Estimación y Orden de Aproximación a Partir de Muestras Aleatorias no Ideales.

Medina Juan Miguel[†], Morvidone Marcela[♭] y Porten Erika[♭]

[♭]*Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, San Martín, Buenos Aires, Argentina, erikaporten@gmail.com, mmorvidone@unsam.edu.ar*

[†]*Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, Depto. de Matemática , IAM CONICET. Paseo Colón 850, CABA, Argentina y LaBis-UCA. jmedina@fi.uba.ar*

Resumen: En este artículo estudiaremos ciertos operadores de cuasi-interpolación estocásticos para la estimación de señales de energía finita (funciones de $L^2(\mathbb{R})$). Deduciremos algunas cotas y propiedades de convergencia asintótica. Veremos que el orden de convergencia depende tanto de la intensidad del proceso puntual que modela los puntos de interpolación como de la regularidad de la señal medida en términos de la norma de Sobolev.

Palabras clave: *muestreo aleatorio, muestreo de Shannon, integral estocástica, proceso puntual, orden de aproximación.*
2000 AMS Subject Classification: 94A20-41A17-41A25-60H05

1. Introducción

El teorema clásico de Shannon-Whittaker-Kotelnikov (SWK) permite reconstruir una señal de banda limitada a partir de un muestreo regular [1, 8]. Sea el operador de dilatación $(D_a f)(x) := \frac{1}{\sqrt{a^d}} f(a^{-1}x)$ para $a > 0$ y el operador de traslación $(T_p f)(x) := f(x-p)$ para $p \in \mathbb{R}^d$. El teorema SWK es un caso particular de un problema general donde mediante una expresión del tipo

$$\widetilde{Q}_{\phi\,\varphi} f(x) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \langle D_a T_p \varphi, f\rangle D_a T_p \phi(x) \tag{1}$$

se pretende aproximar una cierta función f perteneciente a algún subespacio de funciones continuas, con $a > 0$ y el subconjunto numerable $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^d$ fijos. En el caso SWK, $\mathbb{P} = \frac{2\pi}{\omega_0}\mathbb{Z}^d$, y la función $\varphi = \phi$ es una función "sinc". La reconstrucción será perfecta o no dependiendo del valor de $a > 0$ teniendo en cuenta la frecuencia de Nyquist o el ancho de banda $2\omega_0$ de f. Si la reconstrucción es perfecta, vale la identidad $\widetilde{Q}_{\phi\,\varphi} f = f$ y los funcionales $\langle D_a T_p \varphi, f\rangle$ coinciden con las evaluaciones $f(p)$ (muestras ideales). Y se puede probar que cuando $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es arbitraria, $\widetilde{Q}_{\phi\,\varphi} f \longrightarrow f$ cuando $a \longrightarrow 0$. Este tipo de problema está vinculado a su vez con aproximaciones respecto a wavelets biortogonales [7] con $a = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, en la práctica a veces puede ser difícil conocer con exactitud los puntos de muestreo y sólo son conocidos ciertos parámetros estadísticos de su localización. Otras veces, este efecto es buscado intencionalmente para compensar ciertos efectos no deseados por el *aliasing*. Así aparecen distintas alternativas como las que involucran un muestreo aleatorio no uniforme [Mar 91]. En esta oportunidad analizaremos un método relacionado con el propuesto en [6], donde las muestras son adquiridas por un dipositivo lineal no ideal, es decir no necesariamente coinciden con la evaluación $f(p)$. Analizaremos el comportamiento asintótico de ciertos operadores de cuasi-interpolación cuandos los puntos $\mathbb{P}$ son elegidos por un proceso aleatorio puntual $\mathcal{X}$ análogo al de Poisson. Se estudiará el efecto de $a \longrightarrow 0$ y cuando la intensidad $\lambda \longrightarrow \infty$. También se considerará el efecto de la suavidad de f respecto a los espacios Sobolev.

2. Preliminares

Sea $L^2(\mathbb{R}^d)$ el espacio de funciones de *energía finita*. Es decir, estas funciones verifican que $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty$, siendo esta norma la inducida por el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dx$. Con $\widehat{f}$ denotaremos la transformada de Fourier de f y si $s \geq 0$, con $W^{2\ s}(\mathbb{R}^d)$, los espacios de Sobolev:

$$W^{2\ s}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\}.$$

De manera análoga a lo presentado en [6] podemos definir una medida y una integral estocática de la siguiente manera. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida en él. Si φ es cualquier función medible Borel, denotamos $\mathbf{E}(\varphi(X)) = \int_\Omega \varphi(X) d\mathbf{P}$ a la esperanza de $\varphi(X)$. Sea $\mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$ la σ-algebra de Borel de $\mathbb{R}^d$. Sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ consideremos un proceso aleatorio puntual $\mathcal{X}$ [4]. Para fijar ideas se puede pensar en un proceso espacial de Poisson de intensidad $\lambda > 0$. $\mathcal{X}$ induce una *medida estocástica* de la siguiente manera: $M(A) = \sum\limits_{p \in \mathcal{X}} \delta_p(A)$. En nuestro caso consideraremos procesos $\mathcal{X}$ (o medidas asociadas M) que se ajusten a la siguiente definición:

Definición 1 *Si* $\mathbf{B}_0(\mathbb{R}^d) = \{A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^d) : |A| < \infty\}$ *y* $\lambda > 0$*, una* medida aleatoria de incrementos ortogonales *es una familia de variables aleatorias* $M : \mathbf{B}_0(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *tal que, con probabilidad uno,* $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$*, y tal que la covarianza verifica Cov*$(M(A), M(B)) = 0$*, para cualquier* $A, B \in \mathbf{B}_0(\mathbb{R}^d)$ *disjuntos. Entonces* M *induce dos medidas aditivas (o eventualmente* σ*-aditivas) dadas por: Var*$(M(A))$ *y* $\mathbb{E}(M(A))$*. Además, supondremos que* M *verifica para alguna constante* $\lambda > 0$*:* $\mathbf{E}(M(A)) = \lambda |A|, \quad \text{Var}(M(A)) = \lambda |A|$.

En el caso de que M esté asociada a un proceso puntual $\mathcal{X}$, $\lambda > 0$ será la intensidad del proceso, en analogía con el caso del proceso de Poisson.

Definición 2 *Integral estocástica. Si* f *es una función* $\mathbf{B}_0(\mathbb{R}^d)$*-simple,* $f = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{R_i}$ *con* $a_i \in \mathbb{C}$ *y* $R_i \in \mathbf{B}_0$ *disjuntos, definimos la integral estocástica de* f *con respecto a* M *como la variable aleatoria:* $\int_{\mathbb{R}^d} f(t) dM(t) := \sum_{i=1}^m a_i M(R_i)$.

La integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f \, dM$ verifica la siguiente propiedad, consecuencia de la ortogonalidad estocástica:

Propiedad 1 *Sea f una función* $\mathbf{B}_0(\mathbb{R}^d)$*-simple, entonces:*

$$(i)\ \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, dM(t)\right) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, dt\,. \qquad (ii)\ Var\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, dM(t)\right) = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f^2(t)\, dt.$$

Mediante un proceso de paso al límite (ii), permite extender $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dM(x)$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \bigcap L^2(\mathbb{R}^d)$ arbitraria. Además, la Propiedad 1 sigue siendo verdadera para $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \bigcap L^2(\mathbb{R}^d)$. Finalmente, observamos que la Def. 2 puede usarse con medidas aleatorias no necesariamente inducidas por un proceso puntual, como es el caso de la medida de Wiener inducida por el proceso Browniano [2] y que los resultados siguientes se basan sólo en esta condición. Sin embargo, en el contexto de muestreo podría ser de mayor relevancia el caso puntual pues los puntos de muestreo son aquellos en los que se concentra la medida M. En este caso, para f apropiada se tiene que $\int_{\mathbb{R}^d} f \, dM = \sum\limits_{p \in \mathcal{X}} f(p)$.

3. Cuasi-Interpolación Aleatoria

Motivados por la sección anterior introducimos, por el momento de manera formal, el operador de interpolación aleatoria $Q_{\phi\varphi}$.

Definición 3 *Sean* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$*,* $a > 0$*,* $\lambda > 0$ *y un par de funciones* $\phi,\ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \bigcap L^1(\mathbb{R}^d)$ *tales que* $\widehat{\phi}(0)\widehat{\varphi}(0) \neq 0$*. Definimos:*

$$Q_{\phi\varphi} f(x) := \frac{1}{\lambda} \sum_{p \in \mathcal{X}} \langle D_a T_p \varphi, f \rangle D_a T_p \phi(x) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle D_a T_p \varphi, f \rangle D_a T_p \phi(x) dM(p)\,.$$

Cabe recordar que, en realidad, $Q_{\phi\varphi} f(x) = Q_{\phi\varphi}(a, \lambda) f(x)$. Es decir depende de los parámetros a, λ y más aún, aunque no lo escribamos, también depende del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
Nos interesa estudiar el comportamiento asintótico de $Q_{\phi\varphi} f$, cuando $a \longrightarrow 0$ y $\lambda \longrightarrow \infty$. Como veremos, se puede probar que $Q_{\phi\varphi} f$ es, en algún sentido, un estimador consistente de f. Para ese propósito introducimos algunos resultados previos. Primero, se puede probar que $Q_{\phi\varphi} f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (a.s.) y que además, para $a > 0$ fijo, $Q_{\phi\varphi} f$ es un estimador insesgado y consistente del siguiente operador integral $S_{\phi\varphi}$, cuando $\lambda \longrightarrow \infty$:

Definición 4 *Bajo las mismas condiciones de la Def. 3, para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ definimos:*

$$S_{\phi\varphi} f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle D_a T_p \varphi, f\rangle D_a T_p \phi(x) dp\,.$$

En efecto, es fácil probar que $S_{\phi\varphi} f(x)$ está bien definido para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y más aún valen las siguientes propiedades relaciones con $Q_{\phi\varphi}$. La Propiedad 1 permite probar lo siguiente:

Lema 1 *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $a > 0$, $\lambda > 0$ y un par de funciones ϕ, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \bigcap L^1(\mathbb{R}^d)$ tales que $\widehat{\phi}(0)\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, entonces valen las siguientes afirmaciones:*

1. *$S_{\phi\varphi} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ es un operador acotado.*
2. *$\widehat{S_{\phi\varphi} f} = \overline{\widehat{\phi}(a\,.\,)}\widehat{\varphi}(a\,.\,)\widehat{f}$.*
3. *Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $Q_{\phi\varphi} f(x)$ es una variable aleatoria bien definida y $\mathbf{E}(Q_{\phi\varphi} f(x)) = S_{\phi\varphi} f(x)$.*
4. *Para todo $p \in \mathbb{R}^d$, está bien definido $L_\varphi f(p) = \langle D_a T_p \varphi, f\rangle$. Mas aún, $L_\varphi : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ es un operador lineal acotado tal que $\|L_\varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^1}$*
5. *$\mathbf{E}\, \|S_{\phi\varphi} f - Q_{\phi\varphi} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \frac{\|L_\varphi f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\lambda}$, y en particular $Q_{\phi\varphi} f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (a.s.).*

Como consecuencia inmediata del Lema 1, se tiene que: $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow\infty} \|S_{\phi\varphi} f - Q_{\phi\varphi} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$ en media cuadrática y en probabilidad. Para verificar la convergencia a f necesitamos previamente la siguiente relación de ortogonalidad estocástica.

Lema 2 *Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, bajo las hipótesis del Lema 1, se tiene: $\mathbf{E}\langle g, S_{\phi\varphi} f - Q_{\phi\varphi} f\rangle = 0$.*

De esto se deduce que:

Teorema 1 *Sea $c_{\phi\varphi} = \overline{\widehat{\phi}(0)}\widehat{\varphi}(0)$, bajo las hipótesis del Lema 1, vale lo siguiente:*

$$\mathbf{E}\, \|c_{\phi\varphi} f - Q_{\phi\varphi} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|S_{\phi\varphi} f - c_{\phi\varphi} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \frac{\|L_\varphi f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\lambda}\,. \tag{2}$$

En particular, $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow\infty,\, a\longrightarrow 0} \|c_{\phi\varphi} f - Q_{\phi\varphi} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$ en probabilidad y en la norma de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

4. PAR ÓPTIMO DE FUNCIONES DE MUESTREO E INTERPOLACIÓN ϕ, φ.

Sea $\mathcal{X}$ un proceso puntual y sea $S(\mathcal{X}, a)$ el subespacio lineal de elementos aleatorios de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dado por

$$S(\mathcal{X}, a) = \left\{ f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, L^2(\mathbb{R}^d)) : f = \int_{\mathbb{R}^d} F(p) D_a T_p \phi \, dM(p); F \in L^2(\mathbb{R}^d) \bigcap L^1(\mathbb{R}^d) \right\} \tag{3}$$

Con esta notación, podemos decir que, por los resultados anteriores, existe una sucesión de elementos de $\bigcup\limits_{a>0,\lambda>0} S(\mathcal{X}, a)$ que aproxima a f. En este caso $F(p) = L_\varphi f(p)$. En este enfoque y en un principio, no hay mayores restricciones para el par ϕ, φ (ver Def. 3). Sin embargo, uno podría preguntarse para a, λ fijos cual es el mejor aproximante de f del conjunto $S(\mathcal{X}, a)$. Es decir hallar $\mathring{f} \in S(\mathcal{X}, a)$ tal que $\mathbf{E} \left\| f - \mathring{f} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ sea mínimo. Sorprendentemente, veremos que este problema nos lleva de nuevo a una expresión del tipo de la ecuación de Def. 3 para cierta φ^λ_{opt} independiente de f y de $a > 0$, pero dependiente de la intensidad $\lambda > 0$. En efecto:

Teorema 2 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $a > 0, \lambda > 0$ y ϕ como en la Def. 3. Entonces:*

$$\underset{\mathring{f} \in S(\mathcal{X},a)}{argmin}\ \mathbf{E} \left\| f - \mathring{f} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{p \in \mathcal{X}} \langle D_a T_p \varphi^{\lambda}_{opt}, f \rangle D_a T_p \phi\ , \quad \widehat{\varphi^{\lambda}_{opt}}(\xi) = \frac{\widehat{\phi}(\xi)}{|\widehat{\phi}(\xi)|^2 + \mu}, \quad \mu = \frac{\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\lambda}\ .$$

La demostración de este teorema es, en parte, consecuencia de la aplicación de las técnicas de regularización de Tikhonov a la expresión (2).

5. Orden de aproximación del operador de cuasi-interpolación en los espacios de Sobolev $W^{2\ s}(\mathbb{R}^d)$

En los resultados anteriores no se tuvo en cuenta, en el cálculo de los errores de aproximación, cuanto influye la *suavidad* de la función original f. Ahora, si f tiene derivadas de orden $s + t$ (en algún sentido), nos interesa ver qué tanto es el error que se comete en la aproximación simultánea de f y sus derivadas de orden s en función de cierta norma que las involucre hasta el orden $s + t$, $s, t \geq 0$. De las muchas maneras de medir dicha suavidad consideraremos los espacios de Sobolev $W^{2\ s}(\mathbb{R}^d)$ definidos anteriormente. En esta sección pediremos que, tanto $\widehat{\phi}$ como $\widehat{\varphi}$, cumplan una condición de Lipschitz global:

$$(C.L)\ \ |\widehat{\phi}(\xi') - \widehat{\phi}(\xi)| \leq C_1|\xi' - \xi|; \ \ |\widehat{\varphi}(\xi') - \widehat{\varphi}(\xi)| \leq C_2|\xi' - \xi|\ .$$

Vale aclarar que el siguiente teorema se puede probar bajo otras hipótesis más débiles y es análogo a ciertos resultados de [3] en el contexto de subespacios invariantes por traslaciones enteras. En nuestro contexto aparece un término en el error de aproximación que depende de la intensidad λ y que, de alguna manera, antagoniza con el parámetro $a > 0$ que juega el papel de ancho de banda de Nyquist.

Teorema 3 *Sea $f \in W^{2\ s+t}(\mathbb{R}^d)$. Bajo las hipótesis del Lema 1 con la condición adicional (C.L), vale lo siguiente:*

$$\mathbf{E}\, \|f - Q_{\phi\,\varphi} f\|^2_{W^{2\ s}(\mathbb{R}^d)} \leq C(a, s, t, \lambda, \phi, \varphi)\, \|f\|^2_{W^{2\ s+t}(\mathbb{R}^d)}\ ,$$

donde $C(a, s, t, \lambda, \phi, \varphi) = \frac{1}{\lambda} 2^s\, \|\varphi\|^2_{L^1}\, \|\phi\|^2_{W^{2\ s}(\mathbb{R}^d)}\, (1 + a^{-2s}) + C(\phi, \varphi) a^{2t}$.

Si $s = 0$, se obtiene una cota análoga del tipo Fix-Strang ver p.ej. [9, 7]. En nuestro caso aparece sumado un término más asociado a la intensidad $\lambda > 0$.

6. Conclusiones

En este trabajo extendimos el método de muestreo aleatorio de [6] al caso de un esquema lineal de muestreo no ideal en $\mathbb{R}^d$. Mostramos cómo elegir de manera óptima el par de funciones de muestreo e interpolación para minimizar el error de reconstrucción y finalmente, utilizando los espacios de Sobolev, demostramos cómo este error es afectado por la regularidad de la función a reconstruir.

Agradecimientos

Juan M. Medina fue parcialmente subsidiado por CONICET y Universidad de Buenos Aires, proyecto UBACyT 20020170100266BA.

Referencias

[1] Y.C. Eldar, "*Sampling Theory: Beyond Band-Limited Systems*", Cambridge, 2015.

[2] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod, "*The Theory of Stochastic Processes Vol. I*", Springer, 1974.

[3] O. Holtz, A. Ron, *Approximation Orders of Shift-Invariant Subspaces of $W^{2\ s}(\mathbb{R}^d)$*, J. Approx. Th. , 132, (2005), pp. 97-148.

[4] G. Last, M. Penrose, *Lectures on The Poisson Process, Cambridge, 2018.*

[5] F. Marvasti, M. Analoui and M. Gamshadzahi, *Recovery of Signals from Nonuniform Samples Using Iterative Methods*, IEEE Trans. on Signal Proc., Vol. 39, 4 (1991), pp. 872-878.

[6] E. Porten, J.M. Medina and M. Morvidone, *Random sampling over locally compact Abelian groups and inversion of the Radon transform*, Appl. Comp. Harm. Anal., Vol. 67,(2023), 101576.

[7] M. Unser, *Approximation Power of Biorthogonal Wavelet Expansions*, IEEE Trans. on Signal Proc. Vol. 44, 3 (1996), pp. 519-527.

[8] A.I. Zayed, "*Advances in Shannon's Sampling Theory*", CRC Press, 1993.

[9] S. Mallat, "*A Wavelet Tour of Signal Processing*", 3ra edición, Academic Press-Elsevier, 2009.