NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 118, noviembre de 2024, páginas 173-190

Un ciclo de modelización detrás del juego "Lights out!" como herramienta didáctica en un curso de Álgebra lineal

Victoria Artigue
(Universidad Católica de Uruguay. Uruguay)
María de los Ángeles Fanaro
(Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina)
Gabriel Núñez
Joel Gak
(Universidad Católica de Uruguay. Uruguay)

Fecha de recepción: 29 de abril de 2024
Fecha de aceptación: 08 de septiembre de 2024

Resumen

En este trabajo presentamos un ciclo de modelización matemática que fundamenta una propuesta de enseñanza para un curso curricular de Álgebra lineal, correspondiente al plan de estudio de diversas carreras de Ingeniería. La situación real de la cual partimos consiste en la anticipación de la estrategia ganadora del juego "Lights out!" a través de la matematización y el trabajo matemático con su dinámica. Este juego consiste en un teclado luminoso, donde algunas luces están encendidas y otras apagadas, siendo su objetivo apagar todas las luces bajo determinadas reglas. Describimos las fases de un ciclo de modelización detallando los procesos y subprocesos. En particular, presentamos un posible modelo matemático e informático para resolver el problema y mostramos el potencial de la tecnología digital para la validación de los resultados obtenidos en el "mundo matemático", en la situación problemática real.

Palabras clave

Ciclo de modelización matemática, tecnología digital, Álgebra lineal, juego "Lights out!", estudiantes de Ingeniería

Abstract

In this work we present a mathematical modeling cycle that supports a teaching proposal for a linear algebra curricular course, corresponding to the study plan of various Engineering careers. The real situation from which we start consists of the anticipation of the winning strategy of the game "Lights out!" through mathematization and mathematical work with its dynamics. This game consists of a luminous keyboard, where some lights are on and others are off, the objective being to turn off all the lights under certain rules. We describe the phases of a modeling cycle detailing processes and subprocesses. We explain a possible mathematical and computer model to solve the problem and the potential of digital technology regarding the validation of the results obtained in the mathematical world, in the real problematic situation.

Keywords

Mathematical modeling cycle, digital technology, linear algebra, game "Lights out!", engineering students

1. Introducción

Tradicionalmente al docente de Matemática de educación superior y de carreras del área de la ingeniería, se lo reconoce como un transmisor del conocimiento matemático de forma expositiva y desde lo abstracto, introduciendo definiciones y teoremas con exposiciones teóricas y cálculos ya existentes en libros de texto, conformándose con que el estudiante conozca y repita el método mostrado como tarea en la casa (Mendible y Ortiz, 2007; Trigueros, 2009). Estas prácticas terminan afectando los propósitos de la enseñanza de la Matemática ya que los estudiantes evidencian una pérdida del significado matemático y una descontextualización de esta ciencia, lo cual deriva en un proceso cognitivo que se limita a la memorización y en una desvinculación entre las actividades realizadas en clases de Matemática y la futura vida del estudiante (Bergeson, 2000). Más aún, el problema fundamental es que las instituciones de educación superior no forman en concordancia con las necesidades de la industria, las cuales refieren a habilidades como la resolución de problemas mediante la modelización y la simulación de situaciones reales (Rodríguez Gallegos, 2017).

De esta manera, Rattan y Klingbeil (2015) plantean la importancia del acercamiento de los estudiantes al aspecto funcional de la Matemática, mucho más que con el formal, lo cual es una cuestión primordial si se enfoca en la enseñanza de la Matemática para futuros usuarios de esta ciencia. Cabe destacar que, en la formación de ingenieros, el estudio de la matemática formal no es un objetivo en sí mismo, aunque es usual y necesaria la matematización de los problemas que se presentan en este campo. Esto genera un conflicto en el estudiante al estudiar a la Matemática y a la Ingeniería de forma separada durante su carrera (Camarena, 2008). En este sentido, la enseñanza de la Matemática en la educación superior suele estar afectada por una pérdida de significado, justamente en un ámbito en el cual el interés principal es la aplicación de esta ciencia y no la Matemática pura.

Una manera de lograr la contextualización del conocimiento matemático es presentando situaciones problemáticas que sean factibles de ser representadas mediante modelos matemáticos. Estos modelos son creados o utilizados por los estudiantes cuando sienten la necesidad de responder a preguntas específicas de situaciones que no provienen de la Matemática, sino del mundo extra-matemático. El supuesto que subyace a la introducción de la modelización matemática en el aula sugiere que cuando los estudiantes estudian situaciones problemáticas que son de su interés, son capaces de establecer formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar relaciones en dichas representaciones, manipularlas y desarrollar ideas que se puedan canalizar hacia la Matemática (Leher y Schauble, 2000 en Trigueros, 2009).

Autores como Peña, Solares, Preciado y Ortiz (2023), reconocen una amplia pluralidad de perspectivas, concepciones y propósitos en torno a lo que es la modelización matemática y su manera de introducirse en los sistemas educativos. Entre ellas, en este trabajo optamos por la denominada "perspectiva realista" que pone énfasis en la resolución de problemas en contextos reales, y más allá del desarrollo de la Matemática, se interesa por involucrar a los sujetos en la actividad profesional de modelizar. Así, se destaca la relevancia del estudio de la modelización matemática (como un ciclo) de una situación problemática enmarcada en la situación real concerniente a un juego llamado "Lights out!" o "Luces apagadas!" en español. En este trabajo mostramos el diseño de una propuesta de enseñanza y la descripción de un ciclo de modelización junto con los procesos y subprocesos necesarios para modelizar matemática e informáticamente la dinámica y la solución del juego.

1.1. Antecedentes

Este trabajo se centra en los procesos de enseñanza-aprendizaje que se presentan cuando los estudiantes estudian Matemática a través de sus aplicaciones mediante tareas que presentan una sustancial demanda de modelización (Blum, Borromeo, 2009). Esto requiere el desarrollo de una competencia conocida como modelización matemática, esto es, la construcción, la utilización (mediante adaptación) o la comparación de modelos matemáticos a la hora de resolver problemas en contexto (Blum y Niss, 1991).

Uno de los objetivos didácticos que Mendible y Ortiz (2007) recomiendan para los ingenieros en formación, es brindarles herramientas conceptuales y funcionales que contribuyan a incorporar la modelización matemática como un proceso cíclico cuando se resuelve un problema de aplicación. Un problema aplicado en Matemática está enmarcado en una situación o contexto del mundo real o el "resto del mundo" (Pollak, 1968) fuera de la matemática, así como las preguntas que vinculan conceptos matemáticos con dicha situación (Blum y Niss, 1991). La implementación de este tipo de problemas no solo desarrolla competencias matemáticas y en particular de modelización, sino que tiene otras implicancias de tipo emocionales/psicológicas, cognitivas y sociales (Blum, Borromeo, 2009), generando un mayor interés por la asignatura y promueve un pensamiento diversificado en los estudiantes (Alsina, 2007).

En lo que respecta al juego "Lights out!", diversos investigadores que provienen del campo de la Matemática formalizaron la dinámica del juego "Lights out" obteniendo distintas soluciones (Coulibaly, 2023; Fazakas, 2022; Madsen, 2010; Anderson, 2017), las cuales dependen del tamaño del tablero y de las variaciones en sus reglas. En particular, Losada (2002) realizó un estudio de varios juegos del mismo tipo, entre ellos "Lights out!" expresando que "efectivamente, sólo una de cada cuatro disposiciones al azar en un cuadrado de cinco por cinco casillas tiene solución en Lights Out!" (p.36), es decir, en algunas variantes del juego no existe una secuencia de botones a presionar para ganar. Esto último llamó poderosamente nuestra atención ya que no imaginábamos que no se pudiera ganar, lo cual nos motivó más al estudio matemático del juego. Por otra parte, artículos de revisión sistemática como los de Zabala, Ardila, García, Benito (2020) y Novaes y Almeida, (2023) sobre aprendizaje basado en juegos, aplicado a la enseñanza de la Matemática en la educación superior sugieren que los juegos logran captar la atención de muchos usuarios, generan compromiso y mejores resultados de aprendizaje.

Sin embargo, en una revisión sistemática de la literatura sobre el juego "Lights out!", no encontramos investigaciones didácticas que lo involucren en propuestas de enseñanza en educación superior. Por este motivo, en este trabajo presentamos un conjunto de actividades respaldadas por un ciclo de modelización matemática, con la intención de trabajar la modelización matemática (y también informática) por estudiantes de Álgebra Lineal que cursan carreras de Ingeniería

2. Marco teórico y conceptos de referencia acerca de la modelización matemática y el uso de las tecnologías digitales

Según Blum y Niss (1991), la interacción entre el mundo real y la Matemática implica simplificar y estructurar la "situación problemática real" para ajustarla a ciertas condiciones y supuestos. Esto significa la construcción de un modelo que conserva las características esenciales de la situación original, y se esquematiza de tal forma que permite su tratamiento matemático. Este modelo integra objetos matemáticos que corresponden a los elementos básicos de la situación original y determinadas relaciones entre estos objetos que también se corresponden con la situación original.

De acuerdo con Kaiser (2020) el proceso ideal de modelización se describe como un ciclo para estudiar problemas del mundo real en el cual se utilice la Matemática. El ciclo adoptado que adoptamos para este trabajo se compone de siete fases o pasos según Blum y Leiß (2007) y ha sido rediseñado por Greefrath (2011) tomando en consideración la contribución de la tecnología digital en las fases del ciclo. El concepto de modelización matemática implica una descripción simplificada del mundo extra-matemático con el mundo matemático, donde se trabaja con el modelo matemático e interpretando y validando los resultados matemáticos obtenidos en el mundo extra-matemático (Cevikbas, Greefrath, Hans-Stefan Siller, 2023). Este proceso da cabida a las siguientes fases del ciclo de modelización (Greefrath et al., 2013, Greefrath & Vorhölter, 2016):

1. Construcción. Los estudiantes construyen su modelo mental dada una situación para comprender y formular el problema.

2. Simplificación/estructuración. Los estudiantes identifican la información relevante e irrelevante acerca del problema real.

3. Matematización. Los estudiantes traducen, especifican y simplifican las situaciones reales en un modelo matemático como pueden ser términos, ecuaciones, figuras, diagramas y funciones.

4. Trabajo matemático. Los estudiantes trabajan con procesos matemáticos en el modelo matemático y obtienen soluciones matemáticas.

5. Interpretación. Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos manipulándolos con el modelo de la situación real y así obtienen resultados reales.

6. Validación. Los estudiantes juzgan los resultados reales en términos de plausibilidad.

7. Exposición. Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos en el modelo de la situación, en la situación real y así obtienen una respuesta al problema.

Al estudiar cómo se pueden descubrir relaciones en el ciclo de modelización, las tecnologías digitales pueden contribuir, respaldar y ampliar procesos y subprocesos como la experimentación y la investigación, la construcción de diferentes representaciones conectadas interactivamente, la verificación y la validación de los resultados obtenidos. Así, la tecnología digital puede resultar útil en diferentes fases del ciclo de modelización. Particularmente en la fase 4 del ciclo “Trabajo matemático”, se requiere de la traducción de dos tipos: primero será necesario comprenden, simplificar y traducir la tarea de modelización al lenguaje matemático, segundo dichas expresiones matemáticas tendrán que traducirse al lenguaje de la computadora para desarrollar un modelo informático, tercero, los resultados obtenidos de la tecnología deben transformarse nuevamente en el lenguaje de la Matemática (Greefrath, 2011, 2020). En la Figura 1, se describe un ciclo de modelización de 7 pasos de Blum y Leiß (2007) con sus respectivos subprocesos de modelización (arriba), y se presentan las diferentes maneras de aplicar la tecnología digital (en cursiva y en rojo) dentro del ciclo de modelización (Greefrath, 2011) (abajo).

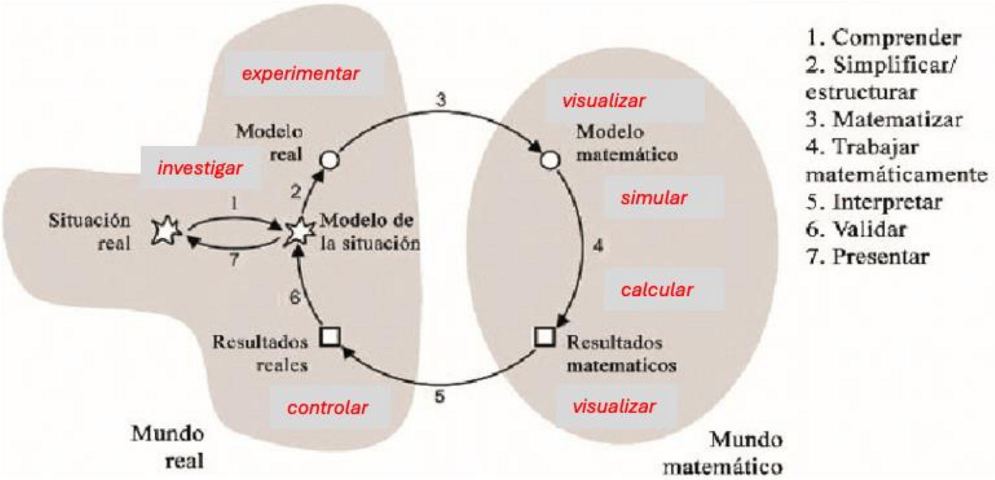


Figura 1. Descripción de un ciclo de modelización matemática de 7 pasos propuesto por Blum y Leiß (2007) con sus respectivos subprocesos de modelización, con aplicaciones de la tecnología digital (en cursiva y en rojo) según Greefrath, (2011). Traducción por parte de los autores.

Así, el impacto del uso de tecnología digital en la mejora de la enseñanza de la modelización matemática ha sido investigado en las últimas dos décadas, entendiéndose por tecnología digital cualquier producto o servicio que pueda utilizarse para crear, ver, distribuir, modificar, almacenar, recuperar, transmitir y recibir información electrónicamente en forma digital (Cevikbas, Greefrath, Hans-Stefan Siller, 2023). Se incluyen como tecnologías digitales cualquier servicio en línea como pueden ser sitios en internet, cualquier tipo de software como programas, entornos virtuales y juegos, cualquier tipo de dispositivo como computadora y cualquier tipo de contenido digital como archivos y datos.

Se ha destacado que a través del uso de la tecnología digital es posible explorar diferentes situaciones matemáticas (Drijvers, 2003), alentar nuevas maneras de comprender, evaluar e interpretar situaciones del mundo real (Molina-Toro et al., 2020). Otras investigaciones argumentan la mejora del proceso de modelización al integrar herramientas digitales como programas informáticos que faciliten los cálculos matemáticos y también validarlos, o sitios alojados en internet de manera de simular las situaciones reales problema (Greefrath et al., 2018).

Por lo tanto, este trabajo tiene la intención de describir un ciclo de modelización matemática como el presentado anteriormente, que respalda una propuesta de enseñanza holística, esto es, requiere de un ciclo de modelización completo (Blomhøj & Jensen, 2003) usando tecnología digital y enmarcada en una situación problema que consiste en encontrar una solución del juego “Lights Out!” modelando matemática e informáticamente sus reglas y su dinámica. La propuesta fue diseñada para ser aplicada en estudiantes universitarios que cursan Álgebra lineal como asignatura curricular en carreras de Ingeniería y que previamente tuvieron cursos de programación.

2. El ciclo de modelización matemática mediado por tecnología digital que respalda una propuesta de enseñanza en torno al juego Lights Out!

A continuación, describimos cada fase del ciclo de modelización matemática que adoptamos en este trabajo, explicitando en algunas de ellas un posible uso de la tecnología digital como soporte de los procesos y subprocesos del ciclo.

Fase 1: **Construcción.**

Situación real y problema: Dada una configuración inicial de luces prendidas y apagadas, en el juego “Lights Out!” de un tablero cuadrado de cualquier tamaño, encontrar una secuencia de botones que deban ser presionados para ganar el juego, asumiendo que se quiere jugar con las reglas de modo “toro”.

Fase 2: **Simplificación/Estructuración**.

Modelo de la situación: El modelo de la situación se construye a partir de la comprensión del problema. Para ello, es posible listar una serie de preguntas clave que son factibles de ser formuladas por los estudiantes, como ser: ¿Dónde jugaremos al juego? ¿Cuáles son las reglas del juego? ¿Hay diferentes versiones del juego? ¿Por qué se habla de modo “toro”? ¿Cómo anticipar la solución del juego sin “ensayar” distintas acciones que lleven a tener todas las luces apagadas? ¿Es posible contar con una secuencia predeterminada de acciones que lleven a ganar el juego?

En esta fase, es muy probable que los estudiantes comiencen a investigar sobre el juego, encontrando materiales en diversos formatos (videos, artículos matemáticos, artículos de didáctica de la Matemática, sitios con información sobre el juego, sitios en los cuales se pueda jugar, etc.). La sistematización de la información será sustancial ya que encontrarán variaciones del juego en cuanto al tamaño del tablero y sus reglas. Para comenzar a simplificar y estructurar la situación problema, realizaremos una descripción de las reglas del juego en sus dos versiones más conocidas: modo clásico y modo “toro”.

El juego “Lights Out!” consiste en un tablero de botones donde cada uno de ellos tiene la posibilidad de estar en dos estados: prendido o apagado. Al iniciar el juego aparece una configuración inicial de botones encendidos. Al presionar cualquier botón, éste cambia de estado, y bajo las reglas del “modo clásico”, también cambian de estado los botones contiguos horizontales y verticales, es decir, los botones que comparten un lado con él. El objetivo del juego es conseguir que todas las luces estén apagadas, apretando de a un botón.

A modo de ejemplo, en la Figura 2 se muestra cómo ganar el juego, con las reglas del modo clásico y dada una configuración inicial de botones prendidos (que son los que están pintados en color verde, y en color rojo los botones apagados). Cada uno de los círculos grises en el interior de cada botón significa que fue presionado, sin importar en qué orden fue realizado.

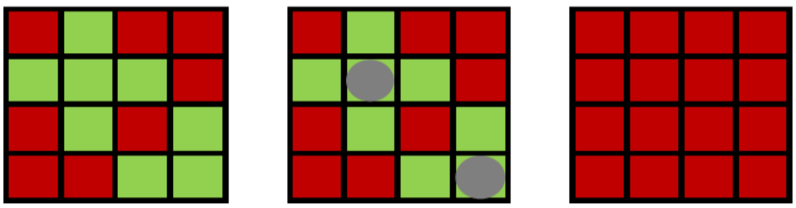


Figura 2. Un ejemplo de estrategia ganadora para el tablero de 4×4 modo clásico, donde el primer cuadro representa una configuración inicial, el siguiente representa el accionar de presionar los botones señalados con círculos grises sin importar el orden, y el tercero es finalmente el tablero con todas las luces apagadas (meta alcanzada). Fuente: elaboración personal.

El modo "toro", si bien parece ser más complejo de modelizar, tiene el potencial de permitir ampliar el problema, y estudiar qué ocurriría si el tablero fuese esférico, que los bordes estuviesen conectados entre sí. En este trabajo, se decidió presentar a los estudiantes este modo de juego, ya que, a modo de variable didáctica, es el modo que permite modelizar algebraicamente el problema, y obtener una sola solución, al resultar el sistema de ecuaciones compatible determinado, mientras que en el modo clásico el sistema, al resultar incompatible o compatible determinado, no permite la obtención de una única solución. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de cómo afectó apretar el botón que está debajo de la esquina derecha, lo cual apagó las luces inmediatas al del botón presionado y las de la última fila/columna respectivamente.

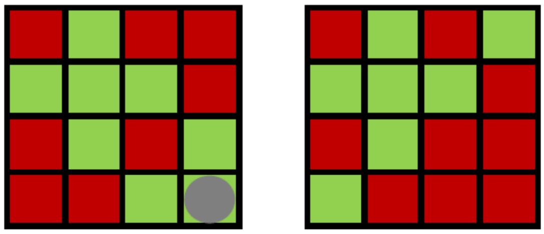


Figura 3. Un ejemplo de la regla del juego en el modo "toro". Al presionar el botón de la esquina derecha de abajo, cambian de estado él, las contiguas vertical (arriba) y horizontal (izquierda), pero también cambian la de las esquinas de arriba a la derecha y abajo a la izquierda. Fuente: elaboración personal.

Para la elaboración de un modelo real de la situación, la propuesta implicó el diseño de una actividad que permitiera al estudiante a jugar. Debido a que no se contaba con el juego en formato físico, se eligió un entorno virtual que facilitó la investigación y la experimentación con el juego. Este entorno virtual se encuentra en el siguiente link: https://www.artbylogic.com/puzzles/gridLights/gridLights.htm, y fue elegido ya que cuenta con dos ventajas: se puede cambiar el tamaño del tablero y tiene la posibilidad de jugar tanto en el modo clásico como en el modo "toro". En la Figura 4 se presenta una captura de pantalla del inicio del juego.

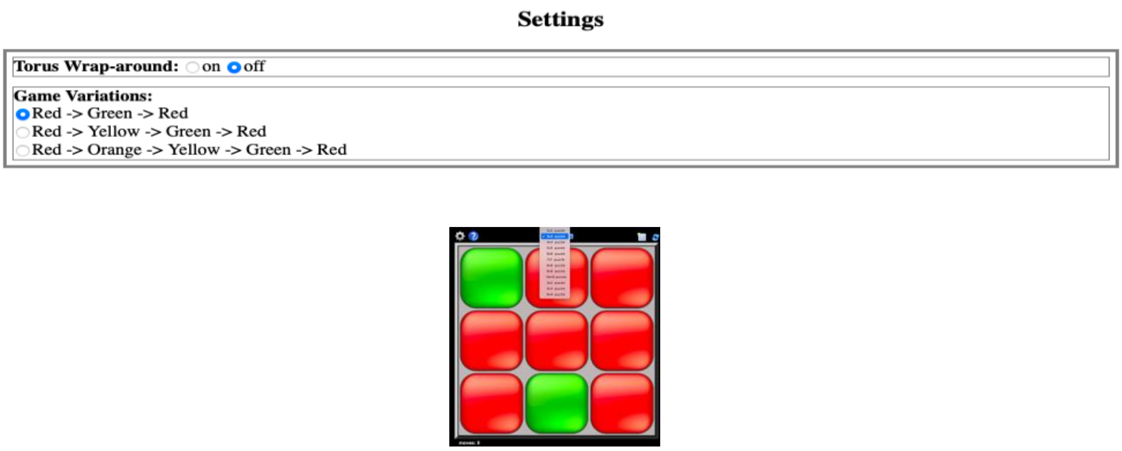


Figura 4. Un entorno virtual para poder jugar al juego. Fuente: https://www.artbylogic.com/puzzles/gridLights/gridLights.htm.

Fase 3: **Matematización**

En esta fase, algunas preguntas clave son: ¿Cómo utilizar contenidos matemáticos para representar la dinámica del juego y poder anticipar cómo ganar? ¿Cómo se pueden representar las acciones o jugadas en cada botón y su incidencia en los demás botones? ¿La solución encontrada será única para cualquier configuración inicial, o puede haber más de una solución, o incluso ninguna? ¿Cómo generalizar la situación para un tablero de otros tamaños? ¿Cómo utilizar el Álgebra lineal para modelizar el juego?

El Modelo matemático: Consideramos para este trabajo un caso particular de un tablero de 4×4 en el modo "toro" del juego, ya que para este caso y como mostraremos, la secuencia de botones a presionar para ganar será única. Para otros casos (otro tamaño de tablero y modo clásico) el modelo que elaboramos a continuación se puede adaptar fácilmente (aunque no hay garantías de poder encontrar solución, o que ésta no sea la única).

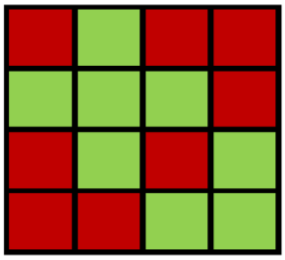
La Figura 6 muestra, a la izquierda, la representación de cada uno de los estados iniciales de los 16 botones de un tablero de tamaño 4×4 numerados, en donde los números $b_1, b_2, \dots, b_{16}$ representan los botones. Cada número b_i con $1 \leq i \leq 16$, puede tomar los valores 1 o 0, donde 1 representa que la luz está prendida y 0 que la luz está apagada. A la derecha se muestra una representación en un tablero cuadrado con números x_i con $1 \leq i \leq 16$, que representan la acción de apretar algún botón (jugar), por lo que tomarán el valor 1 si se presionó el botón, y 0 si no se presionó.

b_1	b_2	b_3	b_4
b_5	b_6	b_7	b_8
b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}

x_1	x_2	x_3	x_4
x_5	x_6	x_7	x_8
x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}

Figura 5. Representación esquemática del tablero con el estado inicial de cada botón (izquierda)y matriz que representa los posibles estados de cada botón del tablero. Fuente: elaboración personal.

Vamos a ejemplificar esta representación para el caso particular que mostramos anteriormente en la Figura 1, mostrando en la Figura 5 cómo se representa matricialmente la acción de apretar solamente un botón. Así, dada una configuración inicial del tablero (a la izquierda), la matriz B que está compuesta por los b_i, la representamos como una matriz (derecha) donde 1 corresponde a estado inicial prendido y 0 al estado inicial apagado.



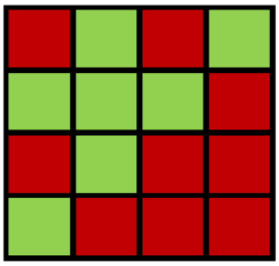
0	1	0	0
1	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

Figura 6. Una posible configuración inicial de un tablero de tamaño 4×4 (izquierda) y su representación en una disposición cuadrada, formando lo que llamamos la matriz B (derecha).

Si ahora, realizamos la acción de presionar el botón inferior derecho, es decir, presionamos el botón 16, en el modo "toro" se afectarían además de él, los botones correspondientes a $b_4, b_{12}, b_{13}, b_{15}$. En la Figura 7 a la izquierda se muestra representada la acción de apretar el botón con círculo gris, y a la derecha la matriz conocida como matriz de interacciones llamada A para la jugada "apretar el botón 16" la cual muestra cuáles son los botones afectados.

Figura 7. La acción de apretar el botón con círculo gris (izquierda), y la matriz de interacciones, (llamada A) para la jugada "apretar el botón 16" representando los botones afectados al realizar esta jugada (derecha).

En la Figura 8 mostramos el resultado de esta acción tanto en el tablero como en la matriz resultante, donde se cambian de estado los botones 4, 12, 13 y 15.



0	1	0	1
1	1	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

Figura 8. Resultado que se muestra en el tablero como consecuencia de la jugada "apretar el botón 16" (izquierda) y matriz resultante.

Todos los números aquí involucrados están en $\mathbb{Z}_2$ satisfaciendo las siguientes reglas de la suma: $0 + 0 = 0, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$. Notemos entonces que A+B=C, como se muestra en la Figura 9.

0	1	0	0
1	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

0	0	0	1
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	1

0	1	0	1
1	1	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

Figura 9. La suma de las matrices A (en el centro) y B (a la izquierda) resulta ser C (a la derecha).

Para elaborar la primera ecuación del sistema, tenemos que estudiar qué botones (al presionarlos) afectan el estado del botón b_1, y debido a las reglas del juego, el mismo se ve afectado por los botones que se corresponden con las incógnitas $x_1, x_2, x_4, x_5, x_{13}$ del sistema.

Cuando se presiona el botón 1, la acción correspondiente es x_1, (esto es $x_1 = 1$) el estado del botón de estado inicial b_1 se convierte en $x_1 + b_1$, ya que suponiendo que $b_1 = 0$ (apagado inicialmente), pasará a estar prendido, es decir que $b_1 = 1$ cumpliéndose que $x_1 + b_1 = 1 + 0 = 1$ (la prendimos). Por otro lado, las acciones representadas con las incógnitas x_2, x_4, x_5, x_{13} también inciden en el botón b_1 según las reglas del modo “toro”. En la Figura 10 se muestran coloreados en gris los botones que afectan al botón b_1. Cada ecuación del sistema refleja la cantidad de cambios de estado que ocurren en la luz correspondiente.

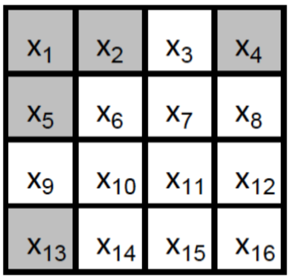


Figura 10. En gris marcamos las acciones o jugadas que inciden en el botón b1. Fuente: elaboración por parte de los autores.

Por lo tanto, la ecuación que describe estas acciones es: $b_1 + x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_{13} = 0$, la cual es equivalente a la siguiente ecuación (ya que b_1 será opuesto de sí mismo):

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_{13} = b_1$$

Con un razonamiento análogo, podemos elaborar una segunda ecuación, analizando qué acciones inciden en el botón b_2, siendo $x_1, x_2, x_3, x_6, x_{14}$ y resultando la siguiente ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_{14} = b_2$$

El sistema de ecuaciones que modela la dinámica del juego es el que se muestra a continuación:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_{13} = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_{14} = b_2 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + x_{15} = b_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_8 + x_{16} = b_4 \\ x_1 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 = b_5 \\ x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{10} = b_6 \\ x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{11} = b_7 \\ x_4 + x_5 + x_7 + x_8 + x_{12} = b_8 \\ x_5 + x_9 + x_{10} + x_{12} + x_{13} = b_9 \\ x_6 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{14} = b_{10} \\ x_7 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{15} = b_{11} \\ x_8 + x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{16} = b_{12} \\ x_1 + x_9 + x_{13} + x_{14} + x_{16} = b_{13} \\ x_2 + x_{10} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = b_{14} \\ x_3 + x_{11} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = b_{15} \\ x_4 + x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{16} = b_{16} \end{cases}$$

En síntesis, para esta fase del ciclo que consiste en la matematización de la dinámica del juego, es necesario que los estudiantes identifiquen las variables con las que trabajaran (x_i) como las acciones de presionar o no presionar en cada botón, lo que es parte de la traducción al lenguaje matemático. Por otro lado, deberán identificar el estado inicial de cada botón, lo que necesitará otra traducción y otra representación (b_i). Luego, otras cuestiones a tener en cuenta son el significado de la suma en este contexto, para poder construir las ecuaciones correspondientes y que conformarán un sistema de ecuaciones.

Fase 4: **Trabajo matemático**

Luego de establecer el modelo, se establecen los cálculos y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema. La solución matemática consiste en resolver el sistema de ecuaciones argumentando a través de propiedades propias del Álgebra lineal como puede ser el teorema de Rouché Frobenius o Teorema de Cramer. Este sistema de ecuaciones se puede resolver de forma matricial, donde la matriz ampliada asociada a él se la conoce como matriz de interacciones. En el caso de un tablero de tamaño 4×4 modo "toro", la matriz de interacciones tendrá un tamaño de 16×16 y además resulta ser simétrica. Este resultado se muestra en la Figura 11, en la cual se presenta la matriz de interacciones y en ella identificamos submatrices B (en violeta), submatrices I (que es la matriz identidad de 4×4 mostradas en verde) y la matriz O (que es la matriz nula de 4×4 mostradas en rojo), y resultando de esta disposición que la matriz A es una matriz Simétrica, y por lo tanto es invertible, concluyendo que el Sistema resulta ser Compatible Determinado. Finalmente, dada una configuración inicial de botones habrá una única secuencia de botones a presionar para ganar, que estará dada por el vector solución del Sistema y del juego.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} B & I & O & I \\ I & B & I & O \\ O & I & B & I \\ I & O & I & B \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 11. La matriz de interacciones para un tablero de tamaño 4×4 en modo “toro”.

En este ejemplo se vislumbra la dificultad de efectuar los cálculos sin el apoyo de un programa informático, particularmente, a la hora de escalerizar la matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones. Por este motivo, en la propuesta de enseñanza se incluyó como actividad, desarrollar un programa en Python que diera el vector solución de este sistema de ecuaciones. Un ejemplo se muestra en la Figura 12, donde el programa brinda la secuencia de botones a apretar dada una configuración inicial.

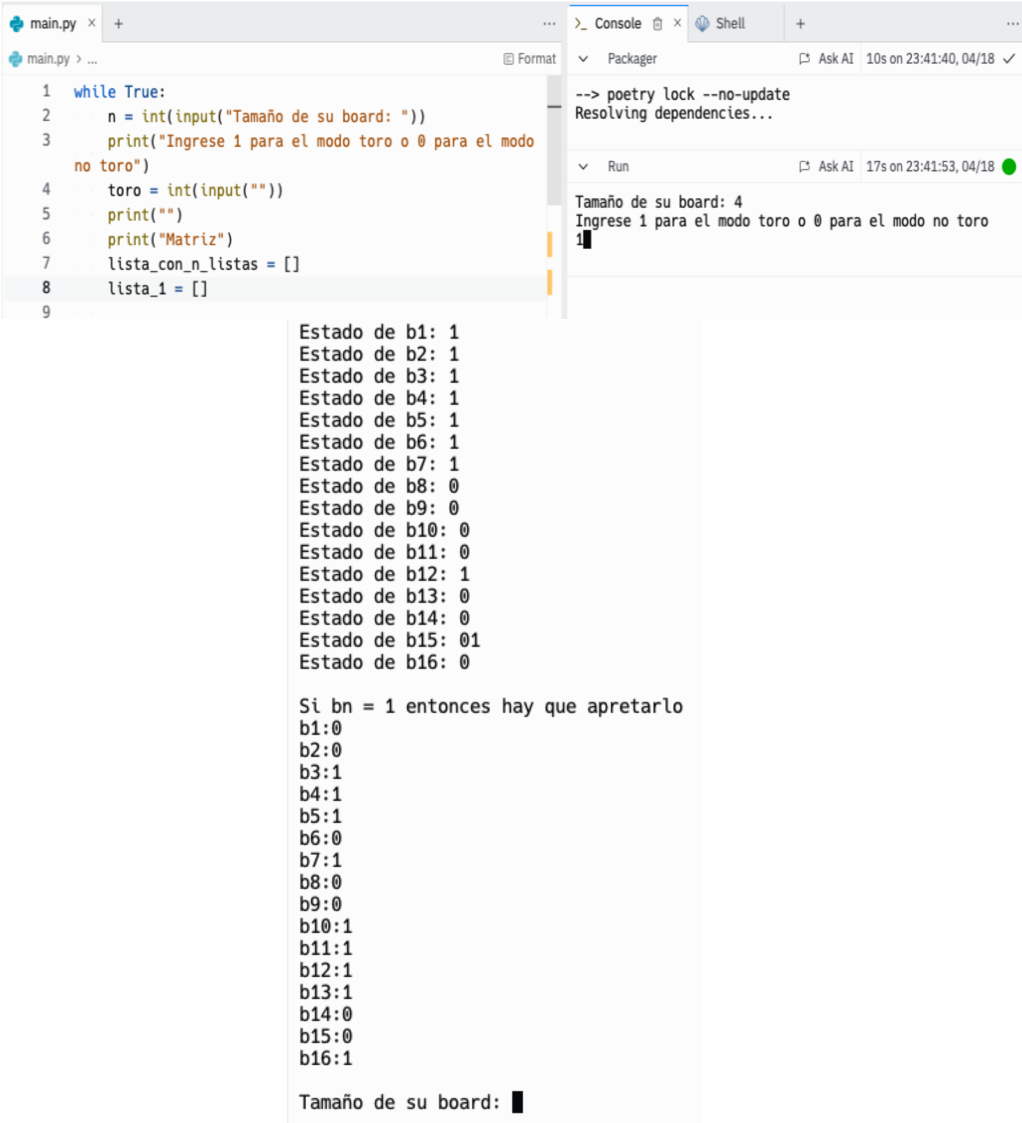


Figura 12. Ejemplo de desarrollo de un programa en Python que da el vector solución del sistema de ecuaciones, donde el programa brinda la secuencia de botones a apretar dada una configuración inicial.

Sin embargo, no consideramos esta tarea como suficiente para interpretar el conjunto solución del sistema, por lo que decidimos incluir una actividad en la cual los estudiantes debían resolver el problema de manera general, pero en un tablero de tamaño 2×2, lo cual se describe en la siguiente fase del ciclo.

Fase 5: **Interpretación**

Nos preguntamos en esta fase cómo interpretamos el vector solución para el caso de un tablero de tamaño 2×2, con lo cual volvimos a la Fase 3 y 4, elaborando un modelo matemático y describiendo el trabajo matemático en él, para luego interpretar la solución a nuestro modelo (que ahora será un sistema de ecuaciones de 4 ecuaciones y 4 incógnitas) como secuencia de botones a apretar para ganar.

Para un tablero de tamaño 2×2, tenemos una condición inicial de botones y un vector de jugada como mostramos en la Figura 13 a la derecha e izquierda respectivamente.

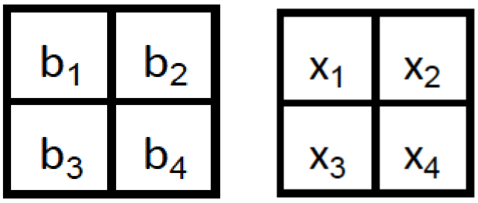


Figura 13. Representación de botones con su estado inicial (izquierda) y la acción en cada uno de ellos (derecha) para un tablero de tamaño 2×2.

Con un razonamiento análogo y adaptando el modelo que desarrollamos para el caso de un tablero de 2×2, se obtiene que:

- Si presionamos el botón 1, el estado b_1 se transformará en $b_1 + x_1$ y como a x_1 lo afectan también x_2, x_3 , resulta que las acciones en el botón correspondiente a x_1 se describen mediante la ecuación que refleja el deseo que se apague dicho botón: $x_1 + x_2 + x_3 = b_1$

- Si presionamos el botón 2, el estado b_2 se transformará en $b_2 + x_2$ y como a x_2 lo afectan también x_1, x_4 , resulta que las acciones en el botón correspondiente a x_2 se describen mediante la ecuación que refleja el deseo que se apague dicho botón: $x_1 + x_2 + x_4 = b_2$

Y análogamente, si presionamos el botón 3 y 4, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = b_2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = b_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = b_4 \end{cases}$$

y por lo tanto la matriz ampliada asociada al sistema será:

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & b_1 \\ 1\,1\,0\,1 & b_2 \\ 1\,0\,1\,1 & b_3 \\ 0\,1\,1\,1 & b_4 \end{pmatrix}$$

y la escalerización será:

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & b_1 \\ 0\,0\,1\,1 & b_1+b_2 \\ 0\,1\,0\,1 & b_1+b_3 \\ 0\,1\,1\,1 & b_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & b_1 \\ 0\,1\,0\,1 & b_1+b_3 \\ 0\,0\,1\,1 & b_1+b_2 \\ 0\,0\,1\,0 & b_1+b_3+b_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0 & b_1 \\ 0\,1\,0\,1 & b_1+b_3 \\ 0\,0\,1\,1 & b_1+b_2 \\ 0\,0\,0\,1 & b_2+b_3+b_4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, del teorema de Rouché Frobenius (por ejemplo) podemos decir que los rangos de las matrices de coeficientes y de ampliada asociada al sistema es 4, coincidiendo con el número de incógnitas, por lo tanto se puede deducir que el sistema es Compatible Determinado y su solución se detalla a continuación.

De la cuarta fila se desprende la ecuación $x_4 = \ b_2 + b_3 + b_4$ y de la tercera fila se desprende que $x_3 + x_4 = b_1 + b_2$. Por lo tanto, $x_3 = b_1 + b_3 + b_4$. De la segunda fila se desprende que $x_2 + x_4 = b_1 + b_3$, por lo tanto, $x_2 = b_1 + b_2 + b_4$. Finalmente, de la primera fila se desprende la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = b_1$ y por lo tanto $x_1 = b_1 + b_2 + \ b_3$. Finalmente, el conjunto solución del sistema de ecuaciones formulado será:

$S = \{(b_1 + b_2 + \ b_3, b_1 + b_2 + b_4,\ b_1 + b_3 + b_4\}$. Así, suponiendo la configuración de botones iniciales como se muestra en la Figura 14 (a la izquierda), es decir $b_1 = 1$ y $b_2 = b_3 = b_4 = 0$, se deberán apretar los botones $(1,1,1,0)$ para ganar.

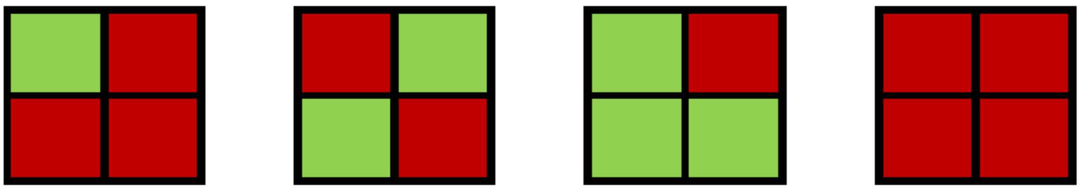


Figura 14. Configuración inicial (primera figura a la izquierda), resultado de presionar el botón 1 (segunda figura), resultado de presionar el botón 2 (tercera figura), el tablero con las luces apagadas (cuarta figura a la derecha).

Fase 6: **Validación**

Un entorno físico del juego contribuiría a una experiencia táctil del mismo (y motivante) y además desarrollaría otras habilidades propias del futuro ingeniero como la programación y la electrónica. Por lo que se diseñó una actividad que implica en una primera instancia cuyo enunciado fue: Conecta el Arduino uno con un Adafruit Trellis brindado por el departamento de Ingeniería, y en una segunda instancia programar una solución en Arduino, es decir Elaborar y resolver el sistema de ecuaciones cuyo vector solución indica los botones a apretar para ganar el juego, en la interfaz de Arduino. En la terminal de Arduino se verá reflejado en la secuencia de pasos a seguir (botones a apretar) para lograr apagar las luces. Realice un video donde se muestra el programa y la secuencia de botones presionados en el juego implementado con Arduino, dicho video debe estar disponible en un repositorio público. Como Opcional: Agregue un botón el cual al ser pulsado el sistema va ingresando los pasos de forma automática hasta resolver el juego mostrando la secuencia de pasos en las luces. Como evidencia de la validación, los estudiantes elaboraron un video donde se muestra la validación del programa en cuanto a la solución del juego, esto es, filmar el programa en Python funcionando y la secuencia de botones que este devuelve para finalmente mostrarse tocando los botones en la placa de arduino conectada y ganando en el juego. Esto implicó que los resultados reales se validaron en la situación problema

Fase 7: **Exposición**

En esta fase los estudiantes deberán relacionar los resultados que obtuvieron en el modelo de la situación, en la situación problema y dar respuesta final al problema. Para ello es posible solicitarles la elaboración de un video ganando al juego.

3. Reflexiones finales

Algunos investigadores como Greefrath (2020), sostienen que, para fomentar el proceso de modelización matemática en los estudiantes, es relevante incorporar elementos prácticos en “laboratorios de enseñanza” a lo largo de las diferentes fases del ciclo de modelización. Este enfoque guio al equipo interdisciplinario de profesores que diseñaron una propuesta, compuesto por matemáticos, ingenieros, y especialistas en didáctica de la Matemática.

Si bien hay investigaciones de corte matemático que estudian la dinámica del juego “Lights out”, nuestra intención en este trabajo fue identificar el potencial de una propuesta de enseñanza en cuanto a sus procesos y subprocesos de modelización matemática. Con lo cual el concepto de transposición didáctica (Chevallard, 1999) de los contenidos del Álgebra lineal involucrados estuvo muy presente, ya que es clave conocer las transformaciones necesarias a realizar al saber matemático (propio de los matemáticos) para que sea enseñable a personas no matemáticas, pero que harán un uso fuerte de la matemática en su futuro profesional. En este sentido, el diseño de la propuesta implicó una interacción constante con el ciclo de modelización teórico adoptado, en el cual la tecnología educativa fue sustancial para el trabajo con el juego en la formulación de un modelo informático.

Actualmente, nos encontramos trabajando en el análisis de la aplicación de la propuesta, realizada en dos cursos de Álgebra lineal para carreras de ingeniería, donde nos focalizamos en la manera en que los alumnos modelizan el problema, los obstáculos y ventajas que presenta este proceso. También nos preguntamos por los efectos posibles de modificar la variable didáctica del modo del juego (clásico o “toro”) ya que resulta interesante conocer cómo se modifica el ciclo de modelización al no encontrar solución al juego, o que existan infinitas soluciones. Estas cuestiones nos invitan a seguir profundizando e investigando en la temática.

Bibliografía

Alsina, A. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 19(1), 99-126

Anderson, M. y Feil Todd. (2017). Turning Lights Out with Linear Algebra. *Mathematics magazine*, 71(4), pp 300-303.

Bergeson, T. (2000). *Teaching and Learning Mathematics. Using Research to Shift From the “Yesterday” Mind to the “Tomorrow” Mind*. Superintendent of Public Instruction. Estados Unidos.

Blum W. y Borromeo R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and application*, 1(1), 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). “Filling Up” - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guixols: ERME.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects., Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 37-68.

Buckley, P. y Doyle, E. (2017). Game on student´ perceptions of gamified learning. *Educational Technology and Society*, 20(3), 1-10.

Burke, B. (2014). *Gamify: How gamification motivates people to do extraordinary things*: Bibliomotion, Incorporated.

Camarena, P. (2008). Mathematical models in the context of sciences. *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical education*, Monterrey, Mexico. Roskilde Universiteit. pp. 117-132.

Coulibaly, D. (2023). *Lights Out: An Application of Linear Algebra over a Finite Field. Bachelor´s Thesis*. Department of Mathematics, ETH. Zurich.

Cuartielles, D., Iriepa, N., Rodriguez, C., Lopez, E. & García, J. (2020). Educational Robots with Arduino: Annotated Prototypes. *Part of the Advances in Intelligent Systems and Computing book series* (AISC,volume 946).

Deterding, S. y Nacke, L. (2011). Gamification: Using game design elements in non-gaming contexts. Conference: *Proceedings of the 15th International Academic MindTrek Conference*: Envisioning Future Media Environments

Fazakas, B. y Groza, A. (2022). Generating and solving the Lights Out! Game in first order logic. *IEEE 18th International Conference on Intelligent Computer Communication and Processing (ICCP)*.

García, A. y Troyano, Y. (2010). Aprendizaje cooperativo en personas mayores universitarias. *Revista interamericana de Educación de Adultos*, 32(1), 7-24.

Greefrath G., & Vorhölter K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling. Approaches and developments from German speaking countries*. Cham, Switzerland: Springer.

Greefrath, G. (2011). *Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling. Overview*. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14 (pp.301–304). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Greefrath, G., & Siller, H.-S. (2017). Modelling and simulation with the help of digital tools. In G. Stillman, W. Blum W, & G. Kaiser (Eds.), Mathematical modelling and applications (pp. 529–539). Cham, Switzerland: Springer.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools. A quantitative study on mathematizing with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education*, 50 (1), 233–244.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum,W., & Borromeo Ferri, R. (2013). *Mathematisches Modellieren – eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe*. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, & G. Kaiser (Eds.), Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule (pp. 11–37). Wiesbaden, Germany: Springer.

Leher, R. y Schauble, L. (2000). Developing Model-Based Reasoning in Mathematics ands Science. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 39-48.

Losada, R. (2002). All Lights y Light Our, una investigación entre luces y sombras. *Suma*, 40, 25-42.

Madsen, M. (2010). *Lights Out: Solutions using Liner algebra. Summation*. Department of Mathematics and Computer Science – Ripon College.

Mendible, A. y Ortiz, J. (2007). Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. *Enseñanza de la Matemática*, 12(16), 133-148.

Novaes, T. y Almeida C. (2023). Un estado de conocimiento sobre la gamificación en la enseñanza de las Matemáticas. *Unión*, 67, 1-15.

Peña, F., Solareas, A., Preciado, A. y Ortiz, A. (2023). Comparación de Tendencias sobre la Modelización entre Latinoamérica y el Resto del Mundo: Una revisión Bibliográfica. *Bolema*, 37(76), 532-554.

Perrenet, P. y Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling Aplication*. 1(4), 3-21.

Poondej, C. y Lerdpornkulrat, T. (2016). The development of gamified learning activities to increase student engagement in learning. *Australian Educational Computing*, 31(2).

Rattan, K. y Klingbeil, N. (2015). *Introductory Mathematics for Engineering Applications*. Hoboken: Wiley.

Rodríguez Gallegos, R. (2017). Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. IE *Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15).

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de la Matemática. *Innovación educativa*, 9(45).

Zabala, S., Ardila. y García-Mora, L. (2020). Didactic Strategy Mediated by games in the Teaching of Mathematics in First-Year Engineering Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18,2.

Zabala-Vargas, S. y García-Mora, L. (2022). Didactic Strategy Mediated by Games in the Teaching of Mathematics in First-Year Engineering Students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(2).

Victoria Artigue. Doctoranda en Educación por Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires UNICEN. Magister en Educación por Universidad ORT Uruguay. Profesora de Matemática por Universidad de Montevideo. Profesora de alta dedicación en la Universidad Católica del Uruguay. Profesora de Matemática de la Dirección General de Educación Secundaria de Uruguay.
Email: maria.artigue@ucu.edu.uy ORCID: https://orcid.org/my-orcid?orcid=0000-0001-6753-0952

María de los Ángeles Fanaro. Doctora en Enseñanza de las Ciencias, por la Universidad de Burgos (España). Investigador Independiente del CONICET con lugar de trabajo en el Núcleo de Investigaciones Sociales y Educacionales (NEES) de la Facultad de Ciencias Humanas de la UNICEN. Profesor Adjunto, Área Didáctica de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN.
Email: mariangelesfanaro@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9290-5450

Gabriel Núñez. Doctor en Matemática por Facultad de Ciencias de la Universidad de la República. Magister en Matemática por Universidad de la República. Licenciado en Matemática por Universidad de la República, Uruguay. Director del departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Católica del Uruguay.
Email: francisco.nunez@ucu.edu.uy

Joel Gak. Doctor en Ingeniería Eléctrica por Universidad Nacional del Sur. Magister en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica por Universidad Católica del Uruguay. Ingeniero en Electrónica por Universidad Católica del Uruguay. Director de Ingeniería en Electrónica, Sistemas Eléctricos de Potencia y Telecomunicación. Integrante del Sistema Nacional de Investigadores, nivel 1.
Email: jgak@ucu.edu.uy