

# Image Classification by Means of CEM Algorithm Based on a GARCH-2D Data Model

J. P. Pascual, J. I. F. Michelli, N. von Ellenrieder, *Member, IEEE*, M. Hurtado, *Member, IEEE*, J. Areta and C. H. Muravchik, *Senior Member, IEEE*

**Abstract**— The aim of synthetic aperture radar (SAR) classification is to assign each pixel to a class according to a feature of the illuminated area. In this work, a classification method suitable for SAR images is presented through the maximum a posteriori (MAP) criteria by means of the expectation-maximization (EM) algorithm based on a mixture of GARCH-2D processes data model. This model assumes that the data probability density function (pdf) is a combination of a finite number of pdf's of GARCH-2D processes, that represent the pixel classes and whose parameters are estimated iteratively by means of the EM algorithm. Once the parameter estimation is performed, the a-posteriori probability of each pixel belonging to each class is computed and the classification is performed through the MAP criteria. Based on this model, the expressions for estimation and classification procedures are derived. Finally, the method performance is verified through a numeric example for a particular case and a comparison is performed between this approach and a variant of the classification algorithm based on a Gaussian mixture model for the data pdf.

**Keywords**— Image classification, CEM, GARCH-2D process, Synthetic Aperture Radar.

## I. INTRODUCCIÓN

EN aplicaciones para radares de apertura sintética (SAR), suelen ser de interés la detección y reconocimiento de objetos de manera automática [1] y el estudio de superficies [2]. En el primer caso la clasificación del clutter en distintas categorías es importante y juega un papel clave en el análisis posterior para la detección y reconocimiento de objetivos. Antes de proponer un método de clasificación se debe elegir un modelo estadístico adecuado para el problema. Existen diferentes modelos para las imágenes SAR, algunos basados

en principios físicos y otros basados en enfoques matemáticos o que surgen a partir del análisis de mediciones. Un modelo que combina ambos enfoques es el modelo de clutter multiplicativo [3]. En este caso los datos son modelados como el producto de dos variables aleatorias. La primera se denomina *speckle* y surge de la contribución de numerosos reflectores aleatorios dentro de una celda de resolución. La otra se denomina *textura* y se puede interpretar como las fluctuaciones de la sección transversal de radar (*radar cross section*). En general, el *speckle* se modela mediante una distribución Gaussiana, mientras que la *textura* es modelada utilizando diversas distribuciones [4] o de manera más general como la contribución de una mezcla de distribuciones [3].

En este trabajo se propone utilizar un modelo de mezcla de procesos GARCH-2D para los datos SAR. Los procesos aleatorios representados a través de series temporales que presentan heteroscedasticidad condicional autorregresiva (ARCH) fueron propuestos por Engle [5] y luego generalizados por Bollerslev [6]. Se caracterizan por ser condicionalmente Gaussianos, con varianza condicional variante en el tiempo como función de los valores pasados del proceso al cuadrado. Posteriormente, se extendió el modelo GARCH-1D a dos dimensiones [7]. Análogamente al modelo multiplicativo, los procesos GARCH pueden interpretarse como el producto de un proceso Gaussiano multiplicado por un proceso aleatorio independiente, modelado como una serie temporal autorregresiva, cuya función densidad de probabilidad (fdp) no posee una expresión explícita. La motivación para utilizar la mezcla de procesos GARCH-2D en el modelado de datos SAR surge de que las fdp's de estos procesos presentan colas pesadas, precisamente una de las propiedades principales buscadas en el modelado de este tipo de datos [4].

Una vez definido el modelo estadístico que representa los datos, el problema de clasificación puede verse como un problema de inferencia estadística. En este caso se asume que cada píxel proviene de alguna de las fdp's de los procesos GARCH-2D que conforman la fdp total de los datos. Entonces la clasificación consiste en asignar a cada píxel a una clase, representada por alguna de estas densidades. Se asume que la imagen forma un conjunto incompleto de los datos, debido a que no se conoce cuál es la clase de que proviene cada píxel. El algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) es un método de estimación de parámetros alternativo al de máxima verosimilitud cuando se cuenta con un conjunto de datos incompletos [8]. Utilizando este método se propone estimar los parámetros de los diferentes procesos GARCH-2D que

---

Este trabajo fue financiado a través de la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) PICT 2011-11-0909, la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) 11-I-166, el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC-PBA).

J. P. Pascual, LEICI – Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI-IIECPS), UNLP, Arg. y a CONICET, Arg., [juanpablo.pascual@ing.unlp.edu.ar](mailto:juanpablo.pascual@ing.unlp.edu.ar)

J. I. F. Michelli, LEICI – Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI-IIECPS), UNLP, Arg. y a CONICET, Arg., [jfernandez@ing.unlp.edu.ar](mailto:jfernandez@ing.unlp.edu.ar)

N. von Ellenrieder, LEICI – Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI-IIECPS), UNLP, Arg. y a CONICET, Arg., [ellenrie@ing.unlp.edu.ar](mailto:ellenrie@ing.unlp.edu.ar)

M. Hurtado, LEICI – Instituto de Investigaciones en Electrónica, Control y Procesamiento de Señales (LEICI-IIECPS), UNLP, Arg. y a CONICET, Arg., [martin.hurtado@ing.unlp.edu.ar](mailto:martin.hurtado@ing.unlp.edu.ar)

J. Areta, Universidad Nacional de Río Negro, Arg. y a CONICET, [jareta@unrn.edu.ar](mailto:jareta@unrn.edu.ar)

C. H. Muravchik, LEICI-IIECPS, UNLP y a CIC-PBA, Arg., [carlosm@ing.unlp.edu.ar](mailto:carlosm@ing.unlp.edu.ar)

conforman las clases. Contar con estos estimados permite evaluar las probabilidades a posteriori de cada clase y clasificar los píxeles por medio del criterio de máxima probabilidad a posteriori (MAP). Al algoritmo EM combinado con el paso de clasificación MAP se lo conoce como CEM [9].

## II. MODELO PARA LOS DATOS

### A. Mezcla de densidades de probabilidad

Sea el proceso doblemente indexado  $y_{rt}$  un proceso aleatorio de dos dimensiones que representa cada píxel de una imagen, y sea  $\mathbf{Y}$  la matriz donde serán agrupados los píxeles. En el caso de imágenes SAR el primer índice,  $r$ , corresponde a la dimensión rango (o tiempo rápido) y el segundo índice,  $t$ , corresponde a la dimensión acimut (o rango cruzado) [10]. Se ha demostrado que en aplicaciones SAR la mezcla de funciones de densidades de probabilidad es un modelo adecuado para representar la función de densidad de los datos [3], [9], [11]. En este tipo de modelos cada píxel de la imagen posee un índice asociado  $z_{rt}$  que representa la clase a la que pertenece. Este índice está latente u oculto. Considerando que  $N$  es el número de clases, es decir que las fdp's que componen la densidad de probabilidad de los datos son  $N$ , entonces  $z_{rt} \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Luego, se puede escribir la densidad de probabilidad de  $y_{rt}$ ,  $f(y_{rt}; \Theta)$ , como la marginalización de la fdp conjunta

$$f(y_{rt}; \Theta) = \sum_{n=1}^N \omega_n f_n(y_{rt}; \theta_n), \quad (1)$$

donde  $f_n(y_{rt}; \theta_n) = f(y_{rt} / z_{rt} = n; \Theta)$ ,  $\omega_n = P\{z_{rt} = n; \Theta\}$ ,  $\theta_n$  es el vector de parámetros de cada clase y  $\Theta = \{\omega_n, \theta_n\}_{n=1}^N$  representa el conjunto de todos los parámetros. Dado que los pesos  $\omega_n$  son probabilidades, deben satisfacer que  $\omega_n \geq 0$ , para  $n = 1, 2, \dots, N$  y que  $\sum_{n=1}^N \omega_n = 1$ .

### B. Procesos GARCH-2D

Un proceso aleatorio GARCH-2D  $v_{rt}$  se define como [12]

$$v_{rt} = \sqrt{h_{rt}} \epsilon_{rt}, \quad \epsilon_{rt} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ i.i.d.}, \quad (2)$$

$$h_{rt} = k + \sum_{i,j \in \Lambda_1} \alpha_{ij} h_{r-i, t-j} + \sum_{i,j \in \Lambda_2} \beta_{ij} v_{r-i, t-j}^2, \quad (3)$$

donde  $h_{rt}$  es la varianza condicional de  $v_{rt}$ , siendo  $k$ ,  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  los coeficientes del proceso y

$$\Lambda_1 = \{(i, j) / 0 \leq i \leq p_1, 0 \leq j \leq p_2, (i, j) \neq (0, 0)\}, \quad (4)$$

$$\Lambda_2 = \{(i, j) / 0 \leq i \leq q_1, 0 \leq j \leq q_2, (i, j) \neq (0, 0)\}, \quad (5)$$

donde  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  y  $q_2$  son los órdenes del proceso. Para cada par  $(r, t)$  la vecindad de los valores de la amplitud del proceso y de la varianza condicional definen el valor de la varianza condicional en el instante actual (3), llevando a

agrupamientos de variaciones del proceso. Notar que (2) es un modelo de ruido multiplicativo, donde  $\epsilon_{rt}$  representa el speckle y  $h_{rt}$  representa la textura.

Considerando el conjunto de información  $\psi_{rt}$  definido como

$$\psi_{rt} = \{\{v_{r-i, t-j}\}_{i,j \in \Lambda_2}, \{h_{r-i, t-j}\}_{i,j \in \Lambda_1}\}, \quad (6)$$

entonces  $v_{rt}$  posee distribución condicional

$$v_{rt} / \psi_{rt} \sim \mathcal{N}(0, h_{rt}), \quad (7)$$

de donde surge el nombre de varianza condicional para  $h_{rt}$ .

Para asegurar que la varianza condicional sea siempre positiva, los coeficientes del proceso deben satisfacer las siguientes condiciones

$$k > 0, \alpha_{ij} \geq 0, (i, j) \in \Lambda_1, \beta_{ij} \geq 0, (i, j) \in \Lambda_2. \quad (8)$$

Por otro lado se puede demostrar [7] que  $\mathbb{E}\{v_{rt}\} = 0$ , que  $\mathbb{E}\{v_{rt} v_{\rho\tau}\} = 0$ ,  $\forall (r, t) \neq (\rho, \tau)$  y si además se satisface que

$$\sum_{i,j \in \Lambda_1} \alpha_{ij} + \sum_{i,j \in \Lambda_2} \beta_{ij} < 1, \quad (9)$$

entonces su varianza no condicional es finita e igual a

$$\mathbb{V}\{v_{rt}\} = \frac{k}{1 - \sum_{i,j \in \Lambda_1} \alpha_{ij} - \sum_{i,j \in \Lambda_2} \beta_{ij}}, \quad (10)$$

resultando  $v_{rt}$  un proceso estacionario en sentido amplio.

Como ocurre en el caso de los procesos GARCH-1D, no existe una expresión explícita para la función densidad de probabilidad de los procesos GARCH-2D. Para superar esta dificultad se utiliza en su lugar la densidad de probabilidad condicional (7).

Definiendo cada clase como un proceso GARCH-2D con valor medio distinto de cero,  $y_{rt} = v_{rt} + \mu$ , las fdp's de las clases pueden escribirse como

$$f_n(y_{rt} / \psi_{rt}; \theta_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_{rtn}}} e^{-\frac{(y_{rt} - \mu_n)^2}{2h_{rtn}}}, \quad (11)$$

donde

$$h_{rtn} = k_n + \sum_{i,j \in \Lambda_1} \alpha_{ijn} h_{r-i, t-j, n} + \sum_{i,j \in \Lambda_2} \beta_{ijn} v_{r-i, t-j}^2, \quad (12)$$

$$\text{y } \theta_n = [\mu_n \ k_n \ \alpha_{01n} \ \dots \ \beta_{01n} \ \dots]^T.$$

## III. CEM CON MODELO DE MEZCLA DE PROCESOS GARCH-2D

El algoritmo EM permite obtener los estimados de máxima verosimilitud de los parámetros de una distribución cuando el conjunto de datos disponible es incompleto. En este caso,  $\mathbf{Y}$  conforma el conjunto de datos incompleto debido a que no se

conoce la clase a la que pertenece cada píxel. Se puede definir entonces  $\mathbf{X}=[\mathbf{Y} \mathbf{Z}]$  como el conjunto de datos completo, donde  $\mathbf{Z}$  es una matriz que contiene los índices,  $z_{rt}$ , que señalan la clase a la que pertenece cada píxel.

Considerando que  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$  son matrices de dimensiones  $R \times T$  y que la fdp de los elementos de  $\mathbf{Y}$  esta dada por la mezcla de los procesos GARCH-2D descritos en la sección anterior, entonces la densidad de probabilidad de los datos completos que puede escribirse explícitamente es  $f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z} / \psi_{11}; \Theta)$ . Sin embargo, esta fdp no puede maximizarse directamente debido a que no se conoce  $\mathbf{Z}$ . El algoritmo EM es un método de estimación iterativo, que en su lugar utiliza una aproximación de la función de verosimilitud dado un valor de los parámetros  $\Theta^{(m)}$ , la cual es maximizada sobre  $\Theta$  para obtener un nuevo estimado  $\Theta^{(m+1)}$ . La aproximación de la función de verosimilitud logarítmica del algoritmo EM en este caso puede definirse como

$$Q(\Theta / \Theta^{(m)}) = \mathbb{E}_{\mathbf{Z} / \mathbf{Y}, \psi_{11}, \Theta^{(m)}} \{ \ln(f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z} / \psi_{11}; \Theta)) \}, \quad (13)$$

donde  $f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z} / \psi_{11}; \Theta)$  está dada por

$$f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z} / \psi_{11}; \Theta) = f(\mathbf{Y} / \mathbf{Z}, \psi_{11}; \Theta) P\{\mathbf{Z} = \mathbf{N}; \Theta\}. \quad (14)$$

Utilizando probabilidad condicional  $f(\mathbf{Y} / \mathbf{Z}, \psi_{11}; \Theta)$  puede expresarse como [12]

$$f(\mathbf{Y} / \mathbf{Z}, \psi_{11}; \Theta) = \prod_{r=1}^R \prod_{t=1}^T f(y_{rt} / \psi_{rt}, z_{rt} = n; \Theta), \quad (15)$$

donde  $f(y_{rt} / \psi_{rt}, z_{rt} = n; \Theta) = f_n(y_{rt} / \psi_{rt}; \theta_n)$  dada por (11). Asumiendo que la pertenencia de un píxel a una clase es independiente de los demás píxeles, entonces

$$P\{\mathbf{Z} = \mathbf{N}; \Theta\} = \prod_{r=1}^R \prod_{t=1}^T P\{z_{rt} = n; \Theta\}, \quad (16)$$

A partir de (15) y (16)  $Q(\Theta / \Theta^{(m)})$  resulta

$$Q(\Theta / \Theta^{(m)}) = \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{z_{rt} / \mathbf{Y}, \psi_{11}, \Theta^{(m)}} \{ \ln(f_n(y_{rt} / \psi_{rt}; \theta_n)) + \ln(\omega_n) \}, \quad (17)$$

Debido a que  $z_{rt}$  no depende de  $y_{\rho\tau}$  excepto cuando  $(r, t) = (\rho, \tau)$  entonces

$$Q(\Theta / \Theta^{(m)}) = \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \mathbb{E}_{z_{rt} / y_{rt}, \psi_{rt}, \Theta^{(m)}} \{ \ln(f_n(y_{rt} / \psi_{rt}; \theta_n)) + \ln(\omega_n) \}, \quad (18)$$

Para evaluar la esperanza en (18) resta calcular las probabilidades a posteriori  $P\{z_{rt} = n / y_{rt}, \psi_{rt}, \Theta^{(m)}\} = \gamma_{rtn}^{(m)}$ . A partir del teorema de Bayes [13]  $\gamma_{rtn}^{(m)}$  puede escribirse como

$$\gamma_{rtn}^{(m)} = \frac{f(y_{rt} / \psi_{rt}, z_{rt} = n; \Theta^{(m)}) P\{z_{rt} = n; \Theta^{(m)}\}}{\sum_{i=1}^N f(y_{rt} / \psi_{rt}, z_{rt} = i; \Theta^{(m)}) P\{z_{rt} = i; \Theta^{(m)}\}}, \quad (19)$$

o equivalentemente

$$\gamma_{rtn}^{(m)} = \frac{f_n(y_{rt} / \psi_{rt}; \theta_n^{(m)}) \omega_n^{(m)}}{\sum_{i=1}^N f_i(y_{rt} / \psi_{rt}; \theta_i^{(m)}) \omega_i^{(m)}}. \quad (20)$$

Reemplazando (11) en (18) y evaluando la esperanza,  $Q(\Theta / \Theta^{(m)})$  resulta

$$Q(\Theta / \Theta^{(m)}) = \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \gamma_{rtn}^{(m)} \left[ \ln(\omega_n) - \frac{1}{2} \ln(h_{rtn}) - \frac{(y_{rt} - \mu_n)^2}{2h_{rtn}} \right], \quad (21)$$

donde no fueron tenidos en cuenta términos constantes que no influyen en la optimización, (21) puede reescribirse como

$$Q(\Theta / \Theta^{(m)}) = \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^N \gamma_{rtn}^{(m)} \ln(\omega_n) + \sum_{n=1}^N Q_n(\theta_n / \theta_n^{(m)}). \quad (22)$$

El algoritmo CEM para este problema puede resumirse de la siguiente manera.

1) *Paso E*: Dado  $\Theta^{(m)}$ , para  $r=1, \dots, R$ ,  $t=1, \dots, T$  y  $n=1, \dots, N$  evaluar las probabilidades a posteriori  $\gamma_{rtn}^{(m)}$  por medio de la ecuación (20).

2) *Paso M*: Maximizar la función  $Q(\Theta / \Theta^{(m)})$  con respecto  $\Theta$ . La maximización de esta función puede dividirse en dos problemas de optimización. El primero es la maximización (22) con respecto a los pesos  $\omega_n$ , sujeto a que  $\sum_{n=1}^N \omega_n = 1$ . Notar que este problema puede desacoplarse de la optimización del resto de los parámetros. Una alternativa para su resolución es utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange [14]. Posee solución analítica dada por

$$\omega_n^{(m+1)} = \frac{1}{RT} \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \gamma_{rtn}^{(m)}, \quad n=1, \dots, N. \quad (23)$$

El segundo problema es la maximización (22) con respecto a  $\theta_n$ , sujeto a las restricciones sobre los coeficientes de los procesos GARCH-2D. Este problema no posee solución analítica y debe resolverse de forma numérica. Sin embargo, puede separarse en tres problemas de menor dimensión, los cuales pueden escribirse como

$$\theta^{(m+1)} = \arg \max_{\theta_n} Q_n(\theta_n / \theta_n^{(m)}), \quad (24)$$

sujeto a

$$k_n > 0, \alpha_{ijn} \geq 0, (i, j) \in \wedge_1, \beta_{ijn} \geq 0, (i, j) \in \wedge_2, \sum_{i,j \in \wedge_1} \alpha_{ijn} + \sum_{i,j \in \wedge_2} \beta_{ijn} < 1, \quad (25)$$

Los pasos E y M se repiten iterativamente hasta que la diferencia de la función de verosimilitud evaluada en los dos últimos iterados toma un valor por debajo de una dada tolerancia, siendo el último iterado el estimado de los parámetros.

3) *Paso C*: El algoritmo CEM incorpora un paso de

clasificación que consiste en asignar una clase a cada píxel a partir del criterio de máxima probabilidad a posteriori. Para este problema la clasificación se hace al finalizar el proceso de estimación, fijando  $z_{rt} = n$  eligiendo  $n$  que maximiza la probabilidad a posteriori  $\gamma_{rt,n}^{(m+1)}$ , para  $n = 1, \dots, N$ .

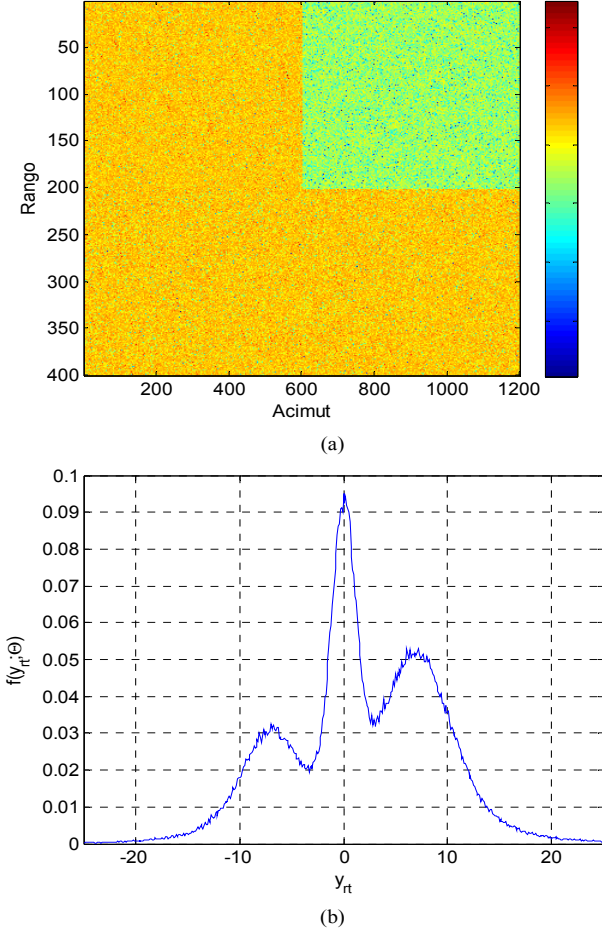


Figura 1. Datos sintéticos generados a partir de la mezcla de procesos GARCH-2D. (a) Intensidad. (b) Histograma.

#### IV. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección se presentan los resultados de la clasificación utilizando el algoritmo CEM propuesto con datos sintéticos generados a partir de una mezcla de procesos GARCH-2D particular. Debido a que el número de coeficientes aumenta drásticamente con los órdenes del proceso, se utilizaron procesos GARCH-2D cuyas varianzas condicionales son de la forma

$$h_{rt,n} = k_n + \beta_{11n} (y_{r-1,t-1} - \mu_n)^2, \quad (26)$$

es decir  $\theta_n = [\mu_n \ k_n \ \beta_{11n}]$ . Por otro lado se consideró que existen  $N = 3$  clases presentes y que  $N$  es conocido. La matriz de datos  $\mathbf{Y}$  utilizada es de  $400 \times 1200$  muestras. En la Fig. 1(a) se presenta la intensidad de los datos generados. Los

dos cuartos superiores de la imagen fueron generados con dos procesos GARCH-2D diferentes y la mitad inferior fue generada con un tercer proceso. En la Tabla I se presentan los valores de los parámetros correspondientes a cada proceso. Cabe destacar que solo se distinguen dos regiones debido a que las intensidades de dos de las clases son del mismo orden de magnitud. En la Fig. 1(b) se presenta el histograma de los datos. Sabiendo que son 3 las clases existentes, este gráfico permite distinguirlas: alrededor de cada pico se concentra la fdp de cada proceso GARCH-2D.

TABLE I. VALORES DE LOS PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN NUMÉRICA.

Parámetro	Valor verdadero	Valor inicial	Valor estimado
$\omega_1$	0.25	0.33	0.18
$\omega_2$	0.25	0.33	0.39
$\omega_3$	0.50	0.33	0.43
$\mu_1$	-7.00	-8.50	-7.34
$\mu_2$	0.00	1.50	0.00
$\mu_3$	7.00	8.50	7.37
$k_1$	5.00	0.50	1.88
$k_2$	1.00	0.50	0.60
$k_3$	7.00	0.50	3.95
$\beta_{111}$	0.95	0.001	0.87
$\beta_{112}$	0.50	0.001	0.68
$\beta_{113}$	0.90	0.001	0.85

Utilizando estos datos se implementó el algoritmo CEM descrito en la sección anterior. El problema de optimización descrito en (24), se resolvió utilizando el *Algoritmo de Conjuntos Activos* de Matlab, implementado a partir del método SQP (*Sequential Quadratic Programming*) [14]. En la Tabla I se muestran los valores iniciales de los parámetros junto con los valores estimados por medio del algoritmo EM. Con estos valores de los coeficientes se evaluaron las probabilidades a posteriori con las que se realizó la clasificación de los píxeles. En la Fig. 2(a) se presentan los resultados de la clasificación. Si bien existen errores en la clasificación debido a que los píxeles asociados a las colas de las fdp's son asignados a clases erróneas, se observa que las tres regiones pueden distinguirse con claridad. Este también es el motivo por el cual los valores de los coeficientes estimados se apartan significativamente de los valores reales con los que se generaron los datos. En el proceso de estimación, el algoritmo EM implícitamente realiza una clasificación de los píxeles a través del valor de  $\gamma_{rt,n}^{(m)}$ . De este modo, por ejemplo para los píxeles que corresponden a las colas de las densidades de los extremos que se superponen con la fdp central,  $\gamma_{rt,n}^{(m)}$  toma valores pequeños para la verdadera clase y valores grandes para la clase representada por la densidad central. Como resultado las densidades estimadas de los extremos resultan menos impulsivas, es decir poseen colas menos

pesadas, que las densidades verdaderas de los procesos que generaron los datos. Este comportamiento puede observarse en la Fig. 2(b), donde se presentan el histograma de los datos superpuesto al histograma de datos sintéticos generados a partir de los valores estimados de los coeficientes.

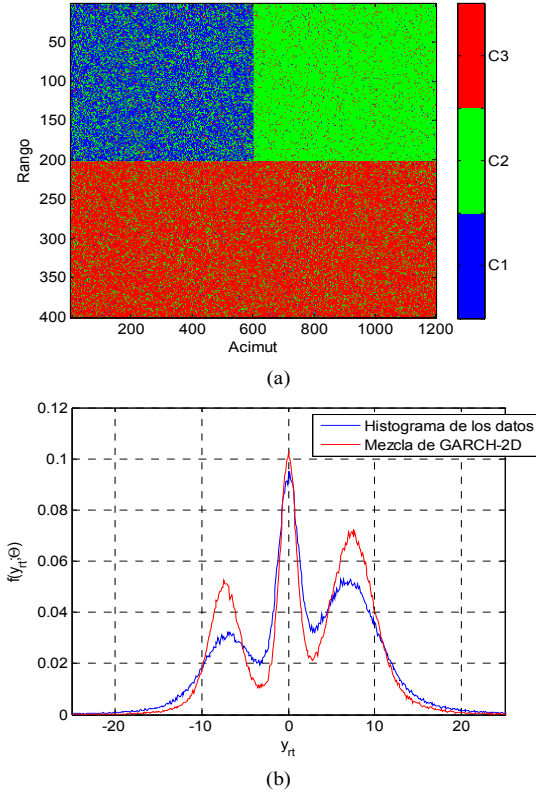


Figura 2. Clasificación utilizando algoritmo CEM con modelo de mezcla de procesos GARCH-2D. (a) Clasificación. (b) Histograma.

Con fines comparativos en la Fig. 3(a) se presentan los resultados de clasificar los píxeles de los datos utilizando el algoritmo CEM pero a partir de modelar los datos como mezcla de densidades Gaussianas [11]. Como en el ejemplo anterior, también se consideró que el número de clases es conocido, los valores iniciales para los pesos y las medias fueron los mismos que para el caso de procesos GARCH-2D y se fijó el valor inicial de las varianzas igual a 0.5. En este caso se puede observar que no se logran diferenciar las tres clases existentes. En la Fig. 3(b) se muestra la fdp obtenida a partir de los parámetros estimados superpuesto al histograma de los datos. De los resultados obtenidos se observa que a pesar de la existencia de las tres clases solo son dos las regiones que se distinguen.

## V. DISCUSIÓN

En este trabajo se desarrolló un algoritmo de clasificación de imágenes a través del criterio de máximo a posteriori por medio del algoritmo EM con un modelo de mezcla de procesos GARCH-2D para los datos. Se dedujeron las expresiones para realizar la estimación de los parámetros del

problema y para la regla de decisión del proceso de clasificación. Con el objetivo de verificar el funcionamiento del algoritmo se propuso un ejemplo numérico a partir de un caso particular de proceso GARCH-2D. Finalmente se compararon los resultados con el algoritmo CEM desarrollado a partir de un modelo de mezcla de densidades Gaussianas para los datos. Si bien este tipo de comparaciones no es del todo justa, debido a que se utiliza un método de clasificación diseñado para un tipo de datos con datos generados con un modelo diferente, es importante destacar que el algoritmo CEM con modelo de mezcla de Gaussianas presenta una gran versatilidad, logrando un buen desempeño para diferentes tipos de datos. En particular cuando los datos son generados como mezcla de procesos GARCH-2D menos impulsivos, es decir para valores de  $\beta_{11} \leq 0.5$ , o bien cuando las medias de los procesos están lo suficientemente alejadas, CEM con modelo de mezcla de Gaussianas presenta un desempeño comparable a CEM con modelo de mezcla de procesos GARCH-2D para los datos. Aun cuando las fdp's de los procesos GARCH-2D no son bien aproximadas por las densidades Gaussianas, los umbrales de decisión obtenidos con este modelo toman valores cercanos a los óptimos de acuerdo con el criterio MAP.

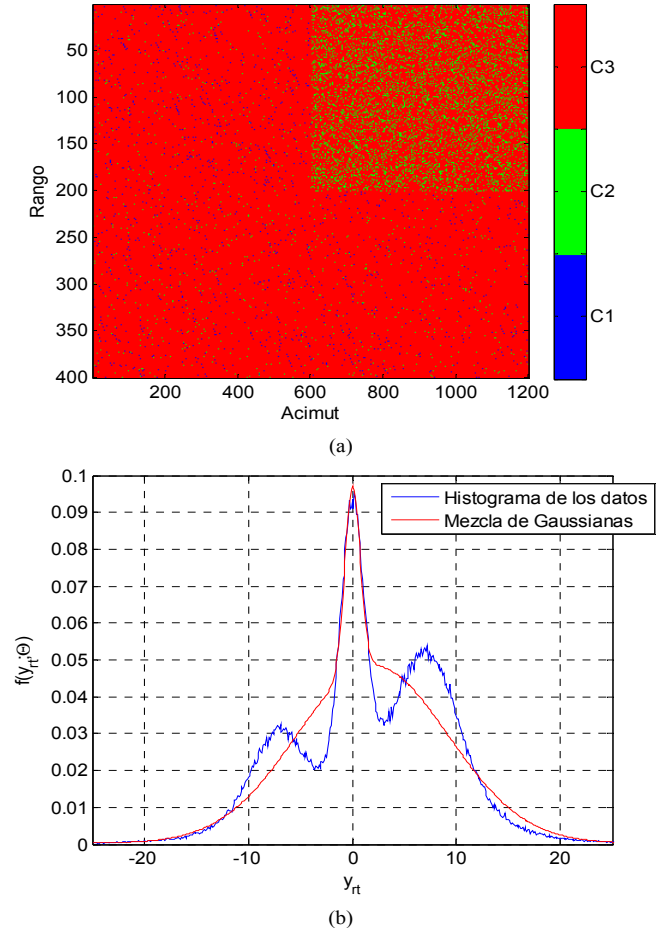




Figura 3. Clasificación utilizando algoritmo CEM con modelo de mezcla de Gaussianas. (a) Clasificación. (b) Histograma.

Como trabajo futuro para el uso del algoritmo propuesto en el procesamiento de imágenes SAR el siguiente paso consiste en extender el modelo de los datos a un modelo complejo, de modo que contemple las componentes en fase y en cuadratura de las mediciones. Esto puede llevarse a cabo de manera análoga a lo que se hace en el caso de los procesos GARCH [15]. Por otro lado, los radares de apertura sintética en general cuentan con información polarimétrica. Una posibilidad para incorporar la información proveniente de las diferentes polarizaciones es reformular el problema haciendo uso de los modelos GARCH multivariados [16].

#### REFERENCIAS

- [1] M. Liao, C. Wang, Y. Wang, and L. Jiang, "Using SAR images to detect ships from sea clutter," *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 5, no. 2, pp. 194–198, Apr. 2008.
- [2] H. Mott, *Remote sensing with polarimetric radar*. NJ, USA: John Wiley & Sons, 2007.
- [3] C. Oliver and S. Quegan, *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. Raleigh, NC 27613: SciTech Publishing, Inc., 2004.
- [4] V. Anastassopoulos, G. A. Lampropoulos, A. Drosopoulos, and M. Rey, "High resolution radar clutter statistics," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 35, no. 1, pp. 43–60, Jan. 1999.
- [5] R. F. Engle, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation," *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987–1008, 1982.
- [6] T. Bollerslev, "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, Feb. 1986.
- [7] A. Noiboar and I. Cohen, "Anomaly detection based on wavelet domain GARCH random field modeling," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 45, no. 5, pp. 1361–1373, May. 2007.
- [8] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," *J. of the Royal Statistical Soc. Series B (Methodological)*, vol. 39, no. 1, pp. 1–38, 1977.
- [9] K. Kayabol and J. Zerubia, "Unsupervised amplitude and texture classification of SAR images with multinomial latent model," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 22, no. 2, pp. 561–572, Feb. 2013.
- [10] I. G. Cumming and F. H. Wong, *Digital Processing of Synthetic Aperture Radar Data: Algorithms and Implementation*. 685 Canton Street, Norwood, MA.: Artech House, 2005.
- [11] L. Yuan, J. Song, W. Xue, and W. Zhao, "SAR image classification based on MAP via the EM algorithm," in *Proc. 6th World Congr. on Intell. Control and Automation (WCICA 2006)*, Dalian, China, 2006, vol. 2, pp. 10116–10120.
- [12] M. Amirmazlaghani, H. Amindavar, and A. Moghaddamjoo, "Speckle suppression in SAR images using the 2-D GARCH model," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 18, no. 2, pp. 250–259, Feb. 2009.
- [13] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 3rd ed. NY, USA: McGraw-Hill, 1991.
- [14] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.
- [15] S. Mousazadeh and I. Cohen, "Simultaneous parameter estimation and state smoothing of complex GARCH process in the presence of additive noise," *Signal Process.*, vol. 90, no. 11, pp. 2947–2953, Nov. 2010.
- [16] L. Bauwens, S. Laurent, and J. Rombouts, "Multivariate GARCH models: a survey," *Journal of Applied Econometrics*, vol. 21, no. 1, pp. 79–109, Feb. 2006.



**Juan Pablo Pascual** has received his Eng. degree in Electronics Engineering from the National University of La Plata (UNLP), Buenos Aires, Argentina, in 2006. He is currently a Ph.D. candidate in the UNLP. His research interests are statistical and array signal processing with radar and communication applications.



**Juan Ignacio Fernandez Michelli** received the Engineering degree in Electrical Engineering from the National University of La Plata in 2008. Currently, he is a Ph.D. student of the National Council of Scientific and Technical Research of Argentina (CONICET) and a teaching assistant in the Department of Electrical Engineering at National University of La Plata. His research interests are in the area of statistical signal processing and its applications in Synthetic Aperture Radar systems.



**Nicolás von Ellenrieder** (S'96-M'06) is a Professor at the Universidad Nacional de La Plata, where he received his Eng. (1998) and Ph.D. (2005) degrees. His postdoctoral experience includes research visits to the Washington University in St. Louis (2006), the Cuban Neuroscience Center (2006), and the Montreal Neurological Institute of McGill University (2010). His research interests include statistical and digital signal processing with applications in the fields of biomedicine and radar.



**Martín Hurtado** (M'11) received the B.Eng. and M.Sc. degrees in electrical engineering from the National University of La Plata, Argentina, in 1996 and 2001, respectively. He received his Ph.D. degree in electrical engineering from Washington University in St. Louis in 2007. Currently, he is a research associate of the National Council of Scientific and Technical Research of Argentina and an adjunct professor in the Department of Electrical Engineering at National University of La Plata. His research interests are in the area of statistical signal processing, detection and estimation theory, and their applications in sensor arrays, communications, and remote sensing systems.



**Javier Areta** graduated as an Electronics Engineer from the National University of La Plata, Argentina, in 2001, and received the Ph.D. degree in Electrical Engineering from the University of Connecticut in 2008. He is an Associate Professor at the Department of the Electrical Engineering of the National University of Río Negro in Bariloche, Argentina. His research interests are in the area of statistical signal processing, particularly in radar applications.



**Carlos H. Muravchik** (S'81-M'83-SM'99) graduated as an Electronics Engineer from the National University of La Plata, Argentina, in 1973. He received the M.Sc. in Statistics (1983) and the M.Sc. (1980) and Ph.D. (1983) degrees in Electrical Engineering, from Stanford University, Stanford, CA. He is a Professor at the Department of the Electrical Engineering of the National University of La Plata and chairman of its Industrial Electronics, Control and Instrumentation Laboratory (LEICI). He is also a member of the Comisión de Investigaciones Científicas de la Pcia. de Buenos Aires. He was a Visiting Professor to Yale University in 1983 and 1994, to the University of Illinois at Chicago in 1996, 1997, 1999 and 2003 and to Washington University in St Louis in 2006 and 2010. Since 1999 he is a member of the Advisory Board of the journal Latin American Applied Research and was an Associate Editor of the IEEE Transactions on Signal Processing (2003–2006). His research interests are in the area of statistical and array signal processing with biomedical, communications and control applications, and in nonlinear control systems.