

DOA Estimation Using Random Linear Arrays Via Compressive Sensing

S. Pazos, *Member, IEEE*, M. Hurtado, *Member, IEEE* and C. H. Muravchik, *Senior Member, IEEE*

Abstract— In this article we analyze the performance of nonuniform linear arrays for Direction of Arrival (DOA) estimation. We use different classes of sparse recovery algorithms to estimate the direction of arrival of the signal sources and its information. We focus on three array configurations, a structured or virtual array with prefixed potential locations for the elements, a random array and a random array with a restriction on the minimum distance between elements. We provide simulations of the performance of each configuration under these algorithms for different values of aperture, and number of signal sources.

Keywords— DOA estimation, Random Linear Arrays, Sparse models, Compressive Sensing.

I. INTRODUCCIÓN

UN arreglo de antenas consiste en un número de sensores ubicados en una determinada posición relativa cuyo fin es el de adquirir muestras espacio temporales del campo electromagnético circundante. En contraste con una sola antena, el arreglo provee información adicional para mejorar la relación señal a ruido, resolver diferentes señales y cancelar interferencias [1]. Una importante aplicación de los arreglos de sensores es la caracterización del campo electromagnético incidente con el fin de determinar el número de fuentes, sus ubicaciones y las señales transmitidas [2]. La complejidad y el costo de un arreglo de sensores aumenta con la cantidad de sus elementos. Por lo tanto, un buen diseño debe considerar en maximizar el desempeño del arreglo sin incrementar el número de sensores.

Una configuración común para un arreglo de sensores es el arreglo lineal uniforme, donde la distancia inter-elemento es constante. Para satisfacer la condición de muestreo de Nyquist, la distancia máxima entre elementos no debe ser mayor a media longitud de onda de la portadora λ . Esto se traduce en una apertura máxima del arreglo para un número de sensores fijo, que limita su capacidad de localización y resolución de fuentes de señal. Para alcanzar mayores aperturas y mejor resoluciones, se puede utilizar un arreglo no uniforme, donde la distancia inter-elemento es variable. Una

posible estrategia para el diseño del arreglo no uniforme es distribuir los sensores de forma aleatoria. Este problema fue analizado desde un punto de vista probabilístico para determinar diferentes propiedades del arreglo como ser niveles de lóbulos laterales, ancho de haz, y ganancia [3]. Recientemente se propuso la aplicación de modelos raros y técnicas de *compressive sensing* para el estudio de arreglos aleatorios [4,5] y para el diseño de arreglos no uniformes [6]. Este problema también está relacionado con la estimación espectral a partir de datos muestreados no uniformemente [7].

El objetivo de los modelos raros es representar una señal como una combinación lineal de funciones básicas llamadas átomos, correspondientes a un diccionario [8]. En el caso específico de arreglos de sensores, este diccionario puede estar dado por la respuesta del arreglo para cada posible ángulo de arribo [9]. Asumiendo que existen pocas fuentes de señal, la salida del arreglo posee una representación rara. La teoría de *compressive sensing* afirma que, bajo estas condiciones, el número de sensores y datos necesarios para resolver el problema inverso puede ser reducido significativamente sin afectar el desempeño del sistema [10]. Estas técnicas ya han sido usadas en diferentes áreas de procesamiento de señal, incluyendo procesamiento de imágenes, bioingeniería, comunicaciones y sensado remoto.

En este artículo se presentan tres configuraciones de arreglos lineales de sensores. Se analiza su desempeño comparándolos con un arreglo ULA con el mismo número de sensores y apertura. Se evalúa la capacidad de estos arreglos para reconstruir una señal rara aplicando diferentes técnicas de *compressive sensing*. Mediante ejemplos numéricos se muestra que la capacidad de los arreglos aleatorios mejora si se agrega una restricción mínima a la distancia entre sensores. El artículo se organiza como sigue. En la siguiente sección se presenta el modelo raro para arreglos de sensores. En la Sección III se definen las diferentes configuraciones de arreglos bajo estudio. Se analizan los resultados de simulaciones comparando estas configuraciones en la Sección IV. Finalmente, se concluye y se discuten futuros trabajos en la Sección V.

II. MODELO

Se considera un arreglo lineal compuesto por N sensores y s señales incidentes de banda angosta provenientes de los ángulos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$. La salida del arreglo es

$$\mathbf{y} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{b} + \mathbf{w}, \quad (1)$$

donde \mathbf{y} es el vector de mediciones de tamaño N , $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{v}(\theta_1), \mathbf{v}(\theta_2), \dots, \mathbf{v}(\theta_s)]$ es la matriz cuyas columnas corresponden a cada una de los vectores variedad del arreglo $\mathbf{v}(\theta_i)$ de tamaño N para la dirección de arribo θ_i , \mathbf{b} es un

Este trabajo fue financiado a través de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) PICT 2011-11-0909, la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) 11-I-166, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC-pBA).

S. Pazos, LEICI – Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI-IIECPS), UNLP, Arg. y a CONICET, Arg., spazos@ieee.org

M. Hurtado, LEICI – Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI-IIECPS), UNLP, Arg. y a CONICET, Arg., martin.hurtado@ing.unlp.edu.ar

C. H. Muravchik, pertenece a LEICI-IIECPS, UNLP y a CIC-PBA, Arg., carlosm@ing.unlp.edu.ar

vector determinístico desconocido de tamaño s que representa las muestras de la envolvente compleja de las señales transmitidas, y $\mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ corresponde al ruido y errores de modelado. La estructura del vector variedad del arreglo para un ángulo θ está dada por

$$\mathbf{v}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos(\theta)} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_2 \cos(\theta)} \\ \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_N \cos(\theta)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde x_1, x_2, \dots, x_N son las coordenadas de ubicación física de los elementos del arreglo, y λ es la longitud de onda de la señal incidente.

Con el fin de generar una representación rala de las mediciones anteriores, se discretiza el espacio de direcciones de arriba en M ángulos. Usualmente se tiene que $M > N > s$, resultando en una matriz \mathbf{V} de tamaño $N \times M$ cuyas columnas son los átomos del diccionario

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos(\theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_1 \cos(\theta_M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_N \cos(\theta_1)} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}x_N \cos(\theta_M)} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Luego, el vector \mathbf{b} de tamaño M se convierte en ralo con s componentes distintas de cero, iguales al número de fuentes.

Una generalización de este problema aparece cuando se varios vectores de mediciones o instantáneas están disponibles. Este nuevo problema se conoce como representación rala de múltiples vectores de medición (MMV). Luego, considerando una secuencia de D instantáneas, los datos de salida son

$$\mathbf{Y} = \mathbf{V}\mathbf{B} + \mathbf{W}, \quad (4)$$

donde las matrices \mathbf{Y} , \mathbf{B} , y \mathbf{W} se construyen utilizando los respectivos vectores de (1) como sus columnas. Asumiendo que las ubicaciones de las fuentes son constantes durante el tiempo de observación, la matriz \mathbf{B} tiene un número bajo de filas distintas de cero. El objetivo es estimar las columnas de \mathbf{B} con la condición de que existe un perfil de rareza común.

III. CONFIGURACIONES DE ARREGLOS

Para poder resolver el problema inverso se necesita conocer las ubicaciones x_1, x_2, \dots, x_N de los elementos del arreglo. En este capítulo presentamos tres posibles arreglos lineales no uniformes. Como línea base se considera el arreglo uniforme con una distancia constante inter elemento d y una apertura $L = d(N - 1)$. Para una comparación justa, cada arreglo posee el primer elemento en $x_1 = 0$ y el último en $x_N = L$; así todas las configuraciones poseen la misma cantidad de sensores N y la misma apertura L .

La primera configuración, denominada arreglo estructurado, se basa en un ULA de K elementos con $K > N$. Las K ranuras están distribuidas uniformemente en la misma apertura L , resultando en una menor distancia inter-elemento $L/(K - 1)$. El arreglo no uniforme resulta de elegir

aleatoriamente N de las posibles K ubicaciones, sin repetición. La Fig. 1b muestra un ejemplo de esta configuración, donde los círculos blancos son las ranuras equiespaciadas y los círculos negros corresponden a los sensores separados irregularmente.

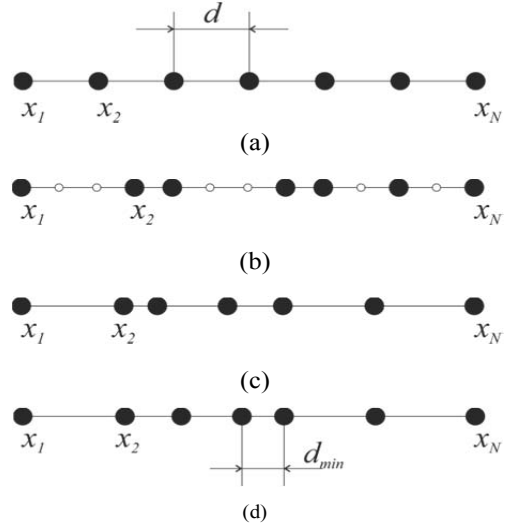


Figura 1. Diferentes configuraciones para un arreglo de N elementos con la misma apertura L . (a) Arreglo lineal uniforme, (b) arreglo estructurado, (c) arreglo aleatorio, (d) arreglo restringido.

En la segunda configuración, denominada arreglo aleatorio, la posición de los sensores se elige aleatoriamente según una distribución uniforme, $x_i \sim \mathcal{U}(0, L)$. Un ejemplo se ilustra en la Fig. 1c

Finalmente, se muestra en la Fig. 1d la tercera configuración analizada, denominada arreglo restringido. Los sensores también se ubican aleatoriamente en la apertura L . Sin embargo, existe una cota inferior d_{min} para la distancia mínima entre elementos.

IV. SIMULACIONES

En esta sección se discute el desempeño de los arreglos aleatorios propuestos. Para poder resolver el problema ralo inverso, se aplican algoritmos que fueron desarrollados bajo diferentes enfoques. Un procedimiento común para encontrar la solución rala de un problema lineal es utilizar la norma l_p con $p \in (0, 1]$ como una medida alternativa de la rareza, en lugar de la norma l_0 . Esta clase de algoritmos incluye Focal Undetermined System Solver (FOCUSS) [13], y otros. Otro enfoque implementa una búsqueda voraz que iterativamente aproxima el soporte de la solución, como ser Orthogonal Matching Pursuit (OMP) [14], y sus variantes [15]. Adicionalmente, existe otra clase de métodos que usan herramientas y modelos estadísticos, como Sparse Bayesian Learning (SBL) [16] y Enhanced Sparse Bayesian Learning (ESBL) [17]. Este artículo se enfoca en el problema de múltiples vectores de mediciones y datos complejos, por lo que se utilizan versiones modificadas de estos algoritmos para las simulaciones: MMV-Orthogonal Matching Pursuit (MOMP) [18], MMV-Focal Undetermined System Solver (MFOCUSS) [19], y ESBL.

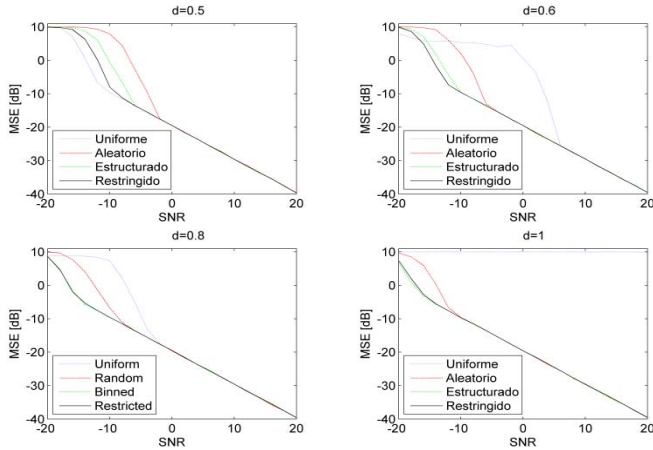


Figura 2. Desempeño de las distintas configuraciones del arreglo utilizando el algoritmo ESBL para valores de distancia interelemento d de 0.5, 0.6, 0.8 y 1.

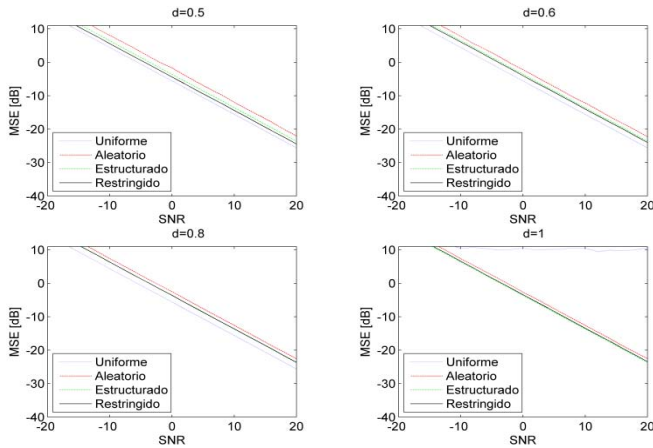


Figura 3. Desempeño de las distintas configuraciones del arreglo utilizando el algoritmo MOMP para valores de distancia interelemento d de 0.5, 0.6, 0.8 y 1.

En las simulaciones se utiliza un arreglo de $N = 30$ elementos, con $M = 30$ átomos en el diccionario, equivalente a 100 ángulos de arribo (DOA). Se procesan $D = 10$ instantáneas y el arreglo estructurado tiene $K = 60$ ranuras. La distancia interelemento d y la apertura L se normalizan con la longitud de onda λ . Se utiliza el error cuadrático medio como medida de desempeño

$$MSE = \frac{1}{MC} \sum_{i=1}^{MC} \|\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}_i\|_F^2, \quad (5)$$

donde $\hat{\mathbf{B}}$ representa la estimación \mathbf{B} y la variable MC se fija en 200 corridas de Monte Carlo. Para cada realización Monte Carlo, se generan aleatoriamente los arreglos y las ubicaciones de las fuentes de señal.

En primer lugar se calcula el desempeño de los arreglos en función de la relación señal a ruido (SNR) para diferentes valores de la distancia interelemento d . Se considera una sola fuente de señal, ($s = 1$) y una distancia mínima $d_{min} = 0.25$ para el arreglo restringido. La Fig. 2 muestra los resultados cuando se aplica el algoritmo ESBL. Para $d = 0.25$, la mejor configuración es el arreglo uniforme, ya que se satisface la

condición de Nyquist. Su desempeño empieza a degradarse cuando d aumenta, y está totalmente perdido para una distancia $d = 1$. Las Fig. 3 y 4 muestran similares resultados para los algoritmos MOMP y MFOCUSS, respectivamente, excepto que no hay una diferencia notable entre configuraciones para MFOCUSS. Se nota que el mejor desempeño está dado por el algoritmo ESBL, como se esperaba, ya que está basado en un marco bayesiano, el cual sobrepasa a los algoritmos voraces y basados en la norma l_1 [17,20].

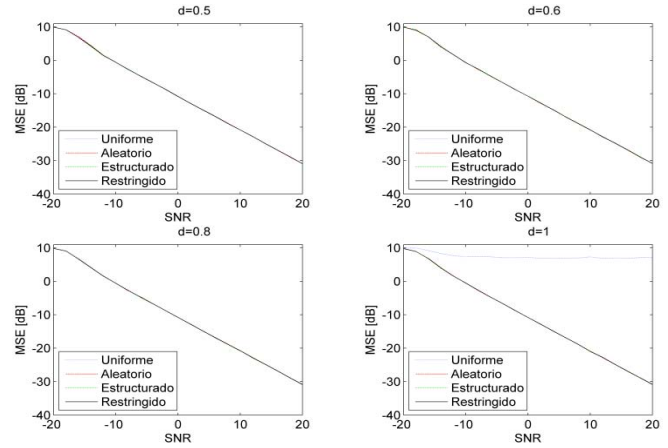


Figura 4. Desempeño de las distintas configuraciones del arreglo utilizando el algoritmo MFOCUSS para valores de distancia interelemento d de 0.5, 0.6, 0.8 y 1.

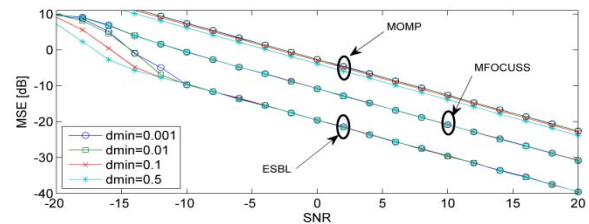


Figura 5. MSE para diferentes valores de distancia mínima interelementos usando el arreglo restringido y los algoritmos ESBL, MOMP and MFOCUSS.

Como la configuración del arreglo restringido es la más interesante basada en las simulaciones previas, se fija el enfoque en sus parámetros. Se analiza el efecto de la distancia mínima interelemento d_{min} para una apertura fija de 29λ , equivalente a $d = 1$, y una única fuente de señal. La Fig. 5 muestra que la sensibilidad del desempeño con respecto a d_{min} es muy baja para MOMP y prácticamente inexistente para MFOCUSS. En el caso de ESBL, a medida que se decrece la restricción, el arreglo se hace cada vez más similar al arreglo aleatorio y su desempeño se ajusta al de éste. Por el otro lado, para valores de d_{min} mayores a 0.1 el desempeño permanece constante. No existen indicios de desempeño pobre cuando se decrece la distancia mínima interelemento por debajo de $d_{min} = \lambda/2$, como se sugiere en [4, 5] para satisfacer la condición de RIP.

En la Fig. 6 se muestra la degradación en el desempeño cuando se aumenta el número de fuentes de señal s (raleza de la señal) para una apertura fija $L = 29$, equivalente a $d = 1$, y con $d_{min} = 0.25$. La degradación es monótona y se espera un desempeño razonable aún para un alto número de fuentes de señal.

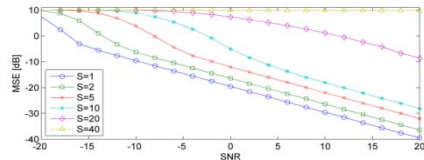


Figura 6. MSE para diferentes valores de raleza usando el arreglo restringido.

Se aprecia que el arreglo estructurado posee un comportamiento peculiar al incrementar la apertura. La mejora en su desempeño no es monótona. La Fig. 7 muestra este efecto para distintos valores de SNR. Al incrementar la distancia interelemento d , y consecuentemente su apertura, el MSE para cada SNR tiene saltos de desempeño pobre. Este efecto puede ser debido a la estructura impuesta por el arreglo estructurado. Desafortunadamente no se ha encontrado que siga un patrón notable. Este problema está actualmente en estudio.

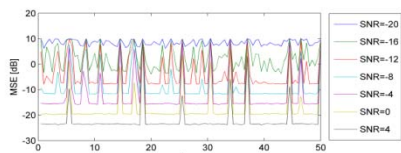


Figura 7. Ilustración del peculiar comportamiento del desempeño del arreglo estructurado al aumentar la apertura.

Finalmente, se analiza el desempeño de una realización específica del arreglo restringido. La Fig. 8 muestra dos ejemplos del arreglo para $d = 1$ y $d_{min} = 0.25$, y los histogramas para las distancias interelemento reales Δ . Se aprecia que ambas configuraciones involucran diferentes perfiles de distancias y las ubicaciones físicas de los elementos se concentran en diferentes regiones. Se esperaría que haya una diferente respuesta para señales que arriban de diferentes ángulos. Sin embargo, la Fig. 9 muestra que el desempeño de estas dos realizaciones es prácticamente el mismo para todo el espacio de ángulos de arribo. Luego, el arreglo restringido es robusto contra la eventual realización que defina las ubicaciones de sus elementos.

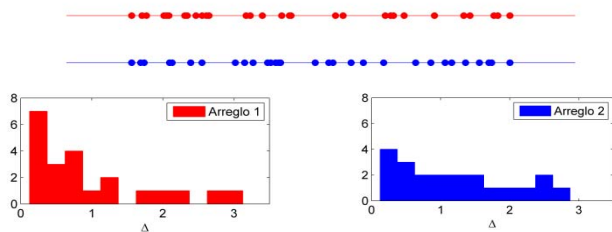


Figura 8. Dos realizaciones del arreglo restringido y sus histogramas de distancia interelemento Δ .

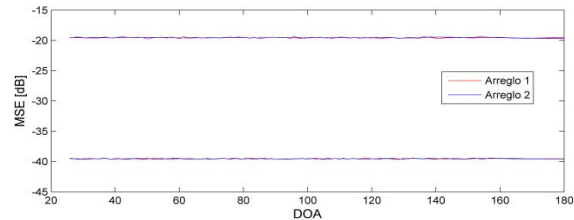


Figura 9. MSE para diferentes DOAs a $SNR = 0$ dB y $SNR = 20$ dB usando dos realizaciones del arreglo restringido.

V. DISCUSIÓN

En este artículo se analizó el desempeño de arreglos no uniformes aplicando diferentes clases de algoritmos de compressive sensing para la estimación de direcciones de arribo de fuentes de señal y su información transmitida. El enfoque se centra en tres configuraciones: un arreglo estructurado con ubicaciones de los elementos prefijadas, un arreglo aleatorio y un arreglo aleatorio con una restricción en la distancia mínima interelemento. Simulaciones del desempeño muestran que el arreglo restringido combinado con el algoritmo ESBL consiguen mejores resultados que las otras configuraciones. Adicionalmente se establece que, para un dado escenario, el desempeño del arreglo restringido es constante para diferentes realizaciones.

El trabajo discutido en este artículo no está concluido. Actualmente se está trabajando en la optimización de la restricción d_{min} para minimizar el MSE dado un espectro espacial de la energía de las fuentes. Adicionalmente se está investigando el comportamiento del arreglo estructurado. Se sospecha que está relacionado con la estructura de grilla impuesta sobre las ubicaciones de sus elementos.

REFERENCIAS

- [1] D. Johnson and D. Dudgeon, *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*, Prentice Hall, 1993.
- [2] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 13, no. 4, pp. 67–94, Jul. 1996.
- [3] Y. Lo, "A mathematical theory of antenna arrays with randomly spaced elements," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 12, no. 3, pp.257–268, May 1964.
- [4] L. Carin, "On the relationship between compressive sensing and random sensor arrays," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 51, no. 5, pp. 72–81, Oct. 2009.
- [5] L. Carin, D. Liu, and B. Guo, "Coherence, compressive sensing, and random sensor arrays," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 53, no. 4, pp. 28–39, Aug. 2011.
- [6] G. Oliveri and A. Massa, "Bayesian compressive sampling for pattern synthesis with maximally sparse non-uniform linear arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 59, no. 2, pp. 467–481, Feb 2011.
- [7] S. Bourguignon, H. Carfantan, and J. Idier, "A sparsity-based method for the estimation of spectral lines from irregularly sampled data," *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 1, no. 4, pp. 575–585, Dec 2007.
- [8] S. S. Chen, D. L. Donoho, Michael, and A. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 20, pp. 33–61, 1998.
- [9] D. Malioutov, M. Cetin, and A. Willsky, "A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 8, pp. 3010–3022, Aug. 2005.
- [10] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.
- [11] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency

- information,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489–509, Feb. 2006.
- [12] H. L. V. Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV, Optimum Array Processing*. John Wiley & Sons, 2002.
- [13] I. Gorodnitsky and B. Rao, “Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted minimum norm algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 600–616, Mar. 1997.
- [14] J. Tropp and A. Gilbert, “Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666, Dec 2007.
- [15] D. Needell and J. Tropp, “CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 26, no. 3, pp. 301–321, May 2009.
- [16] D. Wipf and B. Rao, “Sparse bayesian learning for basis selection,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 8, pp. 2153–2164, Aug 2004.
- [17] M. Hurtado, C. Muravchik, and A. Nehorai, “Enhanced sparse bayesian learning via statistical thresholding for signals in structured noise,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 61, no. 21, pp. 5430–5443, Nov 2013.
- [18] J. A. Tropp, A. C. Gilbert, and M. J. Strauss, “Algorithms for simultaneous sparse approximation. part I: Greedy pursuit,” *Signal Process.*, vol. 86, no. 3, pp. 572–588, Mar. 2006.
- [19] S. Cotter, B. Rao, K. Engan, and K. Kreutz-Delgado, “Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 7, pp. 2477–2488, Jul. 2005.
- [20] S. Ji, Y. Xue, and L. Carin, “Bayesian compressive sensing,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 6, pp. 2346–2356, June 2008.



Sebastian Pazos graduated as an Electrical Engineer from the Buenos Aires Institute of Technology (ITBA), Argentina, in 2001. He received the M.Sc. in Electrical Engineering (2006) and the M.Sc. in Mathematics (2008) from the University of Illinois at Urbana-Champaign, IL. He is currently pursuing a Ph.D. in Electrical Engineering at National University of La Plata. He is a Professor at the Department of Basic Science of the National University of La Plata and a member of its Industrial Electronics, Control and Instrumentation Laboratory (LEICI). He is the recipient of a Fulbright scholarship. His research interests are in the area of statistical and array signal processing applied to radar.



Martín Hurtado (M'11) received the B.Eng. and M.Sc. degrees in electrical engineering from the National University of La Plata, Argentina, in 1996 and 2001, respectively. He received his Ph.D. degree in electrical engineering from Washington University in St. Louis in 2007. Currently, he is a research associate of the National Council of Scientific and Technical Research of Argentina and an adjunct professor in the Department of Electrical Engineering at National University of La Plata. His research interests are in the area of statistical signal processing, detection and estimation theory, and their applications in sensor arrays, communications, and remote sensing systems.



Carlos H. Muravchik (S'81-M'83-SM'99) graduated as an Electronics Engineer from the National University of La Plata, Argentina, in 1973. He received the M.Sc. in Statistics (1983) and the M.Sc. (1980) and Ph.D. (1983) degrees in Electrical Engineering, from Stanford University, Stanford, CA. He is a Professor at the Department of the Electrical Engineering of the National University of La Plata and chairman of its Industrial Electronics, Control and Instrumentation Laboratory (LEICI). He is also a member of the Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Buenos Aires. He was a Visiting Professor to Yale University in 1983 and 1994, to the University of Illinois at Chicago in 1996, 1997, 1999 and 2003 and to Washington University in St Louis in 2006 and 2010. Since 1999 he is a member of the Advisory Board of the journal *Latin American Applied Research* and was an Associate Editor of the *IEEE Transactions on Signal Processing* (2003-2006). His research interests are in the area of statistical and array signal processing with biomedical, communications and control applications, and in nonlinear control systems.