

Fractal de Koch: análisis de respuestas de IA generativa y un profesor de matemática

Koch Fractal: Analysis of the responses from generative AI and a Math teacher

Ana Rosa Corica¹, Verónica Parra¹, Patricia Sureda¹, Silvia Schiaffino², Daniela Godoy²

¹ Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad Cs. Exactas, NIEM, CONICET, Tandil, Argentina.

² Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad Cs. Exactas, ISISTAN, CONICET, Tandil, Argentina.

acorica@niem.exa.unicen.edu.ar, vparra@niem.exa.unicen.edu.ar, psureda@niem.exa.unicen.edu.ar, silvia.schiaffino@isistan.unicen.edu.ar, daniela.godoy@isistan.unicen.edu.ar

Recibido: 09/02/2024 | Aceptado: 24/02/2024

Cita sugerida: A. R. Corica, V. Parra, P. Sureda, S. Schiaffino, D. Godoy, "Fractal de Koch: análisis de respuestas de IA generativa y un profesor de matemática," *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, no. 37, pp. 89-99, 2024. doi:10.24215/18509959.37.e8.

Esta obra se distribuye bajo **Licencia Creative Commons CC-BY-NC 4.0**

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de explorar, analizar y comparar las respuestas que modelos de inteligencia artificial generativa (IAG) (ChaGPT 3.5, Bard y Bing Chat) y un profesor de matemática en servicio ofrecen a un problema en el que se involucra un fractal, y que podría ser estudiado en el nivel secundario argentino. El problema requiere del cálculo del área y el perímetro de un fractal particular, como lo es el copo de nieve de Koch. Este fractal tiene la particularidad de ser una curva con perímetro infinito, que encierra una región del plano de área finita. Para cada respuesta analizamos diferencias y similitudes de las resoluciones a partir de las siguientes categorías: Construcción del fractal, Cálculo de su perímetro y Cálculo de su área. Se concluye que hay diferencias significativas entre los procedimientos, representaciones gráficas y validaciones de las respuestas obtenidas de los chatbots y el profesor. Alentamos el uso de recursos provenientes de la IAG siempre y cuando se analicen críticamente las respuestas que ofrecen.

Palabras clave: IA generativa; Chatbots; Profesor de matemática; Fractales.

Abstract

This work presents the results of exploring, analyzing and comparing the responses offered by generative artificial intelligence (GAI) models (ChaGPT 3.5, Bard and Bing Chat) and a Math teacher to a problem involving a fractal curve, that could be studied at the Argentine secondary level. The problem requires the calculation of the area and perimeter of a particular fractal curve, such as the Koch snowflake. This fractal has the particularity of being a curve with infinite perimeter, which encloses a region of the plane with a finite area. For each answer we analyze differences and similarities in the resolutions based on the following categories: Construction of the fractal, Calculation of its perimeter and Calculation of its area. It is concluded that there are significant differences between the procedures, graphic representations and validations of

the responses obtained from the chatbots and the teacher. Thus, we encourage the use of resources from the IAG as long as the answers they offer are critically analyzed.

Keywords: Generative AI; Chatbots; Math teacher; Fractals.

1. Introducción

La Geometría Fractal (GF) comprende el estudio de conjuntos irregulares, que surgieron a finales del siglo XIX y se caracterizan por tener propiedades geométricas y analíticas particulares [1]. Al referirnos a fractal nos encontramos con un concepto geométrico para el que no existe una definición precisa, ni una teoría única y comúnmente aceptada [1]. El término fractal (del latín *fractus*, que significa «fragmentado, irregular») fue acuñado en 1975 por Mandelbrot [2]. [3] asegura que los fractales son figuras geométricas irregulares que no pueden ser descritas en términos geométricos tradicionales. Al respecto ha indicado: “Algunos conjuntos fractales son curvas, otros son superficies, todavía otros son nubes de puntos deshilvanados y aún otros son formados de una manera tan rara que para ellos no hay buenos términos en las ciencias o en las artes” (p.15). [3] indica que un fractal se representa como un conjunto que tiene una o varias de las siguientes propiedades:

- Es demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales.
- Es autosemejante, es decir, el todo está formado por copias más pequeñas de sí mismo.
- Tiene una definición algorítmica recursiva sencilla.
- Tiene dimensión topológica menor que su dimensión de Hausdorff.

Algunos fenómenos que nos encontramos en la naturaleza pueden ser descrito mediante la GF, tal como la esponjosidad de las nubes, las ramificaciones de los árboles, la irregularidad de un relámpago, los detallados ornamentos de la cola de un pavo real, la calcificación de una estalactita [4]. Los fractales tienen un gran potencial tanto en las ciencias y las ingenierías, como en las artes. A pesar de su potencialidad, la GF se encuentra poco explorada en la investigación en educación matemática [5, 6, 7, 8].

En Argentina, la GF se propone para ser estudiada en el último año de la escuela secundaria de la provincia de Buenos Aires y de la ciudad de Buenos Aires [9, 10]. Según [11] esta es una buena oportunidad para estudiar, recuperar, discutir y ampliar algunas nociones matemáticas estudiadas en años previos, tales como: límite, sucesiones, series, recursividad, transformaciones de semejanza, ecuaciones exponenciales y logarítmicas. En el diseño curricular de la provincia de Buenos Aires, la GF ocupa un lugar minúsculo con relación al espacio que ocupa la geometría euclidiana en toda la enseñanza secundaria [9]. En este diseño curricular se indica:

“La noción de fractal posee modelos matemáticos donde los alumnos verán contenidos trabajados a lo largo de su escolaridad, pero aplicado con ciertas particularidades – como geometría, sucesiones, transformaciones, matrices, ecuaciones exponenciales y noción de límite de sucesiones–. Los fractales también modelizan objetos que exhiben una estructura a varios niveles de escala y se utilizan en la gráfica computarizada, que en ciertos casos describen formas de la naturaleza: Helge Koch mostró una curva con perímetro infinito, que encierra una región del plano de área finita, representada por una figura con forma de copo de nieve.” [9, p. 13 - 14].

En el diseño curricular de la escuela secundaria de Argentina, tal como se advierte en la cita anterior, se destaca la importancia del estudio de fractales y su integración con nociones que se proponen para el estudio durante toda la escolaridad secundaria. Sin embargo, y a pesar de ser parte del diseño curricular de algunas jurisdicciones, su presencia en las aulas no es efectiva [1, 12]. Por un lado, hay quienes aluden que una de las posibles razones de esta ausencia, es la formación de los profesores de matemática en GF [1, 12]. Por otro lado, hay quienes refieren a una falta de recursos específicos para enseñar GF en la escuela. Al respecto, algunas investigaciones realizan posibles propuestas para ello. Por ejemplo, [13] proponen introducir el concepto de dimensión fractal por medio del método *box counting* aplicado a un accidente fisiográfico, una laguna. [14] introduce los fractales a partir de la pregunta *¿cómo medir la costa de Mar del Plata?* [1], proponen abordar el estudio de fractales a partir del uso del software de realidad virtual inmersiva NeoTrie VR.

Actualmente, y como es de masivo conocimiento, desde noviembre de 2022, han irrumpido en la sociedad y por supuesto, en el contexto educativo, los recursos provenientes de la inteligencia artificial generativa (IAG), tales como ChatGPT, Bard, Bing Chat, entre otros. Estos nuevos y disruptivos recursos suman una variable significativa a la problemática de la GF en la escuela.

Siguiendo esta problemática, en este trabajo proponemos el análisis de un problema de GF que podría ser estudiado en la escuela secundaria, donde se requiere del cálculo del área y el perímetro de una curva fractal particular, como lo es el copo de nieve de Koch. Este fractal tiene la particularidad de ser una curva con perímetro infinito, que encierra una región del plano de área finita. En este trabajo exploramos las respuestas que pueden aportar a esta tarea un profesor de matemática en servicio y recursos provenientes de la IAG. El empleo de recursos provenientes de IAG en contextos educativos puede generar oportunidades de su uso por parte de docentes y estudiantes en pos de potenciar los procesos de enseñanza-aprendizaje [15]. El objetivo de esta investigación se dirige a estudiar las posibilidades creativas de modelos de IAG accesibles a todo público, como son ChatGPT 3.5, Bard y Bing Chat, para el estudio de un problema en el que se involucra una curva fractal, y comparar las respuestas de estos chatbots con la respuesta aportada por un profesor de matemática en servicio

El artículo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se analizan antecedentes en la temática del trabajo. En la sección 3 se describe el fractal denominado *el copo de nieve de Koch*. La sección 4 presenta la metodología de la investigación realizada. Luego, la sección 5 detalla los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones alcanzadas.

2. Antecedentes

La IAG basa la generación de nuevo contenido en modelos aprendidos a partir de grandes volúmenes de datos con técnicas de aprendizaje profundo. En el caso de los chatbots, cuyo principal objetivo es mantener una conversación, la tarea de generación de texto recae en los modelos de lenguaje o Large Language Models (LLMs) en los que se fundamentan. Así ChatGPT utiliza los modelos de la serie GPT, como GPT 3.5 [16] y GPT 4 [17], empleado por Bing Chat, mientras que Google Bard utiliza PaLM-2 que tiene su origen en PaLM [18]. Al incorporar otras modalidades, como imágenes, surgen los modelos multimodales o LMMs (Large Multimodal Models) que son capaces de procesar elementos visuales además de texto tales como Dall-E o Midjourney.

2.1 Geometría Fractal e IAG

Con la hipótesis de que la geometría fractal existe en el conocimiento básico del mundo, [19] investigaron el uso de imágenes fractales para enseñar a un sistema automatizado los conceptos básicos del reconocimiento de imágenes, en vez de usar fotos de objetos reales. Para ello crearon un base de datos (FractalDB) con una variedad de fractales (semejantes a hojas, copos de nieve o caracoles), y pre-entrenaron una red neuronal convolucional. Los resultados fueron comparables con los de los modelos entrenados por completo con los conjuntos de datos del estado del arte (como ImageNet o Places). Así como la autosemejanza emerge en las formas de la naturaleza, en [20] se argumenta que la presencia de esta propiedad en la estructura del lenguaje puede estar interconectada con la inteligencia exhibida por los LLMs. Los autores sostienen que los patrones/dependencias de corto alcance en el lenguaje, como los que ocurren dentro de los párrafos, reflejan los patrones/dependencias de mayor alcance, como los que ocurren en documentos completos. El trabajo encuentra una estimación concreta de los parámetros fractales del lenguaje, entre ellos la dimensión fractal, a partir de experimentos con PaLM-2 y otros LLMs. También muestran que la incorporación de parámetros fractales puede mejorar notablemente la capacidad de predecir el desempeño posterior en LLM, por sobre las métricas conocidas. Este trabajo brinda una nueva e interesante perspectiva en el estudio de cómo la predicción de la siguiente palabra que hacen los LLMs puede conducir a una comprensión de la estructura del

texto en múltiples niveles de granularidad, desde palabras y cláusulas hasta contextos e intenciones más amplios.

2.2 LLMs y Geometría

Los estudios sobre el desempeño de los LLMs en el razonamiento matemático se han ocupado principalmente por la construcción de conjuntos de datos de referencia (benchmarks) y el análisis cuantitativo de los resultados de un modelo determinado con respecto a ellos [21, 22]. Aunque sus hallazgos pueden proporcionar una visión general del desempeño de los LLMs en el dominio de matemáticas, todavía hay una falta de comprensión de sus fortalezas y debilidades en términos generales, en idiomas específicos como el Español y en áreas particulares de las Matemáticas, como por ejemplo Geometría.

Encontrar soluciones para problemas de geometría puede resultar una tarea especialmente desafiante para la IA generativa basada en LLM multimodales, ya que no sólo implica el conocimiento de conceptos fundamentales (teoremas) y su correcta aplicación, sino que involucra además el uso de habilidades de razonamiento espacial. De hecho, incluso los modelos multimodales más avanzados presentan dificultades para comprender con precisión figuras geométricas y las relaciones entre los elementos fundamentales como puntos y líneas, e interpretar con precisión conceptos básicos como los grados de un ángulo [23]. Soluciones a este problema incluyen el entrenamiento con conjuntos de datos específicos para enriquecer los modelos, tal es el caso del modelo G-LLaVa [23]. Sin embargo estos modelos, no son masivamente accesibles y están acotados al idioma de sus datos de entrenamiento, usualmente el Inglés.

3. El fractal “copo de nieve de Koch”

El copo de nieve de Koch (también conocido como estrella de Koch o isla de Koch) es una curva fractal, y uno de los primeros fractales que se han descrito. Se publicó en un artículo de 1904 titulado *Sobre una curva continua sin tangentes, construible a partir de la geometría elemental* por el matemático sueco Helge von Koch. El copo de nieve de Koch se puede construir comenzando con un triángulo equilátero y sustituyendo cada lado por la curva de Koch.

Para calcular el perímetro y el área del copo de Koch se debe construir primero un triángulo equilátero de lado L , de vértices A , B y C . Llamaremos a esta primera construcción I_0 . Luego, para la primera iteración tenemos que dividir cada lado del triángulo equilátero en tres segmentos de igual longitud (es decir, de longitud $L/3$) y tomar el segmento del medio como base de un nuevo triángulo equilátero (sombreado verde). Esto no es otra cosa que reemplazar cada lado del triángulo por la curva de Koch. La Figura 1 presenta esta primera iteración.

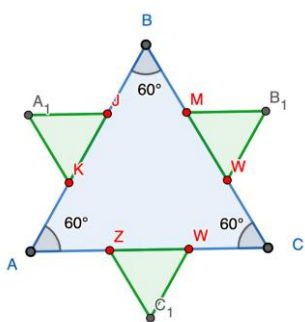


Figura 1. Primera iteración de la construcción del copo

Las técnicas matemáticas para realizar esta trisección del segmento son variadas. Podría, por ejemplo, realizarse utilizando el teorema de Tales (Figura 2), o a través de vectores, o bien con software, como por ejemplo, GeoGebra, utilizando la opción de Trisecar elementos, entre otros.

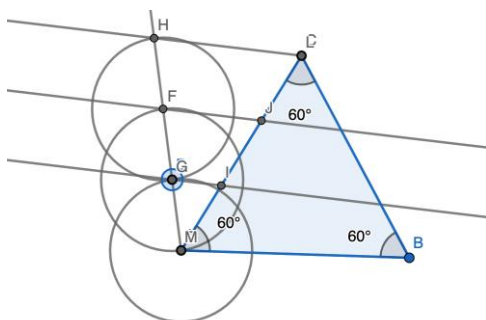


Figura 2. Trisección del lado utilizando Tales

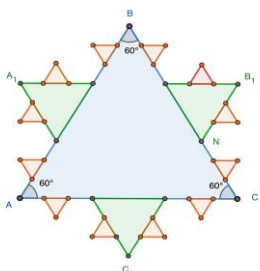
De esta forma, en cada lado del triángulo original, hay ahora cuatro segmentos iguales, por lo tanto, para esta primera iteración la figura que antes tenía tres lados, ahora tiene 12. Este valor se obtiene de multiplicar los 3 lados del triángulo por la cantidad de segmentos de cada lado, es decir, por 4. Por lo tanto, rotulando con I_1 a la cantidad de lados de la primera iteración se tiene:

$$I_1 = 3L \cdot 4 = 12L$$

Para la siguiente iteración, se repite el procedimiento para cada lado de cada triángulo, de lo que se obtiene una figura de 48 lados. Este 48 surge de multiplicar la cantidad de lados de la iteración anterior (12 lados) por 4, que es la cantidad de nuevos segmentos que se obtienen de la trisección (Figura 3).

$$I_2 = 12L \cdot 4 = 48L$$

Figura 3. Segunda iteración de la construcción del copo



Las siguientes iteraciones se construyen de forma análoga. Habiendo construido el copo de Koch, se quiere calcular a) el perímetro de este fractal, y, b) su área.

Para el caso a) se tiene que el perímetro de la figura 1 (correspondiente a I_0) es: $P_0 = 3 \cdot L$. Luego, para la primera iteración (I_1) el cálculo del perímetro debe tener en cuenta que cada segmento es ahora un tercio del original. Así se tiene que:

$$\text{si } P_0 = 3 \cdot L \Rightarrow P_1 = 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3}\right) L = 12 \left(\frac{1}{3}\right) L$$

De manera análoga se sigue para las demás iteraciones.

$$\text{si } P_1 = 12 \left(\frac{1}{3}\right) L \Rightarrow P_2 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) L \Rightarrow P_2 = 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{3^2}\right) L = 3L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

Si se continúa la construcción del copo de nieve de Koch, el perímetro para la iteración n estaría dada por la siguiente expresión:

$$P_n = 3L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

De esta forma, el perímetro del copo de Koch es el resultado de calcular el límite de la expresión anterior cuando n tiende a infinito. Es decir,

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = 3L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^\infty = \infty$$

Es importante resaltar en este punto que las iteraciones permiten construir una sucesión cuyo límite en el infinito resulta ser el perímetro del fractal de Koch. Así, el perímetro del copo de nieve de Koch es infinito cuando la cantidad de iteraciones (es decir, n) tiende a ser infinita.

Para el caso b), es decir, el cálculo del área del copo de Koch, se parte de la iteración 0, que corresponde al área del triángulo equilátero inicial de lado L . Esto corresponde al área de la figura 1 (correspondiente a I_0): $A_0 = \frac{B \cdot h}{2}$. Para calcular la altura (h) del triángulo equilátero basta con dividirlo en dos triángulos rectángulos y utilizar el Teorema de Pitágoras. La base (B) es el valor del lado L .

Así se obtiene que: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} L$. Luego, el área resulta ser:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{1}{2} B h = \frac{1}{2} L \frac{\sqrt{3}}{2} L = \frac{1 \sqrt{3}}{2 \cdot 2} L^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$$

De esta forma, se obtiene que para I_0 el área es $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$. Luego, y sabiendo que la iteración siguiente, denotada por I_1 , tiene 3 nuevos triángulos equiláteros (de lado igual a $\frac{1}{3}$ de L), se obtiene que el área del copo para esta iteración resulta de sumar al área anterior (denotada por A_0) tres veces el área de los triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{3}L$. La forma de calcular el área de estos tres nuevos triángulos es de procedimiento análogo al triángulo inicial. Es decir, determinando la altura, la base y aplicando la fórmula correspondiente. De esta forma, se obtiene que A_1 es:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}L\right)^2$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^2 L^2$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \left(1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$$

Equivalentemente, para I_2 la iteración tiene 12 nuevos triángulos equiláteros (de lado igual a $\frac{1}{3}$ de $(\frac{1}{3} L)$), es decir, de lado $\frac{1}{9} L$. Repitiendo el mismo procedimiento, se obtiene que el área del copo de Koch para la iteración 2 es

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3} L\right)^2 + 12 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9} L\right)^2$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^2 L^2 + 12 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^2 L^2$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \left(1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \left(\frac{1}{9}\right)^2\right)$$

Para la siguiente iteración, es decir, para I_3 se tiene:

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \left(1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48 \left(\frac{1}{27}\right)^2\right)$$

Sabiendo que las sucesivas iteraciones se construyen repitiendo este procedimiento, se concluye que el área del copo de Koch para la n -ésima iteración es:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \left(1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48 \left(\frac{1}{27}\right)^2 \dots\right)$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \left(1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 \dots\right)$$

Multiplicando y dividiendo por 4 la expresión anterior se tiene:

$$A_n = \frac{1\sqrt{3}}{4} L^2 \left(4 \cdot 1 + 3 \cdot 4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + 3 \cdot 4^3 \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 \dots\right)$$

$$A_n = \frac{1\sqrt{3}}{4} L^2 \left(4 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + 3 \cdot 4^3 \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 \dots\right)$$

Sabiendo que $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$ es equivalente a $\left(\frac{1}{3^{2n}}\right)$ se reescribe la expresión anterior de la siguiente manera:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 \left(4 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{3^2}\right)^1 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + 3 \cdot 4^3 \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 \dots\right)$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 \left(4 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^1 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot 4^3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \dots\right)$$

Una vez que el término 4 y $\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$ tienen la misma potencia se reescribe la expresión como sigue:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 \left(4 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^1 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \dots\right)$$

De aquí, es posible nombrar los términos:

$$3 \left(\frac{4}{9}\right)^1 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \dots$$

Como la siguiente serie geométrica infinita:

$$3 \left(\frac{4}{9}\right)^1 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 3 \left(\frac{4}{9}\right)^3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Luego, es el análisis de convergencia de esta serie geométrica lo que permite calcular el área. Para ello, se determina la razón de la serie y se analiza si su valor absoluto es menor o mayor que uno. A sabiendas que la razón es:

$$r = \frac{4}{9} \Rightarrow |r| < 1$$

Se sabe que la serie converge y su suma está determinada por la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

Reemplazando en la expresión original se tiene:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 \left(4 + \frac{12}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16} L^2 \frac{32}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} L^2$$

4. Metodología

Este trabajo adopta una metodología de tipo exploratoria cuyo objetivo es examinar, analizar y comparar las respuestas que ofrecen chatbots y un profesor de matemática en servicio a un mismo problema matemático, el del cálculo del perímetro y área del fractal copo de Koch. Se analizan las respuestas generadas por los siguientes recursos de IAG: ChatGPT 3.5¹ (de aquí en adelante, ChatGPT), Bard² y Bing Chat³ (de aquí en adelante, Bing) (en sus tres modalidades: versión más creativo, más equilibrado y más preciso). La inclusión de múltiples chatbots permite aportar diversidad de respuestas ya que varían de acuerdo a la precisión, diversidad y capacidades en general de cada LLM (aprendidos a partir de distintos corpus de datos y con diferentes estrategias algorítmicas). Además de las respuestas de estos chatbots, se considera la respuesta al mismo problema aportada por un profesor de matemática en servicio. Este profesor era parte de un curso de formación continua. Una de las tareas del curso, era la resolución de problemas matemáticos como el del copo de nieve de Koch.

El objetivo de esta investigación es comparar las soluciones, sus validaciones en los procedimientos y las representaciones gráficas propuestas por los modelos y el profesor. El problema, tal como fue presentado es el siguiente:

El copo de nieve de Koch (también conocido como estrella de Koch o isla de Koch) es una curva fractal y uno de los primeros fractales que se han descrito. Se publicó en un artículo de 1904 titulado Sobre una curva continua sin tangentes, construíble a partir de la geometría elemental por el matemático sueco Helge von Koch. El copo de nieve de Koch se puede construir comenzando con un triángulo equilátero, sustituyendo cada lado por la curva de Koch. Calcular el perímetro y el área del copo de Koch.

Las respuestas de los recursos de IAG fueron resultantes de varias interacciones con los mismos. Es decir, no fue

suficiente un único *prompt* (pregunta o instrucción) para obtener tanto el área como el perímetro, así como también las justificaciones de los procedimientos desarrollados en los cálculos. La formulación del problema, fue utilizado como *prompt* inicial para los chatbots considerados en el estudio: *Bard*, *Bing* y *ChatGPT*. A partir de una respuesta inicial, se continuó preguntando sobre la validación matemática del valor obtenido para el perímetro y para el área del copo de Koch, utilizando el siguiente *prompt*: *¿Podrías demostrar matemáticamente que el perímetro tiende a infinito, mientras que el área es finita?* Finalmente, con el objeto de obtener una representación gráfica del copo de Koch, se pidió a los chatbots mediante el *prompt*: *¿Podrías hacer una representación gráfica del copo de nieve de Koch?* Las representaciones gráficas obtenidas fueron en la mayoría de los casos el resultado de ejecutar los códigos Python ofrecidos como respuesta por los chatbots. Solo Bing Chat generó imágenes usando IAG, mediante Dall-E, por lo que luego se le pidió explícitamente que provea un código Python para generar una representación gráfica.

Para el análisis de las respuestas se generó la Tabla 1. Las columnas de esta tabla contienen las respuestas al problema aportada por, respectivamente, el profesor, ChatGPT, Bard y Bing (Copilot) en sus tres versiones (más creativo, más equilibrado y más preciso). Cada una de esas columnas contiene dos subcolumnas que corresponden a la diferenciación entre el procedimiento y la validación matemática propuestas en esa respuesta. Se considera una validación en el sentido de justificar porqué se realiza un procedimiento y/o como se obtiene un resultado. No se considera exclusivamente en este trabajo a la validación en el sentido de una demostración matemática. Los niveles de validaciones son cinco: *Nula*: cuando la respuesta no es acompañada por ningún tipo de justificación; *Baja*: cuando se realizan algunos intentos de validación pero queda en el orden de lo coloquial; *Media*: cuando se advierte un intento de justificación matemática centrado en lo algebraico; *Alta*: cuando se realiza un proceso de justificación matemático, como por ejemplo, usando el método del absurdo y, finalmente, el nivel *No corresponde*, cuando no se hace uso de una noción o no se aporta un resultado al dar la respuesta.

Las filas de la Tabla 1 corresponden a las categorías y subcategorías de análisis definidas de forma inductiva. La primera categoría corresponde a *C₁: Construcción del fractal copo de nieve de Koch*. Sus correspondientes subcategorías son:

C_{1.1}: Construcción del triángulo equilátero: se analizó si en la respuesta se construía matemáticamente el copo de Koch a partir del triángulo equilátero. Esto es, asegurándose en esa construcción (tanto en procedimiento como en validación) que los lados (y/o ángulos) son iguales.

C_{1.2}: Trisección del lado: se analizó si las respuestas contienen las maneras y validaciones que aseguran la partición de cada lado del triángulo en tres segmentos de igual longitud.

C_{1.3}: Representación gráfica: se analizaron las representaciones del copo de nieve de Koch generadas tanto por el profesor como por los chatbots. Para estos últimos, fueron necesarias múltiples interacciones hasta obtener una representación gráfica del fractal, ya que en la mayoría de los casos, no se obtuvo una gráfica correcta con el *prompt* inicial: *¿Podrías hacer una representación gráfica del copo de nieve de Koch?*

La segunda categoría corresponde a *C₂: Cálculo del perímetro del fractal copo de Koch*. Sus correspondientes subcategorías son:

C_{2.1}: Construcción de la sucesión: el cálculo del perímetro requiere, en primer lugar, construir una sucesión en la cual cada término es el perímetro de una iteración del copo de Koch. Esta iteración proviene de quitar el segmento central de la trisección de cada lado y construir allí un nuevo triángulo equilátero.

C_{2.2}: Límite de la sucesión: en segundo lugar, este cálculo requiere tomar el límite de la sucesión cuando la cantidad de iteraciones tiende a infinito.

C_{2.3}: Valor del perímetro: el cálculo del límite de la sucesión (correspondiente a la categoría anterior) da por resultado el valor del perímetro. En este punto es clave reconocer que el perímetro es el valor de este límite y no el término general de la sucesión.

La tercera categoría corresponde a *C₃: Cálculo del área del fractal copo de Koch*. Sus correspondientes subcategorías son:

C_{3.1}: Cálculo de la altura: el cálculo del área requiere, en primer lugar, determinar la altura y la base del triángulo. La base es un dato pues corresponde a uno de los lados del triángulo. El foco es entonces determinar la longitud de la altura utilizando la propiedad que la altura en un triángulo equilátero es mediatriz de la base y entonces, se utiliza el Teorema de Pitágoras para su cálculo.

C_{3.2}: Construcción de la serie geométrica: en segundo lugar, este cálculo requiere las sumas sucesivas de las áreas de los triángulos que se agregan a cada iteración lo que conduce, inevitablemente, a una serie geométrica infinita.

C_{3.3}: Valor de la razón de la serie: en tercer lugar, como una posible técnica para determinar el resultado de la serie geométrica infinita, requiere determinar su razón.

C_{3.4}: Valor del área: el cálculo del área es el resultado de la serie.

Tabla 1. Análisis de las resoluciones del profesor y de los chatbots

Categorías de análisis	Profesor		ChatGPT		Bard		Bing (Copilot)					
							más creativo		más equilibrado		más preciso	
	Proc.	Val.	Proc.	Val.	Proc.	Val.	Proc.	Val.	Proc.	Val.	Proc.	Val.
C₁: CONSTRUCCIÓN DEL FRACTAL COPO DE KOCH												
C _{1.1} : Construcción del triángulo equilátero												
C _{1.2} : Trisección del lado												
C _{1.3} : Representación gráfica												
C₂: CÁLCULO DEL PERÍMETRO DEL FRACTAL COPO DE KOCH												
C _{2.1} : Construcción de la sucesión												
C _{2.2} : Límite de la sucesión												
C _{2.3} : Valor del perímetro												
C₃: CÁLCULO DEL ÁREA DEL FRACTAL COPO DE KOCH												
C _{3.1} : Cálculo de la altura												
C _{3.2} : Construcción de la serie geométrica												
C _{3.3} : Valor de la razón de la serie												
C _{3.4} : Valor del área												

En la sección siguiente, se presentan los resultados y su discusión.

5. Resultados y discusión

En esta sección se analizan las respuestas obtenidas de los chatbots y el profesor en función de las categorías y sus correspondientes subcategorías, formuladas en la sección anterior. Respecto a la categoría C₁: *Construcción del fractal copo de Koch*, se realiza el análisis de sus correspondientes subcategorías, que son:

C_{1.1}: *Construcción del triángulo equilátero*: el profesor, Bard y las tres versiones de Bing (Copilot) proponen un triángulo equilátero genérico de lado L. En el caso de Bing (más equilibrado) además de explicitar que el triángulo es equilátero, indica que cada lado del mismo se reemplaza por la curva de Koch. Por otra parte, tanto el profesor como los chatbots, excepto Bing en su versión más equilibrado, no ofrecen ningún tipo de validación respecto a la construcción del triángulo inicial. Bard (más equilibrado) es el único que lo justifica a partir de la amplitud de los ángulos del triángulo.

C_{1.2}: *Trisección del lado*: tanto el profesor como los chatbots se refieren a dividir cada lado del triángulo en tres partes iguales, pero ninguno menciona cómo hacerlo y validarlo desde la matemática. Una manera de hacer esto es, por ejemplo, utilizando el Teorema de Thales.

C_{1.3}: *Representación gráfica*: el profesor propone las imágenes correctas del fractal para las primeras tres

iteraciones. En el caso de ChatGPT, que no tiene la capacidad de generar gráficos, al igual que Bard (hasta el momento de escritura de este artículo), las respuestas consistieron en ofrecer un código fuente que ejecutado generase la representación buscada. De las tres consultas realizadas, solo en uno generó un código Python cuyo resultado es la gráfica apropiada. En otra de las respuestas generó la secuencia que se ilustra en la Figura 4.

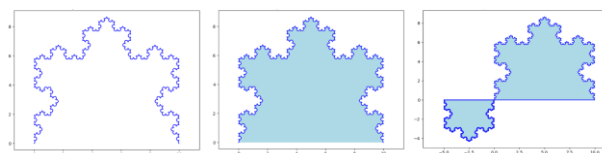


Figura 4. Gráficas generadas por ChatGPT

Dado que la respuesta original es la curva de Koch (no el copo de nieve), se le repreguntó indicando que el copo era una figura cerrada, a lo que respondió con la segunda imagen, que sigue siendo igual a la anterior solo con el fondo coloreado. Esto podría indicar una falta de interpretación de lo que significa una figura cerrada. Al indicar que la representación era nuevamente incorrecta, genera una tercera imagen que si bien es cerrada, no se ajusta a las propiedades del copo de nieve de Koch. En otra respuesta, ofreció una gráfica muy pobre construída en código ASCII.

Bing (en todas sus versiones) ante el primer prompt, ofreció una variedad de imágenes generadas con Dall-E, como las que se presentan en la Figura 5, que si bien son ricas visualmente, no apoyan un análisis matemático concreto de los elementos específicos.

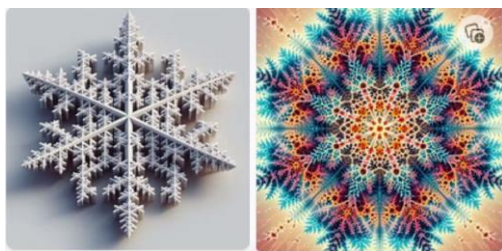


Figura 5. Gráficas generadas por Bing en base a Dall-E

Sin embargo pidiendo a Bing explícitamente el código Python para realizar la representación gráfica, en dos oportunidades arroja un código correcto desde el inicio. Más interesante aún, la versión de Bing más creativa genera un programa Python que solicita al usuario el número de recursiones que desea, y genera el gráfico de acuerdo a ello. Es decir, que logró extraer el concepto de recursión del fractal y lo incorporó a la interacción con el usuario en la generación de gráficos. Finalmente, los resultados de Bard fueron más modestos, devolviendo en todos los casos la curva de Koch como primer resultado y requiriendo al menos dos iteraciones para alcanzar una gráfica correcta del copo de nieve de Koch.

Respecto a la segunda categoría, C_2 : *Cálculo del perímetro del fractal copo de Koch*. Sus correspondientes subcategorías son:

$C_{2.1}$: *Construcción de la sucesión*: el profesor y Bing en dos modalidades, más creativo y más equilibrado, construyen la sucesión obteniendo de forma correcta el término general de la misma. En el caso del profesor, no ofrece ninguna validación matemática al respecto, mientras que las dos versiones de Bing antes mencionadas, justifican coloquialmente cómo construye el término general. Tanto ChatGPT como la versión más precisa de Bing no describen el procedimiento de construcción de la sucesión. La presentan directamente como la forma de calcular el perímetro. Bard, por su parte, no recurre a la noción de sucesión sino que presenta el cálculo del perímetro a partir de una recursión (Figura 6).

$$P_n = 3L + 4 \cdot \frac{4}{3}L \cdot P_{n-1}$$

Figura 6. Fragmento de respuesta de Bard

$C_{2.2}$: *Límite de la sucesión*: el profesor afirma que la sucesión tiende a infinito y que entonces es divergente sin validar este resultado. De los chatbots salvo Bing más creativo, el resto no emplea la noción de límite de manera explícita para calcular el perímetro, aunque Bard hace referencia a una tendencia al infinito, dando una idea intuitiva de la noción de límite. Bing más creativo utiliza el límite para calcular el valor del perímetro y lo anota como se indica en la Figura 7. Esta notación distingue al término general de la sucesión del límite cuando n tiende a infinito de esa sucesión como valor del perímetro.

$$P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot s$$

El límite del perímetro cuando n tiende a infinito es:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot s$$

Figura 7. Fragmento de respuesta de Bing más creativo

Luego lo demuestra por el absurdo, a lo que se ha categorizado como una validación alta.

$C_{2.3}$: *Valor del perímetro*: el profesor, Bing más equilibrado y Bing más preciso afirman que el límite es infinito sin ofrecer ninguna validación matemática. El profesor afirma que el copo de nieve de Koch tiene perímetro infinito y entonces se puede escribir como se indica en la Figura 8. Luego, concluye que la sucesión es divergente.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3L \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Figura 8. Fragmento de respuesta del profesor

Por su parte ChatGPT confunde el valor del perímetro con el término general de la sucesión (Figura 9), y presenta la fórmula para un triángulo particular, de lado igual a 1, y para cinco iteraciones.

Por ejemplo, si comenzamos con un triángulo equilátero de longitud de lado $l = 1$ y realizamos n iteraciones, podemos calcular el perímetro y el área del copo de Koch utilizando las fórmulas mencionadas anteriormente.

Para una cantidad específica de iteraciones, simplemente reemplazamos n en las fórmulas con el número deseado. Por ejemplo, si queremos calcular el perímetro y el área después de 5 iteraciones:

$$P_5 = 3 \times 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^5$$

$$A_5 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^5 \times 1^2$$

Evaluando estas expresiones, podemos obtener los valores numéricos para el perímetro y el área.

Figura 9. Fragmento de respuesta de ChatGPT

Bing más creativo calcula el límite por definición del término general de la sucesión, y lo demuestra por el método del absurdo, lo que categorizamos como una validación alta (Figura 10).

$|P_n - L| < \epsilon$

Donde L es el valor del límite que queremos hallar. En este caso, queremos probar que el límite no existe, es decir, que no hay ningún valor de L que cumpla esta condición para todo ϵ . Para ello, vamos a usar un método llamado **reducción al absurdo**. Este método consiste en suponer que lo que queremos probar es falso, y llegar a una contradicción lógica. Así, demostramos que nuestra suposición era falsa, y por lo tanto, lo que queríamos probar es verdadero.

Figura 1. Fragmento de respuesta de Bing más creativo

Respecto a la tercera categoría, C_3 : *Cálculo del área del fractal copo de Koch*. Sus correspondientes subcategorías son:

$C_{3.1}$: *Cálculo de la altura*: ninguno de los chatbots se refiere a determinar la altura del triángulo equilátero para el cálculo del área. Mientras que, el profesor afirma usar una propiedad del triángulo equilátero para calcular la longitud de la altura, pero sin explicitarla.

$C_{3.2}$: *Construcción de la serie geométrica*: ni el profesor ni los chatbots presentan la construcción de la serie geométrica necesaria para determinar el valor del área. Sin embargo, el profesor, Bard y Bing (en sus versiones más creativa y más preciso) aluden al término general de misma para calcular el área. En particular Bard, se refiere a una recursión. Un fragmento de esta construcción se presenta en la Figura 11:

Por lo tanto, el área total del copo de nieve de Koch en la iteración n es:

$$A_n = A_1 + 4A_{n-1}$$

Donde A_1 es el área del triángulo inicial.

Resolviendo esta ecuación recursiva, se puede demostrar que el área del copo de nieve de Koch converge a un valor finito:

$$\text{Área} = 8A_1 = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 = 2\sqrt{3} L^2$$

Resumen

- Perímetro: Infinito
- Área: Finita, $2\sqrt{3} L^2$

Figura 11. Fragmento de respuesta de Bard

C_{3.3}: Valor de la razón de la serie: el profesor, Bing (más creativo y más preciso) determinan el valor correcto de la razón geométrica aunque no ofrecen ninguna validación al respecto. ChatGPT, Bard y Bing más equilibrado no aluden a la razón, lo cual se condice con la categoría anterior en la cual tampoco mencionan la serie geométrica.

C_{3.4}: Valor del área: el profesor y todos los chatbots, excepto Bard, obtienen el valor correcto del área. Si bien Bard indica que el área es finita, concluye erróneamente en que su valor es $2\sqrt{3} L^2$. Bing más creativo si bien obtiene el valor esperado para el área, presenta una contradicción en la notación al indicar que $A = \frac{8}{5}A$. Esta contradicción proviene de rotular con la misma letra (la letra A) a dos objetos matemáticos diferentes. Por un lado, el valor del área del triángulo equilátero original y por el otro, el valor del área del copo de Koch (Figura 12).

El área del copo de nieve de Koch se puede obtener sumando el área del triángulo equilátero inicial más el área de los triángulos que se van añadiendo en cada iteración. El área de cada triángulo se obtiene multiplicando por $\frac{4}{9}$ el área del triángulo anterior. Así, si el triángulo equilátero inicial tiene área A , el área del copo de nieve después de n iteraciones es:

$$A_n = A + 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot A$$

El límite del área cuando n tiende a infinito es:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot A \right)$$

Este límite se puede calcular usando la fórmula de la suma de una serie geométrica infinita, y el resultado es:

$$A = \frac{8}{5} \cdot A$$

Esto significa que el área del copo de nieve de Koch es finita, y es $\frac{8}{5}$ veces el área del triángulo equilátero inicial.

Figura 12. Fragmento de respuesta de Bing más creativo

En los gráficos siguientes, se presentan los resultados obtenidos para cada nivel de validación propuestas por los chatbots y el profesor. Respecto a la categoría **C₁: Construcción del fractal copo de Koch**, el gráfico de la figura 13 evidencia la preponderancia de *validación nula* en todos los casos y ausencia de *validación alta*. El único nivel de validación que se identifica en el profesor, Bard, Bing más creativo y Bing más preciso es *nula*. En los otros casos, además de la validación *nula*, Bing más equilibrado presenta una validación *baja* y en ChatGPT se advierte la categoría *no corresponde*, debido a que no hace referencia al triángulo equilátero.

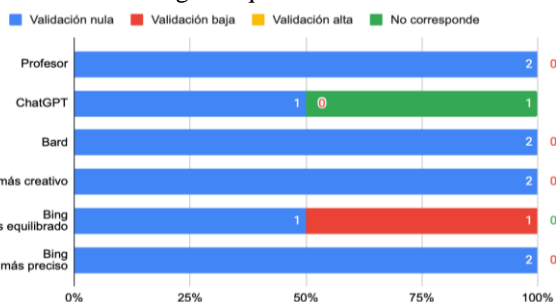


Figura 13. Validación de la construcción del fractal

Respecto a la categoría **C₂: Cálculo del perímetro del fractal copo de Koch**, en la figura 14 se advierte que el único que justifica matemáticamente todas sus respuestas en el cálculo del perímetro es Bing más creativo, identificando dos validaciones *altas* y una *baja*. Por su parte, todas las validaciones del profesor corresponden al nivel de *nulas*. Bard, Bing más equilibrado y Bing más preciso, además de las validaciones *nulas*, ambos contienen una validación *baja* para cada uno de ellos.

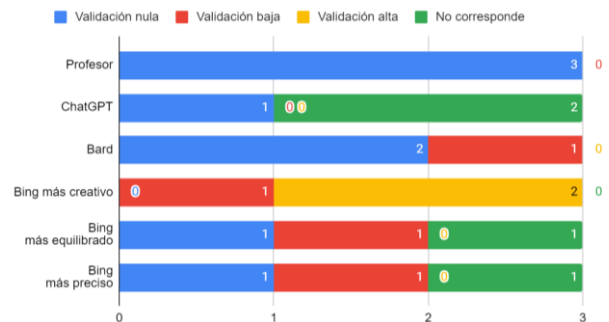


Figura 14. Validación del cálculo del perímetro del fractal

Respecto a la categoría **C₃: Cálculo del área del fractal copo de Koch**, la figura 15 evidencia que salvo Bing más creativo, quien presenta dos validaciones *bajas*, el resto de los chatbots se identifican con las validaciones de nivel *nula* y *no corresponde*. El profesor, solamente contiene la categoría *validación nula*.

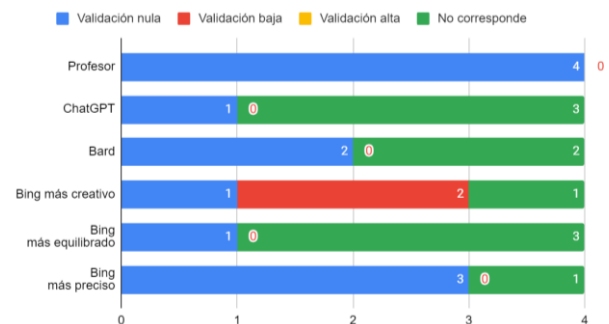


Figura 15. Validación del cálculo del área del fractal

Finalmente, el gráfico 16 sintetiza los resultados para cada nivel de validación respecto a los chatbots y el profesor sin distinguir entre cada categoría. Se advierte que el profesor no presentó ningún tipo de validación matemática (todas sus validaciones son de tipo *nula*), mientras que las validaciones de los chatbots oscilan entre las categorías *nula*, *baja*, *alta* y *no corresponde*. Dejando de lado la categoría *no corresponde*, Bing más creativo es el que más valida (tres *bajas* y dos *altas*) mientras que el profesor y ChatGPT son los que menos validan (todas de nivel *nula*).

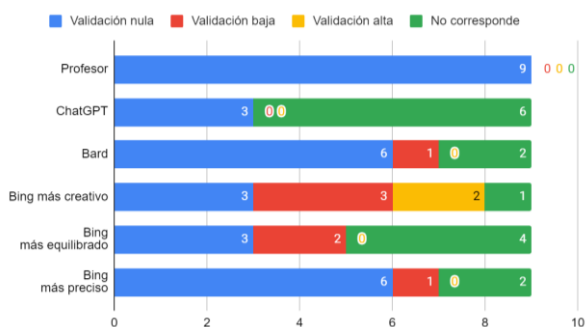


Figura 16. Tipo de validación de la tarea

Conclusiones

El análisis muestra diferencias significativas entre los procedimientos, representaciones gráficas y validaciones de las respuestas obtenidas de los chatbots y el profesor.

Respecto al procedimiento, el más débil desde el punto de vista matemático de los chatbots es el ChatGPT, pues no refiere al triángulo equilátero, no construye la sucesión clave para el cálculo del perímetro, no hace referencia explícita al límite como el paso central para obtener el perímetro, confunde la expresión general del copo de nieve de Koch con el valor del perímetro, restringe a los cálculos para un triángulo de lado 1 unidad, tampoco refiere a la altura como uno de los elementos claves para poder calcular el área del copo de nieve de Koch, ni construye la serie geométrica indispensable para determinar el valor del área. En un punto intermedio, los procedimientos realizados por el profesor, son adecuados desde el punto de vista matemático. Por su parte, los procedimientos de Bard no resultan tan débiles como los del ChatGPT, pues bajo procedimientos análogos hace alusión tanto para el perímetro como para el área a la noción de recursión. En contraposición Bing más creativo resulta ser el más sólido desde el punto de vista matemático en el procedimiento, y de no haber cometido el error de asignar la misma letra para el área del triángulo equilátero y la del copo de Koch, sería el chatbot más adecuado para resolver este problema.

Respecto a la representación gráfica, en términos generales, si bien en algunos casos se alcanzó una representación correcta en el primer intento, los chatbots confundieron en la mayoría de los gráficos la curva de Koch con el copo de nieve. Esto podría ser utilizado como estrategia para la exploración y discusión de los elementos geométricos involucrados y propiedades de las figuras creadas.

Respecto a la validación y como ya se indicó previamente, dejando de lado la categoría *no corresponde*, Bing más creativo es el que más valida (tres *bajas* y dos *altas*) mientras que el profesor y ChatGPT son los que menos lo hacen (todas sus validaciones son de nivel *nula*).

En conclusión, es posible afirmar que las metodologías que incluyan IA generativa como parte activa en la resolución de problemas de la geometría fractal o como base para la generación de recursos para la enseñanza de este tema, pueden valerse de las observaciones del

presente trabajo para su efectiva incorporación. Finalmente alentamos el uso de recursos provenientes de la IAG siempre y cuando se analicen críticamente las respuestas que ofrecen.

Notas

- ¹ <https://chat.openai.com/>
- ² <https://bard.google.com/>
- ³ <https://www.bing.com/>

Referencias

- [1] D. Chavil, I. Romero, J. Rodríguez, "Introducción al concepto de fractal en enseñanza secundaria usando realidad virtual inmersiva", *Desde el Sur*, vol. 12, no. 2, pp. 615-629, 2020.
- [2] D. Crespo, *Mandelbrot. En busca de la geometría de la naturaleza*. Barcelona: RBA, 2018.
- [3] B. Mandelbrot. *La Geometría Fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets, 1997.
- [4] M. Binimiles, *Una nueva manera de ver el mundo*. España: EDITEC, 2010.
- [5] S. Chen, S Herron, J. Ding, R. Mohn, "Assessing United States and Chinese secondary mathematics teachers' interest in fractal geometry," *Journal of mathematics education*. vol. 11, no. 2, pp. 17- 34, 2018.
- [6] F. Karakus, "Assessing Grade 8 Elementary School Mathematics Curriculum and Textbooks within the Scope of Fractal Geometry," *Elementary Education Online*, vol. 10, no. 3, pp. 1081-1092, 2011.
- [7] F. Karakus, "A Cross-Age Study of Student's Understanding of fractals," *Bolema*, vol. 27, no. 47, pp. 829-846, 2013.
- [8] N. Sinclair, M. Bartolini Bussi, M. de Villiers, K. Jones, U. Kortenkamp, A. Leung, K. Owens, "Geometry education, including the use of new technologies: A survey of recent research," in *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13, Monographs*, 2017, pp. 277-287.
- [9] Dirección General de Escuelas de la Provincia de Buenos Aires (2011), *Diseño Curricular para la Educación Secundaria Matemática*. Dirección General de Cultura y Educación [Online]. Disponible en: <https://abc.gob.ar/>
- [10] Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (2019), *Artes. Artes Visuales. Formación general del ciclo orientado. Imágenes fractales. 4.º año*. Ministerio de Educación e Innovación/Subsecretaría de Planeamiento Educativo, Ciencia y Tecnología [Online]. Disponible en: <https://biblioteca-digital.bue.edu.ar/>
- [11] F. Fusi, N. Sgreccia, "¿Por qué enseñar la noción de fractal en el último año de la escuela secundaria? Opiniones de especialistas en Geometría," *Épsilon*, no. 105, pp. 31-50, 2020.

[12] J. Carrasco, P. Peralta, "Fractales en el aula de secundaria", en Actas del 4° Congreso Uruguayo de Educación Matemática, Montevideo, 2012, pp. 22 - 25.

[13] A. Cañibano, P. Sastre, M. Gandini, "Ideas para Enseñar: Dimensión fractal en la enseñanza secundaria," *UNIÓN*, vol. 7, no. 28, pp. 191 - 196, 2011.

[14] N. Martín, *Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se construye un fractal teórico?*, tesis de licenciatura en Educación Matemática. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

[15] J. Flores-Vivar, F. García-Peñalvo, "Reflections on the ethics, potential, and challenges of artificial intelligence in the framework of quality education (SDG4). [Reflexiones sobre la ética, potencialidades y retos de la Inteligencia Artificial en el marco de la Educación de Calidad (ODS4)]," *Comunicar*, vol. 74, pp. 37-47, 2023.

[16] T. B. Brown, B. Mann, N. Ryder, M. Subbiah, J. Kaplan, P. Dhariwal, A. Neelakantan, P. Shyam, G. Sastry, A. Askell, S. Agarwal, A. Herbert-Voss, G. Krueger, T. Henighan, R. Child, A. Ramesh, D. M. Ziegler, J. Wu, C. Winter, C. Hesse, M. Chen, E. Sigler, M. Litwin, S. Gray, B. Chess, J. Clark, C. Berner, S. McCandlish, A. Radford, I. Sutskever, D. Amodei. Language models are few-shot learners, in Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS'20), 2020, pp. 1877–1901.

[17] OpenAI (2023). GPT-4 technical report. ArXiv, abs/2303.08774.

[18] A. Chowdhery, S. Narang, J. Devlin, M. Bosma, G. Mishra, A. Roberts, ..., and N. Fiedel, N, "PaLM: Scaling language modeling with pathways," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 24, no. 240, pp. 1–113, 2022.

[19] H. Kataoka, K. Okayasu, A. Matsumoto, E. Yamagata, R. Yamada, N. Inoue, A. Nakamura, Y. Satoh, "Pre-training without Natural Images," *International Journal of Computer Vision*, vol. 130, pp. 990–1007, 2022.

[20] I. Alabdulmohsin, V. Tran, M. Dehghani, "Fractal Patterns May Unravel the Intelligence". arXiv:2402.01825. 2024.

[21] P. Shakarian, A. Koyyalamudi, N. Ngu, L. Mareedu, "An independent evaluation of ChatGPT on mathematical word problems (MWP)," in Proceedings of the AAAI 2023 Spring Symposium on Challenges Requiring the Combination of Machine Learning and Knowledge Engineering (AAAI-MAKE), 2023.

[22] S. Frieder, L. Pinchetti, A. Chevalier, R.-R. Griffiths, T. Salvatori, T. Lukasiewicz, P. C. Petersen, J. Berner, "Mathematical capabilities of ChatGPT", arXiv:2301.13867. 2023.

[23] J. Gao, R. Pi, J. Zhang, J. Ye, W. Zhong, Y. Wang, L. Hong, J. Han, H. Xu, Z. Li, L. Kong, "G-LLaVA: Solving geometric problem with multi-modal large language model". arXiv:2312.11370. 2023.

Ana Rosa Corica

NIEM(UNCPBA/CONICET)

Tandil

Argentina

acorica@niem.exa.unicen.edu.ar

<https://www.researchgate.net/profile/Ana-Corica>

<https://orcid.org/0000-0002-3583-6081>

Verónica Parra

NIEM(UNCPBA/CONICET)

Tandil

Argentina

yparra@niem.exa.unicen.edu.ar

<https://www.researchgate.net/profile/Veronica-Parra-2>

<https://orcid.org/0000-0002-6956-0052>

Patricia Sureda

NIEM(UNCPBA/CONICET)

Tandil

Argentina

psureda@niem.exa.unicen.edu.ar

<https://www.researchgate.net/profile/Patricia-Sureda>

<https://orcid.org/0009-0004-6223-4424>

Silvia Schiaffino

ISISAN (UNCPBA/CONICET)

Tandil

Argentina

silvia.schiaffino@isistan.unicen.edu.ar

<https://silvia.schiaffino.isistan.unicen.edu.ar>

<https://orcid.org/0000-0002-7616-9756>

Daniela Godoy

ISISAN (UNCPBA/CONICET)

Tandil

Argentina

daniela.godoy@isistan.unicen.edu.ar

<https://users.exa.unicen.edu.ar/~dgodoy/>

<https://orcid.org/0000-0002-5185-4570>

Ana Rosa Corica.

Doctora en Ciencias de la Educación (UNC). Investigadora Adjunta del CONICET. Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA). Directora del NIEM (UNCPBA).

Verónica Parra.

Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Mención Matemática (UNCPBA). Investigadora Adjunta del CONICET. Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA). Integrante del NIEM (UNCPBA).

Patricia Sureda.

Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Mención Matemática (UNCPBA). Investigadora Asistente del CONICET. Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA). Integrante del NIEM (UNCPBA).

Silvia Schiaffino.

Doctora en Ciencias de la Computación (UNCPBA). Investigadora Principal del CONICET. Profesora Asociada de la Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA). Integrante del ISISAN UE (UNCPBA/CONICET).

Daniela Godoy.

Doctora en Ciencias de la Computación (UNCPBA). Investigadora Principal del CONICET. Profesora Asociada de la Facultad de Ciencias Exactas (UNCPBA). Integrante del ISISAN UE (UNCPBA/CONICET).