Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol. 18, N.º 2, pp. 137-151, 2014

SIMULACION NUMERICA NO LINEAL DE UNA SECCIÓN ALAR TIPICA CON OSCILACIONES AUTOEXCITADAS

WALTER CASTELLÓ[1], SERGIO PREIDIKMAN[1,2], ALEJANDRO BREWER[1]

[1]Universidad Nacional de Córdoba
Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Casilla de Correo 916, X5016GCA Córdoba, Argentina
[2]CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
Av. Rivadavia 1617, C1033AAG, Ciudad Autónoma de Buenos Aires

(Recibido 4 de diciembre de 2012, para publicación 6 de marzo de 2013)

Resumen – La respuesta de estructuras flexibles a solicitaciones de origen aerodinámico es generalmente de naturaleza no lineal. La característica del comportamiento aeroelástico depende, no solo, de las propiedades de los subsistemas involucrados (estructural y aerodinámico) sino también de la manera en que estos dos subsistemas se combinan. La respuesta no lineal de una sección alar con dos grados de libertad ha sido ampliamente estudiada. La importancia del análisis de sistemas aeroelásticos radica en su capacidad para predecir la respuesta de algunos componentes críticos de una aeronave. Por ejemplo, la pérdida de rigidez en las superficies de control es causa de niveles inaceptables de vibraciones de la aeronave. Estas vibraciones deben ser evitadas, pues la transición entre vibraciones indeseables y *flutter* es en general difusa. Y como es sabido, el *flutter* de las superficies de control puede dañarlas provocando la pérdida de la aeronave. En este trabajo se estudia numéricamente la dinámica no lineal de un sistema aeroelástico con comportamiento estructural no lineal cúbico y "juego" en la rigidez torsional de la sección alar. El modelo de orden reducido emplea las hipótesis de la conocida "sección típica". Las cargas aerodinámicas se obtienen mediante el uso de un método de red de vórtices bidimensional, inestacionario y no lineal. Las ecuaciones que gobiernan el sistema aeroelástico son integradas numérica, simultánea, e interactivamente en el dominio del tiempo. El modelo desarrollado permite determinar la amplitud y la frecuencia de las vibraciones autoexcitadas inducidas por el cambio en la rigidez torsional, la incidencia en la velocidad de *flutter* del sistema aeroelástico, y la aparición de ciclos límite. Los resultados provenientes de las simulaciones numéricas muestran una importante correlación con los obtenidos por otros autores, además el modelo matemático presentado en este trabajo resulta ser más eficiente y preciso, en particular para los casos altamente no lineales.

Palabras clave – Oscilaciones autoexcitadas, aeroelasticidad no lineal, dinámica estructural.

1. INTRODUCCIÓN

Los aviones de alto desempeño son, en general, susceptibles a una variedad de fenómenos aeroelásticos con comportamiento no lineal. En la última década se ha observado un interés generalizado en el estudio de estos fenómenos aeroelásticos no lineales, y ciertamente la literatura en esta área es muy extensa. Una revisión del estado del arte asociado al análisis aeroelástico no lineal puede verse en los trabajos [1], [2] y [3]. En estos trabajos, los autores proveen una completa revisión de las teorías de análisis y de los modelos computacionales y experimentales concebidos para estudiar estos fenómenos, discutiendo también el grado de correlación entre los resultados experimentales y numéricos. En particular en [2] y [3], se hace especial énfasis en el estudio de las oscilaciones de ciclo límite (*Limit Cycle Oscilations*, LCOs), ya que la aparición de este fenómeno en aeronaves en vuelo en épocas recientes ha resultado ser una experiencia muy perjudicial. Las LCOs son vibraciones autoexcitadas de amplitud limitada, producto de la interacción no lineal fluido-estructura. La aparición de LCOs se debe, entre otras, causas a: presencia aerodinámica e inercial de dispositivos de almacenamiento de combustible, interacciones de cuerpo rígido (el caso de las alas volantes) y juego o pérdida de rigidez en las superficies de control, etc.

El juego excesivo puede causar vibraciones inaceptables de la estructura de la aeronave durante el vuelo, y estas vibraciones en las superficies de control deben ser evitadas porque pueden eventualmente pro-

vocar *flutter*. Este fenómeno debe evitarse ya que puede ocasionar daños en la estructura de las superficies móviles y consecuentemente pérdida de control. La potencial aparición de LCOs incrementa el costo de desarrollo, certificación, y mantenimiento de aeronaves; y esto está relacionado con el sobre dimensionamiento, los ensayos, y el mantenimiento necesarios para aumentar la vida útil. A modo de ejemplo cabe citar que la FAA propuso adoptar nuevas directivas, relativas al juego de superficies de control, para todos los modelos Boeing 777. Estas directivas establecen que se deben efectuar mediciones periódicas del juego de los elevadores izquierdo y derecho, y del timón de dirección. Estas directivas, que incluyen acciones correctivas, lubricación repetitiva, etc., de las superficies móviles, se originaron a partir de reportes de ensayos en vuelo que referidos a la aparición de vibraciones inducidas por juego en las superficies de control.

Desde el punto de vista experimental se han llevado a cabo diversas experiencias, talvez las más ampliamente citadas sean los estudios experimentales realizados en el túnel de viento de baja velocidad de la Universidad de Duke. Una completa descripción del modelo experimental, y los resultados obtenidos, para una sección alar con juego en el grado de libertad de giro en la superficie de control se puede encontrar en el trabajo de Dowell *et al*. [4]. Más recientemente se incorporó al túnel de viento un generador de ráfagas, el cual ha permitido también estudiar las incidencias de los cambios abruptos en la velocidad sobre las LCOs.

En lo referente al área computacional, para captar la naturaleza del comportamiento es necesario que los modelos contemplen la no linealidad de: la aerodinámica y la estructura. En consecuencia, el análisis paramétrico de estos sistemas conlleva un gran esfuerzo computacional, y por ello la economía de cálculo resulta fundamental. El análisis de problemas aeroelásticos empleando modelos basados en la mecánica de fluidos computacional (CFD) resulta prohibitivo. Una revisión de los métodos de análisis empleados, muestra que las diferencias entre los mismos están originadas principalmente en el modelo aerodinámico. Los modelos aeroelásticos no lineales se pueden dividir en: (a) modelos de orden reducido basados en las ecuaciones de movimiento en su forma de espacio-estado no lineales, en donde la aerodinámica no lineal se incorpora a través de funciones de carga (ej.: las funciones de Wagner que son una aproximación de las de Theodorsen o el modelo de estado finito propuesto por Peters), algunos trabajos en esta área son [4], [5], [6], [7], y [8], en este último además se estudia la respuesta del sistema a ráfagas; y (b) modelos de orden reducido basados en métodos discretos, en esta área se puede citar el artículo [9] en donde se aplica el método de balance armónico y se incluyen solo los modos armónicos dominantes (esto es válido sobre la hipótesis del comportamiento armónico de las LCO). Por otra parte en [10], se hace una comparación entre los métodos de balance armónico y el método de elementos espectrales donde se emplea la ventaja que brinda el método de elementos finitos en la discretización del dominio y en lugar de funciones de forma se emplea la descomposición espectral de frecuencias. Otros modelos de orden reducido están basados en los autovectores o “modos dominantes” del flujo, que surgen de un análisis previo en diferencias finitas o elementos finitos. A partir de estos autovectores se puede luego reconstruir el comportamiento dinámico no lineal del fluido. A esta línea pertenecen los trabajos [11] y [12], más recientemente [13] y [14] muestran resultados obtenidos en régimen transónico a partir de las ecuaciones de Euler linealizadas.

En este trabajo se estudia el comportamiento no lineal y las características de *flutter* de un sistema aeroelástico que presenta juego en uno de sus grados de libertad. Se ha desarrollado un modelo numérico de orden reducido de la versión aeroelástica de la conocida “sección típica”. Para simular el comportamiento aeroelástico del sistema, el ala se ha modelado estructural y aerodinámicamente como una placa plana rígida. El modelo estructural posee dos grados de libertad: el desplazamiento vertical y la rotación alrededor del eje elástico de la sección alar. Las cargas aerodinámicas se determinan empleando un método de red de vórtices inestacionario y no lineal, que ha sido empleado con éxito en los trabajos [15], [16], y [17]. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema aeroelástico son integradas numéricamente e interactivamente en el dominio del tiempo.

El contenido de este trabajo se resume a continuación. La Sección *2* presenta un resumen del comportamiento de los sistemas aeroelásticos que muestran oscilaciones de ciclo límite. La Sección *3* introduce el modelo aeroelástico propuesto en este trabajo, primero se desarrollan los modelos estructural y aerodinámico no lineal, y después se define el método de acoplamiento e integración en el tiempo. La Sección *4*

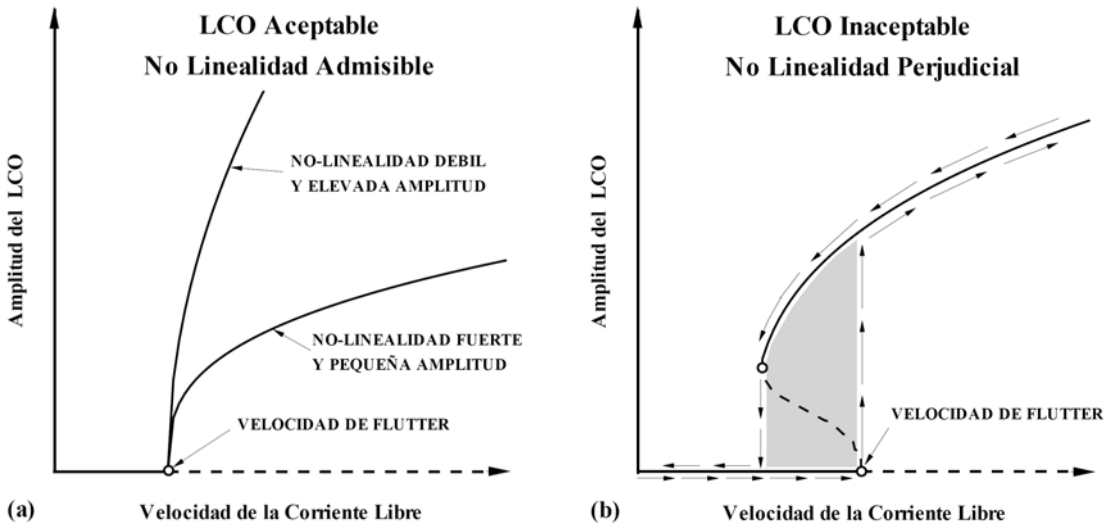

Fig. 1. Respuesta de sistemas que presentan LCOs. (a) No lineal débil y fuerte con cambios suaves. (b) No lineal con cambios de abruptos de comportamiento.

presenta algunos de los resultados obtenidos y se los compara con otros trabajos. Por último la Sección 5 contiene un resumen de las conclusiones que surgen de este trabajo.

2. AEROELASTICIDAD NO LINEAL

Los trabajos [1] y [3] presentan una revisión de los métodos de análisis empleados para estudiar los fenómenos aeroelásticos en general, y en particular definen algunos conceptos básicos que resultan importantes en el momento de establecer los objetivos de un análisis aeroelástico no lineal. El primero sin duda está asociado con la distinción entre los fenómenos que son estática o dinámicamente no lineales. En el área de la aeroelasticidad, el término sistema lineal suele asociarse a modelos (físicos o matemático) cuya respuesta ya sea estática o dinámica es lineal. Por ejemplo un modelo estructural es lineal si la deformación resulta (linealmente) proporcional a la carga, estática o dinámica, a la cual está sometido el modelo. Por otra parte un modelo aerodinámico es lineal cuando, por ejemplo, el cambio en la presión es (linealmente) proporcional al cambio en la dirección local de la corriente libre o en la magnitud de la velocidad, asociadas a la geometría del cuerpo inmerso en el fluido. Habitualmente este es el dominio de los modelos matemático basados en pequeñas perturbaciones. Por supuesto las ondas de choque y la separación de flujo no forman parte de los fenómenos lineales. Siguiendo estas definiciones, un sistema aeroelástico lineal es aquel compuesto por modelos estructural y aerodinámico del tipo lineal.

Existe una amplia variedad de efectos aeroelásticos no lineales que pueden producir la aparición de LCOs en aviones de alto desempeño. Ignorar el comportamiento no lineal de la estructura o la no linealidad aerodinámica, puede llevar a: 1) predicciones incorrectas de estos fenómenos aeroelásticos, o 2) que estos fenómenos no sean observados durante el estudio de los mismos. Debido a esto, el estudio de la aparición de LCOs y la variación en la amplitud de las mismas cuando cambia algún parámetro, hace necesario emplear modelos aeroelásticos dinámicamente no lineales. Habitualmente no existe un mecanismo disparador simple que provoque la aparición de LCOs, a menos que se construya específicamente un modelo físico para su posterior ensayo en vuelo o en túnel de viento, que es precisamente lo que se estudia en este trabajo.

La Fig. 1 muestra las posibles evoluciones de la amplitud de las LCOs en función del cambio en la velocidad de la corriente libre. La Fig. 1-a (bifurcación supercrítica), corresponde a un sistema aeroelástico que es estable frente a cualquier tipo de perturbaciones por debajo de la velocidad de *flutter*, velocidad que puede determinarse con un modelo aeroelástico lineal. Una vez superada la velocidad de *flutter*, un

efecto no lineal cualquiera puede provocar la aparición de LCOs cuya amplitud es mayor en la medida que aumenta la velocidad. En algunos casos, la existencia de las LCOs con este tipo de no linealidad "benigna" es bien recibida, pues evita la aparición de oscilaciones con crecimiento abrupto (*flutter* violento) que son catastróficas para la estructura. La Fig. 1-b (bifurcación subcrítica) muestra otro caso general de comportamiento no lineal de los sistemas aeroelásticos. En este caso además de la existencia de LCOs más allá de la velocidad de *flutter*, también se da la aparición de tres LCOs por debajo de la velocidad de *flutter*. Se observa también que existen posiciones estables (línea continua) y posiciones inestables (línea de trazos). Un ciclo límite resulta estable cuando frente a pequeñas perturbaciones, el sistema vuelve a la misma situación al cabo de un tiempo. Por el contrario los ciclos límites resultan inestables cuando, ante pequeñas perturbaciones, el ciclo límite se aleja del estado original convergiendo a un nuevo estado de equilibrio estable. Por ejemplo, si el sistema se encuentra en cualquier punto perteneciente a la línea de trazos, una pequeña perturbación haría que el mismo se moviera a algún de las posiciones definidas por las líneas continuas, ver Fig. 1-b. Este tipo de no linealidad resulta "perjudicial", porque la misma presenta un ciclo de histéresis (zona sombreada en la Fig. 1-b), y en algunos casos para lograr la desaparición de las LCOs es necesario disminuir la velocidad muy por debajo de la velocidad de *flutter*.

El objetivo de este trabajo es cuantificar la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones en función del cambio en la velocidad de la corriente libre, además de la incidencia del juego en un grado de libertad en la aparición y comportamiento de las LCOs en la sección típica. Con este objetivo se ha desarrollado un modelo numérico capaz de simular el comportamiento del sistema ala/aire, componentes de un único sistema aeroelástico dinámico no lineal. Las ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal del sistema aeroelástico se integran numéricamente, en forma interactiva y simultánea en el dominio del tiempo.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA AEROELÁSTICO

La simulación numérica del comportamiento estructural del ala se realizó empleando un modelo simplificado y de orden reducido como el que se muestra en la Fig. 2. El problema se ha estudiado a través del acoplamiento de dos subsistemas: un modelo estructural y un modelo aerodinámico, estos subsistemas forman un único sistema dinámico. El subsistema correspondiente al modelo estructural está formado por la sección típica, mientras que el subsistema aerodinámico lo constituye la corriente libre que incide sobre la sección típica.

El ala se ha considerado como un cuerpo de pequeño espesor de modo que puede modelarse, estructural y aerodinámicamente, como una placa plana rígida y uniforme. Como se observa en la Fig. 2 el sistema posee dos grados de libertad: un desplazamiento vertical (h) y un giro (θ) de la sección alrededor del centro elástico del ala (c.e.), asociados a la flexión y a la torsión del ala respectivamente. Por otra parte el

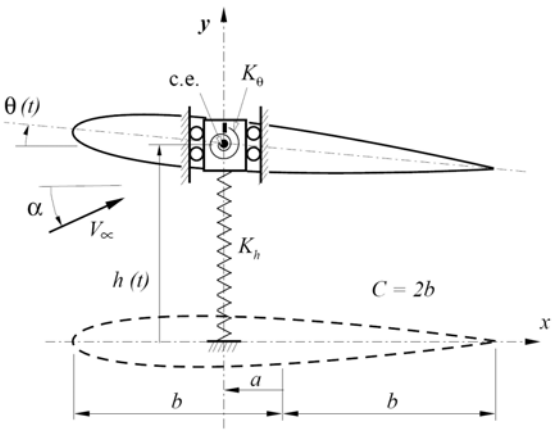

Fig. 2. Modelo físico de la sección alar típica con dos grados de libertad.

flujo de aire, que define la corriente libre, se considera potencial con una velocidad en el infinito V_∞ y un ángulo de incidencia (o ángulo de ataque) sobre el conjunto definido por α.

Aerodinámicamente, el ala es modelada como una lámina vorticosa. Debido a que el flujo es inestacionario, hay vorticidad que se desprende desde el borde de fuga del ala y es convectada hacia el flujo de aire con la velocidad local de las partículas formando la estela. La vorticidad contenida en la porción de la estela cercana al ala tiene asociado un campo de velocidades que afecta las cargas aerodinámicas actuantes sobre la placa. Y dado que la vorticidad presente en la estela fue generada por la presencia de la placa un tiempo atrás, las cargas aerodinámicas actuales dependen, de alguna manera, de lo que sucedió en el pasado. Esto suele indicarse diciendo que el modelo aerodinámico, usado en este trabajo, tiene memoria. En las simulaciones numéricas desarrolladas en este trabajo, la forma y posición de la estela, como así también la intensidad de la vorticidad contenida en ella son determinadas como parte de la solución.

En los apartados siguientes se describen en detalle los dos subsistemas asociados con el modelo estructural y el modelo aerodinámico; y además se presenta el esquema de acoplamiento e integración numérica de las ecuaciones de movimiento del sistema dinámico resultante.

3.1. Modelo estructural

En este modelo estructural simplificado el comportamiento elástico del ala está representado por dos resortes: un resorte de acción lineal que se carga cuando el ala experimenta un desplazamiento vertical y que genera una fuerza restauradora que trata de llevar el centro elástico del ala a su posición de equilibrio, y un resorte de acción torsional que se carga cuando el ala cambia su orientación y que genera un momento que trata de devolver el ala a su posición horizontal. Por simplicidad se considera restringido el desplazamiento horizontal del ala, aunque no habría ningún inconveniente en adicionar ese nuevo grado de libertad al sistema.

La sección transversal del ala se modela como placa rígida y uniforme, y se presenta en forma esquemática en la Fig. 3. Los grados de libertad utilizados para describir la configuración de este modelo son: el desplazamiento vertical del centro elástico h(t), y el giro de la placa respecto de un eje que pasa por el centro elástico θ(t). El desplazamiento vertical se considera positivo hacia arriba y los giros se consideran positivos cuando tienen sentido horario. Las rigideces asociadas a los dos grados de libertad se indican mediante K_h y K_θ, respectivamente, las cuales modelan la rigidez flexional y torsional del ala.

Las ecuaciones no lineales de movimiento se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Lagrange. La energía cinética del ala, T, está dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + \frac{1}{2} I_\theta \dot{\theta}^2 - S_w \cos\theta \, \dot{h} \, \dot{\theta} \tag{1}$$

donde m es la masa del ala y S_w, e I_θ son el momento estático másico y la inercia másica respecto del c.e. del ala. Se debe observar que en el caso de emplear las ecuaciones no lineales, algunos de estos parámetros másicos resultan ser funciones de la configuración del ala a través del ángulo θ (ej.: $S_\theta = S_w \cos\theta$).

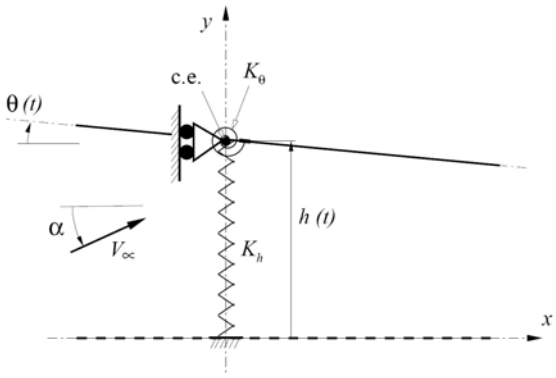

Fig. 3. Modelo estructural de la sección típica considerándola como una placa plana.

La energía potencial, U, se puede escribir como:

$$U = \frac{1}{2} K_h h^2 + \frac{1}{2} K_\theta \theta^2 \tag{2}$$

siendo los coeficientes K_l las rigideces asociadas a los dos grados de libertad de la sección típica (indicados en la Fig. 2-b, para los grados de libertad $l = h, \theta$).

Siendo las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nc} \tag{3}$$

en donde además de la energía cinética (T) y la energía potencial (U), las variables q_j y $\dot{q}_j$ son los coordenadas generalizadas (h,θ) y las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas ($\dot{h}, \dot{\theta}$) respectivamente; D representa el funcional de amortiguamiento (no se tendrá en cuenta en este trabajo), y Q_j^{nc} son las cargas generalizadas no conservativas y no lineales. Aplicando (3) a las ecuaciones (1) y (2), pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento no lineales del sistema estructural:

$$\begin{aligned} &\left[m\frac{d^2h}{dt^2} + S_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] + \left[S_T \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + K_h\, h = Q_h \\ &\left[S_\theta \frac{d^2h}{dt^2} + I_\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \qquad\qquad + K_\theta\, \theta = Q_\theta \end{aligned} \tag{4}$$

en la ecuación (4) se han separado explícitamente los términos asociados a la parte másica, de los términos de segundo orden que surgen como consecuencia de la no linealidad de las ecuaciones de movimiento (donde el coeficiente $S_T = S_w \sin\theta$). En la ecuación (4) todas las propiedades másicas son específicas, y están dadas por unidad de longitud del ala.

Los términos independientes Q_l representan las fuerzas aerodinámicas generalizadas por unidad de longitud, y están dadas por las siguientes integrales:

$$Q_h = \left[\int^{C_w} \Delta p(\xi, t)\, d\xi \right] \cos\theta \tag{5}$$

$$Q_\theta = \int^{C_w} \Delta p(\xi, t)\, \xi\, d\xi \tag{6}$$

siendo C_w la cuerda del ala. Por otra parte, Δp es la diferencia entre las presiones en la cara superior y la cara inferior de la placa plana que se emplea para modelar el ala. La variable de integración ξ, representa la posición de los puntos sobre el ala relativos al centro elástico. La diferencia entre las presiones en la cara superior e inferior del ala, Δp, se obtiene del modelo aerodinámico.

En el modelo de análisis numérico propuesto en este trabajo, las ecuaciones (4) y (5) se combinan con las correspondientes al modelo aerodinámico para luego integrarlas simultánea e interactivamente y obtener h(t) y θ(t). La diferencia de presiones, Δp, depende explícitamente de h, θ, $\dot{h}$ y $\dot{\theta}$, e implícitamente de $\ddot{h}$ y $\ddot{\theta}$.

3.2. Modelo Aerodinámico

En el modelo aerodinámico propuesto, las cargas aerodinámicas no lineales y no-estacionarias sobre la placa se obtienen empleando el método de red de vórtices inestacionario (UVLM) presentado en los trabajos [15] y [16]. La placa plana se considera como una lámina vorticosa, e introduce una discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del fluido. Esta discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del fluido, junto con la variación temporal del potencial de velocidades, producen una

diferencia entre las presiones en las caras superior e inferior de la placa plana que representa el ala. Esta diferencia de presiones es la responsable de las cargas aerodinámicas que actúa sobre el ala.

A los fines de que la diferencia de presiones en el borde de fuga sea nula, el efecto de la discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad del fluido debe cancelar exactamente el efecto producido por la variación temporal del potencial de velocidades. Es decir, la discontinuidad en la componente tangencial de la velocidad (vorticidad) persiste hasta, inclusive, el borde de fuga. Y en consecuencia se emite vorticidad desde el borde de fuga hacia el fluido, la cual es transportada con la velocidad local de las partículas para formar las estelas.

Cualquiera sea su ubicación, un vórtice tiene asociado un campo de velocidades que es irrotacional con excepción del punto donde el vórtice está ubicado. El campo de velocidades asociado a la vorticidad interactúa con el campo de velocidades asociado a la corriente libre, satisfaciendo la condición de no-penetración sobre la placa. Por lo tanto la vorticidad contenida en la estela modifica el campo de velocidades próximo a la placa y, por ende, la vorticidad sobre la misma. Dado que la vorticidad existente en la estela fue generada por, y convectada desde, la placa un tiempo atrás, el campo de velocidades es dependiente de la historia del movimiento.

En el caso de flujo uniforme y estacionario, el valor exacto de la fuerza y el momento aerodinámico que actúan sobre una placa plana pueden obtenerse considerando que: (a) toda la vorticidad está concentrada en un único vórtice ubicado a una distancia de un cuarto de la cuerda, medida desde el borde de ataque, y (b) la circulación de este vórtice debe ajustarse de tal manera que se satisfaga la condición de no-penetración en un único punto del sólido ubicado a una distancia de tres cuartos de la cuerda, también medida desde el borde de ataque. El punto del sólido donde se impone la condición de no-penetración se denomina punto de control.

En la presente formulación, la placa es dividida en un número finito de segmentos o paneles. El tamaño de cada panel debe ser suficientemente pequeño de manera que el flujo dentro de él pueda aproximarse como flujo uniforme. Además, los cambios temporales deben ocurrir en una escala que sea “lenta” en comparación con el tiempo que le toma a una partícula de fluido recorrer la longitud de un panel. La disposición de los paneles en la placa plana puede verse en la Fig. 4. En la misma figura puede observarse, también, un panel típico y el modelo de vórtices discretos utilizado para modelar las estelas.

La velocidad en un punto de coordenadas $\underset{\sim}{x}_p = \left(x_p, y_p\right)$, asociada a un vórtice discreto con circulación Γ, ubicado en un punto con coordenadas $\underset{\sim}{x}_v = \left(x_v, y_v\right)$, está dada por:

$$\underset{\sim}{V}_p = u\left(\underset{\sim}{x}_p, t\right)\ \underset{\sim}{\hat{i}} + v\left(\underset{\sim}{x}_p, t\right)\ \underset{\sim}{\hat{j}} = \frac{\Gamma\left(t\right)}{2\pi}\ \frac{\underset{\sim}{x}_p - \underset{\sim}{x}_v}{\left|\underset{\sim}{x}_p - \underset{\sim}{x}_v\right|} \tag{7}$$

La condición de no-penetración que debe cumplirse en los puntos de control tiene la forma:

$$\left(\underset{\sim}{V}_p + \underset{\sim}{V}_\infty + \underset{\sim}{V}_w - \underset{\sim}{V}_s\right) \cdot \underset{\sim}{\hat{n}} = 0 \tag{8}$$

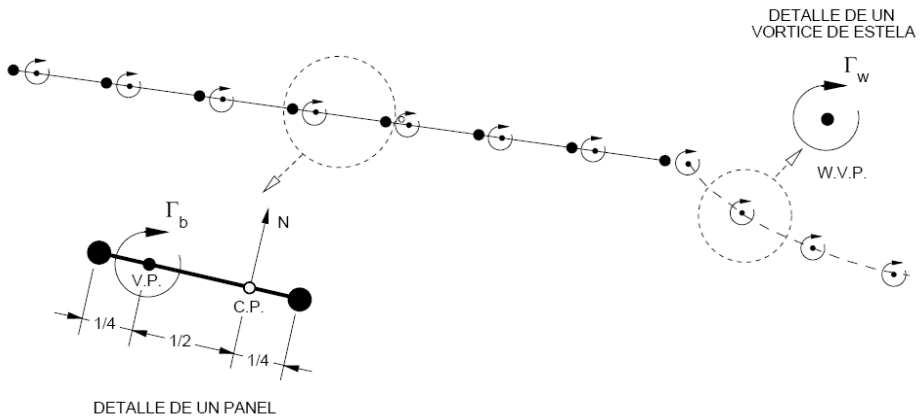

Fig. 4. Modelo de análisis aerodinámico basado en la red de vórtices no lineal e inestacionaria.

donde, $\underset{\sim}{V}_p + \underset{\sim}{V}_\infty + \underset{\sim}{V}_w$ representa la velocidad de una partícula de fluido próxima a una placa, asociada a: los vórtices adheridos a la placa, la corriente libre y los vórtices contenidos en la estela, respectivamente. Por otra parte, $\underset{\sim}{V}_s$ es la velocidad con que se mueve la superficie de la placa y $\underset{\sim}{\hat{n}}$ es el vector unitario normal a esta superficie. En los puntos de control de la placa que representa el ala se tiene:

$$\underset{\sim}{V}_\infty \cdot \underset{\sim}{\hat{n}} = \left|V_\infty\right| \cos\left(\alpha + \theta\right) \tag{9}$$

$$\underset{\sim}{V}_s \cdot \underset{\sim}{\hat{n}} = \dot{h}\cos\theta + \xi_i \dot{\theta} \tag{10}$$

$$\underset{\sim}{V}_w \cdot \underset{\sim}{\hat{n}} = \left(u_w\right)_i \sin\theta + \left(v_w\right)_i \cos\theta \tag{11}$$

donde, ξ_i es la posición del punto de control del panel *i* con respecto al sistema de coordenadas local ligado al ala con origen en el centro elástico; y $(u_w)_i$ y $(v_w)_i$ son las componentes, expresadas en el sistema de coordenadas globales, de la velocidad total de una partícula de fluido sobre el punto de control *i* inducida por la estela.

Las incógnitas de este problema son las circulaciones de los vórtices adheridos a la placa y pueden obtenerse a partir de la ecuación (8) como se indica a continuación:

$$\left(\underset{\sim}{V}_p \cdot \underset{\sim}{\hat{n}}\right)_i = \sum_{j=1}^{NN} A_{ij}\Gamma_j = \left(\underset{\sim}{V}_s - \underset{\sim}{V}_\infty - \underset{\sim}{V}_w\right)_i \cdot \underset{\sim}{\hat{n}}_i \tag{12}$$

donde los escalares A_{ij}, conocidos como coeficientes de influencia aerodinámica, representan la componente normal de la velocidad en el punto de control del panel *i*, asociada a un vórtice de circulación unitaria ($\Gamma = 1$) ubicado en el panel *j*. El límite superior del rango *j* de la sumatoria es NN = NP+1, donde NP representa el número de paneles utilizados en la discretización del ala.

Además de las ecuaciones provenientes de la condición de no-penetración sobre el ala, existe una ecuación adicional que garantiza la conservación de la vorticidad y permite definir la magnitud del vórtice de arranque en el borde de fuga del ala. Esta última ecuación es necesaria para satisfacer el requerimiento de Δp nulo en el borde de fuga (denominada habitualmente como condición de Kutta). En cada paso de tiempo, un nuevo vórtice de arranque junto al resto de los vórtices discretos contenidos en la estela, son convectados empleando la velocidad de la partículas de fluido ubicadas donde cada uno de estos vórtices. De esta manera, como se estableció previamente, el desarrollo de la estela durante la simulación es parte de la solución del problema.

La diferencia de presión entre las caras de cada panel se obtiene a partir de la versión no-estacionaria de la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\underset{\sim}{V}\cdot\underset{\sim}{V}}{2} + \frac{p}{\rho} = H\left(t\right) \tag{13}$$

donde ϕ es la función potencial de velocidades, *p* es la presión estática y ρ es la densidad. Lejos de la sección alar y su estela, las condiciones se asumen como estacionarias de tal manera que:

$$H\left(t\right) = \frac{V_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = cte \tag{14}$$

Siguiendo la metodología propuesta en [15] y [16], la diferencia del coeficiente de presión (ΔCp_i) entre las caras de un panel en su punto de control "i", puede calcularse como:

$$\Delta Cp_i = \frac{\Delta p_i}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = \frac{2}{V_\infty^2}\left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\Gamma_j\left(t\right) - \Gamma_j\left(t-\Delta t\right)}{\Delta t} + \frac{\Gamma_i\left(\underset{\sim}{V}_m - \underset{\sim}{V}_s\right)\cdot\underset{\sim}{\hat{t}}}{\Delta\xi_i}\right] \tag{15}$$

siendo $\underset{\sim}{V}_m = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{V}_p + \underset{\sim}{V}_\infty + \underset{\sim}{V}_w\right)$, y además:

$$\underset{\sim}{V}_s \cdot \hat{\underset{\sim}{t}} = -\dot{h}\sin\theta \tag{16}$$

Las fuerzas aerodinámicas generalizadas son calculadas aproximando las integrales, dadas en las ecuaciones (5) y (6), mediante sumas finitas y pueden ahora reescribirse como:

$$Q_h = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left(\sum_{i=1}^{NP}\Delta Cp_i\ \Delta\xi_i\right)\cos\theta \tag{17}$$

$$Q_\theta = \frac{1}{2}\rho V_\infty^2\left(\sum_{i=1}^{NP}\Delta Cp_i\ \Delta\xi_i\ \xi_i\right) \tag{18}$$

donde ξ_i representa el brazo de palanca para el momento realizado por la diferencia de presión ΔCp_i en los puntos de control *i* del ala.

3.3. Integración de las ecuaciones de movimiento del sistema dinámico no lineal

Antes de proceder con la integración numérica de las ecuaciones de movimiento, resulta conveniente introducir las siguientes variables adimensionales:

$$h = L_c\, h^*, \qquad \theta = \theta^*, \qquad \xi = L_c\, \xi^*, \qquad t = \frac{L_c}{V_\infty} t^* \tag{19}$$

donde ()* denota magnitudes adimensionales y L_c = 2b es la cuerda del ala (ver Fig. 2). Reemplazando estas magnitudes en las ecuaciones (4), se llega al siguiente sistema de ecuaciones adimensionalizadas y no lineal:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{S_\theta^*}{m^* L_c} \\ \dfrac{S_\theta^* L_c}{I_\theta^*} & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{h}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{K_h^* L_c^2}{m^* V_\infty^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{c_\theta K_\theta^* L_c^2}{I_\theta^* V_\infty^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\rho L_c^2}{2m^*}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{NP}\Delta C_{pi}\Delta\xi_i\right)\cos\theta \\ -\dfrac{\rho L_c^4}{2I_\theta^*}\displaystyle\sum_{i=1}^{NP}\Delta C_{pi}\Delta\xi_i\ \xi_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{S_T^*}{m^* L_c}\dot{\theta}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

y luego introduciendo un vector de la forma $\underset{\sim}{r} = \{h(t), \theta(t)\}^T$, las ecuaciones de movimiento no lineales pueden reescribirse:

$$\left[\bar{M}(\underset{\sim}{r})\right]\ddot{\underset{\sim}{r}} + \left[\bar{K}(\underset{\sim}{r})\right]\underset{\sim}{r} = \bar{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{r},\dot{\underset{\sim}{r}}) - \bar{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{r},\dot{\underset{\sim}{r}}) \tag{21}$$

siendo $\bar{M}$, $\bar{K}$, $\bar{q}$ y $\bar{b}$ la matriz de masa, la matriz de rigidez, el vector de cargas generalizadas y el vector de términos no lineales, respectivamente.

Introduciendo el vector de estado $\underset{\sim}{y} = \{\underset{\sim}{r}, \dot{\underset{\sim}{r}}\}^T = \{h, \theta, \dot{h}, \dot{\theta}\}^T$, el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden (21) puede ser escrito como un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{bmatrix} 1_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & \left[\bar{M}(\underset{\sim}{r})\right] \end{bmatrix}\dot{\underset{\sim}{y}} = \begin{bmatrix} 0_{2\times2} & 1_{2\times2} \\ -\left[\bar{K}(\underset{\sim}{r})\right] & 0_{2\times2} \end{bmatrix}\underset{\sim}{y} + \begin{pmatrix} 0_{2\times1} \\ -\bar{\underset{\sim}{m}}(\theta) + \bar{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{r},\dot{\underset{\sim}{r}}) - \bar{\underset{\sim}{b}}(\underset{\sim}{r},\dot{\underset{\sim}{r}}) \end{pmatrix} \tag{22}$$

debe notarse que, cuando el sistema es no lineal en θ el coeficiente c_θ en la ecuación (20) se hace nulo y aparece un término $\bar{\underset{\sim}{m}}(\theta)$ que se define como:

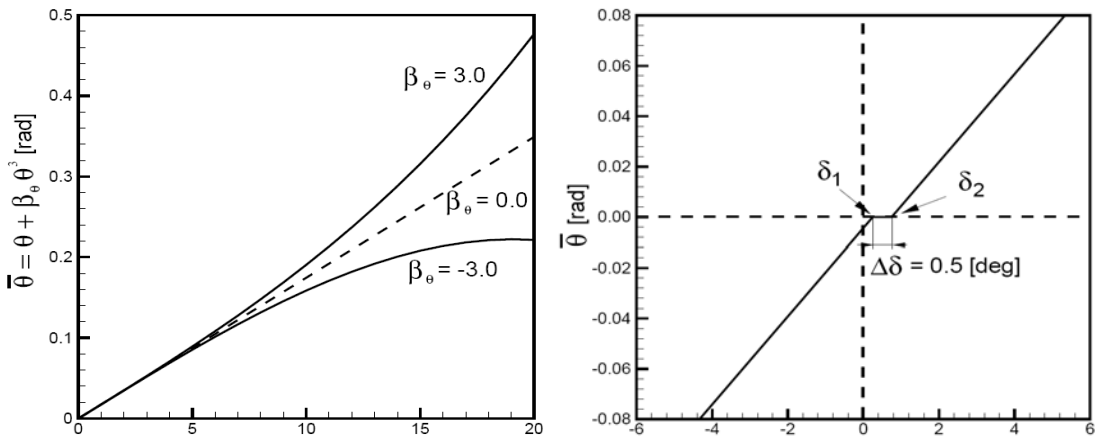

Fig. 5. Comportamiento del resorte en la rigidez torsional del modelo aeroelástico. (a) Cúbico. (b) Freeplay.

$$\bar{\underset{\sim}{m}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{K_\theta^* L_c^2}{I_\theta^* V_\infty^2} f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{K}_\theta \bar{\theta} \end{pmatrix} \tag{23}$$

donde $f(\theta)$ es la función que define el comportamiento del resorte cuando el mismo es no lineal. El sistema de ecuaciones (22), puede reescribirse de manera simple:

$$[A]\,\dot{\underset{\sim}{y}} = [B]\,\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{c} \tag{24}$$

Esta ecuación se integra numéricamente en el dominio del tiempo mediante un esquema predictor-corrector de cuarto orden. En cada paso de integración, la estela se convecta a su nueva posición garantizando que las partículas de fluido transportan la vorticidad, y al mismo tiempo la placa se mueve a una nueva posición según las ecuaciones de movimiento. Los detalles del método de integración pueden encontrase en [16].

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

El objetivo de este apartado es determinar el comportamiento del modelo aeroelástico no lineal, frente a dos casos: (a) una ley cúbica en la rigidez asociada al grado de libertad de torsión, y (b) una ley bilineal con juego (*freeplay*), tal como se observa en la Fig. 5. En este trabajo el comportamiento de la rigidez flexional se mantiene lineal.

Los parámetros de análisis han sido elegidos para obtener un problema equivalente al estudiado en [18], y estos son C = 0.254 m, a = -0.5 C, ω_h = 7.7229 1/s, ω_θ = 38.6147 1/s, m = 6.211 kg/m, I_w = 0.0250 kg-m^2/m y S_w = 0.1972 kg-m/m. Para el caso no lineal cúbico se ha adoptado un coeficiente β_θ = 3.0, lo cual implica que el resorte muestra endurecimiento con la deformación (β_θ es positivo) aumentando su rigidez en la medida que el ángulo θ se hace mayor. En el caso de *freeplay* se ha adoptado un juego $\Delta\delta$ = 0.5 grados (iniciando en δ_1 = 0.25 grados hasta un δ_2 = 0.75 grados, lo cual se pone de manifiesto en la Fig. 5. Se ha resuelto el sistema dinámico lineal con los parámetros indicados –para lo cual se desprecian los términos no lineales en la ecuación (22)– a fin de obtener la velocidad de *flutter* del sistema lineal la cual es V_f = 31.8 m/s.

4.1. Resultados del caso (a) – Cúbico

En este caso la función de respuesta del resorte obedece a la siguiente ley:

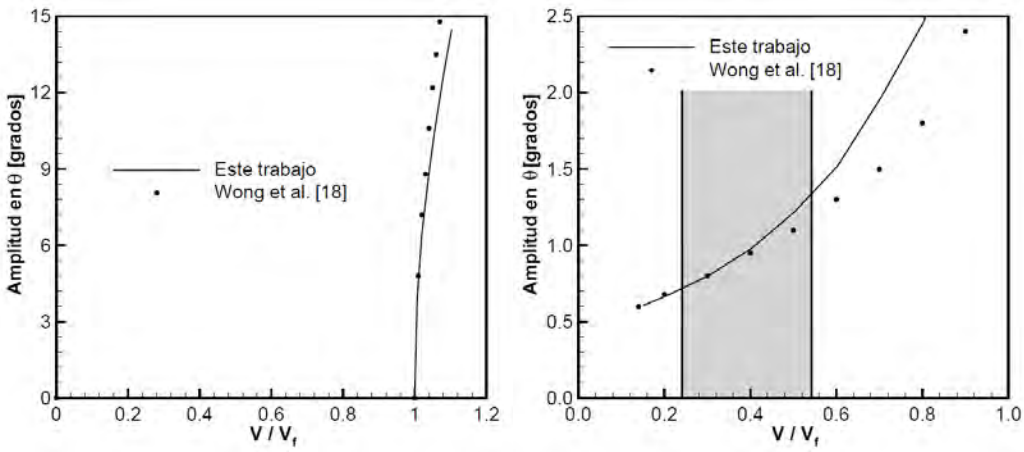

Fig. 6. Respuesta del sistema dinámico completamente no lineal. (a) Cúbico. (b) Freeplay.

$$\bar{m}(\theta) = \bar{K}_\theta \bar{\theta} = \bar{K}_\theta \left(\theta + 3\theta^3 \right) \tag{25}$$

la cual responde a la gráfica presentada en la Fig. 5-a. La Fig. 6-a muestra el diagrama de bifurcaciones obtenido en este trabajo, para el grado de libertad de giro θ(t), y se lo compara con los resultados presentados en [18]. En abscisas se tienen velocidades adimensionalizadas respecto de la velocidad de *flutter* lineal (V/V_f) y en ordenadas la amplitud de los LCOs desarrollados. Existe una buena concordancia en los resultados presentados en [18], en particular a velocidades cercanas a las de *flutter*. En la medida que la velocidad aumenta, y en consecuencia lo hace también la amplitud de los LCOs, surgen discrepancias provenientes de los diferentes modelos aerodinámicos empleados en [18] y en este trabajo.

La Fig. 7 muestra el comportamiento de los grados de libertad *h*(t) y θ(t) para tres diferentes velocidades correspondientes a una corrida de 400 seg (32000 pasos de integración), para una velocidad de la corriente libre de: (*a*-*d*) 30.5 m/s, (*e*-*h*) 32.5 m/s, y (*i*-*l*) 34.5 m/s. A velocidades por debajo de la velocidad de *flutter* (V/V_f = 0.98) el comportamiento del sistema decae hasta la posición de equilibrio (ver las Fig. 7-a a Fig. 7-d), mientras que a velocidades superiores a las de *flutter* (V/V_f = 1.04 y V/V_f = 1.10) se puede observar la generación de LCOs cada vez mayores (Fig. 7-e a Fig. 7-l). Además de la evolución temporal del movimiento en cada grado de libertad, se muestran también los diagramas de fase para mostrar la evolución del movimiento y la formación de los LCOs. Los diagramas de fase muestran que a medida que se aumenta la velocidad los LCOs de desarrollan más rápidamente.

4.2. Resultados de caso (b) – *Freeplay*

Para este caso, la respuesta del resorte de torsión está dada por una función bi-lineal del tipo:

$$\bar{m}(\theta) = \bar{K}_\theta \bar{\theta} = \begin{cases} 0 \rightarrow \delta_1 \le \theta \le \delta_2 \\ \bar{K}_\theta \left(\theta - \delta_i \right) \rightarrow \theta \le \delta_1 \ \text{ó} \ \ \theta \ge \delta_2 \end{cases} \tag{26}$$

Esta ley de comportamiento bilineal se muestra esquemáticamente en la Fig. 5-b. Los resultados obtenidos con ley de variación (26), son los presentados en la Fig. 6-b. Al igual que en el caso anterior, se han graficado amplitud de las oscilaciones en torsión respecto de la velocidad adimensionalizada. En este caso existen discrepancias a velocidades cercanas a *flutter* cuando se lo compara con [18]. Sin embargo dada la naturaleza altamente no lineal de este caso, y el modelo aerodinámico no lineal e inestacionario empleado en este trabajo, estas diferencias son previsibles.

En la Fig. 8 se ha graficado la evolución temporal de *h*(t) y θ(t) correspondientes a una corrida de 400 seg (32000 pasos de integración), para una velocidad de la corriente libre de: (a-d) 6.4 m/s, (e-h) 12.8 m/s, y (i-l) 25.6 m/s. A velocidades muy bajas, por debajo de los 4 m/s (V/V_f = 0.12), la respuesta del sistema decae a la posición de equilibrio original. Luego entre los 4 m/s (V/V_f = 0.12) y los 31.8 m/s (V/V_f = 1.0),

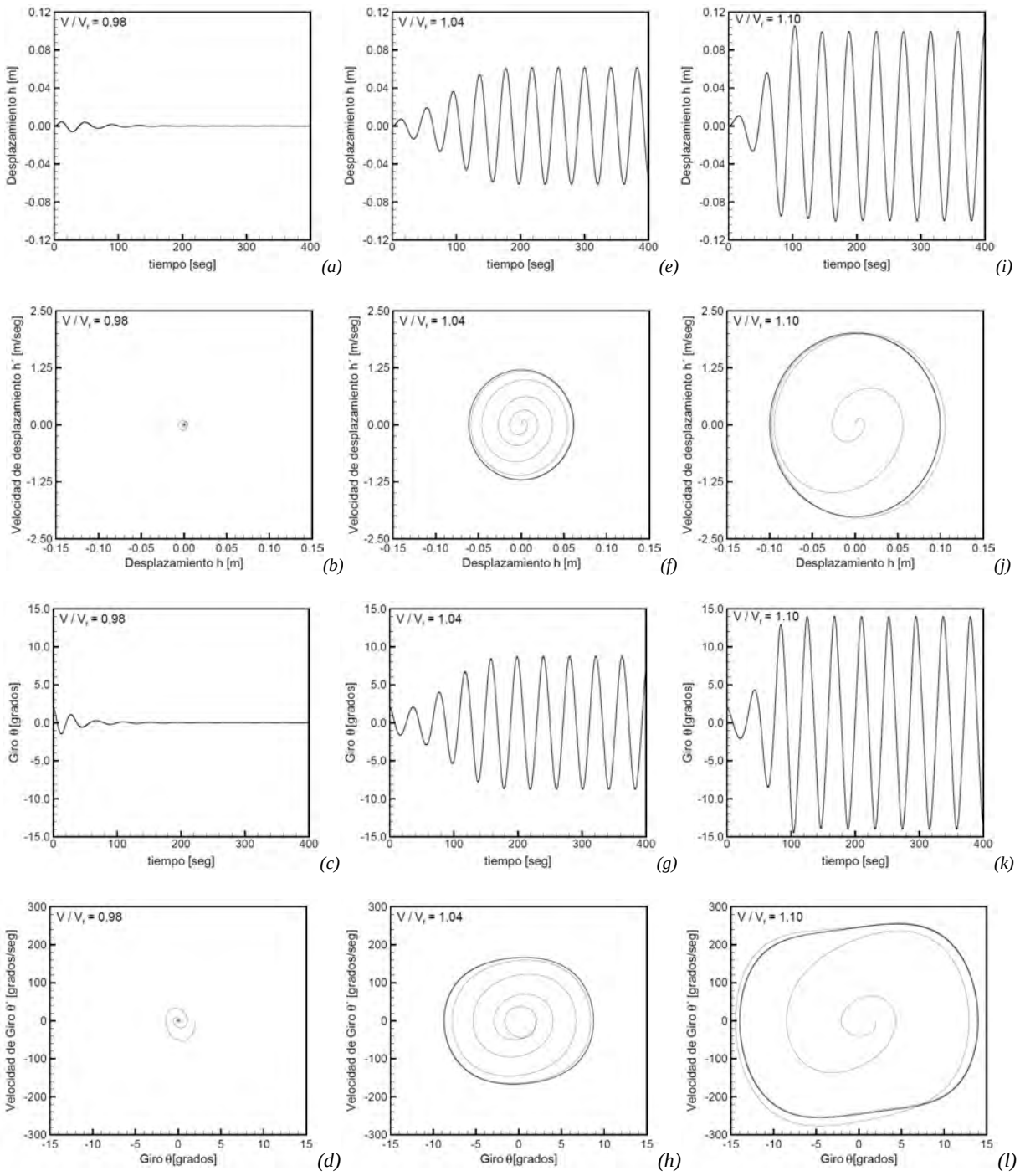

Fig. 7. Comportamiento del sistema aeroelástico para el caso de respuesta cúbica en el resorte de torsión.

dependiendo de la magnitud de la perturbación, el sistema puede decaer hacia la posición de equilibrio original o bien a una nueva posición de equilibrio con formación de un LCO. A velocidades superiores a los 31.8 m/s la única solución posible es la formación de un LCO en una nueva posición de equilibrio distinta a la original.

Los resultados presentados en la Fig. 8, muestran la aparición de estados con LCOs armónicos puros para las velocidades de 6.4 m/s (V/V_f = 0.2) y 25.6 m/s (V/V_f = 0.8). Sin embargo en la zona sombreada que se observa en la Fig. 6-b, alternan estados con: aparición de LCOs armónicos complejos (usualmente llamados bi-armónicos en los trabajos de otros investigadores), y ausencia de LCOs en donde además el

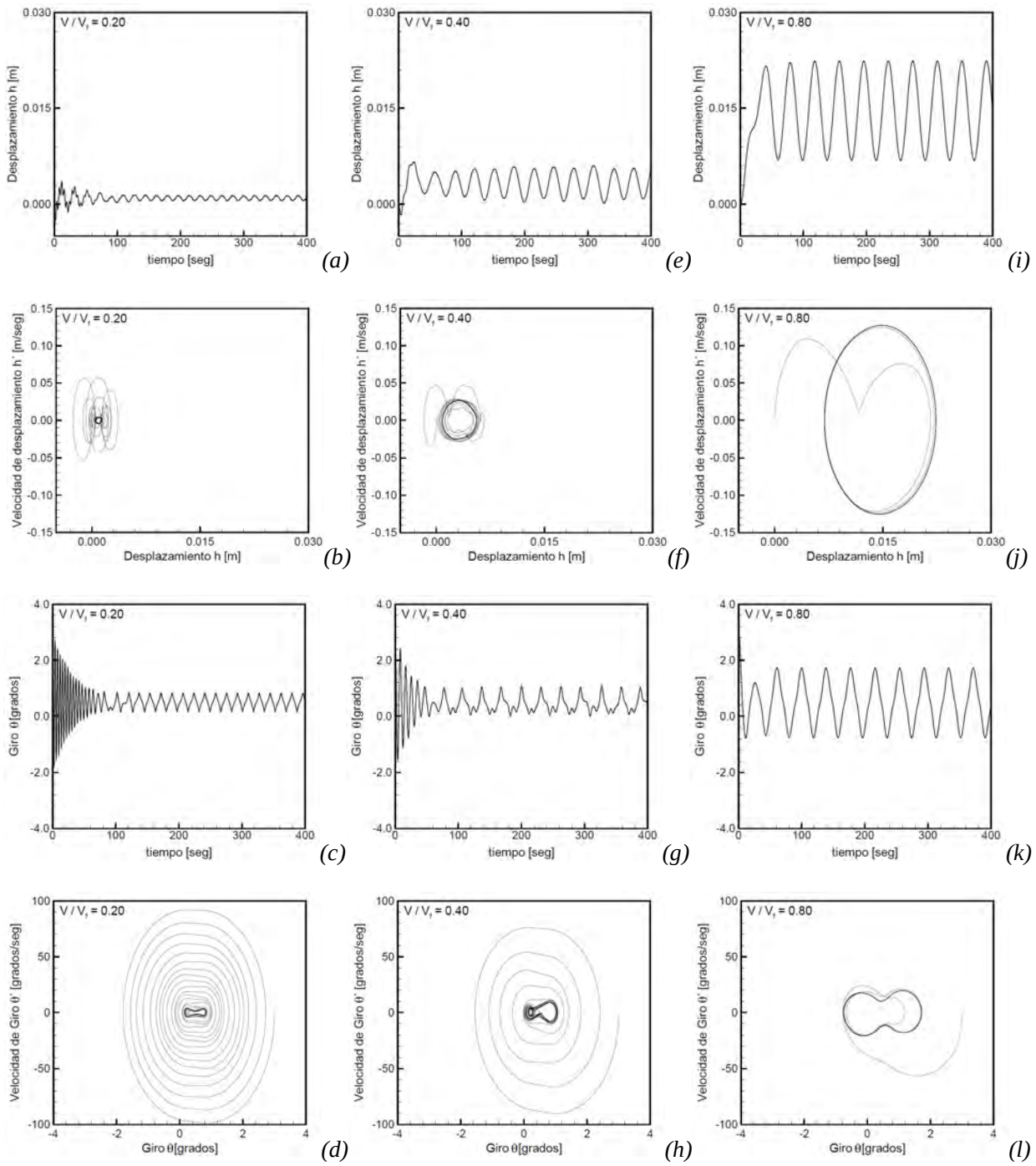

Fig. 8. Comportamiento del sistema aeroelástico para el caso de freeplay en el resorte de torsión.

sistema muestra un comportamiento caótico. La Fig. 8, en sus ítems e-h, correspondientes a una velocidad de 12.8 m/s (V/V_f = 0.4) muestra un caso donde aparentemente se desarrolla una LCO, sin embargo si se observa con detenimiento se puede ver que las oscilaciones no dejan de crecer, claramente no logran desarrollarse LCOs. Los diagramas de fase presentados en la Fig. 8-f y Fig. 8-h muestran claramente la ausencia de LCOs, se observa una zona donde el sistema se encuentra oscilando, pero no está bien definido como en las otras velocidades para las cuales se han presentado resultados.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el análisis de un problema aeroelástico altamente no lineal que se manifiesta regularmente en las aeronaves modernas. Además se ha implementado un modelo de análisis numérico que permite estudiar estos problemas de una manera eficiente y precisa. El modelo desarrollado ha demostrado ser muy efectivo para el estudio de problemas altamente no lineales, e inclusive en la predicción comportamiento caótico del sistema dinámico analizado.

Comparativamente con el modelo empleado en [18], el modelo propuesto en este trabajo muestra la enorme ventaja de que no es necesario disminuir el paso de tiempo (en la integración de las ecuaciones del sistema dinámico) para captar correctamente los cambios abruptos en la rigidez de los resortes. Estos cambios abruptos en la rigidez, son los que precisamente suceden en las superficies de control cuando presentan el fenómeno denominado "juego" o *freeplay*.

Además, el hecho de utilizar un modelo aerodinámico inestacionario y no lineal acoplado a un sistema estructural completamente no lineal, permite definir de manera más precisa el acoplamiento aerodinámico-estructural del sistema dinámico. Esto trae aparejado una mejor correlación entre el modelo matemático y los resultados experimentales.

A partir de estos resultados se pretende ahora estudiar un caso de tres grados de libertad, el cual está asociado al problema de las aeronaves modernas que presentan juego en las superficies de comando, en particular en los timones de dirección y los elevadores. Para este nuevo problema existen soluciones experimentales realizadas en túnel de viento, y es lo que se empleará para la verificación completa del modelo matemático presentado en este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Lee, B., Price, S., Wong, Y., "Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: bifurcation and chaos", *Progress in Aerospace Sciences*, **35**, 205-334 (1999)

[2] Dowell, E.H., Tang, D., "Nonlinear aeroelasticity and unsteady aerodynamics", *AIAA Journal*, **40**(9), 1697-1707 (2002)

[3] Dowell, E.H., Edwards, J., Stragnac, T., "Nonlinear aeroelasticity", *Journal of Aircraft*, **40**(5), 857-874 (2003)

[4] Conner, M.D., Tang, D.M., Dowell, E.H., Virgin, L.N., "Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay: One numerical and experimental study", *Journal of Fluids and Structures*, **11**(1), 89-109 (1997)

[5] Conner, M., *Nonlinear aeroelasticity of an Airfoil Section with Control Surface Freeplay*. Ph.D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering and Material Science, Duke Univ., Durham, NC (1996)

[6] Tang, D.M., Conner, C.D., Dowell, E.H., "Reduced-order aerodynamic model and its application to a nonlinear aeroelastic system", *Journal of Aircraft*, **35**(2), 332-338 (1998)

[7] Tang, D.M., Dowell, E.H., Virgin, L.N., "Limit cycle behavior of an airfoil with a control surface", *Journal of Fluids and Structures*, **12**(7), 839-858 (1998)

[8] Tang, D.M., Kholodar, D., Dowell, E.H., "Nonlinear response of airfoil section with control surface freeplay to gust loads", *AIAA Journal*, **38**(9), 1543-1557 (2000)

[9] Liu, L., Dowell, E.H., "Harmonic balance approach for an airfoil with a freeplay control surface", *AIAA Journal*, **43**(4), 802-815 (2005)

[10] Gopinath, A.K., Berany, P.S.. Jameson, A., "Comparative Analysis of Computational Methods for Limit-Cycle Oscillations", 47th AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Newport, R.I. (2006)

[11] Dowell, E.H., Hal, K.C., Thomas, J.P., Florea, R., Epureneau, B.I., Heeg, J., "Reduced order models in unsteady aerodynamics". *AIAA Journal*, **26**(1), 622-637 (1999)

[12] Epureanu, B.I., Dowell, E.H., "Compact methodology for computing limit-cycle oscillations in aeroelasticity", *Journal of Aircraft*, **40**(5), 955-963 (2003)

[13] Beran, P., Lucia, D., Pettit, C., "Reduced-order modeling of limit-cycle oscillation for aeroelastic systems", *Journal of Fluids and Structures*, **19**, 575-590 (2004)

[14] Jones, D., Roberts, I., Gaitonde, A., "Identification of limit cycles for piecewise nonlinear aeroelastic systems", *Journal of Fluids and Structures*, **23**,1012-1028 (2007)

[15] Preidikman, S., Mook, D.T., "A new method for actively suppressing flutter of suspension bridges", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **69**(71), 955-974 (1997)

[16] Preidikman, S., *Numerical Simulations of Interactions among Aerodynamics, Structural Dynamics and Control Systems*. Ph.D. Thesis, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia (1998)

[17] Castelló, W.B., Preidikman, S., Massa, J.C., "Simulaciones numéricas de buffeting en puentes arriostrados causado por flujos vorticosos 2-D", *Mecánica Computacional*, **22**,718-732 (2003)

[18] Wong, Y.S., Liu, L., Lee, B.H.K., *Frequency and amplitude prediction of limit cycle oscillations of an airfoil containing concentrated structural nonlinearities*. 42nd AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Seattle, W.A. (2001)

NON-LINEAR NUMERICAL SIMULATION OF A TYPICAL WING SECTION WITH SELF-EXCITED OSCILLATIONS

Abstract – The response of flexible structures to aerodynamic loads is generally of non-linear nature. The characteristics of the aeroelastic behavior depend on the properties of structural-and-aerodynamic subsystems, and also depend on the way in which these two subsystems are combined. The nonlinear response of a wing section with two degrees of freedom has been widely studied. The importance of aeroelastic analysis relies on its ability to predict the response of some critical aircraft components. For example, stiffness loss in the control surfaces causes unacceptable vibration levels in the aircraft structure. These vibrations must be avoided because the transition between undesirable vibrations and flutter is generally diffuse. It is well known, that damage to the control surface caused by flutter may lead to the loss of the aircraft. In this paper we study numerically the dynamics of a nonlinear aeroelastic system with cubic-nonlinear and freeplay in the torsion stiffness of the wing section. This reduced order model uses the well-known typical-section hypothesis. The aerodynamic loads are obtained through a nonlinear bidimensional unsteady vortex lattice method. The integration of the governing equations of the coupled aeroelastic system is carried out numerically, simultaneously and interactively in the time domain. Using the proposed model we can determine how a change in torsion stiffness influences the amplitude and frequency of self-excited vibrations, the flutter speed of the aeroelastic system, and the occurrence of limit cycles. Results from the numerical simulations show a significant correlation with those reported by other authors, in addition, the mathematical model presented here proved to be more efficient and accurate than other models, particularly in highly nonlinear cases.

Keywords – Self-excited oscillations, Nonlinear aeroelasticity, Structural dynamics.