortal* y *ser hombre* son excluidos (lo cual, parece intuitivamente apropiado).

No obstante, es conocido que este criterio tiene inconvenientes con diversas expresiones no extensionales. Nuevamente, tal como indiqué frente al argumento anterior, nociones como *necesidad*, *creencia* o *conocimiento* son dependientes de dominios de mundos posibles, estados epistémicos y sus relaciones de accesibilidad. Esto es, ellas son sensibles a dominios particulares de objetos. Dejarlas fuera del ámbito de *lo lógico* no parece corresponderse con la práctica real de la disciplina. De acuerdo a este criterio, las lógicas epistémicas y modales no serían lógicas. Tampoco las temporales. Es decir, tanto las expresiones no extensionales como los cuantificadores de segundo orden parecen ser sensibles a entidades particulares: mundos en el primer caso o conjuntos en el segundo. Si esta fuera una razón para sacar del ámbito de lo lógico a los cuantificadores de segundo orden, también lo sería para los operadores modales y epistémicos que usualmente son consideradas como lógicas.[12]

12. Por supuesto, no estoy argumentando que Quine no tuvo en cuenta este tipo de argumento. Por el contrario, él mismo argumentó en contra de las *lógicas modales* utilizando consideraciones semejantes. Sin embargo, desde los trabajos de Quine hasta la fecha muchas cosas han cambiado. Sólo para mencionar probablemente la más importante es el desarrollo y consolidación de la semántica de modelos kripkeanos que permitieron ofrecer rigurosas pruebas de completitud para una amplia familia de sistemas formales modales (normales y no-normales).

Por supuesto, podría replicarse que tanto la lógica de segundo orden como las lógicas modales con su semántica de mundos posibles implican *hacer distinciones* en el dominio, lo que tiene como consecuencia que el dominio ya tiene una estructura.[13] Esto podría ser visto como una diferencia crucial entre la lógica de primer orden y los mencionados sistemas formales. La cuestión crucial es entonces si hacer (o no) distinciones en los dominios de objetos es suficiente (o no) para marcar una línea de demarcación precisa entre *lo lógico* y lo *que no lo es*. Por supuesto, mucho podría decirse acerca de este punto. Sólo para mencionar lo que considero más importante replicaré lo siguiente. En primer lugar, la objeción supone aceptar que la lógica clásica de primer orden no hace en absoluto ningún tipo de distinciones. Y este punto es al menos discutible. Por supuesto, estamos ontológicamente familiarizados a negar la existencia de objetos que no sean idénticos a sí mismos o a suponer que nuestras teorías no deberían interpretarse en estructuras conjuntistas cuyos dominios sean vacíos.[14] Sin embargo, y aún cuando se consideren razonables tales especificaciones, ellas determinan el conjunto de razonamientos y fórmulas válidas de los lenguajes de primer orden. El considerar que la identidad es una expresión lógica requiere tal especificación. Insisto, no estoy argumentando que la misma no sea razonable. Lo que estoy diciendo es que algunas especificaciones sobre los dominios hay que hacer

13. Agradezco al referí anónimo de *Cuadernos de Filosofía* por haberme formulado esta objeción.

14. Sólo para mencionar un caso, la lógica libre abandona este último requisito.

incluso en el caso de la lógica de primer orden. En segundo lugar, siendo la lógica un modelo del razonamiento deductivo, usamos herramientas matemáticas para la elaboración de estos modelos con el propósito de construir una teoría capaz de abarcar la major cantidad de argumentos intuitivamente válidos. Viendo así el objetivo, parece razonable admitir que hay una mutua interacción entre la postulación de especificaciones matemáticas en los dominios y la capacidad explicativa de las teorías lógicas resultantes. Esto es, capturar la mayor cantidad de argumentos y fórmulas válidas en sentido intuitivo. En el próximo punto, consideraré algunos de los potenciales riesgos de esta posición y ofreceré una respuesta frente a ellos.

Argumento de la Interferencia:

Un punto diferente que podría hacerse contra la logicidad de la lógica de segundo orden es el siguiente: la teoría de conjuntos y sus conjeturas, por ejemplo, la *hipótesis del continuo*, interfieren en la codificación de las estructuras que determinan la relación de *consecuencia* de la lógica superior. Esto es, la semántica de la lógica de segundo orden depende de elegir un modelo fijo para la teoría de conjuntos y no hay ningún modo para identificar un único modelo pretendido para esta teoría. Este hecho conduce al siguiente problema: hay una oración de la lógica de segundo orden la cual es válida si y sólo si la hipótesis del continuo se cumple. Pero, como es bien conocido, esta hipótesis no ha sido establecida dentro de la teoría de conjuntos.[15]

15. Este punto ha dido señalado en Jané, I [2005] y Campbell-Moore, C. (200?).

El argumento de la interferencia de la matemática sobre la lógica parece presuponer que la lógica es fundamento de la matemática. No obstante, esa posición no resulta carente de problemas. Así, como se sostiene en Shapiro (1998), es claro que en la práctica de la lógica y de la matemática contemporánea hay mutuas interferencias entre matemática y lógica, porque no hay un fundamento neutral desde donde construir todo el edificio del conocimiento. El proyecto logicista que sostenía lo contrario parece haber fracasado. Y con él, la posibilidad de pararse desde algún lado definitivo que sirva como fundamento de la práctica matemática. Si no se busca tal fundamento al construir un sistema lógico, sino dar criterios de validez para la corrección de los argumentos, las interferencias, siempre que sean útiles a tales efectos, no parecen involucrar problema alguno.

Además, aunque la hipótesis del continuo no pueda decidirse dentro de la teoría de conjuntos, hay buenas razones intuitivas, externas a la teoría, para adoptarla como parte de los recursos. Nuevamente, libres del proyecto fundacionista de la lógica, si tal adopción permite la reconstrucción de la validez de ciertas formas argumentativas, esa adopción debería ser vista como bienvenida.

Argumento de la oscuridad de las asignaciones a las variables de segundo orden:

Como hemos visto, las valuaciones asignadas como valores a las variables de segundo orden deben realizarse aplicando la operación potencia a conjuntos infinitos. Podría argumentarse que por esa razón, las variables de segundo orden no tienen asignados sus valores en el mismo sentido que lo tienen las variables de primer orden, ya que no hay acuerdo entre los matemáticos acerca de qué elementos hay en la potencia de un conjunto infinito .[16] Esto sería así, ya que los únicos conceptos cuya existencia está garantizada serían los que puedan expresarse en el lenguaje y hay sólo un número contable de fórmulas en un lenguaje. Por lo tanto, los modelos de los lenguajes de segundo orden no serían confiables, ya que estarían usando una operación, la *potencia de un conjunto infinito*, que no puede describirse en el lenguaje.

16. Jané, I. (2005).

Sin embargo, considero nuevamente que tal objeción es inadecuada. En primer lugar, porque las asignaciones a las variables de orden superior se realizan, como hemos visto, por medio de funciones de valuación. No hace falta que sea posible dar una descripción lingüística de cada subconjunto del dominio para para caracterizar el funcionamiento de tales funciones. Y en cualquier caso, el problema sería el mismo para las asignaciones a las variables de primer orden bajo dominios incontables. La operación potencia de un conjunto infinito es una operación perfectamente definida aún cuando se aplique a conjuntos incontables. Y como tal, no hay nada oscuro en su utilización en la teoría de modelos. En segundo lugar, la objeción parece asumir que las condiciones de verdad de una fórmula dependen sólo de aquello que podemos describir. Y tal suposición conduce directamente al abandono de los denominados modelos por asignación. Sólo funciones de substitución podrían ser utilizadas para la asignación de condiciones de verdad a las fórmulas del lenguaje. Y tal suposición es, al menos, controversial.

Argumento de la relatividad

Finalmente, otra línea argumentativa podría insistir en la relatividad de las nociones conjuntistas involucradas en la semántica de los lenguajes de orden superior. Esa estrategia, inspirada en lo que Resnik ha llamado *Skolemita*, sostiene que a consecuencia del teorema Löwenheim-Skolem, los conceptos de la teoría de conjuntos son realmente relativos. Tal insistencia podría conducirnos a descubrir cierta circularidad en la estrategia de usar recursos de orden superior para capturar el modelo estándar de la aritmética. Así, la categoricidad misma sería relativa a la teoría de conjuntos que se use. Y la teoría de conjuntos, el skolemita insistirá, tiene modelos estándar y no estándar. De esta manera, sólo asumiendo una *interpretación estándar* de las nociones conjuntivas involucradas en la caracterización de los modelos, podríamos tener una caracterización del *modelo estándar de la aritmética*. Pero, tal suposición estaría revelando que hemos asumido aquello que deberíamos justificar.

Me parece, no obstante, que la objeción está mal encaminada. El problema inicial era el de la determinación del modelo estándar de la aritmética. Y la estrategia adoptada da una respuesta a ese problema utilizando recursos de segundo orden para capturar ese modelo. Es cierto que la teoría de modelos, tanto para los lenguajes de primer orden como para los lenguajes de orden superior, trabaja como si las interpretaciones de esos lenguajes fueran conjuntos. Esto es, los conjuntos son tomados como una herramienta para dotar a la teoría de modelos de interpretaciones. Pero, objetar que la teoría formal de conjuntos, en tanto teoría de primer orden, está también indeterminada en su interpretación, transforma nuestro problema inicial en otro. Por supuesto, la cuestión de capturar el modelo estándar de teorías de conjuntos como ZFC puede ser también un asunto interesante. Pero, éste es otro problema. Y si quisiéramos focalizarnos en ese problema, se le podría replicar al skolemita que la versión en segundo orden de la teoría ZFC, carece del mencionado problema. El trabajo dentro de la teoría de modelos se realiza asumiendo que tenemos una comprensión informal del lenguaje de la teoría de conjuntos. Siendo así, utilizamos esas nociones para dotar de semántica a los lenguajes de orden superior y obtener resultados como el de categoricidad. Eso nos permite, como hemos visto, capturar el modelo estándar de la aritmética, quedando así despejada cualquier sospecha de circularidad.

4. Conclusiones

En este trabajo, he defendido que el problema de cómo fijar el modelo estándar de la aritmética puede resolverse adoptando lógica de segundo orden. He argumentado que las principales objeciones y reservas a adoptar tal estrategia pueden responderse adecuadamente. Como hemos visto, las objeciones parecen adoptar un punto de vista muy restrictivo acerca de lo que es lógica y lo que no, y una visión fundacionista de la lógica frente al resto del conocimiento. La estrategia adoptada, además, puede servir como punto de partida para el estructuralismo matemático. Como hemos visto, los sistemas categóricos sólo tienen modelos isomórficos. Y si dos modelos isomórficos son el mismo modelo, entonces se ha sido capaz de identificar la estructura define los números naturales sobre la cual la aritmética habla.

Bibliografía

- Benacerraf, P. (1965). 'What numbers could not be'. *Philosophical Review* 74, 47–73.
- ——— (1996). 'Recantation or any old omega-sequence would do after all'. *Philosophia Mathematica* 3, 184–189.
- Boolos, G. (1984). "To be is to be a value of a Variable (or to be some Values of Some Variables" *J. of Philosophy* 81, 430-449.
- Campbell-Moore, C. (201?). "Structuralism Based on Logics Extending First Order Logic; the Prospects, and a Computable Infinitary Logic".
- Chang, C. & Keisler, H. (1973). *Model Theory,* Amsterdam: North Holland.
- Halbach, V. & Horsten, L. (2005). "Computational Structuralism" *Philosophia Mathematica* 13, 174–186.
- Hellman, G. (1989). *Mathematics Without Numbers*, Oxford: Oxford University Press.
- Hellman, G. (2001). 'Three Varieties of Mathematical Structuralism', *Philosophia Mathematica* 9, 184–211.
- Jané, I (2005). ""Higher-Order Logic Reconsidered" en Shapiro, S. (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press. 781-810.
- Kaye, R. (1991). *Models of Peano Arithmetic*. Oxford Logic Guides. Oxford: Oxford University Press.
- McGee, V. (1997). 'How we learn mathematical language', *Philosophical Review* 106, 35–68.
- Quine, W.V. (1970). *Philosophy of Logic*. 2nd edition. Oxford University Press, Oxford.
- Shapiro, S. (1991). *Foundations without Foundationalism: A Case for Second- order Logic*. Oxford Logic Guides 17. Oxford: Clarendon Press.
- ——— (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.
- Sher, G. (1991). *The Bounds of Logic*. Cambridge: MIT Press.
- Smith, P. (2013). *An Introduction to Gödel's Theorems,* Cambridge: Cambridge UP.
- Tarski, A., (1986). "What are Logical Notions," *History and Philosophy of Logic*, 7: 143–154.