

La Piedra Movediza de Tandil: oscilaciones y caída

Un estudio desde la física y la matemática



María Rita Otero

María Paz Gazzola

Viviana Carolina Llanos

Marcelo Arlego

ISBN 978-950-658-588-4



9 789506 585884

La Piedra Movediza de Tandil: oscilaciones y caída: un estudio desde la física y la matemática /
María Rita Otero ... [et al.]. - 1a ed. - Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2023.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-658-588-4

1. Matemática. 2. Física. 3. Educación. I. Otero, María Rita.
CDD 514.3

Las imágenes de la tapa y la contratapa son una creación de
Marcelo Arlego

*A nuestros padres,
por la educación que nos dieron.*

La Piedra Movediza de Tandil: oscilaciones y caída

Un estudio desde la física y la
matemática

María Rita Otero

María Paz Gazzola

Viviana carolina Llanos

Marcelo Arlego

Prólogo	5
Historias y datos sobre la Piedra Movediza	12
Sistemas oscilantes y resonancia.....	13
Aproximaciones al sistema oscilante Piedra Movediza.....	20
La hipótesis de Holmberg.....	36
Morfología de la Piedra Movediza	41
La réplica	42
Estabilidad de la Piedra Movediza	44
Equilibrio de los cuerpos apoyados.....	45
Dinámica de la Piedra Movediza	51
Condiciones de equilibrio	52
Ecuaciones del movimiento de la piedra movediza	56
Análisis de los parámetros de la ecuación	61
Análisis del amortiguamiento para diferentes torques y frecuencias del sistema en resonancia	67
Amplitud máxima para diferentes torques y amortiguamientos	70
Referencias	74
ANEXOS	79
Anexo 1.....	80
Anexo 2.....	85
Anexo 3.....	93

Prólogo

El 29 de febrero de 1912, mi abuela materna, tenía doce años, y decía recordar la caída de la Piedra Movediza. Ella había participado de una excursión al cerro, en volanta y visitado la piedra oscilante. Incluso, mencionaba el estruendo que produjo al caer y la conmoción posterior al constatar su ausencia. Mi madre, alimentó nuestra pasión por la lectura, incluida la gauchesca, así siendo niñas habíamos leído el “Martín Fierro” y “Don Segundo Sombra”. Sus relatos misturaban la vida en el campo y en Tandil, la historia de la ciudad, el mar y las rocas redondeadas, Rosas y los mil bueyes, los malones, Martín Rodríguez, el fuerte y las leyendas sobre la piedra. Tal vez por eso mi imaginación, ignorando el tiempo histórico, le había puesto colores y rostros al “viaje de la abuela a la movediza” que me parecía un lugar de aventuras, misterioso y lejano.

En esa concepción entre fantásica y onírica de la piedra, no se hablaba ni se cuestionaba cómo oscilaba. La piedra se movía, el crujir de las botellas de vidrio colocadas en su base así lo acreditaban. Si bien nadie lo decía ni lo afirmaba directamente, quedaba y aún persiste en la mitología popular, la idea de que la piedra se movía de manera permanente y espontánea, en lugar de ocasional y provocada. Esto se advierte en cuanto se trata el tema, es infrecuente que se aluda correctamente a su movimiento.

A mí, como a tantos otros, los relatos familiares nos llevaron conmovidos y curiosos en 2007 a la presentación del libro “La Piedra Viva” de Elías el Hage y Pomy Levy [1]. La belleza literaria y visual del texto nos conduce a reconstruir numerosas memorias, su rigor documental, agrega en nuestro caso, el interés por las posibles razones científicas de la caída. Las ideas de Eduardo Ladislao Holmberg (1852-1937) expresadas en su artículo publicado en Caras y Caretas, impactan, porque explican con un modelo muy simple y a la vez poderoso, que la piedra oscilaba mediante la acción humana o externa, una acción relativamente leve y precisa, que consistía en aplicar el torque correcto en el lugar correcto y con la frecuencia apropiada.

Al mismo tiempo, en mi tesis doctoral [2], había estudiado el problema de la enseñanza y la conceptualización de la física de los sistemas oscilantes libres, amortiguados y forzados, donde el fenómeno de la resonancia tenía un lugar destacado. Se cayó por resonancia, eso es lo que quiere decir Holmberg, le dije a Elías, y él me pidió que escribiera un texto sobre eso, que luego, generosamente, publicó en la segunda edición del libro “La piedra Viva” [3].

Sin embargo, una cosa es describir cualitativamente cómo los lugareños avezados sabían perturbar el sistema y se las amañaban para que entrara en resonancia sin sobrepasar la amplitud de oscilación crítica de seis grados,

hasta que un día, esa amplitud fue excedida y la movediza se despeñó. Y otra, es modelar físicamente el sistema real: un sólido irregular de granito, cuyo peso era $248.000 \overrightarrow{kg}$, apoyado sobre una pequeña base de 40 cm de diámetro, cuya geometría no era ni plana ni redondeada. El modelo debe contemplar además que este cuerpo rotaba y se trasladaba durante la oscilación si a la distancia adecuada, se ejercía un torque externo periódico que producía el movimiento y la resonancia. Dicho modelo es decisivo para simular diversos escenarios que podían o no implicar la caída.

Esto requiere construir más de un modelo, entendidos como representaciones simplificadas del sistema real [4, 5, 6] para describir el posible movimiento de la piedra. Los modelos deben ser compatibles con una multiplicidad de parámetros del sistema, algunos de ellos bien establecidos, gracias a la construcción de la réplica y otros, desconocidos como el coeficiente de rozamiento o la cantidad de personas que intervenían en la perturbación. El modelado incluye el cálculo de la amplitud crítica de caída y las condiciones en las que se podía alcanzar.

En este texto se encuentra una parte del trabajo de casi doce años, que mezcla y yuxtapone las ideas y los sueños de la infancia, con las ciencias exactas y su didáctica, en particular aquí, sobre la Piedra Movediza de Tandil. Desde 2004 iniciamos investigaciones

didácticas sobre cómo realizar enseñanza por investigación en el Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, al que los cuatro autores pertenecemos.

La noción es heredera de las propuestas conocidas como escuela activa de John Dewey [7, 8, 9] a comienzos del siglo XX, con la pedagogía operatoria de Piaget [10] y Vergnaud [11], siendo este último uno de los padres de la didáctica de las matemáticas en Francia junto con Guy Brousseau [12]. Por su parte, Yves Chevallard [13, 14, 15, 16, 17, 18] propone dispositivos concretos para la enseñanza por investigación, teóricamente fundamentados.

Brevemente se trata de que la escuela abandone la enseñanza de respuestas a preguntas que permanecen implícitas y que en su seno nadie se hizo, por la enseñanza de preguntas en sentido fuerte [19]. Por ejemplo: ¿Por qué se cayó la piedra Movediza de Tandil? La construcción de una respuesta posible, es el producto de la generación de nuevas preguntas y del estudio y la investigación, juntas. El dispositivo que se desarrolla se llama Recorrido de estudio e investigación (REI) [16, 17] y puede o no involucrar a una o varias ciencias.

La idea llevada al extremo supone que ni el profesor que es el director del estudio de un REI y un sistema más de información de la clase, y no

el “dueño de la verdad”, ya que esta no existe, conozca la respuesta de antemano.

Hoy ante los recientes desarrollos de la IA, ya disponemos de una suerte de biblioteca de Babel [20] donde todo el conocimiento amasado por la cultura humana está disponible: es por el momento la web 4.0. Como lo que se encuentra es divergente e ilimitado, aunque no necesariamente verdadero y fiable, resulta ineludible educar por medio de una enseñanza acorde a los tiempos, que algunos vieron que se avecinaban y ya están aquí. Se trata de promover el ocio creativo para pensar libremente, lo cual requiere del estudio y la investigación, y de saber navegar en el mar de información, decidiendo qué y cuanto necesitamos indagar, aclarar. Va de suyo que este proceso requiere aprendizaje y esfuerzo.

Hoy como nunca los ciudadanos deben ser formados en el cuestionamiento, ya que tendrán que educarse toda la vida [17, 18, 19]. Este es el tipo de enseñanza de las matemáticas y las ciencias cuyas características y viabilidad venimos investigando y experimentando hace tiempo.

En particular, un equipo de investigadores del CONICET y de la UNICEN, diseñamos un REI alrededor de la pregunta: ¿Por qué se cayó la piedra Movediza de Tandil? Es un REI codisciplinar, que ha sido implementado en aulas

de la Universidad [[21](#), [22](#)] y en escuelas públicas del partido de Tandil [[23](#), [24](#)], con los investigadores como docentes. El equipo Movediza, como nos gusta llamarlo, está integrado por Marcelo Arlego, Viviana Carolina Llanos, María Paz Gazzola y María Rita Otero, quienes vivimos en primera persona el recorrido de estudio e investigación, cuya base científica sintetizamos a continuación.

Tandil, marzo de 2023

María Rita Otero

Historias y datos sobre la Piedra Movediza

Sistemas oscilantes y resonancia

Cuando se perturba un sistema que puede vibrar y éste pierde su posición de equilibrio indiferente, se producen oscilaciones. Si un movimiento es a la vez oscilatorio y periódico, se lo denomina armónico. Así los péndulos ideales, los resortes ideales son sistemas oscilantes armónicos, que sirven como modelos de sistemas como el péndulo de un reloj, una hamaca, las cuerdas de los instrumentos musicales que vibran al producir los sonidos, o las moléculas de aire cuando se propaga una onda sonora y las oscilaciones de una carga o de una corriente eléctrica siempre que la disipación de energía sea muy baja.

Nuestra Piedra Movediza, bajo ciertas condiciones, podía oscilar si se la perturbaba apropiadamente. Lo hacía de manera suave, leve, e indetectable a simple vista. El hecho de que oscilara sin perder el equilibrio, al borde de un precipicio, motivaba a lugareños y extranjeros, a personas notables como Holmberg y Rojas a llegar hasta sus proximidades para corroborarlo.

La frecuencia o cantidad de oscilaciones por unidad de tiempo, que realiza un objeto vibrante cuando no está sometido a fuerzas de rozamiento ni a fuerzas externas, se suele llamar su frecuencia propia, o su frecuencia natural de vibración. Cada cuerpo tiene la suya, y algunos

objetos grandes, pueden tener más de una frecuencia propia.

El amortiguador de un auto, una cuerda de piano o de guitarra, un péndulo real, una hamaca, son en realidad sistemas oscilantes amortiguados. Esto significa que la energía del sistema no se conserva y va decreciendo con el tiempo, de manera tal que la oscilación se amortigua hasta desaparecer. Un sistema de este tipo pierde energía por disipación, realizando oscilaciones cada vez más pequeñas.

Un oscilador real, a diferencia de un oscilador ideal está sujeto a la fuerza recuperadora elástica y además a las fuerzas de roce y resistencia del aire. Cuanto mayor es el amortiguamiento, más rápido decrece la amplitud de la oscilación. Si la constante de amortiguamiento es pequeña, el sistema oscila con una amplitud constantemente decreciente y se denomina subamortiguado. Un oscilador amortiguado dejará de oscilar por sí mismo en algún momento, seguramente esto sucedía con nuestra piedra cuando algo o alguien la perturbaba.

Sin embargo, es posible mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe cíclicamente con el tiempo, con un período y frecuencia definidos. Esta fuerza se suele llamar fuerza impulsora porque realiza trabajo sobre el sistema y le entrega energía. Cuando la fuerza impulsora tiene ciertas

características y si la absorción de energía se produce de manera adecuada, el sistema oscila con una amplitud constante, y con una energía que aproximadamente se conserva, gracias a la acción de la fuerza. Pero esto depende de las condiciones. Cuando una fuerza impulsora de una cierta frecuencia se le aplica a un sistema oscilante, el movimiento que resulta se llama oscilación forzada.

La Resonancia es un fenómeno físico que ocurre en los sistemas forzados, que puede tener efectos sorprendentes e incluso devastadores. Si bien se trata de una situación que es difícil de describir exhaustivamente con palabras, intentaremos enunciar lo que sucede en un sistema resonante, a partir de un ejemplo.

Si impulsamos una hamaca con una fuerza constante, podemos hacerlo cuando viene hacia nosotros, y provocar que se detenga casi por completo, o cuando se esté alejando, con lo que logramos que se eleve más.

La Figura 1 muestra una técnica para impulsar a la hamaca con su frecuencia propia de oscilación, ilustrada en la pintura de Nicholas Lancret (1690-1743). Observamos una cuerda que sirve para tirar de la hamaca en el momento oportuno, ya sea que se desee incrementar la amplitud con el menor esfuerzo o detenerla.



Figura 1. “*The swing*”. (1735). Obra del pintor francés Nicholas Lancret. Museo de Victoria y Alberto, Londres, UK.¹

El sistema entra en resonancia, si se logra que la velocidad de la hamaca tenga el mismo sentido que el de la fuerza impulsora, maximizando el aporte de energía. Entonces, se realizará la mayor fuerza en el punto más bajo de la oscilación, donde la velocidad es máxima, acompañando el sentido de la misma. Aunque la fuerza sea de magnitud relativamente pequeña, notaremos que la hamaca oscila con una amplitud creciente a partir del instante en que la frecuencia de la fuerza impulsora y su frecuencia natural, coinciden, se sincronizan.

¹ [Nicolas Lancret. The Swing](#)

La resonancia implica que la amplitud de la oscilación crecerá y será máxima y que la absorción de energía por el sistema, también es máxima.

La resonancia es un fenómeno que produce un máximo de amplitud cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual o muy próxima a la frecuencia de oscilación propia de un sistema oscilante. Esto ocurre tanto en los sistemas eléctricos oscilantes como en los sistemas mecánicos. La caja de resonancia de los instrumentos musicales es fundamental para la calidad del sonido que producen. Cuando sintonizamos una radio o un equipo, este responde vigorosamente a las ondas cercanas a su frecuencia de resonancia y aprovechamos esto para seleccionar una estación y rechazar las restantes.

En los sistemas mecánicos, la resonancia también puede ser destructiva. Se suele ver en videos y películas que cuando un grupo de soldados viene marchando y llega a un puente, se les exige romper el paso, para evitar que el puente se rompa si se produce resonancia. Muchas máquinas vibran porque tienen piezas en rotación que no se hallan bien equilibradas, esto suele pasar en el lavarropas, si este se conecta a una estructura que pueda vibrar, dicha estructura entra en resonancia pudiendo producir desde ruidos molestos hasta roturas. Los cantantes de ópera pueden romper una copa

de cristal que resuena con la frecuencia de vibración de sus cuerdas vocales.

Como decíamos, la física de este fenómeno no se agota en una descripción cualitativa, pero lo que hemos mencionado, nos permite dimensionar los sentimientos que preocuparon a Ricardo Rojas (1882-1957) y a Eduardo Ladislao Holmberg (1852-1937), que entendieron lo que una fuerza periódica sobre la piedra movediza podía provocar, si se la ejercía en el lugar correcto y con la frecuencia de resonancia o un valor cercano a ella.

Esta es la esencia de la hipótesis Holmberg, una vez constatado que no había vestigios de pólvora en la base del pedestal, ni de un deslizamiento que hubiera dejado huellas, piedra contra piedra. Entonces, cabía pensar en el absurdo mágico de tamaña mole, adelantando su destino, saltando al precipicio que por miles de años la aguardaba...

Antes de realizar el estudio que presentamos a continuación, ignorábamos el valor exacto de la o las frecuencias propias de oscilación de la piedra, su volumen, su masa, los momentos de inercia, las dimensiones de la piedra el factor de amortiguamiento que debía ser suficientemente pequeño como para no anular cualquier atisbo de resonancia.

En el terreno de la conjetura, lo que Ladislao Holmberg había avizorado treinta años antes de

la caída de la piedra y publicado dieciséis días después en la revista Caras y Caretas, es posible y probable. En las páginas que siguen desarrollamos algunos modelos que le imponen condiciones físicas y expresiones matemáticas a las ideas de Holmberg y de Rojas, para analizar las condiciones de su precario equilibrio, la amplitud crítica, su movimiento oscilatorio, y diferentes escenarios que permiten sostener que su caída se debió al fenómeno físico que se denomina resonancia.

Aproximaciones al sistema oscilante Piedra Movediza

La Piedra Movediza de Tandil era una roca de granito de 248 toneladas de peso. El volumen de la piedra, que es relativamente pequeño, nos impide hacernos una idea de su peso, ya que, al ser de granito, cada centímetro cúbico de ella pesa aproximadamente tres gramos. Por eso, resulta útil pensar que el peso de la piedra equivale a casi siete camiones cargados de cereal, teniendo en cuenta que un camión vacío puede pesar unas quince toneladas. El peso real de la piedra es un dato fundamental, que las crónicas históricas reflejan con mucha inexactitud y fantasía.

La piedra permanecía en equilibrio estable, al borde de un cerro de 300 metros de altura sobre el nivel del mar en las sierras del sistema de Tandilia. Sus grandes dimensiones y su forma redondeada que, sin embargo, coronaba en punta, tal como se aprecia en la Figura 2, hacían que pudiera vérsela a simple vista desde diversos puntos de la ciudad, tales como la Plaza Independencia, el parque del mismo nombre, etc.

La figura también muestra a un nutrido grupo de visitantes, hombres, mujeres y niños. Destacan la forma redondeada y pulida por la erosión marina del cerro y de las piedras que se encuentran próximas. Los hombres que se observan apoyados contra la piedra movediza,

están en la cara dónde se realizaba el torque externo. Detrás se aprecia la ciudad a la distancia.

El atractivo de la piedra se tornaba más espectacular porque si la perturbación externa se ejercía de manera apropiada, adquiría un movimiento oscilatorio visualmente imperceptible. Para ponerlo en evidencia, se colocaban botellas de vidrio en la base, que se rompían con las oscilaciones. El hecho de que ocasionalmente se moviera y aun así, conservara el equilibrio al borde del precipicio, siempre que no se superara cierta amplitud crítica, desafiaba el sentido común y explica la curiosidad que despertaba y la notoriedad que había cobrado.



Figura 2. La Piedra Movediza y un nutrido grupo de visitantes de diversas edades. Fuente: Archivo General de la Nación.

En la Figura 3 se observa a un grupo de al menos cuatro hombres que están haciendo oscilar la piedra, en el marco de la visita de algún

acontecimiento importante. La cara utilizada para perturbar el sistema es la misma a la que nos referíamos al comentar la Figura 2.



Figura 3. Fotografía que muestra a cuatro hombres haciendo oscilar a la piedra movediza. Fuente: libro “La Piedra Viva” pág. 170. Año desconocido.

Para remarcar la fama internacional de la piedra movediza, la Figura 4² muestra la tapa y el interior del libro francés “*Les merveilles du monde*” publicado en 1926 por la Editorial Hachette de Paris. La foto ocupa una página completa del libro, y evidencia el tamaño relativo de la piedra comparado con la altura del precipicio y la pequeñez de las personas. La leyenda dice “*la Pierre branlante de Tandil en Argentine*” [la piedra oscilante de Tandil, en Argentina].

² [Les Merveilles du monde \(1926\)](#)

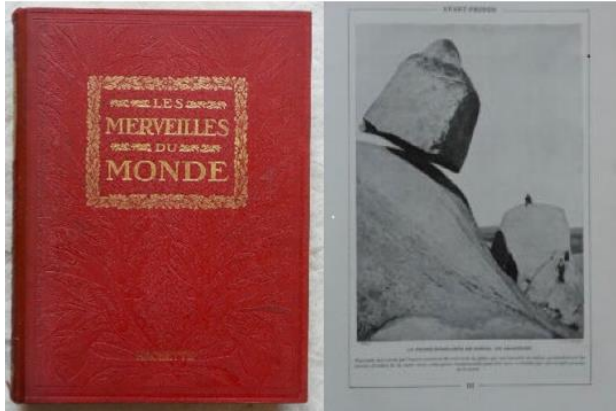


Figura 4. Tapa e interior del libro *Las maravillas del mundo* publicado en francés por Hachette en 1926.

En la Figura 5 y la Figura 6 se aprecian las imágenes publicitarias de los chocolates franceses Casino³ de 1958, en un tamaño de 6 cm por 6 cm. En el interior, los chocolates contenían estas ilustraciones coleccionables, acompañadas por los relatos de las aventuras de *Jojo y Louissette*, en este caso ¡con menciones y dibujos de la Piedra Movediza!

En la primera, los niños se encuentran contemplando la piedra. El texto alusivo menciona la ya sorprendente posición de equilibrio de la piedra oscilante y anuncia que *Jojo y Louissette* se disponen a averiguar si

³[Chocolates Casino 185 y 186](#)

efectivamente tenía el movimiento que se le atribuía.

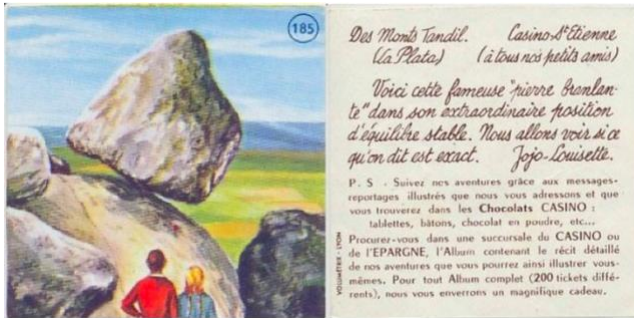


Figura 5. La Movediza en los chocolates Casino. El texto en francés dice: *Aquí esta famosa piedra oscilante en su extraordinaria posición de equilibrio estable. Vamos a ver si lo que decimos es exacto. Jojo y Louisette.*

La siguiente pieza de la colección nos muestra a la niña como balanceando grácilmente a la piedra, mientras su compañero la observa y realiza un grafiti que marca su paso por el lugar en una roca.

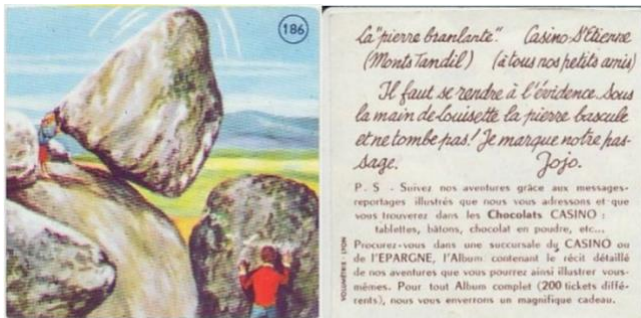


Figura 6. La Movediza en los chocolates Casino. El texto en francés dice: *"Hay que rendirse a la evidencia, bajo la mano de Louisette, ¡la piedra oscila y no se cae! Yo marco nuestra pasada. Jojo."*

La Piedra de Movediza de Tandil convocó desde siempre la visita de turistas y personajes ilustres que querían “ver con sus propios ojos” que la “piedra se movía”: naturalistas de la talla del Perito Francisco P. Moreno (1852-1919), el Dr. Carlos Pellegrini (1846-1906), el Teniente General Julio Argentino Roca (1843-1914), los escritores Santiago de Estrada (1841-1891), Ricardo Rojas y Jorge Luis Borges (1899-1986), así como el escritor español Vicente Blasco Ibañez (1867-1928) y el presidente de la Nación Dr. Luis Sáenz Peña (1822-1907).

Las crónicas del viajero y comerciante inglés Willam Mac Cann quien recorrió la zona en el año 1847 describen *el peligroso equilibrio de esta extraña piedra* (Smith, Elder, 1853). También se destacan las crónicas del médico francés Jean Antoine Victor Martin de Moussy (1810-1869), contratado en 1855 para realizar exploraciones del territorio nacional, durante la presidencia de Justo José de Urquiza. Posiblemente a él se deba la difusión inicial de la piedra en Francia, que como mencionamos antes se encuentra en libros, catálogos, postales y publicidades de chocolates.

“Esta piedra gigantesca se halla en equilibrio sobre el pedestal monolítico que la soporta por un péndulo estrecho y redondeado que se adapta en una especie de muesca natural que deja, entre la piedra y su sostén, un espacio vacío” [25] p. 282.

Por su parte, el ingeniero Moog (1873-1954) en el año 1867 tomó apuntes, realizó bocetos y aportó un dato muy importante para nuestro estudio, al afirmar que la piedra oscilaba sesenta veces por minuto, es decir, que el período de oscilación del movimiento era un segundo.

Las mediciones y cálculos realizados por el ingeniero francés Salade en 1883, arrojaron que la piedra pesaba 11.800 arrobas⁴, es decir 133.800 $\overrightarrow{\text{kg}}$. Este valor tampoco es correcto. Estos datos fueron utilizados por Eduardo Ladislao Holmberg quien viajó a la ciudad de Tandil en tres ocasiones en los años 1881, 1882 y 1883, para realizar diversos estudios científicos a los cuales se refiere en su libro: *“Viaje a las sierras del Tandil y de la Tinta”* [26].

En el año 1895 el geólogo Katmozic *“trepó a la piedra”* y registró en detalle sus dimensiones y ubicación. Estas nuevas medidas *“corrigieron”* a las anteriores y fueron aceptadas por un largo tiempo, según los cálculos de Katmozic el peso de la piedra era de 385.920 $\overrightarrow{\text{kg}}$. En este caso, el peso tampoco es correcto, posiblemente porque el ingeniero no pudo calcular su volumen apropiadamente, pero la altura de la piedra se ajusta a los datos actuales. La Figura 7 muestra los bocetos bajo el título *“datos de un gigante”*. En

⁴ una arroba equivale a 11,339 kg

sus anotaciones detalla las dimensiones de la piedra:

“altura del monolito al centro: 5,75 metros. Base noroeste, 7 metros. Base este, 4,75 metros. Base sureste 7,50 metros. Altura este, 5,25 metros. Deducción por vacío 4 metros. Superficie en la cumbre, calculada, 0,80 metros. Determinado en doce medidas y por diferentes sistemas, resultado: mínimo 120 metros cúbicos. Máximo: 134 metros cúbicos. Peso específico del granito, calculado en adoquines comunes, 2,88. Peso del monolito: $134 \text{ m}^3 \times 2,88 = 385.920 \text{ kilos}$ ”.

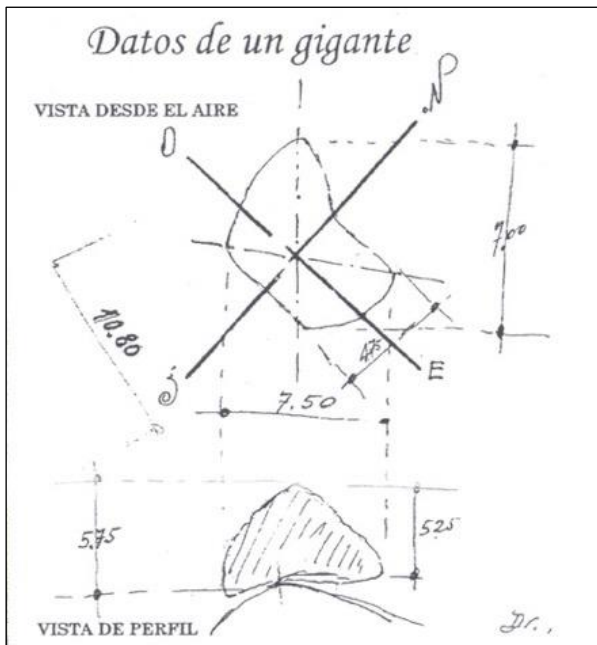


Figura 7. Anotaciones del geólogo Katmozic, 1895. (Fuente: diario Tiempos Tandilenses, 2003)

La Caída

La caída de la piedra movediza al precipicio, ocurrió el jueves 29 de febrero de 1912 entre las 17 y las 18 hs, en un día caluroso y soleado, en el que no soplaba demasiado viento. De inmediato surgieron conjeturas y explicaciones de diversa índole que buscaban la causa y los supuestos culpables de tamaña catástrofe. Muchas de estas presunciones eran de carácter mitológico o pseudo científico.

También se adujeron motivos políticos, relacionados con el contexto sociohistórico del Tandil de principios del siglo veinte, ya que, al momento de la caída, se estaba produciendo una huelga de los picapedreros que trabajaban en las canteras. En este sentido se hablaba de un atentado con explosivos, disimulado por el hecho de que la piedra sufría permanentemente las vibraciones provocadas por las explosiones en las canteras cercanas. Incluso, antes de la caída existían reportes de atentados dirigidos a que la Piedra Movediza dejara de ser parte del paisaje, por ejemplo, se atribuía a Juan Manuel de Rosas, la orden de derribarla utilizando *mil bueyes*, lo cual, evidentemente no había sido logrado y parece más del mundo de la fantasía que del de la realidad. En cualquier caso, nada de esto pudo ser comprobado y está fuera del alcance de nuestro estudio.

El escritor, docente y periodista Ricardo Rojas⁵ (1882-1957) autor de “La victoria del hombre”, “La argentinidad” y “El santo de la espada”, se encontraba en Tandil el día en que ocurrió la caída de la Piedra Movediza. Fue él quien redactó la crónica “La piedra

⁵ https://es.wikipedia.org/wiki/Ricardo_Rojas

muerta” publicada en la edición del viernes 1 de marzo del diario La Nación. Allí, se describían los momentos posteriores al suceso y las reacciones de los pobladores, que lo vivieron como una catástrofe y un duelo. Ricardo Rojas había estado antes en la ciudad, a fines del siglo XIX, y se había interesado por observar y estudiar la Piedra Movediza. Cuando regresó para hacerlo, la vida le deparó la misión de contar para la posteridad, su final.



Figura 8. Fotografía de Ricardo Rojas tomada en 1926.

*La piedra muerta*⁶ [27] es un extraordinario relato de valor inestimable cuya versión original se encuentra en la biblioteca del Instituto de Literatura Argentina de la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires. El autor describe

⁶ [La Piedra Muerta](#)

magistralmente el contexto social, económico y político de la ciudad en esa época. Su relato repleto de hermosas y atinadas metáforas ofrece detalles sobre cómo era la piedra, cómo se accedía a ella, qué ubicación tenía en el cerro, cómo se la veía y porqué resultaba tan impactante.

[...]Llegados al pie del monte es menester subirlo por un sendero donde los peldaños de piedra rústica o labrada, escalonándose en sinuoso faldeo, forman estribo alpestre. Una vez en la cumbre, el peregrino llega a la ancha base de granito, donde se apoyaba la piedra oscilante. Es una torre singular desde la cual se otea hacia el este y el sur, la dilatada extensión de la pampa, mar verdadero ante esa atalaya. Es un belvedere espontáneo, que, desde el occidente hacia el norte, muestra la sucesión de canteras, de las serranías, del pueblo blanco en el cercano valle. Es una gran roca cimera, plana y articulada por el naciente por la escarpada senda del ascenso, y por el poniente redonda, y escurridiza en brusca rampa hacia el inmediato precipicio. Era esta leve sensación de abismo, lo que daba a la Movediza en su altura, una evidencia de peligroso equilibrio, de inminente caída, tornando así más emocionante el ya singular fenómeno de su animación... (p.10).

En los párrafos siguientes Rojas hipotetiza sobre cómo se habría formado, cuándo se habría vuelto capaz de oscilar, y da detalles sobre la pequeña base de apoyo a la que denomina imprecisamente “punto”.

[...]Sobre tales cerros han debido rodar y batir durante millones de años las ondas embravecidas de aquel océano anterior a la cuenca de nuestro río de la Plata. Véase la huella de tan viejas olas en la redondez que caracteriza

a todas las piedras, principalmente en el cerro de la Movediza. Esa lenta labor de las aguas, pasando sobre la gran roca cimera, hoy redonda y caediza, sería el agente que habría ido desgastando por su base a uno de los enormes bloques yacentes sobre el cerro. Tanto y de tal modo lo desgastaron las aguas, que fueron reduciendo la base al pequeño muñón chato y redondo que le servía de apoyo, según he podido verlo, hoy que esa piedra ha caído. Así la enorme mole, antes quieta como las otras, habría cobrado animación y movimiento, sobre ese punto de casual equilibrio. El pequeño punto de apoyo, gastándose a través de prolongadas edades, por la acción de las lluvias y de los vientos, por la detrición de los vidrios rotos y las oscilaciones violentas a que la sometían los turistas habría producido ayer el brusco derrumbamiento... (p. 20)

[...] Su pie era un punto pequeño, tanto que le permitía moverse; su apoyo era una piedra caediza y redonda. Viéndola se admiraba su oscilación, pero también causaba asombro su equilibrio... (p.22)

Haciendo abstracción del estilo literario, las informaciones sobre el movimiento de la Piedra, y sobre cómo era producido, son muy relevantes para los fines de nuestro estudio. Destacamos a continuación, la parte del escrito donde menciona que la oscilación requería que se la perturbara de manera apropiada [27]:

[...]Hace apenas dos días, moviéndola yo mismo, la agité en demasía: creí que, si continuaba agitándola, podría voltearla, y retrocedí espantado ante el peligro. Las personas que me acompañaban, dos amables

vecinos del Tandil, me aseguraron que tal peligro era ilusorio; que ni los bueyes de Rosas, según la tradición más o menos apócrifa; ni diez peones de las canteras, juntos, habían podido forzarla. Me acordaba, en efecto, que hace doce años, cuando la visité por primera vez, me pareciera inmóvil, y apenas si se me reveló su ligera oscilación, por el levísimo crujido de los cristales puestos en su base. Y es que la piedra no era propiamente sensible a la fuerza, sino a cierto mañoso impulso en el cual era menester ayudarse con la misma gravitación de la mole. Entonces cobraba una oscilación pasmosa y asaz visible. Su cuerpo no era tampoco sensible en toda la masa: había puntos en que resistía, absolutamente inmóvil, a la fuerza más poderosa. Me atrevería a decir que no era sensible, en realidad, sino a quien la tocaba en cierto punto de la sinuosa arista inferior que miraba hacia el sudoeste. Los tandilenses, que la conocían, pueden ratificar este aserto. Así impulsada la piedra, comenzaba a animarse de una creciente oscilación, como si un resorte elástico o magnético la sostuviera por la base. No producía el efecto de una masa en equilibrio por razón de la gravedad. Inquietaba más bien, como si fuese la evidencia de una fuerza terrestre desconocida... (p. 22)

Interpretamos a la expresión metafórica “*mañoso impulso*” como un torque externo realizado con una frecuencia justa, coincidente con cierta frecuencia propia del sistema, y como señala el texto, ejercido en un lugar específico. De este modo, al aplicar a este sistema oscilante subamortiguado un torque externo de una cierta frecuencia, se genera un sistema forzado. El movimiento se mantiene porque se entrega energía al sistema, que acaba moviéndose con

la frecuencia de la fuerza externa. En el caso en que la frecuencia anterior y la frecuencia natural sean iguales o muy próximas, la amplitud de oscilación del sistema crecerá y será máxima.

Esto produce el fenómeno de Resonancia y reinterpretando a Rojas: la realización de una fuerza periódica sobre la movediza, ejercida en el lugar correcto, si se encuentra propioceptivamente la frecuencia de resonancia o un valor cercano a ella, provoca un aumento considerable de la amplitud de las oscilaciones. Si la perturbación cesa, prevalece el amortiguamiento y el movimiento se detiene.

Además, Rojas se ocupa de remarcar que no había vestigios de pólvora en la base del pedestal, ni rastros de un deslizamiento, lo cual hubiera dejado huellas del roce piedra con piedra.

[...]La movediza sufrió, además, la acción de temblores que suelen repercutir en aquella sierra por simpatía con la región andina; y los formidables vientos pamperos que la han soplado durante siglos desde el sudeste, parte desfavorable por la apertura del ámbito, y por la inclinación de la piedra toda afectaba hacia el rumbo opuesto; y ha sufrido la piedra, en fin, la constante convulsión del aire y del monte, por el frecuente estampido de dinamita y pólvora, en la labor de las canteras vecinas. Se dirá, sin duda, que tales causas reunidas, trabajando la base de la piedra, la han desgastado hasta hacerla caer en un instante sobre su abismo, en el instante cuyo cronista me ha tocado ser. Pero no. Ha caído la piedra entre las 5 y 6 de la tarde, en un minuto cuya precisión se ignora, pues nadie la vio caer, a pesar de que suele ser la hora preferida por los turistas. Ha caído en un día

sereno, de buena temperatura, sin accidentes sísmicos o meteóricos en las regiones próximas. Si hubiese caído por simple desequilibrio, la mole con el muñón de la base y con el millón de kilos que se le asigna por peso, hubiera rayado el granito o el musgo de la piedra inclinada y redonda que le servía de sustentáculo. La he examinado prolijamente, y no he encontrado rastro alguno, a pesar de que el agudo pie debía ser tan duro que ha resistido siglos a su movimiento y a su peso, y de que el granito es tan sensible al roce que la roca muestra en su declive, hasta las paralelas estrías de la lluvia, según lo patentizan sus fotografías más divulgadas. Esto hace suponer que la piedra se habría desprendido sin rozar la base, lo cual requiere el salto. (pp. 24-25)

Y la hipótesis del salto se corrobora por haber botado a cincuenta metros sobre la falda del cerro, y no al primer estribo, donde solían caer las astillas de vidrio que resbalaban del eje; y por haber botado con violencia y de cabeza sobre las otras rocas, pues se ha descoronado, cayendo el bloque superior a mayor distancia, casi al pie de la sierra. Descontado la sospecha de un atentado voluntario, que las mismas autoridades del Tandil se han encargado de desautorizar por medio de la prensa, pues no se encuentra huella alguna de explosivos ni de palanca, no nos queda sino el aceptar que nuestra piedra oscilante ha caído de un modo tan misterioso como fue su equilibrio: así la he contemplado yo, descoronada en su tumba, con la parte inferior vuelta hacia la cima de su viejo solio, desde donde su base ahora finge, por uno y otro lado del eje, las alas onduladas, triangulares, gigantescas, de una gran águila herida. (pp. 26-27)

Destacamos que un millón de kilos es casi cuatro veces en peso real de la piedra, que ya era muy pesada como para ser desplazada por deslizamiento. Tal vez él quería remarcar el fenómeno del “salto”, que no sería atribuible a la pérdida del equilibrio por deslizamiento, sino al aumento brusco de la amplitud de la oscilación, superando los seis grados. De este modo, la vertical que pasa por el centro de gravedad, no corta a la base de sustentación y se produce la caída. Para que ocurriera el desplazamiento de cincuenta metros con respecto al pie del pedestal, se requiere ese “salto” que le proporcione a la mole de casi doscientas cincuenta toneladas una velocidad inicial con una componente horizontal, respecto del plano de oscilación. Efectivamente, la piedra se rompió en tres pedazos que aún hoy se encuentran a unos cincuenta metros de la base, y que resultaron fundamentales para la reconstrucción.

La hipótesis de Holmberg

El 16 de marzo de 1912, la emblemática revista *Caras y Caretas*, publicó en su edición número 702, el artículo sobre la caída de la piedra movediza *¿Cayó o la derribaron?*⁷, cuyo autor es el médico, naturalista, miembro de la Academia Nacional de Ciencias y escritor Eduardo Ladislao Holmberg⁸.



Figura 9. Fotografía del Dr. Eduardo Ladislao Holmberg tomada el 27 de junio de 1927 para Darwiniana.

Además de científico, Holmberg es considerado el padre de la literatura de ciencia ficción en el país, un

⁷ *Caras y Caretas* 16/07/1912. Pagina 62

⁸<https://www.anc-argentina.org.ar/Holmberg>

pionero al que debemos los primeros relatos sobre viajes a Marte y robots publicados en Argentina.

En su notable escrito sobre la piedra movediza, prevalece el científico, pero además se advierte su habilidad literaria y didáctica.

Se trataba de un peñasco enorme apoyado en equilibrio (palabra que acá no tiene su valor científico estricto) por un relieve descendente de su base geométrica, lo que, en escala considerablemente menor, no se ve a cada momento en piedras y cascotes.

Su centro de gravedad se encontraba arriba del punto de apoyo, y el hecho de oscilar algunos grados sin derrumbarse demuestra que no estaba en equilibrio, es decir, en equilibrio inestable, a pesar de la posición de aquellos puntos, porque la caída se hubiera producido inmediatamente, en cuanto el centro de gravedad hubiese salido de la línea de gravedad.

Si en su pedestal no hubiera existido desde el principio una pequeña cavidad en la cual penetró aquella parte saliente, aquel pivote de su base, no habría llegado nunca a ser la maravilla que fue, porque se habría deslizado de un modo irremediable por el declive curvo en que se apoyaba (más bien en el que estaba formada la cavidad de apoyo) y habría caído en el pequeño precipicio sobre el cual se apoyaba su porción transversal más larga y aguda. (p.1)

Holmberg cuantifica y explica por medio de un modelo simple y muy útil, el valor de la amplitud crítica, que, con los datos de su época calculó en cinco grados. Amplitud que al ser sobrepasada, conduciría a la caída.

[...]lo que llamaremos el punto de apoyo de la Movediza, no era el punto matemático de la mecánica, o si se quiere de la cinemática: no descansaba ella en un vértice geométrico, sino en una base más o menos circular que tenía 30 centímetros de diámetro, por cuyo centro pasaba muy probablemente la línea de gravedad. Por eso dije antes que a pesar de la posición de los dos puntos no estaba en equilibrio inestable. (p.2)

Para que la Piedra no se derrumbara, era necesario que el ángulo de oscilación total fuera menor que 10 grados, o la semioscilación menor que 5 grados, porque pasado apenas ese límite, el centro de gravedad c se proyectaba fuera de la base y tenía que derrumbarse. (p.2)

Luego, él también explica cualitativamente el movimiento oscilatorio del sistema y la preocupación que lo habría rondado por más de treinta años y que había compartido sólo con una persona de su confianza. Holmberg había comprendido al ver cómo era puesta a oscilar, que, al ocurrir esos incrementos bruscos de amplitud, producidos por el fenómeno que hoy denominamos resonancia, la piedra podía caer, sin que sus impulsores pudieran evitarlo. Para remarcar que era relativamente sencillo hacer bascular a la piedra movediza, recurre a ejemplos cotidianos de sistemas oscilantes forzados como las hamacas y los trapecios gimnásticos “*las primeras oscilaciones son cortas, y poco a poco van tornándose más amplias, sin aplicar una fuerza mayor*” ([28], p.2.) Estos sistemas son buenos análogos para entender el fenómeno, pero se trata de cuerpos suspendidos, siendo la movediza, un cuerpo apoyado.

Esa misma preocupación he tenido durante más de 30 años y sólo se la he comunicado a otra persona instruida e inteligente que aceptaba el principio, y con la cual estábamos casi juramentados para no dar popularidad a la idea. Solo una vez, en algunos de mis trabajos publicados, consigné la convicción de que tal derrumbamiento podría producirse voluntariamente con facilidad relativa; pero que me guardaría muy bien de explicar cómo. ¡Era la acumulación sucesiva de impulsos! Estoy casi cierto de que todos los físicos o ingenieros que la han visto han pensado de igual manera.

La “acumulación sucesiva de impulsos” no es otra cosa que la realización de una fuerza periódica, en sincronía con la frecuencia propia de la piedra, que origina la resonancia, característica de los sistemas forzados.

Los ejemplos más vulgares de acumulación de impulsos sucesivos son los que presentan la hamaca y los trapecios gimnásticos, que funcionan como péndulos: las primeras oscilaciones son cortas, y poco a poco van tornándose más amplias, sin aplicar una fuerza mayor.

En nuestro estudio, comenzamos por las ideas compartidas de Rojas y de Holmberg, sobre la morfología, el movimiento oscilatorio y las razones de la caída de la piedra movediza, a las cuales analizamos, reformulamos y desarrollando desde una perspectiva científica actual.

A continuación, sintetizamos las características morfológicas de la piedra movediza, utilizando los datos obtenidos de los estudios realizados para la

construcción de la réplica fija, que hoy se encuentra en el lugar [29]. Luego, realizamos un análisis de estabilidad y recalculamos el ángulo crítico de oscilación, que sobrepasado conduce a la caída.

Posteriormente presentamos una serie de modelos físicos efectivos construidos para aproximarnos al sistema real y analizar la dinámica del movimiento. Esto nos permite obtener las ecuaciones del movimiento, a partir de cuyas soluciones adecuadamente parametrizadas simulamos diferentes escenarios y analizamos las condiciones de resonancia y posible caída. En esta tarea, son fundamentales los datos recabados en crónicas, relatos, recortes de diarios, fotografías, etc., que documentan la ubicación en el cerro, las características de la base de apoyo, y el lugar dónde era preciso realizar la fuerza para ponerla en movimiento.

Morfología de la Piedra

Movediza

La réplica

El desarrollo del proyecto de construcción de la réplica de la Piedra Movediza estuvo a cargo de un equipo de trabajo del área de estructuras del departamento de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Las actividades de dicho grupo estaban orientadas por la necesidad de que la réplica de la piedra tuviese las mismas dimensiones geométricas para ser emplazada fija en la misma posición y ubicación del cerro que la piedra original.

Se realizaron estudios topográficos que consistieron en el relevamiento planialtimétrico del cerro en el entorno del lugar de emplazamiento y el relevamiento geométrico de la piedra caída, a los efectos de reconstituir la geometría original y elaborar el modelo geométrico espacial digitalizado [29].

Estos estudios aportaron datos exactos y precisos sobre la morfología de la Piedra tales como: el volumen, las dimensiones, la masa, la ubicación del centro de gravedad, los momentos de inercia y la superficie externa aproximada entre otras magnitudes. También se determinó que el centro de gravedad se ubicaba en la vertical que pasaba por el centro de apoyo. Esto último justifica el equilibrio estable que la piedra movediza poseía. Los datos más relevantes para esta investigación se detallan en la Tabla 1.

La geometría de la réplica se determinó a partir del análisis de la información disponible y del relevamiento geométrico de la piedra caída, que yace al pie del Cerro “La Movediza”.

Tabla 1. Datos morfológicos calculados por los ingenieros del departamento de ingeniería civil de la UNICEN.

Características morfológicas	
Volumen aproximado	$V = 91 \text{ m}^3$
Masa aproximada	$M = 2,48 \cdot 10^5 \text{ kg}$
Superficie externa	$S = 133 \text{ m}^2$
Centro de gravedad	$d = 1,81 \text{ m}$
Longitud de la base de apoyo	$l = 0,4 \text{ m}$

Se utilizaron Taquímetros Electrónicos a rayo infrarrojo y láser y Sistemas de receptores GPS. Se relevaron planialtimétricamente 1523 puntos entre los tres trozos existentes. Las coordenadas de estos puntos, fueron introducidas en el software AutoCad para determinar la geometría de la Piedra Movediza (Figura 10).

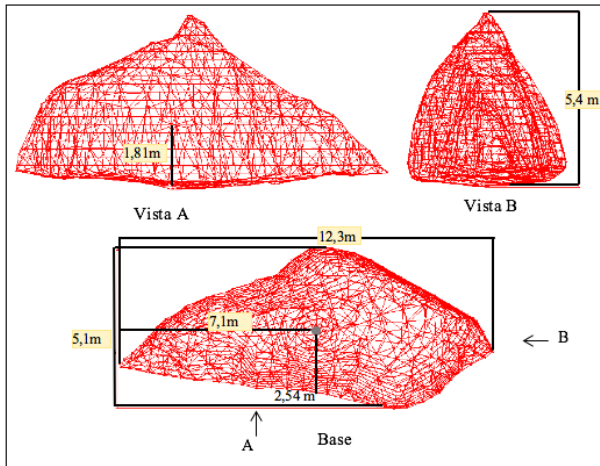


Figura 10. Geometría de la Piedra Movediza. Fuente: Peralta, et al., 2008

Estabilidad de la Piedra

Movediza

Equilibrio de los cuerpos apoyados

El cilindro y la piedra movediza que se muestran en la primera fila de la Figura 11, son cuerpos apoyados en equilibrio estable. Esto significa que la vertical que pasa por su centro de gravedad (cg) corta a la base de apoyo o base de sustentación.

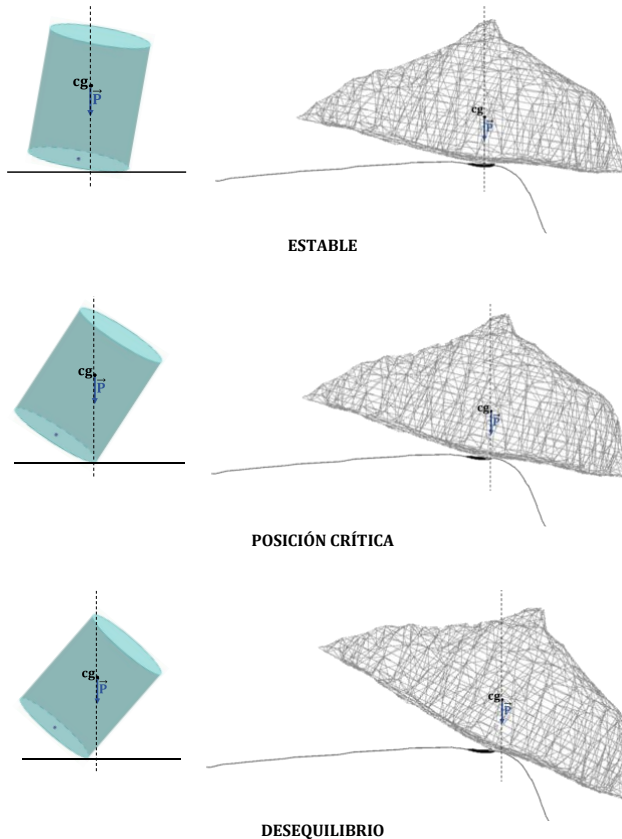


Figura 11. Cilindro y Piedra movediza en equilibrio estable, crítico y desequilibrio.

¿Qué debe ocurrir para que el cuerpo apoyado pierda su estabilidad y caiga? Debe dejar de cumplirse la condición anterior. Existe una posición crítica, como se muestra en la segunda fila de la Figura 11, en la cual el cuerpo puede regresar al equilibrio inicial o caerse. En este último caso, la vertical que pasa por el centro de gravedad ya no corta a la base de sustentación como se aprecia en la tercera fila.

Cuando más próximo a la base de sustentación se encuentre el centro de gravedad de un cuerpo, es más difícil que la vertical que pasa por dicho centro deje de cortar a la base, es decir que la estabilidad del cuerpo es mayor cuanto más próximo a la base se encuentra en centro de gravedad.

Considerando a la piedra movediza como un cuerpo apoyado y aplicando el razonamiento anterior, cuando la vertical que pasaba por su centro de gravedad dejara de cortar a la base de apoyo, la piedra caería. Según nuestros cálculos, la posición crítica ocurría para un ángulo de aproximadamente $6,3^\circ$.

Sin embargo, Holmberg había arribado en su época a un valor crítico de 5° , debido a que realizó el cálculo con medidas inexactas, sobre todo para la posición del centro de gravedad, como mostraremos a continuación. En cualquier caso, este valor de cinco grados, aumenta las posibilidades de caída y justifica los temores que rondaban al naturalista y a Rojas.

Estimación del ángulo crítico para la piedra movediza

La Figura 12 representa la ubicación de la Piedra Movediza en el cerro como establecimos anteriormente. El punto cg indica la posición del centro de gravedad de la piedra. Los puntos A_0 y B_0 son los extremos de la base de apoyo.

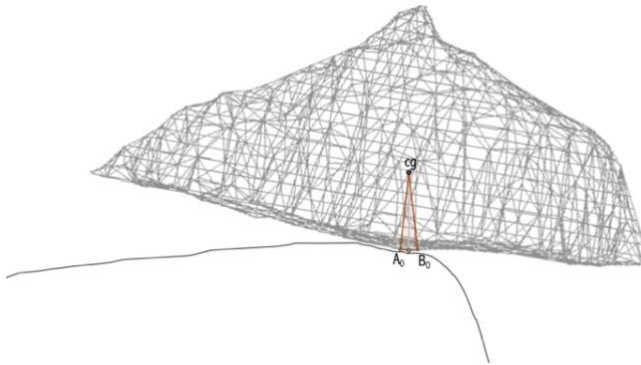


Figura 12. La Piedra Movediza en equilibrio

Para calcular la amplitud de oscilación crítica, seguimos el razonamiento de Holmberg, pero utilizamos las medidas que surgen del estudio realizado para construir la réplica.

Consideremos el triángulo imaginario A_0cgB_0 como se muestra en la Figura 13. La vertical que pasa por cg es la mediatriz de la base del triángulo, es decir que se trata de un triángulo isósceles, siendo C_0 el punto medio de la base y μ el ángulo comprendido entre los lados iguales.

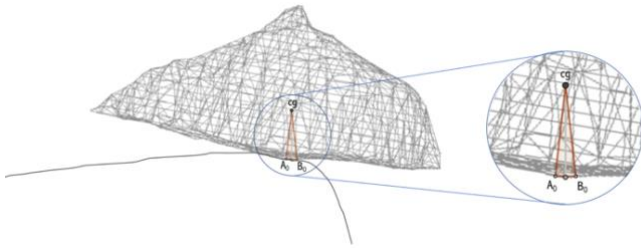


Figura 13. Triángulo imaginario que se forma con los extremos de la base de apoyo y el centro de gravedad de la Piedra

Para mostrar la pequeñez del diámetro de la base de apoyo en comparación con la distancia a la que se ubica en centro de gravedad, la Figura 14 se ha realizado a escala. El segmento A_0B_0 es la base del triángulo y el diámetro de la base de sustentación de la piedra, cuya longitud es $l = 0,4 \text{ m}$.

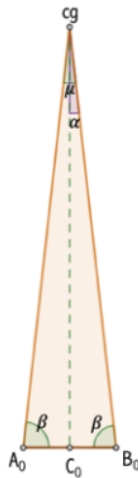


Figura 14. Triángulo a escala formado por los extremos del apoyo de la Piedra Movediza y el centro de gravedad

La distancia desde el centro de gravedad cg hasta C_0 es $h = 1,81 \text{ m}$. Consideremos el triángulo rectángulo cgC_0B_0 , donde el cateto menor C_0B_0 tiene $0,2 \text{ m}$ y calculemos los ángulos del triángulo α y β .

$$\tan(\alpha) = \frac{0,2\text{m}}{1,81\text{m}} \Rightarrow$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0,2}{1,81}\right) \cong 6,3^\circ$$

Entonces los ángulos del triángulo isósceles considerado:

$$\mu = 2\alpha \cong 12,6^\circ, \beta \cong 83,7^\circ$$

Analicemos ahora cómo se llega a la conclusión de que la amplitud crítica es α . La Figura 15 muestra al mismo triángulo dibujado a escala, donde cg , cg' y cg'' son respectivamente las posiciones del centro de gravedad de la piedra cuando esta oscila en sentido horario u antihorario, en la posición estable y crítica. Si el movimiento de la piedra continúa más allá de cg' , la vertical que pasa por el centro de gravedad dejará de cortar a la base de apoyo y se perderá el equilibrio. Lo mismo ocurre con cg'' .

A partir de la Figura 15 advertimos que si bien el triángulo gira con el movimiento de la piedra, se conservan las distancias y los ángulos del triángulo, ya calculados. Tomando en cuenta las propiedades entre las rectas paralelas y perpendiculares se obtiene que el ángulo crítico es igual que α es decir:

$$A_0\hat{B}_0A'_0 = B'_0\hat{A}_0B_0 = 6,3^\circ.$$

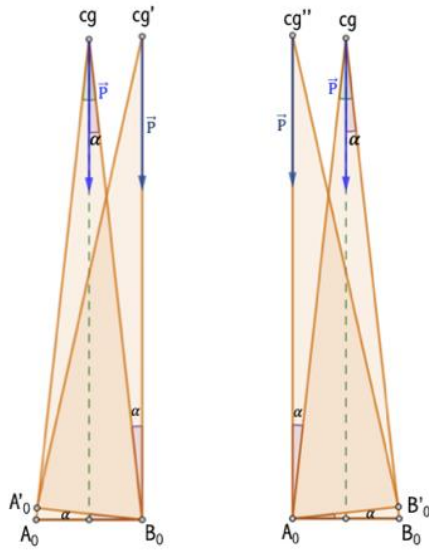


Figura 15. Rotación del triángulo A_0cgB_0

La Piedra Movediza está en equilibrio y no se cae si la máxima amplitud de oscilación posible es menor que $6,3^\circ \cong 0,11 \text{ rad}$.

Dinámica de la Piedra

Movediza

Condiciones de equilibrio

La Figura 16 muestra el equilibrio estable de la piedra movediza apoyada en el cerro.

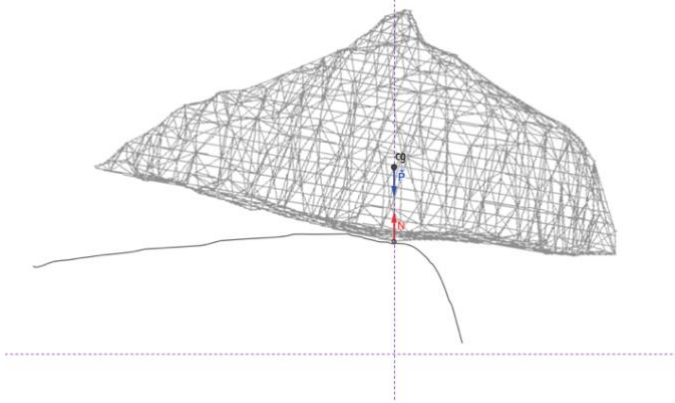


Figura 16. Equilibrio de la Piedra Movediza representando el peso y la fuerza normal ejercida por la superficie

El equilibrio de un cuerpo sujeto a la acción de fuerzas puede analizarse desde el punto de vista de la Mecánica. Deben cumplirse las dos condiciones siguientes:

- a) la sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (resultante) es cero (equilibrio de traslación) $\sum \vec{F} = 0$
- b) la sumatoria de los momentos de todas las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo con respecto a cualquier punto es cero (equilibrio de rotación). $\sum \vec{\tau} = 0$

El momento de una fuerza o torque, representa el “poder de giro” de dicha fuerza. Su valor es el

producto entre la intensidad de la fuerza y la distancia perpendicular (o brazo de palanca) al eje de giro. Cuanto mayor es la distancia al eje, más “poder de giro” tiene esa fuerza. Esta es la razón por la cual los picaportes de las puertas están en el extremo más alejado del eje de giro, o para que la llave gire, la fuerza se ejerce en su extremo como se aprecia en la Figura 17.

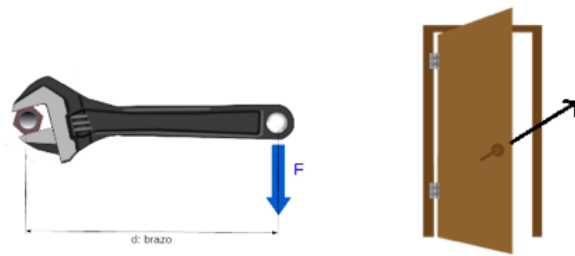


Figura 17. Una llave donde el momento de la fuerza la hace girar en sentido horario y una puerta donde el momento es máximo en el picaporte, ubicado en el extremo.

Los cuerpos apoyados que se encuentran en la Figura 11 de la sección previa, cumplen la primera condición de equilibrio.

Al apartar el cuerpo de la posición inicial, surge un torque que puede restaurar el equilibrio, o producir su caída. La Figura 16 de la piedra movediza representa a la fuerza peso en color azul y a la normal ejercida por la superficie de apoyo en color rojo, cuya suma vectorial es cero. Para poner en movimiento a la piedra, se debía ejercer una fuerza externa en un lugar específico y alejado del eje de giro, que maximizara el momento.

De este modo, maximizar el momento de la fuerza aplicada a la piedra es condición necesaria pero no suficiente para que oscile. La Figura 18 es una fotografía que muestra a un hombre trepado a la piedra en la cara más alejada de un posible eje de giro, sin embargo, al parecer, el sujeto no logra perturbarla, a juzgar por la tranquilidad del perro que está debajo.



Figura 18. Un hombre trepado al extremo de la piedra opuesto al precipicio, intentando que esta oscile.

Los perros tienen un oído muy agudizado, si la piedra se moviera el animal habría evitado el riesgo de estar en esa posición. Es decir que el hombre de la foto, ignoraba el lugar apropiado para hacerla oscilar. La cruz indica la arista apropiada donde los lugareños avezados ejercían la fuerza y lograban la oscilación que tanto sorprendía a los visitantes.

Ecuaciones del movimiento de la piedra movediza

La piedra oscilaba cuando se le aplicaba una fuerza externa en el lugar correcto. Si se lograba sacarla de la posición de equilibrio inicial y llevarla a la posición a de la Figura 19, regresaba. Esto se debe a que la fuerza normal realiza un torque restaurador y genera un movimiento en sentido anti horario. Así, la piedra vuelve a pasar por el punto de equilibrio inicial, sobrepasándolo por efecto de la inercia hasta la posición b . Una vez aquí, un torque restaurador reinicia la oscilación ahora en sentido horario. Si no se continúa perturbando externamente al sistema, este se detiene por el amortiguamiento debido al rozamiento en la base de apoyo.

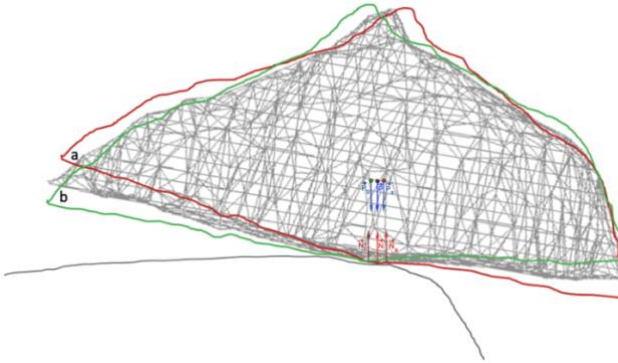


Figura 19. Figura que muestra el plano de oscilación de la piedra.

El movimiento de un oscilador armónico simple se describe a través de las ecuaciones de Newton, por medio de una ecuación diferencial lineal de segundo

orden [33], cuya solución es una familia de funciones armónicas.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + w_0^2\varphi = 0$$

Si el sistema es amortiguado debido al rozamiento, se requiere un nuevo término para la ecuación diferencial relacionado con la primera derivada de la posición, que es la velocidad.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = 0$$

siendo γ el coeficiente de amortiguamiento.

En los sistemas forzados que además del amortiguamiento debido al roce, están bajo la influencia de una fuerza externa, la ecuación se transforma en:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = F_0 \cos(wt)$$

Si la fuerza externa es periódica y su frecuencia es aproximadamente igual a la frecuencia natural del sistema oscilante (libre de fuerzas externas) $w \cong w_0$, se produce un máximo en la amplitud de oscilación, fenómeno conocido como resonancia mecánica.

Un modelo físico adecuado para el sistema de la Piedra Movediza, que tenga en cuenta que su base no es plana, conduce a la mecánica de los sólidos rígidos oscilantes apoyados.

Consideremos en principio, un modelo tipo “balancín” o “mecedora”. Para que una mecedora oscile, es preciso perturbarla, tal como ocurría con la

pedra, que contrariamente a lo que supone el sentido común popular, no se movía “sola”. Los modelos son representaciones simplificadas de la realidad y la piedra sería una mecedora peculiar cuya base curva rueda sobre el suelo plano. La peculiaridad reside en que, a diferencia de las mecedoras reales, esta base, es muy pequeña y su radio de giro es muy, muy grande.

La Figura 20 representa la base de apoyo de la piedra y el radio de giro R según este modelo. Se trata de una figura ilustrativa que no guarda la proporción exacta entre las medidas. A la izquierda (I), se aprecia la posición de la base cuando la piedra está en la posición de equilibrio. El punto en color celeste marca la ubicación del centro de masa; la flecha indica el sentido del torque sobre el sistema. A la derecha (II) se representan los cambios del sistema al perder la posición de equilibrio cuando fue perturbado.

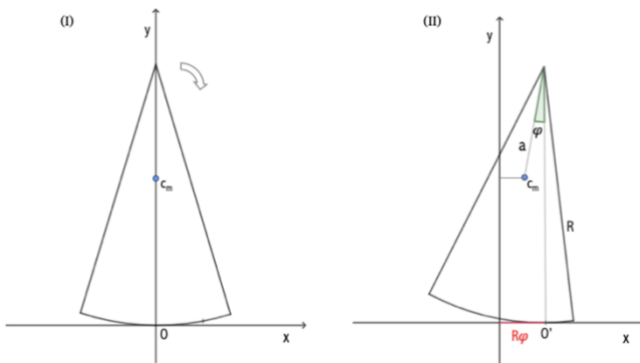


Figura 20. Izquierda I. representación de la base de apoyo en su posición de equilibrio. Derecha II. Representación del sistema una vez que fue perturbado y perdió la posición de equilibrio.

La oscilación está relacionada con un movimiento traslacional y de rotación combinado: el modelo del

sólido rígido en roto-traslación⁹ [30, 31, 32]. La aplicación de las leyes de Newton a este modelo conduce a una ecuación diferencial donde los parámetros son específicos del sistema de la Piedra Movediza: masa, geometría, momentos de inercia, rozamiento en la base, torque externo, etc., y su solución remite a los mismos modelos matemáticos que los modelos más simples como por ejemplo un péndulo ideal, un resorte, un péndulo físico, etc.

La ecuación para un oscilador amortiguado y forzado mediante un torque externo $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$, que le entrega energía periódicamente es:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = \frac{M_0}{I} \cos(\omega t) \quad (1)$$

La solución¹⁰ de la ecuación (1) es

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega t - \psi)$$

La amplitud φ_{\max} y la fase ψ vienen dados por:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_0}{I \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$
$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Donde, M_0 es el torque externo ejercido, I es el momento de inercia de la piedra movediza, ω_0 es la

⁹ Un análisis detallado de este modelo se encuentra en el [Anexo 1](#).

¹⁰ Para una solución detallada de la ecuación diferencial (1) ver [Anexo 2](#) [32].

frecuencia propia de oscilación del sistema y w es la frecuencia del torque externo.

Es posible mostrar que la función siguiente tiene máximo:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_0}{I\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\gamma^2}}$$

Derivando y haciendo $\varphi'_{\max}(w) = 0$ se obtiene que:

$$\varphi'_{\max} = \frac{M_0 (2\gamma^2 w - 4w(w_0^2 - w^2))}{I \cdot 2((w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2)^{3/2}} = 0$$

Entonces la amplitud es máxima para

$$w = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

Cuando el movimiento es subamortiguado y γ es pequeño comparado con w_0 , el máximo ocurre para una frecuencia muy próxima a la frecuencia propia w_0 y la llamada línea de resonancia es proporcional a γ . En los casos de amortiguamiento crítico y de sobre amortiguamiento, esta línea directamente desaparece.

Por último, se construyó un nuevo modelo en roto-traslación, que considera la mecánica de los sólidos deformables. Este modelo explica el origen del amortiguamiento y justifica la elección de γ . Para el lector interesado, el desarrollo del modelo de sólidos deformables se propone en el [Anexo 3](#) [32].

Análisis de los parámetros de la ecuación

Para analizar los posibles escenarios de resonancia de la piedra movediza, a continuación, consideramos cada uno de los parámetros de la ecuación del movimiento. Por un lado, disponemos de los valores que surgieron a raíz de la construcción de la réplica y, además, calculamos otros parámetros y estimamos aquellos que son desconocidos. Las magnitudes se expresan en unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI).

- La amplitud ϕ se mide en radianes: rad
- La inercia se mide en unidades de masa por longitud al cuadrado: $I = \text{kg} \cdot \text{m}^2$
- Las frecuencias se miden en Hertz: $w = \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$
- El momento de la fuerza M_0 se mide en unidades de fuerza por distancia: $M_0 = F \cdot d = \text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$
- La constante de amortiguamiento se mide en $\frac{1}{\text{s}}$

Frecuencia propia w_0

La frecuencia propia de la Piedra Movediza surge de las crónicas, que indican una frecuencia de 60 oscilaciones por minuto. Entonces, $f = 1 \text{ Hz}$ y $w_0 = 2\pi f \cong 6,2832 \text{ Hz}$. Los cálculos se realizan con valores próximos a esta frecuencia tales como por ejemplo $f = 0,9 \text{ Hz}$ y $f = 0,8 \text{ Hz}$, que corresponden respectivamente a $w'_0 = 5,0266 \text{ Hz}$ y $w''_0 = 5,6549 \text{ Hz}$.

Momento de Inercia I

Utilizamos el momento de inercia correspondiente al eje z calculado por los ingenieros de la UNICEN. Este eje es perpendicular al plano de oscilación representado en la Figura 18. Los momentos de inercia con respecto a un eje que no pasa por el centro de masa de la piedra sino por su base de apoyo se calculan con el Teorema de Steiner [33].

$$I = I_{cm} + md^2$$

Si $m = 248 \text{ Tn}$ y $d = 1,81 \text{ m}$ tenemos:

$$I_z = 919,54 \text{ Tn m}^2 + 248 \text{ Tn} * 1,812 \text{ m}^2 = 1732,01 \text{ Tn.m}^2 = 1732010 \text{ kg.m}^2$$

Longitud a y radio de giro R

Los valores de a y de R se estiman a partir de la fórmula de la frecuencia propia (ver [Anexo 1](#)):

$$w = \sqrt{\frac{mga}{I}} \Rightarrow a = \frac{w^2 I}{mg}$$

$$a = \frac{6,2832^2 1/s^2 \cdot 1732,01 \text{ Tn.m}^2}{248 \text{ Tn} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$a = 28,11 \text{ m}$$

Tal como se observa en la Figura 19, en el equilibrio:

$$R - a = 1,81 \text{ m}$$

Siendo $1,81 \text{ m}$ la posición del centro de masa calculada para la réplica

$$R = 1,81 \text{ m} + 28,11 \text{ m}$$

$$R = 29,92 \text{ m}$$

Torque externo

Cuando realizamos el análisis de estabilidad, calculamos que la amplitud de oscilación crítica es $\phi_c = 0,11\text{rad}$, es decir alrededor de 6,3 grados sexagesimales. Si este valor era superado, la piedra caía al precipicio.

La base documental, que integran la [Figura 2](#), Figura 21 y Figura 22, nos permite suponer que la piedra se ponía en movimiento mediante la intervención de entre tres y cinco hombres que aplicaban coordinadamente el torque externo. En la fotografía de la [Figura 2](#) se ven cinco pares de manos, aunque a simple vista parecen solo cuatro personas, ¡son cinco! las que están ejerciendo la fuerza.

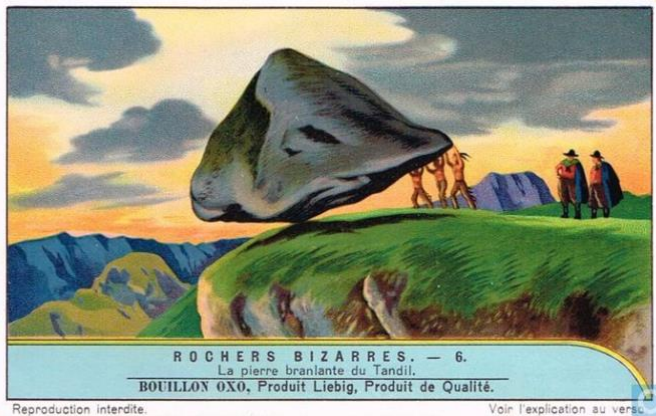


Figura 21. Imagen obtenida de un catálogo francés de “rocas raras” de 1931.

En el epígrafe de la Figura 21 dice “rocas extrañas” y más pequeño “la piedra oscilante de Tandil”. Las ilustraciones de la Figura 21 y la Figura 22 pertenecen a calendarios y tarjetas postales de la época. En la

Figura 22 se ve a dos hombres, uno de los cuales señala con su bastón el lugar donde había que aplicar la fuerza. Si bien es correcta la indicación de que la fuerza debía ejercerse a una distancia del eje de giro que maximizara el torque, no sería posible que una sola persona con un bastón la moviese.

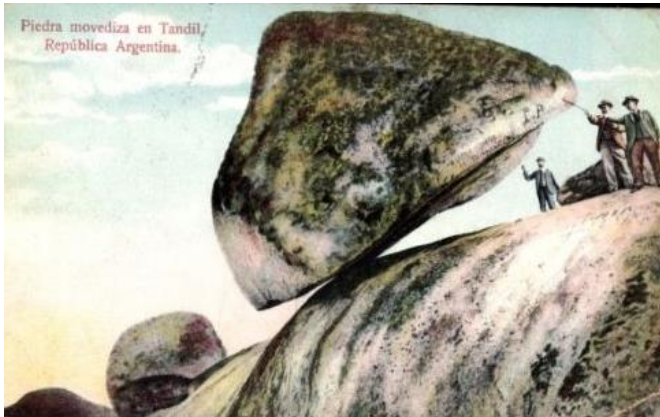


Figura 22. Imagen de una postal del año 1917.

¿Cómo podríamos estimar el torque que debía realizarse para impulsar la piedra? ¿Cuál sería el orden de magnitud de un torque razonable realizado en el extremo de la piedra? ¿Cuántas personas de contextura normal habrían podido realizar ese torque?

Para responder a estas preguntas, construimos la Tabla 2, donde se proponen algunos torques posibles cuya intensidad es $M_0 = F \cdot d$, donde:

- $F = f_0 \cdot n$, corresponde a la fuerza, siendo f_0 la fuerza individual promedio ejercida por una persona y n el número total de personas que realizaban esa fuerza.

- d representa la distancia entre el extremo y el eje de giro $d = 7,1$ m.

La tabla propone posibles M_0 y la fuerza individual ($1N=9,8 \vec{kg}$) considerando tres, cuatro o cinco personas.

Tabla 2. Posibles torques según el número de personas

M_0 (Nm)	$f_0(n=3)$		$f_0(n=4)$		$f_0(n=5)$	
	$f_0(N)$	$f_0(\vec{kg})$	$f_0(N)$	$f_0(\vec{kg})$	$f_0(N)$	$f_0(\vec{kg})$
8000	375,6	38,3	281,7	28,7	225,4	22,9
9000	422,5	43,1	316,9	32,3	253,5	25,8
10000	469,5	47,9	352,1	35,9	281,7	28,7
11000	516,4	52,6	387,3	39,5	309,9	31,6
12000	563,4	57,4	422,5	43,1	338,0	34,5
13000	610,3	62,2	457,7	46,7	366,2	37,3
14000	657,3	67,0	492,9	50,3	394,4	40,2
15000	704,2	71,8	528,2	53,8	422,5	43,1
16000	751,2	76,6	563,4	57,4	450,7	45,9
17000	798,1	81,4	598,6	61,0	478,9	48,8
18000	845,1	86,1	633,8	64,6	507,0	51,7
19000	892,0	90,9	669,0	68,2	535,2	54,6
20000	938,9	95,7	704,2	71,8	563,4	57,4
21000	985,9	100,5	739,4	75,4	591,5	60,3
22000	1032,9	105,3	774,6	78,9	619,7	63,2

En la Tabla 3 se resumen los valores de los parámetros antes analizados.

Tabla 3. Parámetros de la ecuación del movimiento

Parámetros de la ecuación de movimiento	
Frecuencias propias	$f = 1\text{Hz} \Rightarrow w_0 = 6,2832 \text{ Hz}$
	$f = 0,8\text{Hz} \Rightarrow w_0 = 5,0266 \text{ Hz}$
	$f = 0,9\text{Hz} \Rightarrow w_0 = 5,6549\text{Hz}$
Momento de inercia	$I = 1732010\text{kg m}$
Longitud	$a = 28,11\text{m}$
Radio de giro	$R = 29,92\text{m}$
Torque externo	$1000\text{Nm} \leq M_0 \leq 21000\text{Nm}$

En la sección siguiente, retomamos la solución de la ecuación (1) que representa la amplitud de la oscilación de la piedra movедiza en cualquier instante.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = \frac{M_0}{I} \cos(wt)$$

La solución de la ecuación es

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(wt - \psi)$$

En particular se analizará la función amplitud máxima φ_{\max} , considerando sus parámetros para diversas condiciones características de distintitos escenarios posibles.

La amplitud φ_{\max} es:

$$\varphi_{\max}(w) = \frac{M_0}{I\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\gamma^2}}$$

Si $w = w_0$ que es la condición de resonancia del sistema, se obtiene que la amplitud máxima es:

$$\varphi_{\max} = \frac{M_0}{w_0 I \gamma}$$

Análisis del amortiguamiento para diferentes torques y frecuencias del sistema en resonancia

El modelo oscilatorio propuesto considera un sistema subamortiguado con un γ muy pequeño, cuyo orden de magnitud es desconocido. En una primera aproximación asumimos como aceptable que el amortiguamiento es $\gamma \geq 10^{-2}$.

La caída de la piedra ocurre si φ_{\max} es mayor que $6,3^\circ \cong 0,11$ rad. Utilizando la expresión de φ_{\max} para la condición de resonancia obtenida antes:

$$\frac{M_0}{w_0 I \gamma} \geq 0,11 \Rightarrow \frac{M_0}{0,11 I w_0} \geq \gamma$$

es decir que:

$$\gamma \leq \frac{M_0}{0,11 w_0 I}$$

Esta última expresión permite calcular el amortiguamiento para diferentes torques y frecuencias propias.

Por ejemplo, en la Tabla 4. consideramos un torque $M_0=9000$ Nm.

Tabla 4. Valores de γ para las distintas w_0 considerando $M_0=9000$ Nm.

I (kg.m ²)	w ₀ (hz)	M ₀ (Nm)	$\gamma = \frac{M_0}{0,11 w_0 I}$	φ_{\max} (rad)
1732010	5,0266	9000	0,0093977	0,11
1732010	5,6549	9000	0,0083536	0,11
1732010	6,2832	9000	0,0075182	0,11

Los resultados muestran que, oscilando en las frecuencias propias de la tabla, para que el sistema alcance la amplitud crítica, el amortiguamiento es demasiado pequeño con relación al que se ha tomado como aceptable para el rozamiento piedra contra piedra.

En la Tabla 5 consideramos como torque posible $M_0 = 10000$ Nm. En este caso existiría un amortiguamiento aceptable para la frecuencia propia $w_0 = 5,0266$.

Tabla 5. Valores de γ para las distintas w_0 considerando $M_0 = 10000$ Nm

I (kg.m ²)	w_0 (hz)	M_0 (Nm)	$\gamma = \frac{M_0}{0,11w_0I}$	Φ_{\max} (rad)
1732010	5,0266	10000	0,0104419	0,11
1732010	5,6549	10000	0,0092817	0,11
1732010	6,2832	10000	0,0083536	0,11

Consideramos ahora como torque posible $M_0 = 11000$ Nm. En la Tabla 6, puede verse que el amortiguamiento aceptable ocurre tanto para la frecuencia propia $w_0 = 5,0266$ como para $w_0 = 5,6549$.

Tabla 6. Valores de γ para las distintas w_0 considerando $M_0 = 11000$ Nm.

I (kg.m ²)	w_0 (hz)	M_0 (Nm)	$\gamma = \frac{M_0}{0,11w_0I}$	Φ_{\max} (rad)
1732010	5,0266	11000	0,0114861	0,11
1732010	5,6549	11000	0,0102099	0,11
1732010	6,2832	11000	0,0091890	0,11

Si consideramos un posible torque $M_0 = 12000$ Nm, en la Tabla 7 puede verse que el amortiguamiento

aceptable ocurre para todas las frecuencias propias consideradas.

Tabla 7. Valores de γ para las distintas w_0 considerando $M_0=12000$ Nm.

I (kg.m ²)	w_0 (hz)	M_0 (Nm)	$\gamma = \frac{M_0}{0,11w_0I}$	Φ_{\max} (rad)
1732010	5,0266	12000	0,0125303	0,11
1732010	5,6549	12000	0,0111381	0,11
1732010	6,2832	12000	0,0100243	0,11

Nótese que entonces, para cualquier torque $M_0 \geq 12000$, el amortiguamiento será aceptable.

A partir de este análisis, podemos concluir que, considerando el amortiguamiento aceptable de 10^{-2} y teniendo en cuenta tanto la frecuencia propia w_0 como sus proximidades, bajo la condición de resonancia, la piedra se podría haber caído a partir de un torque de 12000 Nm, lo que significaría que se necesitaban, por ejemplo (según la [Tabla 2](#)), tres hombres haciendo una fuerza promedio de aproximadamente $57 \vec{k}g$ cada uno o cuatro hombres haciendo una fuerza de $43 \vec{k}g$ cada uno.

Amplitud máxima para diferentes torques y amortiguamientos

A continuación, utilizamos los datos anteriores y analizamos la amplitud máxima en función de la frecuencia de oscilación, representando gráficamente las amplitudes que se obtienen para diferentes valores del amortiguamiento γ y del torque M_0 .

$$\varphi_{\max}(w) = \frac{M_0}{I\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2\gamma^2}}$$

Consideramos primero $\gamma=0,01$ y diferentes valores de $M_0=9000\text{Nm}$, 10000Nm , 11000Nm , 12000Nm y 13000Nm . La Figura 23 representa gráficamente $\varphi_{\max}(w)$ para los diferentes torques. Además, se traza la recta horizontal $\varphi = 0,11$.

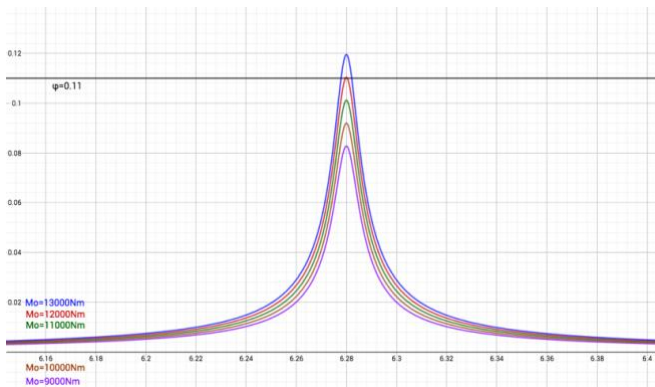


Figura 23. Función amplitud para diferentes M_0 si $\gamma=0,01$

Se observa que la función sobrepasa la amplitud crítica si el torque es mayor que $M_0=12000\text{Nm}$, tal como se había concluido en la sección anterior. Esto significa, por ejemplo, que se requieren tres personas

realizando una fuerza promedio de aproximadamente $43 \vec{kg}$ cada. En la condición de resonancia. Cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural de oscilación de la piedra movediza, podrían entonces haber producido que la piedra cayera.

La Figura 24 contiene la representación de la función amplitud para $\gamma = 0,012$ y diversos torques. Entonces para superar la amplitud de oscilación crítica hay que ejercer un torque $M_0 = 15000 Nm$ o mayor. En ese caso, podría haber sucedido que tres personas realizando una fuerza promedio de aproximadamente $72 \vec{kg}$ cada una, con la frecuencia de resonancia podrían haber provocado la caída de la piedra. También podrían ser cuatro personas realizando una fuerza promedio de $54 \vec{kg}$ cada una.

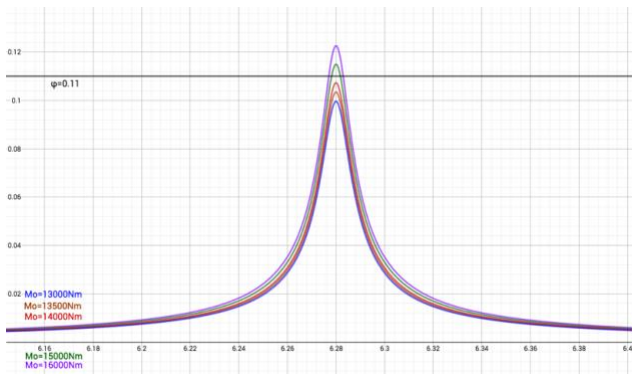


Figura 24. Función amplitud para diferentes M_0 considerando $\gamma = 0,012$

La Figura 25 muestra la misma simulación para diversos torques con $\gamma = 0,015$. En este caso, el escenario de caída ocurre a partir de $M_0 = 18000 Nm$ o mayor. Es decir, que se necesitarían tres personas

realizando una fuerza promedio de $86 \vec{\text{kg}}$, o cuatro personas que realicen $64 \vec{\text{kg}}$ o hasta 5 personas con una fuerza de $52 \vec{\text{kg}}$ cada una.

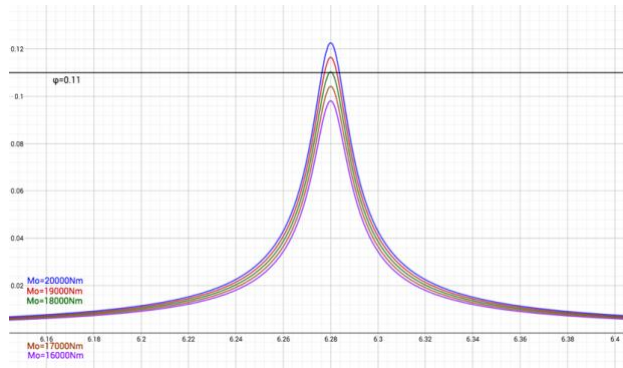


Figura 25. Función amplitud para diferentes M_0 considerando $\gamma=0,015$

La Figura 26 representa diversos valores de la función amplitud con $\gamma = 0,018$.

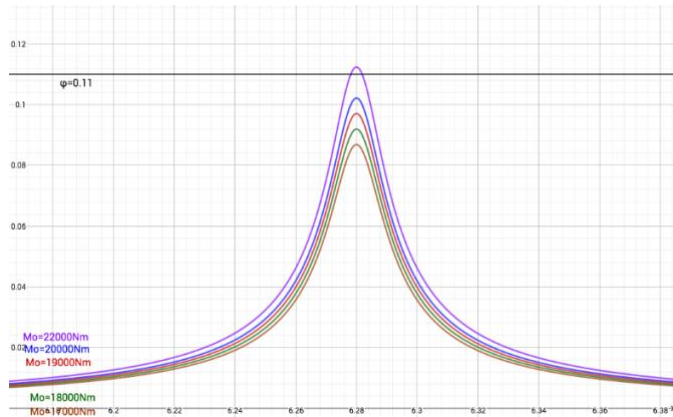


Figura 26. Función amplitud para diferentes M_0 considerando $\gamma=0,018$

En este caso se requiere de un torque superior a $M_0 = 22000 \text{ Nm}$ para alcanzar o sobrepasar la amplitud crítica. Esto podría lograrse si tres personas realizan una fuerza promedio de $105 \overrightarrow{\text{kg}}$ aproximadamente, o cuatro personas $78 \overrightarrow{\text{kg}}$ y hasta 5 personas ejercen $63 \overrightarrow{\text{kg}}$ cada una.

Es evidente que a medida que el amortiguamiento aumenta, se requiere de un torque mayor, y las posibilidades de que la piedra oscile en la región de la amplitud crítica y se caiga, se reducen. Es decir que el sistema puede ponerse a oscilar en la condición de resonancia sin sobrepasar el valor de caída. Esto se aprecia en todas las curvas de la función amplitud en las cuales el sistema tiene un máximo inferior al valor crítico. En todos esos casos, para cada valor de amortiguamiento considerado, las amplitudes máximas de oscilación resultan cada vez menores y más imperceptibles.

Es posible que a lo largo del tiempo el sistema de la piedra movediza se haya tornado más subamortiguado y que las posibilidades de superar la amplitud crítica con torques de menor intensidad hayan aumentado.

Referencias

- [1] El Hage, E. y Levy, P., *La piedra viva*. Tandil, Buenos Aires: Artes Gráficas, 2007.
- [2] Otero, M. R., “Imágenes y Enseñanza de la Física: Una Visión Cognitiva”. Tesis Doctoral, Universidad de Burgos, España, 2004.
- [3] El Hage, E. y Levy, P., *La piedra viva, 2da Ed.* Tandil, Buenos Aires: Municipio de Tandil, 2012.
- [4] Giere, R. N. *Explaining Science: A Cognitive Approach*. Chicago: University of Chicago Press, 1988.
- [5] Giere, R. N. *Science without laws*. Chicago: University of Chicago Press, 1999.
- [6] Giere, R. How Models Are Used to Represented Reality. *Philosophy of science*, vol. 71, no. 5, pp. 742-752, 2004.
- [7] Dewey, J. *The child and the curriculum*. Chicago: University of Chicago Press, 1902.
- [8] Dewey, J. *Democracy and Education*. New York: Macmillan, 1916.
- [9] Dewey, J. *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt, 1938.
- [10] Piaget, J. *Introducción a la epistemología genética*. Buenos Aires: Paidós, 1975.
- [11] Vergnaud, G. “La théorie des champs conceptuels”. *Recherches en Didactique des*

- Mathématiques*, vol. 10, no. 23, pp.133-170, 1990.
- [12] Brousseau, G. “Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, no. 2, pp. 33-115, 1986.
- [13] Chevallard, Y. *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (2e éd), 1985.
- [14] Chevallard, Y. “El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, no. 2, pp. 221-266, 1999.
- [15] Chevallard, Y. “Vers une didactique de la codisciplinairété. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire”, Mayo, 2004 [Online] Disponible: <http://yves.chevallard.free.fr/>. [Acceso el 2 de Julio de 2016].
- [16] Chevallard, Y. “La notion de PER : problèmes et avancées”, Abril, 2009. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>. [Acceso el 16 de Julio de 2009].
- [17] Chevallard, Y. “Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente”. *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 2, no. 2, pp. 161-182, 2013.
- [18] Chevallard, Y. “¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan”. *Gaceta de la Real*

Sociedad Matemática Española, vol. 20, no. 1, 159-169, 2013.

- [19] Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- [20] Borges. J. L. "La biblioteca de Babel", 1941, en *El jardín de senderos que se bifurcan*. Ellery Queen's Mystery Magazine, 1948.
- [21] Llanos, V. C., Otero, M. R. & Gazzola, M. P. Physics and Mathematics models in a co-disciplinary Study and Research Paths (SRPs) in the pre-service teacher education. *International Journal of Physics and Chemistry Education*, vol. 11, no. 3, pp. 67-72, 2019.
- [22] Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Arlego, M. "Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) codisciplinarios en Física y Matemática con profesores en formación en la Universidad". *Revista de Enseñanza de la física*, vol. 27, pp. 251-258, 2015.
- [23] Gazzola, M., Otero, M., & Llanos, V. "Recorrido de estudio e investigación en física y matemáticas en la escuela secundaria". *Praxis & Saber*, vol. 12, no. 31, pp. 1-20, 2021.
- [24] Gazzola, M. P.; Otero, M. R.; Llanos, V. C. "Acciones didácticas en el desarrollo de un Recorrido de Estudio y de investigación que involucra a la Matemática y a la Física en la escuela secundaria". *Revista Perspectiva Educacional. Formación de Profesores*, vol. 59, no. 1, pp. 52-80, 2020.

- [25] Moussy, M. *Description géographique et statistique de la Confédération Argentine*. Francia: Librerie Firmin Didot, 1860.
- [26] Holmberg, L. E. “Viajes a las Sierras de Tandil y a La Tinta. Primera Parte”, en *Actas Academia Nacional de Ciencias de la República Argentina*, Córdoba. Tomo 5, no 1, pp. 1-58, 1884.
- [27] Rojas, R. *La Piedra Muerta*. Buenos Aires, Argentina: Martín Garcia, 1912.
- [28] Holmberg, L. E. “¿Cayó o la derribaron?”. *Revista Caras y Caretas*, vol. XV, no. 702, 1912.
- [29] Peralta, M. H.; Ercoli, N. L.; Godoy, M. L.; Rivas, I.; Montanaro, M. I.; Bacchiarello, R. “Proyecto estructural de la réplica de la piedra movediza: comportamiento estático y dinámico”. *XX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*, 2008.
- [30] Otero, M. R.; Arlego, M.; Llanos, V. C. “Developing Research and Study Courses (RSC) in the pre-service teacher education”. *European Journal of Education Studies*, vol. 3, no. 8, pp. 214-240, 2017.
- [31] Otero, M. R., Gazzola, M. P., Llanos, V. C. y Arlego, M. “Co-disciplinary Physics Mathematics research and study course (RSC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers”. *Review of science, mathematics and ICT education*, vol. 10, no. 2, pp. 55-78, 2016.
- [32] Gazzola, M. P. *Diseño, implementación y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación*

codisciplinar en matemática y física en la Escuela Secundaria. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2018.

- [33] Landau, L. D. y Lifschitz, E. M. *Física Teórica, Volumen 1: curso de física teórica*. Buenos Aires: Editorial Reverté, 1991.

ANEXOS

Anexo 1

[\[Volver al Texto\]](#)

Modelo del sólido rígido en roto-traslación

En la Figura I, se representa la base de apoyo de la piedra y el radio de giro R . A la izquierda (I), se aprecia la posición de la base cuando la piedra está en la posición de equilibrio. El punto en color celeste marca la ubicación del centro de masa; la flecha indica el sentido del torque sobre el sistema. A la derecha (II) se representan los cambios del sistema al perder la posición de equilibrio cuando fue perturbado.

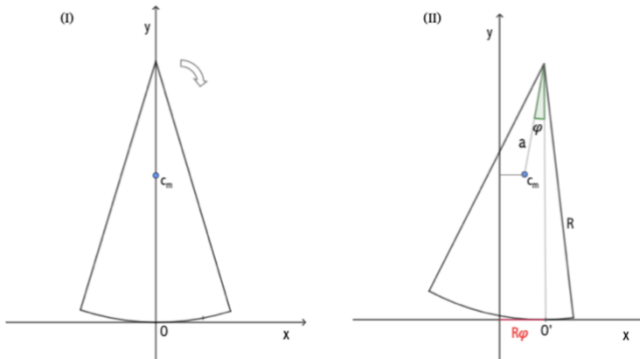


Figura I. Izquierda (I). representación de la base de apoyo en su posición de equilibrio. Derecha (II). Representación del sistema una vez que fue perturbado y perdió la posición de equilibrio.

Ecuación del movimiento del balancín a partir del Hamiltoniano

Sean x e y las coordenadas del Centro de Masas (cm):

$$y = R - a \cos \phi$$

$$x = R\phi - a \sin \phi$$

La Energía Cinética (EC) del c_m es

Energía Cinética traslacional $E_{C\text{tras}}$

$$E_{C\text{tras}} = \frac{1}{2} m |v|^2 \quad y \quad |v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\dot{y} = (a \sin \phi) \dot{\phi} \Rightarrow \dot{y}^2 = (a^2 \sin^2 \phi) \dot{\phi}^2$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= R\dot{\phi} - (a \cos \phi) \dot{\phi} \Rightarrow \dot{x}^2 = [R\dot{\phi} - (a \cos \phi) \dot{\phi}]^2 \\ &= \dot{\phi}^2 (R^2 - 2Ra \cos \phi + a^2 \cos^2 \phi) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{\phi}^2 (R^2 - 2Ra \cos \phi + a^2 \cos^2 \phi \\ &\quad + a^2 \sin^2 \phi) \end{aligned}$$

$$= \dot{\phi}^2 (R^2 - 2aR \cos \phi + a^2)$$

$$E_{C\text{tras}} = \frac{1}{2} m [\dot{\phi}^2 (R^2 - 2aR \cos \phi + a^2)]$$

Energía Cinética rotacional ($E_{C\text{rot}}$)

$$E_{C\text{rot}} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \dot{\phi}^2$$

Energía Potencial E_P

$$E_P = m \cdot g \cdot y$$

$$E_P = m \cdot g \cdot (R - a \cos \phi)$$

La Energía Mecánica (E_M) del sistema es

$$E_M = E_C + E_P = \text{cte.}$$

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2} m (R^2 - 2aR \cos \phi + a^2) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\phi}^2 \\ &\quad + mg(R - a \cos \phi) = \text{cte.} \end{aligned}$$

Para hallar la ecuación del movimiento para ϕ , hacemos la derivada de E_M con respecto al tiempo:

$$d \frac{E_M}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} d \frac{E_M}{dt} = & mRa\dot{\phi}^2 \sin \phi \phi^2 \\ & + m\dot{\phi}(-2Ra \cos \phi + a^2 + R^2)\ddot{\phi} \\ & + I_C\dot{\phi}\ddot{\phi} + mga \sin \phi \dot{\phi} = 0 \end{aligned}$$

Cancelando $\dot{\phi}$ y sacando factor común $\ddot{\phi}$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}[m(R^2 - 2Ra \cos \phi + a^2) + I_C] + mga \sin \phi \\ + mRa \sin \phi \cdot \dot{\phi}^2 = 0 \end{aligned}$$

Haciendo un análisis alrededor del equilibrio: $\sin \phi \approx \phi$, $\cos \phi \approx 1$ y $\phi^2 \approx 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}[m(R^2 - 2Ra + a^2) + I_C] + mga\phi = 0 \\ \ddot{\phi}[m(R - a)^2 + I_C] + mga\phi = 0 \end{aligned}$$

Por el teorema de Steiner $(mr^2 + I_C) = I$ la expresión anterior puede escribirse:

$$I\ddot{\phi} = -mga\phi (*)$$

Siendo $w_0^2 = \frac{mga}{I}$ la frecuencia propia o natural del sistema.

Nótese que la condición de equilibrio estable es $a > 0$, es decir que el centro de masa debe estar por debajo del radio de curvatura. Esta condición puede obtenerse directamente de imponer un mínimo de E_P :

$$E_P = m \cdot g(R - a \cos \phi)$$

$$E'_P = a \cdot m \cdot g \sin \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$E_p'' = a. m. g \cos \varphi = a. m. g > 0 \Rightarrow a > 0$$

Entonces por analogía con la ecuación (*) la ecuación diferencial para un oscilador armónico del tipo balancín es:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + w_0^2\varphi = 0$$

Cuando el sistema está amortiguado, se introduce en la ecuación un término de amortiguamiento como sigue

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = 0$$

siendo γ el coeficiente de amortiguamiento.

La solución de esta ecuación viene dada por la función

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{\frac{-\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \psi)$$

Si se aplica al oscilador amortiguado un torque externo tal que $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$, entregándole energía periódicamente, la ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = \frac{M_0}{I} \cos(\omega t) (**)$$

La solución de la ecuación (**) es

$$\varphi(t) = \varphi_M \cos(\omega t - \psi)$$

La amplitud φ_M y la fase ψ vienen dados por

$$\varphi_M = \frac{M_0}{I \sqrt{(w_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}}$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma w}{w_0^2 - w^2} \right)$$

Donde, M_0 es la intensidad de la fuerza del torque externo ejercido, I es el momento de inercia, w_0 es la frecuencia propia de oscilación del sistema y w es la frecuencia del torque externo

Es posible mostrar que la función

$$\varphi_M = \frac{M_0}{I \sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + w^2 \gamma^2}}$$

tiene máximo.

Derivando y haciendo $\varphi'_M(w) = 0$ se obtiene que

$$\varphi'_M = \frac{M_0 (2\gamma^2 w - 4w(w_0^2 - w^2))}{I 2((w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2)^{3/2}} = 0$$

Entonces la amplitud es máxima para

$$w = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

Cuando el movimiento es subamortiguado, es decir cuando γ es pequeño comparado con w_0 el máximo ocurre para una frecuencia muy próxima a la frecuencia propia w_0 y la llamada línea de resonancia es proporcional a γ . En los casos de amortiguamiento crítico y de sobre amortiguamiento, esta línea directamente desaparece.

Anexo 2

[\[Volver al Texto\]](#)

Solución de la ecuación diferencial verificada

La ecuación del movimiento de un sistema oscilatorio amortiguado y forzado puede escribirse como:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = \frac{M_0}{I} \cos(\omega t)$$

La solución de esta ecuación diferencial lineal de segundo orden está dada por:

$$\varphi(t) = \varphi_g(t) + \varphi_p(t)$$

Donde $\varphi_g(t)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = 0 \quad (1)$$

y $\varphi_p(t)$ es la solución particular de

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + w_0^2\varphi = \frac{M_0}{I} \cos(\omega t) \quad (2)$$

La solución de la ecuación (1) viene dada por $\varphi_g(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \psi)$

Sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$\frac{d\varphi_g}{dt} = -\varphi_0 e^{-\gamma t/2} \left[\frac{\gamma}{2} \cos(\omega t + \psi) + \omega \sin(\omega t + \psi) \right] \quad (I)$$

$$\frac{d^2\varphi_g}{dt^2} = \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \left[\left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2 \right) \cos(\omega t + \psi) + \gamma \omega \sin(\omega t + \psi) \right] \quad (II)$$

Reemplazando (I) y (II) en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_g}{dt^2} = \varphi_0 e^{-\gamma t/2} & \left[\left(\frac{\gamma^2}{4} - w^2 \right) \cos(wt + \psi) \right. \\ & \left. + \gamma w \sin(wt + \psi) \right] \\ & - \gamma \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \left[\frac{\gamma}{2} \cos(wt + \psi) \right. \\ & \left. + w \sin(wt + \psi) \right] \\ & + w_0^2 \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \cos(wt + \psi) = 0 \end{aligned}$$

Distribuyendo y agrupando todos los términos seno y todos los términos coseno se obtiene,

$$\begin{aligned} \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \left(\frac{\gamma^2}{4} - w^2 \right) \cos(wt + \psi) + \gamma w \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \sin(wt + \psi) \\ - \frac{\gamma^2}{2} \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \cos(wt + \psi) - \gamma w \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \sin(wt + \psi) + \\ w_0^2 \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \cos(wt + \psi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\varphi_0 e^{-\gamma t/2} \left(\frac{\gamma^2}{4} - w^2 \right) - \frac{\gamma^2}{2} \varphi_0 e^{-\gamma t/2} + \right. \\ \left. w_0^2 \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \right] \cos(wt + \psi) = \left[\gamma w \varphi_0 e^{-\gamma t/2} - \right. \\ \left. \gamma w \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \right] \sin(wt + \psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \left[\left(\frac{\gamma^2}{4} - w^2 \right) - \frac{\gamma^2}{2} + w_0^2 \right] \cos(wt + \psi) = \\ \varphi_0 e^{-\gamma t/2} [\gamma w - \gamma w] \sin(wt + \psi) \end{aligned}$$

$$\left(w_0^2 - w^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) \cos(wt + \psi) = (\gamma w - \gamma w) \sin(wt + \psi)$$

En el lado izquierdo de esta última ecuación hay una constante multiplicando una función $\cos(wt + \psi)$ y en el lado derecho hay otra constante multiplicando una función $\sin(wt + \psi)$, con lo cual indica que el

coseno es proporcional al seno y la igualdad debe cumplirse para todo t , lo que es imposible. Puede ser que concuerden en algún tiempo t pero no en todos. De esta manera, la ecuación sólo se satisface si las constantes resultan cero simultáneamente (en el caso del seno es evidente).

Luego,

$$w_0^2 - w^2 - \frac{\gamma^2}{4} = 0 \Rightarrow w = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Ahora, probemos que $\varphi_p(t) = \varphi_M \cos(wt + \psi)$ es solución particular de (2).

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = -w\varphi_M \sin(wt - \psi) \quad \text{(III)}$$

$$\frac{d^2\varphi_p}{dt^2} = -w^2\varphi_M \cos(wt - \psi) \quad \text{(IV)}$$

Reemplazando (III) y (IV) en (3) se tiene

$$-w^2\varphi_M \cos(wt - \psi) - \gamma w\varphi_M \sin(wt - \psi) + w_0^2\varphi_M \cos(wt + \psi) = \frac{M_0}{1} \cos(wt)$$

Antes de continuar con los cálculos, intentaremos unificar el argumento de todas las funciones armónicas. Utilizaremos las relaciones coseno y seno de una resta de ángulos

$$\cos(wt - \psi) = \cos(wt)\cos(\psi) + \sin(wt)\sin(\psi)$$

$$\sin(wt - \psi) = \sin(wt)\cos(\psi) - \cos(wt)\sin(\psi)$$

Entonces,

$$-w^2 \varphi_M [\cos(wt)\cos(\psi) + \sin(wt)\sin(\psi)] - \gamma w \varphi_M [\sin(wt)\cos(\psi) - \cos(wt)\sin(\psi)] + w_0^2 \varphi_M [\cos(wt)\cos(\psi) + \sin(wt)\sin(\psi)] = \frac{M_0}{I} \cos(wt)$$

$$-w^2 \varphi_M \cos(wt)\cos(\psi) - w^2 \varphi_M \sin(wt)\sin(\psi) - \gamma w \varphi_M \sin(wt)\cos(\psi) + \gamma w \varphi_M \cos(wt)\sin(\psi) + w_0^2 \varphi_M \cos(wt)\cos(\psi) + w_0^2 \varphi_M \sin(wt)\sin(\psi) = \frac{M_0}{I} \cos(wt)$$

$$\left[-w^2 \varphi_M \cos(\psi) + \gamma w \varphi_M \sin(\psi) + w_0^2 \varphi_M \cos(\psi) + \frac{M_0}{I} \right] \cos(wt) = [w^2 \varphi_M \sin(\psi) + \gamma w \varphi_M \cos(\psi) - w_0^2 \varphi_M \sin(\psi)] \sin(wt)$$

$$\left\{ \varphi_M [(-w^2 + w_0^2)\cos(\psi) + \gamma \sin(\psi)] - \frac{M_0}{I} \right\} \cos(wt) = \varphi_M [(w^2 - w_0^2)\sin(\psi) + \gamma w \cos(\psi)] \sin(wt)$$

Al igual que en el caso anterior, las constantes que multiplican a $\cos(wt)$ y $\sin(wt)$ deben ser cero simultáneamente,

$$\left\{ \varphi_M [(-w^2 + w_0^2)\cos(\psi) + \gamma w \sin(\psi)] - \frac{M_0}{I} \right\} = 0 \quad (V)$$

$$\varphi_M [(w^2 - w_0^2)\sin(\psi) + \gamma w \cos(\psi)] = 0 \quad (VI)$$

De (VI) se tiene que

$$(w^2 - w_0^2)\sin(\psi) = -\gamma w \cos(\psi)$$

$$\frac{(w^2 - w_0^2) \sin(\psi)}{-\gamma w \cos(\psi)} = 1$$

$$\frac{(w_0^2 - w^2)}{\gamma w} \cdot \frac{\sin(\psi)}{\cos(\psi)} = 1$$

$$\tan(\psi) = \frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}$$

Además, utilizando las identidades trigonométricas que relacionan el seno y coseno con la tangente:

$$\cos(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\psi)}} \text{ y } \sin(\psi) = \frac{\tan(\psi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\psi)}}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \cos(\psi) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 w^2}{(w_0^2 - w^2)^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}{(w_0^2 - w^2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(w^2 - w_0^2)^2 + \gamma^2 w^2}{(w_0^2 - w^2)^2}}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\cos(\psi) = \frac{w_0^2 - w^2}{\sqrt{(w^2 - w_0^2)^2 + \gamma^2 w^2}}$$

$$\begin{aligned} \sin(\psi) &= \frac{\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}\right)^2}} = \frac{\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 w^2}{(w_0^2 - w^2)^2}}} = \\ &= \frac{\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}}{\sqrt{\frac{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}{(w_0^2 - w^2)^2}}} = \frac{\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)}}{\frac{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}}{(w_0^2 - w^2)}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\sin(\psi) = \frac{\gamma w}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}}$$

Reemplazamos $\cos(\psi)$ y $\sin(\psi)$ en (V) y despejamos

φ_M

$$\begin{aligned} \varphi_M \left[(-w^2 + w_0^2) \frac{w_0^2 - w^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}} + \right. \\ \left. \gamma w \frac{\gamma w}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}} \right] &= \frac{M_0}{I} \\ \varphi_M \left[\frac{(w_0^2 - w^2) + \gamma^2 w^2}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}} \right] &= \frac{M_0}{I} \\ \varphi_M &= \frac{M_0 \sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}}{I (w_0^2 - w^2) + \gamma^2 w^2} \\ \varphi_M &= \frac{M_0}{I \sqrt{(w_0^2 - w^2) + \gamma^2 w^2}} \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación diferencial (2) para el oscilador forzado está dada por

$$\varphi(t) = \varphi_g(t) + \varphi_p(t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \psi) + \varphi_M \cos(\omega t + \psi)$$

Donde $\varphi_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \psi)$ es la solución correspondiente al *estado transitorio* y el término $\varphi_M \cos(\omega t + \psi)$ corresponde al *estado estacionario*. Puesto que transcurrido cierto tiempo, la solución transitoria se vuelve despreciable, al decrecer la amplitud exponencialmente con el tiempo (debido al amortiguamiento). A largo plazo, el sistema resulta gobernado por el torque externo, y sólo permanece en el estado estacionario. Esto significa que luego de transcurrido un tiempo corto inicial, el sistema ya no oscila con su frecuencia natural sino con la frecuencia ω del momento externo.

Las constantes de la solución transitoria dependen de las condiciones iniciales, mientras que la amplitud y la fase de la solución estacionario dependen del momento externo.

Así, la solución estacionaria es:

$$\varphi(t) = \varphi_M \cos(\omega t + \psi)$$

La amplitud φ_M y la fase ψ vienen dados por

$$\varphi_M = \frac{M_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}} \quad \text{y} \quad \psi = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma w}{(w_0^2 - w^2)} \right)$$

Es posible mostrar que la función $\varphi_M(\omega) = \frac{M_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}}$ tiene máximo.

Derivando y haciendo $\varphi_M(w) = 0$ se obtiene que

$$\varphi'_M(w) = \frac{M_0(2\gamma^2 w - 4w(w_0^2 - w^2))}{I \cdot 2((w_0^2 - w^2) + \gamma^2 w^2)^{3/2}} = 0$$

Por lo tanto,

$$w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

Para este w , la amplitud resulta máxima. En los casos en que el movimiento es sub-amortiguado, es decir cuando γ es pequeño comparado con w_0 , el máximo ocurre para una frecuencia muy próxima a la frecuencia propia w_0 y la llamada línea de resonancia es proporcional a γ . En los casos de amortiguamiento crítico y de sobre amortiguamiento, esta línea directamente desaparece.

Anexo 3

[\[Volver al Texto\]](#)

Modelo de sólidos deformables

Modelo que contempla el origen del amortiguamiento

Consideramos

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + w_0^2\phi = T_{\text{ext}}$$

El coeficiente γ representa el amortiguamiento en el sistema. En nuestro caso, esta contribución proviene de la interacción piedra-superficie (no del roce con el aire).

El problema es como este término emerge. Una posibilidad sería la resistencia a la rodadura:

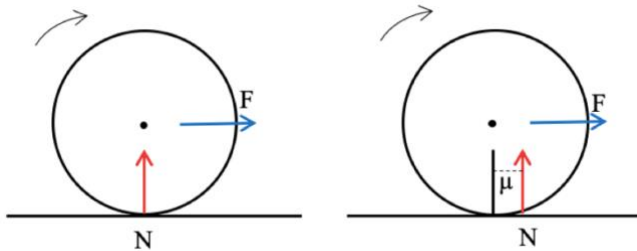


Figura II. En el equilibrio (ideal)

Figura III. Desplazada (real)

Debido al peso (y la presión) en el apoyo, el contacto no es un punto sino una superficie. No se muestra la deformación en la base derecha por simplicidad (sólo

el corrimiento de la normal). La normal se distribuye sobre la superficie siendo mayor en la dirección de avance. El resultado es una normal efectiva corrida respecto del centro de masa (Figura II) que hace un torque en contra de la rodadura. Esto se denomina resistencia de rodadura. El torque de rodadura tiene una forma:

$$T_r = \mu N$$

Con μ unidad de distancia y en nuestro caso μ muy pequeño.

El coeficiente de rodadura C_r se define como

$$C_r = \frac{\mu}{R}$$

Donde R es el radio de curvatura.

C_r en general se mide y depende de muchos factores. No hay una teoría general para calcularlo, pero es sabido que depende de la velocidad.

En nuestro caso suponemos:

$$C_r = C_0 + C_1 v$$

para rieles de ferrocarriles típicamente es $C_0 = (10^{-3} - 10^{-4})$

$$C_1 \leq C_0$$

Contribución torque resistencia a la rodadura:

$$T_r = -(C_0 + C_1 v)N$$

$$T_r = -(C_0 + C_1 vR)mg$$

Como $v = \frac{d\phi}{dt} R$, entonces

$$T_r = -C_0 mg - C_1 R^2 mg \frac{d\phi}{dt}$$

El término $-C_0 mg$ va en contra del torque aplicado por la gente. El término $-C_1 R^2 mg \dot{\theta}$ es que el "arma" a gamma.

Ecuación del movimiento

$$I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} + w_0^2 \phi = T_{\text{ext}}$$

$$T_{\text{ext}} = T_p + T_r$$

$$T_p = N_p F d \sin \alpha$$

T_p es el torque ejercido por las personas, donde,

N_p es el número de personas

F es la fuerza que ejerce una (1) persona

d es la distancia (brazo de palanca)

α es el ángulo

$$I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} + w_0^2 \phi = T_p - C_0 mg - C_1 R^2 mg \frac{d\phi}{dt}$$

$$I_0 \frac{d^2\phi}{dt^2} + C_1 R^2 mg \frac{d\phi}{dt} + w_0^2 \phi = T_p - C_0 mg$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{C_1 R^2 mg}{I_0} \frac{d\phi}{dt} + w_0^2 \phi = T_p - C_0 mg$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + w_0^2 \phi = \frac{T_p - T_{r0}}{I_0}$$

$$T_p - T_{r0} = T_{\text{ef}}$$

Donde,

$$w_0^2 = \frac{mga}{I_0}$$

$$I_0 = I_{cm} + my_c^2$$

$$a = R - y_c$$

$$\gamma = \frac{C_1 R^2 mg}{I_0}$$

$$T_{r0} = C_0 mg$$

$$T_p = N_p F d \sin \alpha$$

Entonces,

$$\Phi_M^2(w) = \frac{T_{ef}^2 / I_0^2}{(w_0^2 - w^2)^2 + \gamma^2 w^2}$$

$$\Phi_M(w) = \frac{T_{ef}}{I_0 \gamma^2 w^2}$$

A continuación, analizamos la función amplitud en la condición de resonancia, para el caso sub-amortiguado asumiendo las condiciones mencionadas y considerando los torques estimados en la Tabla 2, para obtener valores de γ . Finalmente, este análisis nos permite justificar el amortiguamiento anteriormente establecido de manera *ad hoc*, y tal como se indica en las tablas siguientes en las celdas pintadas de rojo, se determina que esta constante es del orden de 10^{-2} .

Tabla 3.1. valores para γ para las distintas w_0 considerando $M_0= 10000$ Nm.

		$I_0:1732010$		$\alpha: 1,570796$		
		$C_0:0,00003$		$M_0: 10000$		
w_0	R	T_{ef}	C1	γ	w	$\phi(w)$
5,0266	19,79	9927	0,000018	0,01036	5,0265	0,11
5,6549	24,57	9927	0,000010	0,00921	5,6548	0,11
6,2832	29,91	9927	0,000006	0,00829	6,2831	0,11

Tabla 3.2. valores para γ para las distintas w_0 considerando $M_0= 11000$ Nm.

		$I_0:1732010$		$\alpha:1,570796$		
		$C_0:0,00003$		$M_0:11000$		
w_0	R	T_{ef}	C1	γ	w	$\phi(w)$
5,0266	19,79	10927	0,00002	0,01140	5,0265	0,11
5,6549	24,57	10927	0,000011	0,01014	5,6548	0,11
6,2832	29,91	10927	0,000007	0,00912	6,2831	0,11

Tabla 3.1. valores para γ para las distintas w_0 considerando $M_0= 13000$ N.

		$I_0:1732010$		$\alpha:1,570796$		
		$C_0:0,00003$		$M_0:13000$		
w_0	R	T_{ef}	C1	γ	w	$\phi(w)$
5,0266	19,79	12927	0,000024	0,01349	5,0265	0,11
5,6549	24,57	12927	0,000014	0,01199	5,6548	0,11
6,2832	29,91	12927	0,000008	0,01079	6,2831	0,11

Tabla 3.4. valores para γ para las distintas w_0 considerando $M_0 = 14000$ N.

		$I_0:1732010$		$\alpha:1,570796$		
		$C_0:0,00003$		$M_0:14000$		
w_0	R	T_{ef}	C1	γ	w	$\phi(w)$
5,0266	19,79	13927	0,000026	0,01454	5,0265	0,11
5,6549	24,57	13927	0,000015	0,01292	5,6548	0,11
6,2832	29,91	13927	0,000009	0,01163	6,2831	0,11

María Rita Otero es Investigadora Principal del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el área de Psicología y Ciencias de la Educación. Es profesora Titular ordinaria e investigadora del NIECyT de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Realizó su formación posdoctoral en la Universidad René Descartes. París V- Sorbonne. Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias por la Universidad de Burgos, España, Master en Educación con orientación en Psicología de la educación y Profesora de Matemática y Física por la UNICEN. Investiga en Didáctica de la matemática y de la física, la formación profesional continua e inicial de los profesores, la conceptualización en matemática y la relatividad y la mecánica cuántica en física.

María Paz Gazzola es Becaria Posdoctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el área de Psicología y Ciencias de la educación. Es Profesora Adjunta e investigadora del NIECyT de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias mención matemática, Licenciada en Educación matemática y Profesora de Matemática por la UNICEN. Investiga en Didáctica de la matemática, la formación profesional continua e inicial de los profesores y la utilización de recursos digitales en la enseñanza.

Viviana Carolina Llanos es Investigadora Adjunta del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el área de Psicología y Ciencias de la Educación. Es profesora Adjunta ordinaria de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Es directora del Núcleo de Investigación Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias mención matemática, Licenciada en Educación matemática y Profesora de Matemática por la UNICEN. Investiga en Didáctica de la matemática, la conceptualización en Matemática, y el uso de los recursos en la enseñanza.

Marcelo Arlego es Investigador Independiente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el área de Física. Es profesor Adjunto ordinario de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Realizó su formación posdoctoral en la Universidad TU-Braunschweig de Alemania. Es Doctor en Ciencias Exactas (mención Física) por la Universidad Nacional de la Plata (UNLP) y Licenciado en Ciencias Físicas por la UNICEN. Investiga en temas de materia condensada, neurociencia y educación.

