Отечественная философия
2024. Т. 2. № 2. С. 32–61
УДК 1(091)+165.4+111.83

National Philosophy
2024, Vol. 2, No. 2, pp. 32–61
DOI: 10.21146/2949-3102-2024-2-2-32-61

ПЕРЕВОДЫ

Э. Принж

Дмитрий Гавронский: реальность и актуально бесконечно малые*

Эрнан Принж – PhD, профессор. Национальный совет по научным и технологичным исследованиям (CONICET), Институт философии Университета Буэнос-Айреса (UBA), университет имени Диего Порталеса (Diego Portales University). Аргентина, г. Буэнос-Айрес, ул. Виамонте, д. 430; e-mail: hpringe@gmail.com

Целью данной статьи выступает анализ учения Дмитрия Гавронского об актуально бесконечно малых. Я выявляю особую связь, которую критический идеализм Гавронского устанавливает между трансцендентальной философией и математикой. В частности, я реконструирую отношения между теорией дифференциалов Гавронского, трансфинитными числами Кантора, трансархимедовыми числами Веронезе и гипервещественными числами Робинсона. Я утверждаю, что с помощью своей теории актуально бесконечно малых Гавронский стремится дать интерпретацию исчисления бесконечно малых (calculus), которая устраняла бы любой предполагаемый *данный* (*given*) элемент в знании. Автор подчёркивает не математический, а трансцендентальный или метафизический аспект учения Гавронского. Из концепции Гавронского следует, что бесконечно малые величины суть ключ к верному философскому объяснению взаимосвязи между мышлением и бытием: математика, и дифференциальное исчисление в частности, оказывается средством, с помощью которого чистая мысль конструирует бытие. Речь, таким образом, идёт о концепции трансцендентальной математики, которая решает проблему применимости математики к природе. Теперь природа понимается как продукт мысли, созданный в соответствии с методом бесконечно малых: так как мысль создает природные объекты в соответствии с математическими методами, последние обладают необходимой достоверностью по отношению к первым. Актуальность бесконечно малых оказывается у Гавронского актуальностью чистой мысли в порождении бытия, а первым актуальным продуктом чистой мысли является реальность бытия.

Ключевые слова: бесконечно малые, дифференциальное исчисление, неокантианство, Дмитрий Гавронский, И. Кант, Г. Коген, П. Наторп, Марбургская школа, трансцендентальная философия

Для цитирования: *Принж Э.* Дмитрий Гавронский: реальность и актуально бесконечно малые // Отечественная философия. 2024. Т. 2. № 2. С. 32–61.

* *Pringe H.* Dimitry Gawronsky: Reality and Actual Infinitesimals // Kant-Studien. 2023. No. 114 (1). P. 68–97. Перевод с английского: Куксюк Алексей Михайлович – старший лаборант; Чернявцева Мария Сергеевна – старший лаборант. Институт философии РАН. Российская Федерация, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, д. 12, стр. 1; e-mail: alexei.kuksyuk@gmail.com, vivlaroy@yandex.ru

Введение

В современных дебатах о философии Канта предметом особого интереса стало неокантианство[1]: оно играет важную роль в недавних дискуссиях о кантовской теории науки[2]. Кроме того, в последнее время всё чаще возникают новые трансцендентальные подходы к науке, в частности к физике[3]. В этом контексте существенно выделяется Марбургская школа – тем, что положила начало традиции, до сих пор влияющей на современные исследования. Пожалуй, наиболее характерная черта марбургского прочтения «Критики чистого разума» – особое внимание к *трансцендентальному методу*[4]. Трансцендентальное исследование проводится путём взятия определённого факта в качестве отправной точки и последующего поиска условий его возможности. В случае теоретической философии таким фактом, подлежащим исследованию, выступает опыт[5]. Согласно марбургскому прочтению, опыт – не просто объективное познание (cognition), но научное знание (knowledge): опыт связывается с математическим естествознанием или, точнее, с ньютоновской наукой[6]. Поэтому для марбургских неокантианцев задача «Критики чистого разума» заключается в определении условий возможности ньютоновской науки[7].

Поскольку ключевым математическим инструментом для формулирования ньютоновских законов движения является дифференциальное исчисление, философское обоснование анализа бесконечно малых становится задачей критики знания. Герман Коген решает эту задачу в ходе рассуждений о кантовском принципе антиципации восприятия, исследуя отношения между концепциями бесконечно малого, интенсивной величины и реальности (*Realität*). Коген пытается объяснить трансцендентальную роль этого принципа с помощью философского обоснования дифференциального исчисления. Эта интерпретация выдвинута им в «Принципе метода бесконечно малых и его истории» и во втором издании «Теории опыта Канта»[8]. Согласно Когену, Кант, рассматривая интенсивные величины как бесконечно малые (и тем самым принимая общепринятую позицию)[9], всё же связывает их с реальным в пространстве и времени. В этом, по Когену, заключается новаторство Канта в отношении

---

1 См., например, последний выпуск “Kant Yearbook” (Kant and Neo-Kantianism / Ed. by D. Heidemann. Kant Yearbook. 2020. No. 12) и специальный том “Kant e-prints” за 2021 год – оба посвящены Канту и неокантианству.

2 Этому будут посвящены, например, предстоящие специальные тома “Kantian Review” и “Revue roumaine de philosophie”.

3 Репрезентативная подборка проблем, обсуждаемых в этом контексте, представлена в книге: Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics / Ed. by M. Bitbol, P. Kerszberg, and J. Petitot. Cham, 2009.

4 См.: *Natorp P.* Kant und die Marburger Schule // Kant-Studien. 1912. No. 17. S. 193–221. Рус. пер.: *Наторп П.* Кант и Марбургская школа // Избранные работы / Сост. В.А. Куренной. М., 2006. С. 119–145. Касательно влияния этого прочтения: Поллок отмечает, что акцент «на важности “факта” ньютоновской науки в интерпретации Майкла Фридмана прямо ставит его в традицию марбургского понимания трансцендентального метода Канта». См.: *Pollok K.* The Transcendental Method. On the Reception of the Critique of Pure Reason in Neo-Kantianism // The Cambridge Companion to Kant’s Critique of Pure Reason / Ed. by P. Guyer. Cambridge, 2010. P. 378–379.

5 *Cohen H.* Kants Begründung der Ethik. Berlin, 1877. S. 24.

6 Ibid.

7 *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. S. 66. Рус. пер.: *Коген* Г. Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012. С. 138.

8 *Cohen H.* Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Berlin, 1883; *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. Рус. пер.: *Коген Г.* Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012.

9 *Cohen H.* Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Berlin, 1883. S. 14; *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. S. 427. Рус. пер.: *Коген Г.* Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012. С. 444–445.

рассмотрения реальности (*Realität*). Реконструируя кантовский аргумент, Коген попутно критикует Канта за то, что тот основывает реальное на ощущении[10]. Коген пишет, что реальность основана не на ощущении, как то утверждает Кант, а на мышлении. Тезис Когена заключается в том, что реальность основывается не *на* ощущении, а *для* ощущения, принципом метода бесконечно малых[11]. Этот метод обеспечивает ощущение объектом посредством непрерывного и равномерного порождения реальности во времени[12].

Отталкиваясь от трансцендентального прочтения метода бесконечно малых, Коген усиливает свою критику Канта в «Логике чистого познания»[13]. В этой работе он утверждает, что Кант до конца не осознал значение исчисления бесконечно малых для трансцендентальной философии и потому не смог признать продуктивную способность мышления. По мнению Когена, если бы принцип бесконечно малых занял в «Критике чистого разума» то место, которого он заслуживает, то ощущение не было бы предпослано мышлению, а чистое мышление не было бы подорвано в своей автономии[14]. Коген окончательно отбрасывает кантовское различие между мышлением о предмете и познанием предмета[15]; различие, основанное на рассмотрении чувственного созерцания (sensible intuition), через которое предмет дан. Теперь учение о *мышлении* одновременно является учением и о *знании*[16]. Кантианское данное мыслится как продукт мышления. Мышление само порождает своё содержание в соответствии с принципом метода бесконечно малых, т.е. именно посредством исчисления бесконечно малых мышление производит содержание, которое для Канта может быть дано только ощущением. Таким образом, утверждает Коген, логика чистого знания как логика чистого мышления может быть охарактеризована ещё и как логика принципа исчисления бесконечно малых[17].

В своей диссертации «Суждение о реальности и его математические предпосылки» (“Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen”) Дмитрий Гавронский предлагает собственную интерпретацию учения о чистом мышлении и философии бесконечно малых Германа Когена. В ней Гавронский стремится развить когеновские идеи с учётом современных дискуссий, как то планировал сделать и сам Коген в 1902 г. во втором, так и не написанном томе «Логики чистого познания»[18].

---

10 *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. S. 434. Рус. пер.: *Коген Г.* Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012. С. 450–451.

11 *Cohen H.* Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Berlin, 1883. S. 106.

12 *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. S. 425. Рус. пер.: *Коген Г.* Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012. С. 443.

13 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. Подробное обсуждение этого см.: *Edel G.* Von der Vernunftkritik zur Erkenntnislogik. Die Entwicklung der theoretischen Philosophie Hermann Cohens. Freiburg, München, 1988.

14 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 32.

15 KrV, B 146. [Здесь и далее при цитировании «Критики чистого разума» используется общепринятая система пагинации, где KrV (A) – первое издание «Критики чистого разума»; KrV (B) – второе. Здесь и далее в квадратных скобках указаны примечания переводчика]. Рус. пер.: *Кант И.* Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 2 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М., 2006. С. 219.

16 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 12.

17 Ibid. S. 31.

18 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. VII. Коген ссылается на диссертацию Гавронского в: *Cohen H.* Einleitung mit kritischem Nachtrag zur Geschichte des Materialismus von F.A. Lange / Reedited by H. Holzhey, 3rd Edition. Hildesheim, 1984. S. 88. Гавронский рассматривает своё собственное исследование как «третью главу» более обширной работы, посвящённой методу и структуре логики чистого знания в связи с точными науками (см.: *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. II). В своей диссертации Гавронский фокусируется только на проблеме «реальности бесконечно малых» (Ibid. S. 26).

Гавронский пытается определить трансцендентальную роль дифференциала, утверждая, что бесконечно малое должно рассматриваться как *актуально* бесконечно малое. Дифференциал и есть начало величины[19], порождение которой происходит в соответствии с законом, выражаемым дифференциальным частным (differential quotient). Гавронский соглашается с Когеном в том, что именно трансцендентальная интерпретация анализа бесконечно малых позволила бы решить философскую проблему *данного* (*given*). Трансцендентальная логика должна показать, что анализ бесконечно малых – это тот метод, с помощью которого «мы приходим к конечному полаганию (*endliche Setzung*)»[20], т.е. к тому, как мысль продуцирует конечное из бесконечно малого. По Гавронскому, трансцендентальная интерпретация исключает не только необходимость, но и «даже возможность»[21] какого-либо элемента, просто принятого мышлением, а не спонтанно продуцированного им, и тем самым опровергает кантовское учение о несводимости чувственности к рассудку.

Хотя идеи Гавронского сыграли довольно важную роль во внутренней дискуссии о когеновской «Логике чистого познания», которая велась среди основных деятелей Марбургской школы[22], исследований, посвящённых развитию Гавронским учения Когена, до сих пор очень мало. Насколько мне известно, существует только две статьи, посвящённые идеям Гавронского об исчислении: первая – Феррари[23], вторая – Морманна и Каца[24]. Феррари, со своей стороны, предлагает несравненную историческую экспозицию и чёткую систематическую панораму работ Гавронского, но анализ автора не углубляется в теорию дифференциалов Гавронского. Морманн и Кац, в свою очередь, пишут о позиции Гавронского очень кратко, лишь в рамках общего анализа рассмотрения марбургскими неокантианцами проблемы бесконечно малых. Цель же данной статьи – исследовать подход Гавронского к дифференциальному исчислению для того, чтобы выявить особую связь, которую его критический идеализм устанавливает между трансцендентальной философией и математикой.

Приняв во внимание резкую критику Кантором и Расселом понятия бесконечно малого, можно задаться вопросом об уместности обсуждения этого понятия. Почему нужно серьёзно относиться к понятию бесконечно малых, если оно, как утверждает Рассел, уже было отвергнуто математиками как противоречивое? Это возможное возражение основывается на двойном заблуждении. Во-первых, с точки зрения математики неверно то, что бесконечно малые являются противоречивыми псевдопонятиями. Во-вторых, неверно и с точки зрения истории науки, что работы Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса устранили бесконечно малые из математического дискурса[25]. Между началом 1870-х гг. и временем появления работ Робинсона

---

[19] *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 91.

[20] Ibid. S. 118. Под «полаганием» (position) следует понимать результат утверждения. Все переводы являются моими собственными, если не указано иное. [Речь идет о переводе текстов Канта и неокантианцев на английский язык. В русском переводе мы использовали принятый в российской литературе термин «полагание» – примеч. пер.]

[21] Ibid.

[22] См. *Giovanelli M.* Hermann Cohen's Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book // Studies in History and Philosophy of Science. 2016. No. 58. P. 9–23.

[23] *Ferrari M.* Dimitrij Gawronsky und Ernst Cassirer: Zur Geschichte der Marburger Schule zwischen Deutschland und Russland // Gegenstandsbestimmung und Selbstgestaltung. Transzendentalphilosophie im Anschluss an Werner Flach / Ed. by C. Krijnen, K.W. Zeidler. Würzburg, 2011. S. 89–106.

[24] *Mormann T., Katz M.* Infinitesimals as an issue of neo-Kantian philosophy of science // Hopos: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science. 2013. No. 3 (2). P. 236–280.

[25] *Mormann T.* Zur Mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger Neukantianismus // Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen / Ed. by C. Damböck. Cham, 2018. S. 107. Как утверждает Эрлих, «несмотря на то, что большинство математиков конца XIX и до-робинсоновского XX вв. исключали бесконечно малые величины из математического анализа, они ни в коем случае не исключали их из математики». См.: *Ehrlich P.* The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots

по нестандартному анализу было разработано множество неархимедовых теорий, которые были как математически, так и философски глубоки и плодотворны. Среди этих разработок особое место занимает система Веронезе, поскольку она связывает учение Марбургской школы со строгой теорией бесконечно малых (появившейся в 1960-х гг.), хотя между ними и есть концептуальные различия[26].

Заслуга Гавронского заключается в том, что, несмотря на замысловатость подхода, ему удалось ввести Марбургское сообщество в обсуждение неархимедовой математики через работу Веронезе[27]. Однако исследовательская деятельность Гавронского была обременена его участием во внутренних дискуссиях Марбургской школы, что помешало справедливо оценить его исследовательский вклад. Чтобы проанализировать учение Гавронского, я реконструирую связь между его теорией дифференциалов, трансфинитными числами Кантора, трансархимедовыми числами Веронезе и гипервещественными числами Робинсона. В первом разделе данной работы я исследую то, как Гавронский критикует Кантора за отказ от понятия актуально бесконечно малых. Во втором разделе я анализирую точку зрения Гавронского на отношения между дифференциалами и дифференциальными производными. Затем, в третьем разделе, я исследую различие между числами и дифференциалами, проводимое Гавронским. Наконец, я рассматриваю неархимедовы системы Веронезе и Робинсона в их связи с учением Гавронского. Я утверждаю, что для Гавронского актуально бесконечно малые числа являются ключевым аспектом попытки дать интерпретацию исчисления, которая устраняла бы любой предположительно *данный* элемент в знании.

1. Гавронский о Канторе и актуально бесконечно малых

В своей работе «Основы общего учения о многообразиях» Георг Кантор пишет, что ряд положительных целых чисел имеет источником своего возникновения (*Entstehungsgrund*) многократное выдвижение и объединение единств, которые предполагаются (presupposed) и считаются равными. Поэтому образование конечных целых чисел основано на принципе прибавления единицы к уже образованному числу. Кантор назвал этот принцип *первым принципом порождения* (*Erzeugungsprinzip*)[28]. У полученного с помощью этого принципа множества чисел нет наибольшего числа. Однако Кантор утверждает, что подобно тому, как целое положительное число v выражает, что определённое конечное число единиц собрано в целое, можно придумать новое число ω, которое выражает, что *вся совокупность* целых положительных чисел дана по своему закону, в своей натуральной последовательности. Число ω, таким образом, не является результатом сложения единиц:

---

of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Archive for History of Exact Sciences. 2006. No. 60. P. 3.

26 Когеновская теория бесконечно малых величин была тесно связана с некоторыми недавними исследованиями в контексте реабилитации понятия бесконечно малого в нестандартном анализе и гладком анализе бесконечно малых. Подробнее см.: *Bell J.* The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics. Cham, 2019. P. 237; *Veit B.* Hermann Cohens Infinitesimal-Logik. Würzburg, 2017. P. 146 ff.

27 *Giovanelli M.* Hermann Cohen's Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book // Studies in History and Philosophy of Science. 2016. No. 58. P. 20.

28 *Cantor G.* Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 195. Рус. пер.: *Кантор Г.* Основы общего учения о многообразиях // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 91–92.

оно не продуцируется с помощью первого принципа порождения. Скорее, для этого продуцирования необходим новый принцип, который Кантор назвал *вторым принципом порождения*. Согласно этому принципу, число ω можно рассматривать как предел, к которому стремится ряд 1, 2, 3,..., *ν*,..., если при этом ω рассматривается как первое целое число, которое следует за всеми числами ν. Исходя из второго принципа порождения, ω определяется как следующее большее число за всеми *ν*, т.е. как предел ряда всех *ν*[29].

Если первый принцип порождает *потенциальное* или несобственное бесконечное, то второй – *актуальное* или собственное бесконечное. Число *ω* – это предел, который не может быть достигнут с помощью потенциально бесконечного ряда 1, 2, 3,… *ν*… Скорее, число *ω* – это результат полагания другого рода, имеющий место в том случае, когда мы используем второй принцип порождения, который «продуцирует актуальное, действительно завершённое полагание бесконечного»[30].

Кантор, отстаивая концепцию актуально бесконечно *большого* числа, придерживается противоположной позиции в отношении бесконечно малых чисел. Он отрицает их как числа собственно, актуально бесконечные:

> Новейшие философы нередко называли несобственно бесконечное «дурной» бесконечностью, на мой взгляд, несправедливо, так как в математике и естествознании оно оказалось весьма хорошим и в высшей степени ценным инструментом. Насколько я знаю, бесконечно малые величины разрабатывались до сих пор вообще *лишь* в форме несобственно бесконечного. Как таковые, они доступны всем тем различиям, видоизменениям и соотношениям, которыми пользуются в исчислении бесконечно малых и в теории функции и с помощью которых там собирают богатую жатву аналитических истин. Наоборот, от всех попыток превратить эти бесконечно малые насильственно в некоторые *собственно* бесконечно малые, следует, наконец, отказаться как бесцельных. Если только вообще существуют, т.е. доступны определению собственно бесконечно малые величины, то они, наверное, не стоят ни в какой непосредственной связи с обычными, *становящимися* бесконечно малыми величинами[31].

Кантор излагает свою критику понятия актуально бесконечно малых величин в рецензии на работу Когена «Принцип бесконечно малых и его история»[32]. В этой рецензии он пишет, что «так называемые бесконечно малые числа, или дифференциалы, не принадлежат к сфере бытия»[33]. Поэтому их нельзя считать собственно величинами (*Größen*), даже в смысле интенсивных величин, как утверждал Коген в 1883 г. Скорее, «они не что иное, как модусы небытия, изменчивости или становления (*Modi des Nichtseienden, Veränderlichen oder Werdenden*)»[34]. Дифференциал – это не абсолютное бесконечное (*vollendet Unendliches*), а переменное конечное (*ein veränderliches Endliches*)[35]. В том же контексте Кантор в работе «О различных

29 Любое положительное целое число является выражением как определённого конечного порядкового номера (*Anzahl*) последовательных полаганий, так и объединения полагаемых единиц в целое.

30 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 40.

31 *Cantor G.* Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 172. Рус. пер.: *Кантор Г.* Основы общего учения о многообразиях // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 71.

32 О критике Кантором Когена подробнее см.: *Veit B.* Hermann Cohens Infinitesimal-Logik. Würzburg, 2017. S. 106 ff.

33 *Cantor G.* Rezension von: Hermann Cohen: Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik // Deutsche Literaturzeitung. 23. Feb. 1884. No. 5. S. 267.

34 Ibid.

35 Ibid. S. 268. В письме ученику Когена Курту Лассвицу от 27 декабря 1884 г. Кантор пишет: «Тем самым не исключено, что на более позднем этапе анализа могут быть найдены средства для

точках зрения на актуально бесконечное» пишет, что дифференциалы можно рассматривать актуально бесконечными только из-за путаницы в понятиях. Такое рассмотрение должно быть отвергнуто как «нелегитимное»[36]. Годы спустя он зайдёт так далеко, что заявит, что бесконечно малые числа – это «холерная бацилла математики»[37]. Несмотря на то, что Кантор написал о дифференциалах, Бенно Керри в своём обзоре "Grundlagen" предполагает, что актуально бесконечно малые числа могут быть определены через трансфинитные числа Кантора путём введения своего рода «обратимости» последних:

> На мой взгляд, формальное обозначение определённых, бесконечно малых чисел действительно даётся в определении наибольшего из них как производящего сумму 1 путём прибавления себя к самому себе ω раз; следующее меньшее – это то, которое производит 1 путём прибавления себя к самому себе ω+1 раз и т.д. Обозначенные бесконечно малые числа, соответственно, будут выражаться как: $1/\omega$, $1/\omega + 1$,..., $1/2\omega$,..., $1/\omega^2$ и т.д.[38]

Эта рецензия Бенно Керри, по-видимому, оказала на Кантора столь сильное влияние, что, «судя по картине, которая вырисовывается на основании опубликованных работ Кантора вместе с ныне изданными частями его "Nachlass", вполне возможно, что именно в ответ на только что приведённое утверждение Керри, Кантор начал разрабатывать своё предполагаемое доказательство невозможности актуально бесконечно малых чисел»[39]. Набросок такого доказательства появился в «К учению о трансфинитном» Кантора в 1887 г.[40] Здесь Кантор утверждает, что «факт существования актуально бесконечных чисел не только не является основанием для

определения различных величин, которые заслуживают названия бесконечно малых, потому что они были бы меньше тех величин, которые мы используем до сих пор. Однако эти бесконечно малые величины, безусловно, не будут иметь никакого отношения к нашим дифференциалам». Англ. цит. по: *Ehrlich P.* The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Archive for History of Exact Sciences. 2006. No. 60. P. 28. См.: *Cantor G.* Briefe / Ed. by H. Meschkowski, W. Nilson. Berlin, 1991. S. 235–236.

36 *Cantor G.* Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Aktuelle Unendliche // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 374. Ibid.: «Несмотря на существенное различие понятий *потенциальной* и *актуальной* бесконечности, – причём первая означает *переменную* конечную величину, *растущую* сверх всяких конечных границ, а последняя – некоторое *замкнутое* в себе, *постоянное*, но лежащее по ту сторону всех конечных величин количество, – к сожалению, слишком часто встречаются случаи смешения этих понятий. Так, например, нередко встречающийся взгляд на *дифференциалы* как на *определённые* бесконечно малые величины (тогда как они представляют собой лишь *переменные* произвольно малые вспомогательные величины, совершенно исчезающие из конечных результатов, а потому характеризовавшиеся уже Лейбницем как простые *фикции*, – см., например, в издании Эрдмана, с. 436) основывается на таком смешении». Рус. пер.: *Кантор Г.* О различных точках зрения на актуально бесконечное // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 265–266.

37 *Meschkowski H.* Aus den Briefbüchern Georg Cantor // Archive for History of Exact Sciences. 1965. No. 2. P. 505.

38 *Kerry B.* Ueber G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen // Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie. 1885. No. 9. S. 212. Англ. пер.: *Ehrlich P.* The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Archive for History of Exact Sciences. 2006. No. 60. P. 28–29.

39 *Ehrlich P.* The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Archive for History of Exact Sciences. 2006. No. 60. P. 29. Подробнее см.: *Proietti C.* Natural Numbers and Infinitesimals: A Discussion between Benno Kerry and Georg Cantor // History and Philosophy of Logic. 2008. No. 29 (4). P. 343–359.

40 *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 378–439. Рус. пер.: *Кантор Г.* К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 268–325.

существования актуально бесконечно малых величин, но, скорее, как раз с помощью первых доказывается невозможность последних»[41]. Теорема, которую необходимо доказать, заключается в следующем:

> Не существует отличных от 0 линейных числовых величин [*Zahlgrößen*] ζ (т.е., короче говоря, таких числовых величин, которые можно представить в образе ограниченных непрерывных прямолинейных отрезков [*begrenzter geradliniger stetiger Strecken*]), которые были бы меньше сколь угодно малой конечной числовой величины, т.е. такие величины противоречат понятию линейной числовой величины[42].

Критикуя Кантора за отказ от понятия актуально бесконечно малых, Гавронский, в свою очередь, предлагает дать им основание путём «инвертирования» бесконечно больших чисел. Оставляя в стороне тот факт, что Кантор представил лишь *набросок* доказательства, а не его окончательный вариант, Гавронский утверждает, что теорема Кантора касается линейных числовых *величин*, поэтому в ней утверждается невозможность актуально бесконечно малых *величин*, а не актуально бесконечно малых *чисел*[43]. Гавронский заявляет, что Кантор перепутал понятия величины и числа. Его же позиция заключается в том, что если понятие бесконечно малой *величины* фактически противоречиво, то понятие бесконечно малого *числа* необходимо и плодотворно [для математики. – примеч. пер.][44].

Вслед за Грассманом Гавронский указывает на то, что понятие величины подразумевает понятие равенства, поскольку величина – это всё, что равно или не равно чему-либо другому. Величину можно измерить, т.е. сравнить с эталоном, а это уже предполагает понятия равенства и неравенства. Но понятие равенства может быть применено только к конечному. Гавронский подчёркивает, что само определение бесконечного выводится именно путём отрицания возможности равенства для чего-либо. Дедекинд устанавливает различие между бесконечным и конечным с помощью следующего свойства: целое в бесконечном тождественно его части. Это парадоксальное свойство фактически означает, что понятие равенства не может быть применено в случае бесконечного и должно быть заменено понятием *eindeutige Zuordnung* [взаимно однозначного соответствия. – примеч. пер.][45]. Гавронский заключает, что понятие равенства может охватывать только конечную величину, а значит, бесконечно малая величина невозможна.

Но в то же время он пишет о том, что понятие актуально бесконечно малого числа необходимо вытекает из понятия актуально бесконечно большого числа, отнюдь не противореча ему: «в самом деле, понятие актуально бесконечно малого

---

41 *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 408. Рус. пер.: *Кантор Г.* К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 295.

42 Ibid. S. 407. Рус. пер.: Там же. С. 294. Эта дискуссия связана с двумя письмами, которые Кантор отправил Ф. Гольдшайдеру 13 мая 1887 г. и К. Вейерштрассу 16 мая 1887 г. (См.: *Cantor G.* Briefe / Ed. by H. Meschkowski, W. Nilson. Berlin, 1991. S. 288). Кантор уже приводил Керри доказательство невозможности бесконечно малых величин 4 февраля 1887 г., но не смог убедить его (Ibid. S. 275–277). Подробнее см.: *Laugwitz D.* Debates about infinity in mathematics around 1890: The Cantor-Veronese controversy, its origins and its outcome // N.T.M. Neue Serie. Internationale Zeitschrift für Geschichte und Ethik der Naturwissenschaften Technik und Medizin. 2002. No. 10. S. 102–126; *Moore M.* A Cantorian Argument Against Infinitesimals // Synthese. 2002. No. 133. P. 305–330.

43 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 54.

44 Ibid.

45 Ibid. S. 49. Наторп пишет: «Бесконечное множество можно (вместе с Дедекидом) определить посредством такой особенности, согласно которой оно эквивалентно (т.е. очевидным образом взаимосоотносимо) своему собственному частичному множеству (но при этом ему не идентично)». См.: *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. 196–197.

числа даётся не только вместе с понятием актуально бесконечно большого числа, но определённо *содержится в* понятии последнего»[46]. Если одно число является актуально бесконечно большим по отношению к другому числу, то последнее является актуально бесконечно малым по отношению к первому[47]. Гавронский пишет, что между понятиями бесконечно большого и бесконечно малого существует такая взаимообусловленность, что они образуют «систему взаимосвязи, в которой один элемент отсылает к другому [и] обязательно связан с ним»[48]. Согласно Гавронскому, в то время как канторовская теория трансфинитных ординалов приводит к бесконечным порядкам актуально бесконечно больших чисел, её «инверсия (*Umkehrung*)» приводит к «системе актуально бесконечно малых чисел»[49]. Гавронский указывает, что такая система была разработана Джузеппе Веронезе. Теория бесконечно больших и бесконечно малых чисел Веронезе будет рассмотрена в разделе 4.

В наброске своего доказательства Кантор использует понятие линейной величины, но не даёт ей определения[50]. Тем не менее он утверждает, что каждую линейную величину следует рассматривать как неотъемлемую часть других величин, в частности конечных линейных величин. Кантор пишет, что если бы существовала величина ζ, которая для любого конечного числа n была бы меньше $1/n$, то такая величина ζ не могла бы быть представлена как неотъемлемая часть конечной величины, даже если бы этих величин было сколь угодно большое бесконечное число. Для Кантора ζ не могла бы быть сделана конечной посредством какого-либо актуально бесконечного умножения, и, следовательно, она определённо не могла бы быть частью конечной величины[51]. Исходя из того, что это противоречит концепции линейных величин, Кантор заключает, что актуально бесконечно малых величин не существует. Более того, он пишет, что из концепции линейных величин вытекает принцип Архимеда, который в таком случае оказывается не аксиомой, а теоремой[52]. Принцип Архимеда гласит, что произвольно большие конечные отрезки могут быть получены путём конечного, достаточно многократного умножения из любого произвольно малого ограниченного отрезка прямой.

Линейные величины, утверждает Кантор, могут рассматриваться как ограниченные непрерывные отрезки прямых линий (*begrenzter geradliniger stetiger Strecken*). Гавронский рассматривает эти величины как *экстенсивные*[53], т.е. как величины, в которых части предшествуют целому и делают его возможным. Здесь Гавронский следует за учением Когена об экстенсивных, интенсивных и бесконечно малых величинах[54]. В этом учении можно выделить два момента. В 1880-х гг. Коген утверждал, что Кант отождествляет интенсивное с бесконечно малой величиной[55], и, следовательно, интенсивная величина означает не что иное, как дифференциаль-

---

[46] *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 56.

[47] Ibid. S. 57.

[48] Ibid. S. 48.

[49] Ibid. S. 57.

[50] Подробнее см.: *Ehrlich P.* The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Archive for History of Exact Sciences. 2006. No. 60. P. 29.

[51] *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 408. Рус. пер.: *Кантор Г.* К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 294–295.

[52] Ibid. S. 409. Рус. пер.: Там же. С. 296.

[53] *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 50.

[54] Ibid. S. 119.

[55] *Cohen H.* Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Berlin, 1883. S. 14. См. критику Фреге в: *Frege G.* Rezension von: H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte // Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. 1885. No. 87. S. 324–329.

ную величину[56]. Интенсивные величины как бесконечно малые величины являются основой величин экстенсивных[57]. Но уже в «Логике чистого познания» Коген полностью отвергает концепцию интенсивной величины[58]. Хотя в этой работе бесконечно малое по-прежнему является основой величин[59], оно уже не может быть величиной само по себе. Разделяя точку зрения Когена, Гавронский соглашается с Кантором в том, что бесконечно малые величин невозможны. Но, как писал Коген, понятие величины требует надлежащего обоснования[60] – и Гавронский ставит вопрос о происхождении частей, составляющих целое. Они должны быть продуцированы мышлением и не могут быть просто даны чувственностью. Гавронский утверждает, что это обоснование обеспечивается анализом бесконечно малых, что мы подробнее разберём в разделе 2.

Дифференциалы как основания величин, в свою очередь, найдут своё обоснование в чистом мышлении. Так, Гавронский соотносит когеновские акты чистой мысли, порождающие величины, с принципами порождения Кантора. Тем не менее он выдвигает собственную концепцию числа, отличающуюся от концепций как Кантора, так и Когена. Мы ещё рассмотрим её подробнее в разделе 3.

2. Дифференциалы и дифференциальное частное (Differentials and differential quotients)

Гавронский понимает анализ бесконечно малых как метод, который работает со взаимосвязью между величинами и законом их порождения. Эту взаимосвязь, в свою очередь, можно рассматривать с двух взаимодополняющих точек зрения. В интегральном исчислении задача заключается в следующем: учтя закон, найти порождаемую величину. В дифференциальном исчислении задача обратная: учтя величину, найти закон порождения. Несмотря на то, что дифференциалы не являются величинами, они тем не менее являются *элементами* величин[61]. Объединение бесконечного числа бесконечно малых в величину происходит в соответствии с законом, выражаемым значением дифференциального частного (differential quotient).

---

56 *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. S. 427. Рус. пер.: *Коген Г.* Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012. С. 444–445.

57 Ibid. S. 422 ff. Рус. пер.: Там же. С. 440 и далее.

58 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 424: «Не существует интенсивной величины. Её не может существовать, поскольку восприятие не обладает каким-либо видом величины». Подробнее см.: *Holzhey H.* Cohen und Natorp. Bd. 1. Basel, Stuttgart, 1986. S. 251.

59 Коген пишет: «Определение величины как отрезка делает выражение экстенсивной величины избыточным». См.: *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 418.

60 *Cohen H.* Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin, 1885. S. 428: «Предмет экстенсивной величины является всё же только сравнительным образованием без фундамента». Рус. пер.: *Коген Г.* Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М., 2012. С. 445.

61 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 86. Такой элемент является не частью величины (которая сама по себе была бы величиной), а её основанием. В схожем смысле Кант утверждает: «Качественное единство следует рассматривать как основание целого, а количественное – как часть целого» (Refl, AA 18: 322) [Здесь и далее при цитировании Канта сохраняется система индексов его работ, принятая в: *Kant I.* Gesammelte Schriften Hrsg.: Bd. 1–22 Preussische Akademie der Wissenschaften, Bd. 23 Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, ab Bd. 24 Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin, 1900 ff. – примеч. пер.]. Рус. пер.: *Кант И.* Семь небольших заметок (1788–1791 годы) / Пер. с нем. А.И. Троцака, под ред. И.Д. Копцева // Кантовский сборник. 2012. No. 3. С. 72. Также см.: ÜE, AA 08: 185. Рус. пер.: *Кант И.* Об одном открытии, после которого всякая новая критика чистого разума становится излишней ввиду наличия прежней (Против Эберхарда) // Трактаты. Рецензии. Письма (впервые изданные в «Кантовском сборнике») / Под. ред. Л.А. Калинникова. М., 2009. С. 38–108.

Как утверждает Гавронский, история анализа бесконечно малых раскрывает роль математического анализа как порождающей величины процедуры. Первым этапом этой истории является метод исчерпывания. Этот метод служит для определения площадей фигур с помощью последовательных полигональных аппроксимаций. Неизвестная площадь A произвольно взятой фигуры считается равной известной площади B, только в том случае, когда предположение, что $|A-B|$ равняется определённой величине, приводит к противоречию. Таким образом, круг, например, сравнивался с многоугольником с увеличивающимся числом сторон, и было установлено, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса. Таким образом, круг был «заменён» многоугольником с бесконечным числом сторон.

Следующая веха в истории развития математического анализа, которую выделяет Гавронский – *methodus indivisibilium* [метод неделимых. – примеч. пер.] Бонавентуры Кавальери. Согласно Кавальери, плоские фигуры должны рассматриваться как совокупности равноудалённых параллельных отрезков, а тела – как совокупности равноудалённых плоскостей. В случае фигур эти совокупности образуются при движении прямой линии, а в случае тел – при движении плоскости. Ключевым аспектом метода Кавальери является возможность определения свойств фигур или тел через рассмотрение соответствующих совокупностей, без замены свойств фигур или тел самими совокупностями, т.е. без предположения их невозможного равенства (*Gleichheit*). Здесь, в отличие от метода исчерпывания, предполагается не равенство, а *пропорциональность* величин.

Однако, по словам Гавронского, метод Кавальери остаётся «поверхностным»[62]. Несмотря на то, что некоторые свойства фигур и тел могут быть определены с помощью неделимости (*indivisibilia*), способ возникновения этих фигур и тел остается неясным. Хотя неделимость и является полезным инструментом для вычислений, она не *продуцирует* фигуры и тела. Французский математик Жиль Персон де Роберваль, развив и усовершенствовав метод Кавальери, рассматривал кривую как результат движения движущейся точки. Кривая понималась им как объект, возникший в результате такого движения. Гавронский пишет, что это развитие [метода Кавальери де Робервалем. – примеч. пер.] раскрывает «сущность» анализа, которая «заключается именно в методе продуцирования величин»[63].

Но глубочайшего понимания проблемы в конце концов достиг именно Ньютон с помощью своего метода флюксий (method of fluxions). Флюента z – это определённая изменяющаяся величина, возникающая в результате движения. Флюксия $\dot{z}$ – это мгновенная мера изменения (т.е. скорость) такого движения, а момент $o\dot{z}$ – действие такого движения (*Betätigung jener Bewegung*)[64] в бесконечно малом интервале времени o. Гавронский подчёркивает, что флюксия $\dot{z}$ выражает не отношение между величинами, а скорее отношение между величиной и источником её порождения (*Erzeugungsquelle*). Флюксия – это выражение *закона* движения, который создает флюенту. Этот закон не обязательно должен быть единым для каждого момента времени. Скорее, в наиболее общем случае, для каждого момента времени будет разное значение $\dot{z}$. Конечная величина z возникает как сумма бесконечных моментов $o\dot{z}$.

На основании того, что закон, регулирующий возникновение конечной величины, может изменяться в каждом бесконечно малом интервале времени, Гавронский заключает, что у Ньютона обнаруживается резкое различие проблемы *дифференциала* от проблемы *дифференциального частного*[65]. Первая – это проблема момента

[62] *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 80.
[63] Ibid.
[64] Ibid. S. 83.
[65] Ibid. S. 85.

oż, в то время как вторая – проблема закона *ż*, согласно которому движение продуцирует конечную величину посредством бесконечных моментов. Моменты – это *principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum*[66] [принципы рождения конечных величин. – примеч. пер.], в которых актуализируется закон порождения. Он не действует в отношении уже данных моментов, которые логически предшествуют ему. Скорее, это тот самый закон, который уже «воплощён (*sich verkörpert*)»[67] в каждом моменте.

Важность дифференциала как *источника* величины также была признана и Лейбницем. Лейбниц изучал проблему построения кривой из её касательных. Кривую следует рассматривать как совокупность точек, которые она разделяет с касательными. Как говорит Кассирер, «эта задача означает для него (Лейбница) требование вывести кривую из закона направления (*aus dem Gesetz der Richtung*)»[68]. Таким образом, дифференциал кривой *ds* следует рассматривать как точку, в которой «направление активно (*tätig*)»[69]. Геометрическим выражением для определения этого направления выступает дифференциальное частное $dy/dx = tg\alpha$. Гавронский подчёркивает: хотя направление само по себе не является величиной, оно тем не менее может быть величиной *выражено*. Дифференциальное частное *dy/dx* является именно таким количественным выражением закона. Предполагается, что кривая как конечная величина продуцируется в соответствии с законом, реализуемым в каждом дифференциальном *ds* и выражаемым дифференциальной производной *dy/dx*. Проекция *ds* на систему координат *x-y* предназначена только для определения *способа* возникновения кривой. Это видно из уравнения длины дуги[70]:

$$\int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}$$

Гавронский пишет: «Исходное выражение этой процедуры таково: $\int dx = x$. Здесь первоначально вычисляется величина. Но если мы просто рассматриваем это уравнение, то остаётся неопределённым, как происходило продуцирование, посредством какого действия закона, будь то посредством единообразного или переменного действия»[71].

Если мы хотим установить то, *как* возникает величина, то мы должны использовать средство, определяемое математически, – функцию. Как видно из приведённого выше уравнения, функция и дифференциальное частное являются единственными средствами для достижения математического определения закона порождения.

Через свою интерпретацию отношения между дифференциалом и дифференциальным частным Гавронский даёт ответ на одно из наиболее частых возражений против учения Когена – что оно ошибочно отдаёт приоритет дифференциалу над дифференциальным частным[72]. Коген утверждает, что происхождение конечного *может* быть *определено* посредством дифференциального частного, тогда как в простом дифференциале конечное просто задано[73], но далее он не разъясняет это

---

66 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 84.
67 Ibid. S. 86.
68 *Cassirer E.* Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen // Gesammelte Werke. Bd. 1. Hamburg, 1998. S. 155. Цит. по: *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 87.
69 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 87.
70 Ibid. S. 104.
71 Ibid. S. 86.
72 См.: *Giovanelli M.* Hermann Cohen's Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book // Studies in History and Philosophy of Science. 2016. No. 58. P. 9–23.
73 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 156.

различие. Для Гавронского дифференциал является логическим основанием конечного, в то время как дифференциальное частное позволяет конечному возникнуть, утверждая определённый закон этого порождения. Таким образом, не следует понимать приоритет дифференциала в *математическом* смысле, как если бы утверждалось, что *dy/dx* является собственной производной. Гавронский, скорее, утверждает с *трансцендентальной* точки зрения, что дифференциальное частное – это не что иное, как закон порождения конечного из дифференциала. Дифференциал – это источник конечного, возникающий в соответствии с законом, заданным дифференциальным частным[74].

3. Числа и дифференциалы

Для Гавронского актуальная бесконечность является ключом к адекватному пониманию анализа бесконечно малых. Чтобы объяснить возникновение конечного из бесконечно малого, Гавронский обращается к теории трансфинитных чисел Кантора. Гавронский пишет: «Если с помощью теории Кантора мы обозначим ω трансфинитным числом, актуальным, бесконечно большим числом… то мы будем думать о конечном расширении как состоящем из ω бесконечно малых элементов, которые, в свою очередь, состоят из ω бесконечно малых и т.д.»[75].

Это порождение конечного из бесконечно малого происходит в соответствии с когеновскими суждениями математики. Эти суждения соответствуют трём логическим операциям: 1) полагание (*Setzung*), соответствующее суждению реальности; 2) бесконечное повторение (*unendliche Wiederholung*), соответствующее суждению множественности; и 3) актуальный синтез всеобщности (*aktuale Zusammenfassung in einer höheren Allheit*), соответствующий суждению всеобщности[76]. Величины порождаются с помощью этой трёхэтапной процедуры, которая завершается суммой бесконечного числа бесконечно малых слагаемых. Это суммирование соответствует математической операции интеграции. «Интеграл, – утверждает Коген, – это не что иное, как всеобщность, в которой бесконечный ряд сочетается с бесконечно малым»[77]. Как подчёркивает Гавронский, истинное значение дифференциальному исчислению придаёт интегральное исчисление, поскольку проблема, решаемая с помощью дифференциала, заключается в порождении величин[78]. По этой причине, утверждает Коген, «всеобщность – это истинное дело и сущность бесконечно малого»[79].

Дифференциалы – это полагания мышления в той мере, в какой они являются продуктами действия суждения реальности. Для Когена дифференциал (*dx*) представляет *то, что́ он есть* (*das Seiende*), и только благодаря ему может существовать нечто (*x*), по отношению к которому дифференциал вообще может *быть*[80]. Коген, открыто противостоя Канту, подчёркивает, что реальность не зависит от ощущения. Реальность – это всего лишь продукт мышления. Кант рассматривает реальность как категорию и, следовательно, как берущее своё начало в чистом рассудке понятие,

---

74 Наторп также отождествляет дифференциальное частное с законом возникновения конечного. Для него, однако, источником конечного является закон, который может быть рассмотрен как сосредоточенный интенсивно в точке или экстенсивно в линии. См.: *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. 220.

75 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 41.

76 Ibid. S. 80, 108.

77 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 156.

78 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 86.

79 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 157.

80 Ibid. S. 114.

но такое чистое понятие может приобрести объективную значимость только в том случае, если оно применяется к бытию, независимо данному чувственностью. Категория реальности применяется к *воспринимаемой* материи, заполняющей время[81]. Вопреки Канту, согласно когеновскому суждению реальности, мысль *порождает* бытие как бесконечно малую реальность.

Гавронский подчёркивает, что полагание, порождаемое суждением реальности, – полагание *определённое*, поскольку оно существует в соответствии с законом. Следовательно, дифференциал выступает «индивидуальным применением»[82] этого закона. По этой причине дифференциал не даётся независимо от закона, а скорее является его *Ansatzpunkt* [отправной точкой. – примеч. пер.][83]. Другими словами, дифференциал – это «кристаллизация»[84], «воплощение» или «реализация» закона[85]. Бесконечное и непрерывное повторение действия этого закона приводит к множественности, которая, в свою очередь, может привести только к *потенциальной* бесконечности. Для того чтобы эта множественность соединилась во всеобщность, необходима третья мыслительная операция. Это будет уже задачей суждения всеобщности, которое определит общую сумму дифференциалов как *актуальную* бесконечность[86].

Но дифференциал как положение закона может также пониматься и как всеобщность, возникающая из дифференциалов более высокого порядка. По этой причине Гавронский утверждает, что «каждый отдельный результат относителен», поскольку его можно понимать и как интеграл, и как дифференциал[87]. Через дифференциал даётся вся система дифференциалов более высокого порядка, поскольку каждый дифференциал отсылает к следующему – более высокому – как к своему источнику[88]. Как пишет Коген, бесконечно малая величина первого порядка – это переменная, которая приобретает свою реальность из закона бесконечно малой величины второго порядка[89].

Когеновская логическая операция всеобщности соответствует *второму принципу порождения* Кантора. Этот принцип, обнаруживаемый Гавронским в теории Кантора, вносит важнейший вклад в философскую интерпретацию анализа бесконечно малых. Однако Гавронский возражает против *первого принципа порождения* Кантора, согласно которому элементы множества рассматриваются как *данные*, а не как *продуцированные*. Гавронский критикует Кантора за то, что тот основывает концепцию числа на концепции множества[90]. Множество состоит из элементов,

---

81 KrV, A 143; B 183. Рус. пер.: *Кант И.* Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 1 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М., 2006. С. 199; *Кант И.* Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 2 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М., 2006. С. 263. Благодаря этому реальное, являющееся объектом ощущения, приобретает интенсивную величину, т.е. степень. KrV, B 206. Рус. пер.: *Кант И.* Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 2 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М., 2006. С. 291.

82 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 86.

83 Ibid. S. 91.

84 Ibid. S. 104.

85 Ibid. S. 86.

86 Гавронский подчёркивает, что характер всеобщности – как и стремление к ней – можно обнаружить в каждом дифференциале. См.: *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 98. В том же смысле Наторп указывает: «Но x должно, хотя бы в форме вопросительного знака, быть представленным в мышлении, прежде чем можно будет вообще говорить о dx с какой-либо определённостью; и отношение к x как к порождаемому в сущности неотделимо от его понятия». См.: *Natorp P.* Zu Cohens Logik // Holzhey H. Cohen und Natorp. Bd. 2. Basel, Stuttgart, 1986. S. 53.

87 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 111.

88 Ibid. S. 112.

89 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 118.

90 См.: *Cantor G.* Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre // Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf

и даже если мы полностью абстрагируемся от конкретных свойств элементов, сами элементы тем не менее сначала должны быть *положены*. Полагание элементов множества есть предпосылка множества как такового и единственный источник порождения множества и его сущности[91].

Поскольку величины являются результатом работы мысли на основании метода бесконечно малых, дифференциалы не следует понимать как приращения величин, т.к. это означало бы, что величины скорее предполагаются, чем объясняются[92]. Концепция функции также недостаточно радикальна для того, чтобы выступить основанием анализа бесконечно малых, поскольку она предполагает величины, которые должны быть объединены без учёта их первоначального порождения[93].

Гавронский утверждает, что логическая процедура, состоящая из трёх суждений реальности, множественности и всеобщности, лежит в основе не только исчисления бесконечно малых, но и вообще любого порождения чисел. В обоих случаях «каждый элемент мыслится как изначально положенный»[94]. Однако существует принципиальное различие между методом исчисления бесконечно малых и процедурой получения числового ряда. В последнем случае процедура обладает парадигматической «однородностью и монотонностью» из-за того, что порождающий закон остаётся неизменным на протяжении всего числового ряда[95]. Напротив, в дифференциальном исчислении есть «богатое многообразие порождающих законов», в котором нельзя найти ни монотонности, ни единообразия[96]. Логическая процедура, лежащая в основе как метода бесконечно малых, так и продуцирования числового ряда, одна и та же, но «воплощена» она в двух разных методах[97]. В то время как Коген находит основания числа в том, что суждение реальности полагает как бесконечно малое[98], Гавронский утверждает, что дифференциал и число следует различать как две разные *категории*, каждая из которых выступает фундаментальным принципом науки[99].

Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 282 ff. Рус. пер.: *Кантор Г.* К обоснованию учения о трансфинитных множествах // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 173 и далее.

91 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 56. Кант понимает число как чистую схему величины, он рассматривает его как представление о последовательном добавлении одной однородной единицы к другой (KrV, A 142; B 182). Рус. пер.: *Кант И.* Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 1 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М., 2006. С. 197, 199; *Кант И.* Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 2 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М., 2006. С. 263. Гавронский не считает кантианскую позицию удовлетворительной: он спрашивает о *происхождении* тех однородных единиц, которые должны быть продуцированы мыслью и не могут быть просто даны чувственностью. Исходя из этого, Гавронский критикует и Кантора. Он указывает, что подход Дедекинда является наиболее адекватным для решения проблемы чисел, поскольку Дедекинд объясняет полагание чисел на основе исходного отношения, которое не предполагает какого-либо необоснованного представления, такого как представление величины. К сожалению, Гавронский не развивает эту мысль дальше (*Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 56). Содержательную дискуссию по этому вопросу проводят Наторп и Кассирер. (См.: *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910; *Cassirer E.* Substanzbegriff und Funktionsbegriff: Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik // Gesammelte Werke. Bd. 6. Hamburg, 2000.) Подробнее см.: *González P.M.* Estudos neokantianos. San Pablo, 2011. P. 103–144.

92 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 82.

93 Ibid.

94 Ibid. S. 107.

95 Ibid. S. 108.

96 Ibid.

97 Ibid. S. 109.

98 *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 116 ff.

99 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 109.

4. Наторп и неархимедовы системы

В предисловии к «Логическим основам точных наук» (“Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften”), датированном мартом 1910 г., Наторп высоко оценивает исследования Гавронского о концепции актуальной бесконечности и о применении её к проблеме бесконечно малого. Наторп пишет, что этот вопрос [вопрос актуально бесконечно малых. – примеч. пер.] может быть рассмотрен в книге лишь кратко, поскольку вскоре должно будет появиться подробное исследование Гавронского, посвящённое этой проблеме[100]. Это исследование станет докторской диссертацией Гавронского[101].

Наторп утверждает, что и он сам, и Гавронский, отойдя от общепринятых методологических предпосылок, независимо пришли к совпадающим результатам относительно бесконечно малых величин. Согласно Наторпу, существует строгое соответствие между бесконечными порядками бесконечно малых и бесконечно больших чисел – это идея, которую Джузеппе Веронезе развил в своем “Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare”[102]. Так же и Гавронский указывает, ссылаясь на “Grundzüge der Geometrie” Веронезе, что тот основал свою систему арифметики именно на этой идее соответствия[103].

В “Fondamenti” Веронезе представляет систему неархимедовой геометрии с бесконечно малыми и бесконечно большими отрезками. «Прямолинейные единицы», которые фигурируют в названии книги, относятся к этим отрезкам. В рамках архимедовой геометрии, имея два отрезка, всегда можно получить отрезок больший, чем данный больший, добавляя меньший к самому себе достаточное количество раз. Веронезе же, напротив, принимает «гипотезу о существовании ограниченных бесконечно больших отрезков»[104]. Давайте выберем любой отрезок и примем его за единицу. Так мы установим шкалу, состоящую из натуральных чисел, кратных этому единичному отрезку. Гипотеза утверждает, что всегда существует отрезок, лежащий за пределами шкалы. Таким образом, свойство Архимеда признаётся недействительным. В этой связи Веронезе пишет:

> Чтобы отличить отрезки, ограниченные концами, которые порождают область шкалы с произвольной единицей измерения (AA_1), от тех, которые не порождают шкалу и больше их (т.е. больше отрезков шкалы. – примеч. авт.), мы называем первые конечными, а вторые актуально бесконечно большими или бесконечно большими по отношению к единице измерения (масштаба. – примеч. авт.). Однако, если вторые меньше первых, мы называем их актуально бесконечно малыми или бесконечно малыми по отношению к этой единице. Например, единица измерения (AA_1) или произвольный

---

100 *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. V–VI.

101 Гавронский представил текст своей диссертации в 1909 г. и, после оценки Наторпом и Когеном, защитил её 25 февраля 1910 г.

102 *Veronese G.* Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova, 1891. Наторп цитирует немецкий перевод Адольфа Шеппа: *Veronese G.* Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Leipzig, 1894.

103 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 54. В своём глубоком анализе обращения неокантианцев к неархимедовым системам, Морманн не упоминает Гавронского. См.: *Mormann T.* Zur Mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger Neukantianismus // Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen / Ed. by C. Damböck. Cham, 2018.

104 *Veronese G.* Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Leipzig, 1894. S. 99. Англ. пер.: *Fisher G.* Veronese’s Non-Archimedean Linear Continuum // Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua / Ed. by Ph. Ehrlich. Dordrecht, 1994. P. 123.

ограниченный отрезок заданного масштаба бесконечно мал по отношению к бесконечно большому сегменту (AA_∞)[105].

Относительно этой гипотезы Веронезе утверждает, что она «удовлетворяет всем условиям математически возможной гипотезы, которая в конечном счёте основывается не на соображениях философского характера о происхождении математических представлений, а на отсутствии каких-либо противоречий»[106].

Веронезе определяет порядки бесконечной величины и устанавливает, что если отрезок бесконечно велик для *n*-го порядка по отношению к другому отрезку, то последний отрезок бесконечно мал для *n*-го порядка по отношению к первому. Позже он вводит обозначение для чисел, соответствующих «вторым концам» отрезков, которые бесконечно велики по отношению к единице. Веронезе подчёркивает, что его бесконечно большие числа нельзя отождествлять с трансфинитными числами Кантора:

> Разница между нашим бесконечно большим числом и канторовским ω (т.е. маленькой омегой, первым трансфинитным порядковым номером. – примеч. авт.) заключается в том, что мы не распознаём первое бесконечно большое число… в то время как для бесконечно больших чисел Кантора ω является первым в абсолютном смысле. Следовательно, это означает: если задано одно из наших бесконечно больших чисел, например, ∞_1, то существуют числа $\infty_1 - n$, отличные от ∞_1, которые лежат между конечными числами и ∞_1[107].

Кантор, хорошо знакомый с учением Веронезе о бесконечно малых величинах, решительно его отверг[108]. Как мы писали выше, в 1887[109] г., чтобы доказать невозможность бесконечно малых отрезков прямой, Кантор ввёл концепцию линейной величины. Он стремился показать, что архимедово условие предполагается при сочетании этой концепции с его теорией трансфинитных ординалов. Из этого Кантор сделал вывод, что так называемая аксиома Архимеда – это вовсе не аксиома, а скорее следствие, которое с необходимостью вытекает из концепции линейной величины. Если бы Кантор согласился с тем, что архимедово свойство для действительных чисел было бы просто *аксиомой*, то новые системы чисел можно было бы разрабатывать, отрицая это свойство, при условии сохранения согласованности. Напротив, если бы архимедово свойство можно было бы доказать как *теорему* исходя из других принципов, то позиция, подобная позиции Веронезе, была бы неприемлема, и любая теория бесконечно малых величин, основанная на отказе от архимедова свойства, была бы непоследовательной. Кантор занял именно эту позицию[110].

Наторп, по-видимому, не обратил внимания на то, что трансфинитные числа Кантора сильно отличаются от трансархимедовых чисел Веронезе. Так, он утверждает: «Из произвольно выбранного нулевого начального значения мы простейшим образом получаем ряд Кантора, или, скорее, ряд Веронезе: 0, 1, 2... ω, $\omega + 1$,... 2ω, $2\omega + 1$,… $n\omega$… $\omega\omega$…[111]».

---

[105] *Veronese G.* Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Leipzig, 1894. S. 99. Англ. пер.: *Fisher G.* Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum // Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua / Ed. by Ph. Ehrlich. Dordrecht, 1994. P. 123.

[106] Ibid. S. 99. Англ. пер.: Ibid. P. 123.

[107] Ibid. S. 119. Англ. пер.: Ibid. P. 125.

[108] *Dauben J.W.* Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge MA, 1979. P. 233–236.

[109] *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts / Herausgegeben von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. S. 378–439. Рус. пер.: *Кантор Г.* К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. М., 1985. С. 268–325.

[110] Ibid. S. 408–409. Рус. пер.: Там же. С. 295–296.

[111] *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. 195.

Здесь Наторп опускает числа $\omega - n$, имеющие ключевое значение для системы Веронезе, в которой нет первого бесконечно большого числа.

В любом случае Наторп хвалит Веронезе за то, что тот отказался от принципа, который не обладает абсолютной необходимостью, – «принципа Архимеда». Согласно Наторпу, для Веронезе этот принцип совпадает с предпосылкой конечности, так что отказ от этого принципа равносилен признанию существования истинных бесконечностей[112]. Принцип Архимеда – это «определение конечности величины»[113]. Исходя из отказа от этого принципа, утверждает Наторп, Веронезе способен расширить и исправить концепцию Кантора о бесконечном, дополняя канторовское представление об актуально бесконечно большом представлением о бесконечно малом. Это расширение теории Кантора обеспечивает анализу бесконечно малых надёжное основание[114], что прямо соотносится с утверждением Гавронского о том, что «непротиворечивое изложение принципов анализа бесконечно малых возможно только на основе актуально бесконечного»[115].

Предполагая, что понятие бесконечно большого числа обязательно подразумевает понятие бесконечно малого, Гавронский и Наторп связывают трансфинитные числа Кантора с трансархимедовыми числами Веронезе способом, который вряд ли достаточно обоснован. В то время как Веронезе исходит из убеждения, что существуют ограниченные отрезки, которые содержат в себе целую шкалу, Кантор, напротив, исходит из постулата о существовании бесконечного множества. Из этих двух различных предпосылок вытекают два совершенно разных представления о бесконечном[116].

Сочетание теорий Кантора и Веронезе вскоре подверглось критике со стороны математиков, близких Марбургской школе[117]. Абрахам Френкель, учившийся у Когена в Марбурге и общавшийся с Наторпом и Гавронским[118], решительно отвергает

---

112 *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. 171.

113 Ibid. S. 185.

114 Ibid. S. 200. Наторп критикует Рассела за то, что тот не принял во внимание значительные успехи Веронезе в разработке теории Кантора (См.: *Russel B.* The Principles of Mathematics. Cambridge, 1903. P. 338–345). Более того, он утверждает: «У Рассела повсеместно лежит в основе ошибочное представление о том, что бесконечно малое, которое Коген постоянно обозначает как неэкстенсивное, тем не менее должно означать экстенсивную величину, “дистанцию”, которая не равна нулю и в то же время не является конечной, что, в любом случае, не соответствует мнению Когена». *Natorp P.* Die logischen Grundlagen… S. 222. Подробнее о критике Расселом Когена см.: *Veit B.* Hermann Cohens Infinitesimal-Logik. Würzburg, 2017. S. 121 ff.

115 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 42.

116 Более подробно о сущностном различии между числами Кантора и числами Веронезе см.: *Peiffer-Reuter R.* L’infini relatif chez Veronese et Natorp // La mathématique nonstandard / Ed. by H. Barreau, J. Harthong. Paris, 1989. P. 117–142. Пфайффер-Рейтер утверждает, что Наторп: «mélange de façon déconcertante les théories de Cantor et de Veronese» [сомнительно смешивает теории Кантора и Веронезе. – примеч. пер.]. Ibid. P. 125. См. также: *Petitot J.* Esthétique transcendantale et physique mathématique // Neukantianismus. Perspektiven und Probleme / Ed. by H. Holzhey, W. Orth. Würzburg, 1994. S. 185–213.

117 Морманн указывает на то, что попытка Наторпа объединить теории бесконечности Кантора и Веронезе – это, как уже показал Френкель, «mathematisch unhaltbar [математическая бессмыслица. – примеч. пер.]». *Mormann T.* Zur Mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger Neukantianismus // Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen / Ed. by C. Damböck. Cham, 2018. S. 120.

118 *Fraenkel A.* Recollections of a Jewish Mathematician in Germany. Basel, 2016. P. 84–86. О Гавронском Френкель вспоминает: «Очень талантливый русский еврей и революционер, он был вынужден бежать в Германию после того, как его приговорили к смертной казни. Гавронский стал учеником Когена примерно в 1906 г. Коген, которого потом поддерживал Наторп, объявил Гавронского самым талантливым его учеником. Конечно, это было неправдой: среди немецко-еврейских студентов его, безусловно, превзошёл Эрнст Кассирер, а среди русских – Сергей Львович Рубенштейн, с которым я поддерживал контакт даже после Первой мировой войны вплоть до 1928 г., когда он был директором

неокантианскую попытку основать математику на актуально бесконечно малых величинах, определяемых по аналогии с трансфинитными числами[119]. Он полагает, что понятие актуально бесконечно малой величины может быть введено без противоречий только по *философским* соображениям, но при попытке использовать это понятие для решения *математических* задач возникают трудности.

> Нельзя даже утверждать, что процедура, подобная упомянутой, противоречила бы самой себе или что бессмысленно переходить от воображаемой пропорции в виде «трансфинит:1=1:x» к экзистенциальному утверждению «должен существовать *x*, удовлетворяющий этой пропорции». На самом деле философы иногда довольствуются простым «полаганием» концепции, и этот акт сам по себе редко влечёт за собой противоречие – но, определённо, не в случае бесконечно малых величин. Сложности начинаются в тот момент, когда человек берётся что-то делать с концепцией, в нашем случае – оперировать бесконечно малыми величинами и применять их к научным проблемам. *В этом отношении концепция бесконечно малого в целом оказалось неудачной*[120].

В частности, Френкель утверждает, что бесконечно малые величины бесполезны в математическом анализе, что прямо противоречит неокантианской точке зрения[121]:

> Как и другие авторы, неокантианцы вполне обоснованно избрали в качестве реального критерия легитимации бесконечно малых величин их *полезность*, и они были правы, когда выбрали дифференциальное и интегральное исчисление в качестве той основы, на которой эта полезность должна быть проверена. Собственно говоря, термин «исчисление бесконечно малых», по-видимому, намекает на использование бесконечно малых величин в математическом анализе. Однако по мере проверки *рассмотрение бесконечно малых как бесконечно малых величин, оказалось совершенно несостоятельным*[122].

университетской библиотеке в Одессе. В 1909 г. Гавронский защитил докторскую диссертацию в школе искусств и гуманитарных наук в Марбурге, Коген оценил диссертацию как превосходную. Она была опубликована в 1910 г. в Марбурге под названием "Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzunge". Однако математики из той же школы в университете, в частности Хенсел, подвергли эту работу резкой критике, на мой взгляд, вполне обоснованной. Критика была принята, но всё же это усилило противостояние». *Fraenkel A.* Recollections of a Jewish Mathematician in Germany. Basel, 2016. P. 86.

119 *Fraenkel A.* Abstract Set Theory. Amsterdam, 1953. P. 163.

120 Ibid. P. 163–164. Френкель пишет: «Марбургские неокантианцы объясняли это следующим образом: если, следуя Кантору, обозначить бесконечно большое "число" как *w* и сформулировать соотношение *1:w=x:1*, то *x* должно быть "бесконечно малым числом". Тогда такие бесконечно малые числа можно было бы рассматривать, например, как числитель и знаменатель в системе исчисления Лейбница *dy/dx* для дифференциального частного. Однако на самом деле, как наука, несомненно, признала с начала девятнадцатого века, *dy/dx* – это вовсе не производная, а предел производной, и "дифференциалы" *dx* и *dy* определённо не имеют того независимого значения, которое им приписывал Коген. Однако он основал на этом свой "принцип происхождения" как основу своей логики, утверждая, что с помощью метода бесконечно малых, таким образом, задаётся "точный вопрос" и "решающий ответ" на значение мысли как порождения существования, а *dx* является "истинной единицей", абсолютом (см.: *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Berlin, 1902. S. 32, 109, 116, 123). Напротив, Коген всеми силами отвергает метод пределов как основу метода бесконечно малых – в том числе и для интеграла. Очевидно, что математик должен отвергнуть эту точку зрения как ложную (или бессмысленную)». См.: *Fraenkel A.* Recollections of a Jewish Mathematician in Germany. Basel, 2016. P. 85–86.

121 О критерии полезности Френкеля см.: *Kanovei V., Katz K., Katz M., Mormann T.* What makes a theory of infinitesimals useful? A view by Klein and Fraenkel // Journal of Humanistic Mathematics. 2018. No. 8 (1). P. 108–119.

122 *Fraenkel A.* Abstract Set Theory. Amsterdam, 1953. P. 164.

Френкель приходит к выводу: «Во всяком случае, на данный момент ни бесконечно малые отрезки Веронезе, ни какие-либо другие бесконечно малые величины нельзя рассматривать как аналог трансфинитных чисел – математическое существование бесконечно больших и бесконечно малых величин имеет существенно разный характер[123]».

Однако в 1960 г. ученик Френкеля Абрахам Робинсон[124] предложил «совершенно иную, обоснованную и нетривиальную защиту актуально бесконечно малых величин»[125]. Робинсон пишет: «…концепции и методы современной математической логики способны обеспечить подходящую основу для развития дифференциального и интегрального исчисления с помощью бесконечно малых и бесконечно больших чисел»[126]. Это прозрение привело Робинсона к созданию так называемого *нестандартного анализа*, который он рассматривал как подтверждение теории бесконечно малых величин Лейбница[127]. Теория Робинсона подразумевает введение идеальных чисел, которые могут быть бесконечно малыми или бесконечно большими по сравнению с действительными числами, но они всё же должны обладать теми же свойствами, что и последние[128].

Эти новые числа есть так называемые *гипервещественные* числа. Их множество обозначается символом R^*. Точно так же, как действительные числа могут быть построены из рациональных чисел, гипервещественные числа могут быть построены из чисел действительных. Действительные числа являются подмножеством гипервещественных чисел. Число ε называется бесконечно малым, если $-a<\varepsilon<a$ для каждого положительного действительного числа a. Таким образом, ноль является бесконечно малым и единственным одновременно и бесконечно малым, и действительным числом. Обратные значения ненулевых бесконечно малых величин являются бесконечными гипервещественными числами. Если разница между двумя гипервещественными числами a и b бесконечно мала, то говорят, что *a бесконечно близко* к b. Элемент a из R^*, который не является бесконечно большим, имеет уникальную стандартную часть, определяемую как действительное число $°a$, отличие которого от a равно нулю или бесконечно малой величине. Вокруг каждого действительного числа существует набор гиперреальных чисел, бесконечно близких к нему. Бесконечно малые величины – это бесконечно близкие к нулю гиперреальные числа[129].

---

123 *Fraenkel A.* Abstract Set Theory. Amsterdam, 1953. P. 165.

124 *Fraenkel A.* Recollections of a Jewish Mathematician in Germany. Basel, 2016. P. 85. Касательно удивления Френкеля см.: *Kanovei V., Katz K., Katz M., Mormann T.* What makes a theory of infinitesimals useful? A view by Klein and Fraenkel // Journal of Humanistic Mathematics. 2018. No. 8 (1). P. 111: «Несомненно, отчасти это удивление вызвано фундаментальной проблемой, которую ставят перед нами современные теории бесконечно малых величин. Такие теории поставили под сомнение предположение о том, что основы Кантора – Дедекинда – Вейерштрасса являются неизбежной первичной точкой отсчёта, и открыли поле для других возможностей, таких как первое расширение ZFC, разработанное Эдвардом Нельсоном».

125 Подробнее о Робинсоне см.: *Dauben J.* Abraham Robinson. The Creation of Non-standard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey. Princeton, 1995.

126 *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966. P. VII.

127 О критике Робинсоном лейбницианского взгляда на исчисление см.: *Bos H.* Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus // Archive for the History of Exact Sciences. 1974. No. 14. P. 81–86.

128 *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966. P. 2. Петито указывает, что Веронезе оказал влияние на Робинсона через Наторпа и Френкеля. См.: *Petitot J.* Esthétique transcendantale et physique mathématique // Neukantianismus. Perspektiven und Probleme / Ed. by H. Holzhey, W. Orth. Würzburg, 1994. S. 194.

129 Что касается применимости аксиомы Архимеда в своей теории, Робинсон пишет: «В нашей собственной теории ответом на вопрос, верна ли аксиома Архимеда не только в R, но и в $^*R$, является

Среди тех, кто пытается ввести использование бесконечно малых величин в анализ, Робинсон прямо упоминает Наторпа[130]. Сразу после этого он цитирует «не комментируя» слова Френкеля о том, что «критерием эффективности бесконечно малых чисел является их применимость к дифференциальному и интегральному исчислениям». Френкель указал, что потребуется «второй Кантор», чтобы создать безупречную арифметическую основу для новых бесконечно малых чисел, которые окажутся полезными и проложат путь к исчислению бесконечно малых. По мнению Френкеля, хотя это и возможно, тем не менее это крайне маловероятно[131].

Заключение

Гавронский признаёт, что его интерпретация дифференциального исчисления, основанная на актуально бесконечно малых величинах, противоречит «обычной» точке зрения на этот вопрос, в которой дифференциалу не придаётся никакого независимого от дифференциального частного значения[132]. В этом смысле, как выразился Рассел, *dx* и *dy* «сами по себе ничего не значат»[133], это всего лишь «типографические части одного символа»[134]. Символ *dy/dx* – это не дробь, а просто «предел дроби, числитель и знаменатель которой конечны»[135]. Пусть $y=f(x)$– функция, определённая в интервале (*a*, *b*), и пусть $a<x_0<b$. Тогда производная от *f(x)* в точке x_0 определяется следующим образом:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{X_0}=f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

давайте предположим, что этот предел существует и что его значением является число *L*:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$

в соответствии с «обычной» интерпретацией математического анализа, это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует положительное число δ, такое, что:

и “да”, и “нет”! Если под “аксиомой Архимеда” мы понимаем предложение из *K*, которое формализует утверждение “Для каждой пары действительных чисел *a* и *b*, таких, что $O<a<b$, существует натуральное число *n*, для которого $B<na$”, то это предложение справедливо в *R* и, следовательно, также в **R*. В последней системе *n* может быть реализовано бесконечным натуральным числом. Однако, если мы имеем в виду постулат о том, что для любой пары действительных чисел *a* и *b*, $O<a<b$, существует натуральное число *n* в обычном смысле, такое, что $b<a+a+a\ldots+a(n раз)$, то этот постулат неверен для **R*» *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966. P. 266–267.

[130] *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966. P. 278. Что касается когеновского “Das Prinzip der Infinitesimal-Methode”, Робинсон утверждает, что «философия математики Германа Когена, каким бы ни был её исторический интерес, в настоящее время заслуженно неизвестна». См.: *Robinson A.* Concerning Progress in the Philosophy of Mathematics // Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. 1975. No. 80. P. 45.

[131] *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966. P. 279.

[132] *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 81.

[133] *Russel B.* The Principles of Mathematics. Cambridge, 1903. P. 338.

[134] Ibid. P. 342.

[135] Ibid. P. 338.

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right|<\varepsilon$$

r – любой x из (a, b), для которого $|x-x_0|<\delta$. При этом не учитываются бесконечно малые величины. Как указывает Рассел, «именно теория пределов лежит в основе математического анализа, а не какое-либо мнимое использование бесконечно малых величин»[136].

Тем не менее Робинсон показал, что бесконечно малые величины могут быть должным образом определены, а значит, такие понятия, как два бесконечно близких друг к другу числа, могут иметь вполне обоснованное значение, а бесконечно малые величины не являются ни «математическими фикциями»[137], ни каким-либо образом «самопротиворечивыми»[138]. Но Гавронский призывает ввести бесконечно малые величины не по математическим причинам, а по *трансцендентальным*. Поскольку любая функциональная корреляция величин предполагает порождение самих величин[139], Гавронский стремится разработать – в соответствии с доктриной Когена – интерпретацию исчисления бесконечно малых, которая исключала бы любой предполагаемый *данный* (alleged given) элемент в знании[140]. Бесконечно малые величины не просто «приводят к новому и плодотворному подходу к классическому математическому анализу и к многим другим разделам математики»[141]. Гавронский утверждает, что бесконечно малые величины являются не чем иным, как ключом к правильному философскому объяснению взаимосвязи между мышлением и бытием[142]. Математика, и дифференциальное исчисление в частности, является средством, с помощью которого чистая мысль конструирует бытие[143]. Явления должны быть рассмотрены как *продуцированные* мыслью, а не как просто связанные рассудком (в соответствии с категориями) после того, как они были независимо даны чувственностью, как то утверждает Кант. Математика, таким образом, обеспечивает естествознание объектом.

Концепция трансцендентальной математики решает проблему применимости математики к природе[144]. Эмпирическое применение математики больше не представляет собой проблематичного подведения независимо данных объектов под априорные математические концепции. Скорее, природа теперь понимается как продукт мысли, созданный в соответствии с методом бесконечно малых. Поскольку мысль создаёт природные объекты в соответствии с математическими методами, последние обладают необходимой достоверностью по отношению к первым. Не существует ни объектов, которые были бы даны независимо от мышления,

---

136 *Russel B.* The Principles of Mathematics. Cambridge, 1903. P. 329.

137 Ibid. P. 336.

138 Ibid. P. 368.

139 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 82, 115.

140 Ibid. S. 118.

141 *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966. P. 2.

142 Исследование Гавронского относится не к философии математики, а к трансцендентальной логике, это попытка решить трансцендентальную проблему посредством изложения логических основ математического метода. См.: *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 27.

143 Бойер критикует идеалистические философии, которые утверждают, что математика занимается «метафизическим порождением величин». См.: *Boyer C.* The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York, 1949. P. 308.

144 Как выразился Шультесс: «Тем самым разница между чистой и прикладной математикой становится несущественной». См.: *Schulthess P.* Introduction to: Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte // Cohen H. Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Hildesheim, Zürich, New York, 1984. S. 38.

ни априорных концепций, имеющих какую-либо иную цель, кроме порождения бытия[145]. Мысль, работая с методом бесконечно малых, превращается в знание. Дифференциал – это основной продукт мысли и первый шаг в создании объекта мышления.

Таким образом, истинной целью анализа бесконечно малых является продуцирование объекта знания и определение закона, в соответствии с которым происходит его порождение[146]. Дифференциал воплощает закон, т.е. фактически исполняет закон порождения. Гавронский соглашается с Наторпом в том, что истинным «источником» конечной величины является не бесконечно малая величина, а *закон* переменной величины[147]. Но Гавронский проводит различие между законом и его количественным выражением, задаваемым дифференциальной *производной*. Он утверждает, что различие между законом и его выражением можно ясно увидеть исходя из существования непрерывных, но при этом недифференцируемых функций. В этом случае определённое выражение производящего закона отсутствует, поскольку закон не может быть понят математическими средствами (т.е. не существует производной функции). Но, объясняет Гавронский, это не наносит ущерба «логической сущности» закона[148]. В любом случае, утверждает он, в *естественном знании* всегда можно определить порождающий закон, и через него узнать процесс порождения природных объектов[149].

Для Гавронского дифференциал – это не величина: «актуально бесконечно малая величина – это бессмыслица»[150]. Дифференциал также не является числом в смысле конечного или трансфинитного значения. Характерное для подхода Гавронского введение «дифференциала» как новой категории уже не соответствует учению Когена. Для Гавронского дифференциал и число – это две разные категории. В связи с этим дифференциалы Гавронского также нельзя отождествлять с гиперреальными (ненулевыми) бесконечно малыми числами.

Несмотря на то, что теория дифференциалов Гавронского одновременно опирается и на теорию Кантора, и на теорию Веронезе, что весьма сомнительно, актуально бесконечно малые величины являются полностью обоснованными математическими сущностями (entities), а некоторые недавние разработки имеют поразительное сходство с учением марбургцев[151]. Тем не менее, как мы писали ранее, следует подчеркнуть не математический, а трансцендентальный или метафизический аспект учения Гавронского. Гавронский не просто ищет способ расширения действительных чисел в математическом смысле[152]. Скорее, он стремится дать наброски

---

145 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 20 ff.

146 Ibid. S. 105.

147 *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. 215.

148 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 91. На самом деле можно показать, что существуют непрерывные кривые, определяемые движением, которые не имеют касательных линий. См.: *Boyer C.* The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York, 1949. P. 285.

149 *Gawronsky D.* Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. S. 114.

150 Ibid. S. 97.

151 См. примеч. 27.

152 Морман утверждает, что именно подход Кассирера может позволить разработать неокантианскую интерпретацию нестандартного анализа. Морман утверждает: «Переход от R к R^* является идеализирующим дополнением в смысле Кассирера, посредством которого система действительных чисел R расширяется до системы R^* путём “приращения” идеальных элементов». См.: *Mormann T.* Zur Mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger Neukantianismus // Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen / Ed. by C. Damböck. Cham, 2018. S. 126.

философского объяснения связи между мышлением и бытием[153]. В результате этого стремления получает чёткое выражение проблема применимости математики к естественным наукам[154]. Природа – это книга, написанная на языке математики, потому что природные объекты не просто даны – но сконструированы через дифференциальное исчисление. Актуальность бесконечно малых суть актуальность чистой мысли в порождении бытия. Первым актуальным продуктом чистой мысли является реальность бытия. Бесконечно малые величины – это, по мнению Гавронского, те актуальные полагания мысли, посредством которых мысль воплощается в бытии.

Список литературы

Кант И. Семь небольших заметок (1788–1791 годы) / Пер. с нем. А.И. Троцака, под ред. И.Д. Копцева // Кантовский сборник. 2012. № 3. С. 66–73.

Кант И. Об одном открытии, после которого всякая новая критика чистого разума становится излишней ввиду наличия прежней (Против Эберхарда) // Трактаты. Рецензии. Письма (впервые изданные в «Кантовском сборнике») / Под. ред. Л.А. Калинникова. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2009. С. 38–108.

Кант И. Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 1 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М.: Наука, 2006. 1081 с.

Кант И. Критика чистого разума: в 2 ч. Ч. 2 // Сочинения на немецком и русском языках. Т. 2. М.: Наука, 2006. 935 с.

Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 63–106.

Кантор Г. О различных точках зрения на актуально бесконечное // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 262–268.

Кантор Г. К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 268–325.

Кантор Г. К обоснованию учения о трансфинитных множествах // Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. С. 173–245.

Коген Г. Теория опыта Канта / Пер. с нем. В.Н. Белова. М.: Академический Проект, 2012. 618 с.

Наторп П. Кант и Марбургская школа // Избранные работы / Сост. В.А. Куренной. М.: Территория будущего, 2006. С. 119–145.

---

[153] В схожем смысле Наторп пишет: «Метод бесконечно малых, таким образом, не является просто сокращённым методом счета и вычислений, который как бы случайно применяется к иным данным, “реальным” объектам, но является методом, который вообще впервые обосновывает нечто, что можно считать и с чем можно производить вычисления». См.: *Natorp P.* Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig, 1910. S. 223.

[154] О применимости гипервещественных чисел см.: *Bottazzi E., Kanovei V., Katz M., Mormann T., Sherry D.* On mathematical realism and the applicability of hyperreals // Mathematical Studies. 2019. No. 51 (2). P. 200–224. В этой статье восхваляется неокантианский (в частности, кассиреровский) подход к проблеме применимости, поскольку «он позволяет нам преодолеть границы между математикой и естественными науками, которые в эпоху всё более математизированной науки становятся всё более искусственными и устаревшими». Ibid. P. 205. В квантовой физике, например, использование бесконечно малых может быть уместным, потому что в этом случае это делает «физически неуместным буквальное прочтение математического определения производной в терминах пределов, когда Δx стремится к нулю, поскольку попытка вычислить производную для приращений ниже шкалы Планка привела бы к физически бессмысленным результатам. Скорее, такое частное, как $\Delta y/\Delta x$, необходимо брать в определённом диапазоне или на подходящем уровне». См.: *Fletcher P., Hrbacek K., Kanovei, V., Katz, M., Lobry C., Sanders S.* Approaches to analysis with infinitesimals following Robinson, Nelson, and others // Real Analysis Exchange. 2017. No. 42 (2). P. 193–252. В этой связи интерпретация Когеном принципа антиципации восприятия была соотнесена с квантовой механикой. См.: *Kauark-Leite P.* The Transcendental Role of the Principle of Anticipations of Perception in Quantum Mechanics // Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics / Ed. by M. Bitbol, P. Kerszberg and J. Petitot. Cham, 2009. P. 203–213.

Bell J. The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics. Cham: Springer, 2019. 313 p.

Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics / Ed. by M. Bitbol, P. Kerszberg and J. Petitot. Cham: Springer, 2009. 544 p.

Bos H. Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus // Archive for the History of Exact Sciences. 1974. No. 14. P. 1–90.

Bottazzi E., Kanovei V., Katz M., Mormann T., Sherry D. On mathematical realism and the applicability of hyperreals // Mathematical Studies. 2019. No. 51 (2). P. 200–224.

Boyer C. The History of the Calculus and its Conceptual Development. New York: Dover, 1949. 346 p.

Cantor G. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig: B.G. Teubner, 1883. 47 S.

Cantor G. Rezension von: Cohen H.: Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik // Deutsche Literaturzeitung. 23. Feb. 1884. No. 5. S. 266–268.

Cantor G. Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Aktuelle Unendliche // Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. 1886. No. 88. S. 224–233.

Cantor G. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten // Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. 1887. No. 91. S. 81–125.

Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hrsg. von E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. 486 S.

Cassirer E. Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen // Gesammelte Werke. Bd. 1. Hamburg, 1998.

Cassirer E. Substanzbegriff und Funktionsbegriff: Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik // Gesammelte Werke. Bd. 6. Hamburg, 2000.

Cohen H. Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik. Berlin: Dümmler, 1883. 162 S.

Cohen H. Einleitung mit kritischem Nachtrag zur Geschichte des Materialismus von F.A. Lange // Cohen H. Werke. Vol. 5. 3rd Edition. Reedited by H. Holzhey. Hildesheim: Olms. S. 5–125.

Cohen H. Kants Begründung der Ethik. Berlin: F. Dümmlers, 1877. 328 S.

Cohen H. Kants Theorie der Erfahrung. 2nd Edition. Berlin: Dümmler, 1885. 616 S.

Cohen H. Logik der reinen Erkenntnis. System der Philosophie. T. 1. 1st Edition. Berlin, 1902. 520 S.

Dauben J. Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press, 1979. 404 p.

Dauben J. Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1995. 580 p.

Edel G. Von der Vernunftkritik zur Erkenntnislogik. Die Entwicklung der theoretischen Philosophie Hermann Cohens. Freiburg, München: Alber, 1988. 545 S.

Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua / Ed. by P. Ehrlich. Dordrecht: Springer, 1994. 288 p.

Ehrlich P. The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes // Archive for History of Exact Sciences. 2006. No. 60. P. 1–121.

From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics. Vol. II / Ed. by W.B. Ewald. Oxford, New York: Clarendon Press, Oxford University Press, 2007. 1340 p.

Ferrari M. Dimitrij Gawronsky und Ernst Cassirer: Zur Geschichte der Marburger Schule zwischen Deutschland und Russland // Gegenstandsbestimmung und Selbstgestaltung. Transzendentalphilosophie im Anschluss an Werner Flach / Ed. by Ch. Krijnen, K. Zeidler. Würzburg: Königshausen & Neumann, 2011. S. 89–106.

Fisher G. Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum // Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua / Ed. by P. Ehrlich. Dordrecht: Springer, 1994. P. 107–145.

Fletcher P., Hrbacek K., Kanovei V., Katz M., Lobry C., Sanders S. Approaches to analysis with infinitesimals following Robinson, Nelson, and others // Real Analysis Exchange 2017. Vol. 42. No. 2. P. 193–252.

Fraenkel A.A. Abstract Set Theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1953. 479 p.

Fraenkel A.A. Recollections of a Jewish Mathematician in Germany. Basel: Birkhäuser Cham, 2016. 234 p.

Frege G. Rezension von: H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte // Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. 1885. No. 87. S. 324–329.

Gawronsky D. Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen. Marburg, 1910. 119 S.

Giovanelli M. Reality and Negation. Kant's Principle of Anticipations of Perception. Dordrecht: Springer, 2011. 252 p.

Giovanelli M. Hermann Cohen's Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book // Studies in History and Philosophy of Science. 2016. No. 58. P. 9–23.

González P.M. Estudos Neokantianos. San Pablo, 2011. 322 p.

Holzhey H. Cohen und Natorp, 2 vol. Basel, Stuttgart: Schwabe, 1986.

Kanovei V., Katz K., Katz M., Mormann T. What makes a theory of infinitesimals useful? A view by Klein and Fraenkel // Journal of Humanistic Mathematics. 2018. No. 8 (1). P. 108–119.

Kant and Neo-Kantianism. Kant Yearbook. 2020 No. 12 / Ed. by D. Heidemann. Boston, Berlin: De Gruyter. 171 p.

Kant I. Gesammelte Schriften Hrsg.: Bd. 1–22 Preussische Akademie der Wissenschaften, Bd. 23 Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, ab Bd. 24 Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin, 1900 ff.

Kauark-Leite P. The Transcendental Role of the Principle of Anticipations of Perception in Quantum Mechanics // Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics / Ed. by M. Bitbol, P. Kerszberg, and J. Petitot. Cham: Springer, 2009. P. 203–213.

Kerry B. Ueber G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen, in: Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie. 1885. No. 9. S. 191–232.

Meschkowski H. Aus den Briefbüchern Georg Cantor // Archive for History of Exact Sciences. 1965. No. 2. S. 503–519.

Moore M. A Cantorian Argument Against Infinitesimals // Synthese. 2002. No. 133. P. 305–330.

Mormann T., Katz M. Infinitesimals as an issue of neo-Kantian philosophy of science // Hopos: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science. 2013. No. 3 (2). P. 236–280.

Mormann T. Zur Mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger Neukantianismus // Damböck C. Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen. Cham: Springer, 2018. S. 101–134.

Moynahan G.B. The Challenge of Psychology in the Development of Cohen's System of Philosophy and the Marburg School Project // Damböck C. Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen. Cham: Springer, 2018. S. 41–76.

Natorp P. Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig: Teubner, 1910. 416 S.

Natorp P. Kant und die Marburger Schule // Kant-Studien. 1912. No. 17. S. 193–221.

Natorp P. Zu Cohens Logik // Holzhey H. Cohen und Natorp. Vol. 2. Basel, Stuttgart: Schwabe, 1986. S. 43–78.

Peiffer-Reuter R. L'infini relatif chez Veronese et Natorp // La mathématique nonstandard / Ed. by H. Barreau, J. Harthong. Paris: Éd. du CNRS, 1989. P. 117–142.

Petitot J. Esthétique transcendantale et physique mathématique / Neukantianismus. Perspektiven und Probleme / Ed. by H. Holzhey, E.-W. Orth. Würzburg: Königshausen und Neumann, 1994. P. 185–213.

Pollok K. The "Transcendental Method". On the Reception of the Critique of Pure Reason in Neo-Kantianism // The Cambridge Companion to Kant's Critique of Pure Reason / Ed. by P. Guyer. CUP, 2010. P. 346–379.

Proietti C. Natural Numbers and Infinitesimals: A Discussion between Benno Kerry and Georg Cantor // History and Philosophy of Logic. 2008. No. 29 (4). P. 343–359.

Robinson A. Non-standard Analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966. 293 p.

Robinson A. Concerning Progress // The Philosophy of Mathematics. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. 1975. No. 80. P. 41–52.

Russell B. The Principles of Mathematics. Cambridge: CUP, 1903. 534 p.

Schulthess P. Introduction to: Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte // Cohen H. Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Hildesheim, Zürich, New York, 1984. S. 7–46.

Veit B. Hermann Cohens Infinitesimal-Logik. Dissertation. Universität Würzburg, 2017. 175 S.

Veronese G. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica. Padova, Tipografia del Seminario, 1891. 630 p.

Veronese G. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von A. Schepp, Leipzig: Teubner, 1894. 710 S.

Dimitry Gawronsky: Reality and Actual Infinitesimals

Hernán Pringe – Professor, PhD. Institute of Philosophy, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Universidad de Buenos Aires / Diego Portales University. Viamonte 430 Str., Buenos Aires, Argentina; e-mail: hpringe@gmail.com

The aim of this paper is to analyze Dimitry Gawronsky's doctrine of actual infinitesimals. I examine the peculiar connection that his critical idealism establishes between transcendental philosophy and mathematics. In particular, I reconstruct the relationship between Gawronsky's differentials, Cantor's transfinite numbers, Veronese's trans-Archimedean numbers and Robinson's hyperreal numbers. I argue that by means of his doctrine of actual infinitesimals, Gawronsky aims to provide an interpretation of calculus that eliminates any alleged given element in knowledge. The author emphasizes not the mathematical, but the transcendental or metaphysical aspect of Gavronsky's teaching. It follows from Gavronsky's doctrine that infinitesimals are the key to a correct philosophical explanation of the relationship between thinking and being: mathematics, and differential calculus in particular, turns out to be the means by which pure thought constructs being. Thus, we are talking about the conception of transcendental mathematics, which solves the problem of the applicability of mathematics to nature. Thus, nature is understood as a product of thought, created in accordance with the infinitesimal method: since thought creates natural objects in accordance with mathematical methods, the latter have the necessary reliability in relation to the former. The relevance of infinitesimals turns out to be Gavronsky's relevance of pure thought in the generation of being, and the first relevant product of pure thought is the reality of being.

Keywords: infinitesimals, differential calculus, Neo-Kantianism, Dimitry Gawronsky, Immanuel Kant, Marburg school, Hermann Cohen, Paul Natorp, transcendental philosophy

For citation: Pringe, H. Dmitrij Gavronskij: real'nost' i aktual'no beskonechno malyi [Dimitry Gawronsky: Reality and Actual Infinitesimals], *Otechestvennaya filosofiya* [National Philosophy], 2024, Vol. 2, No. 2, pp. 32–61. (In Russian)

References

Bell, J. *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*. Cham: Springer, 2019. 313 p.

Bos, H. Differentials, higher order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for the History of Exact Sciences*, 1974, No. 14, pp. 1–90.

Bottazzi, E., Kanovei, V., Katz, M., Mormann, T. and Sherry, D. On mathematical realism and the applicability of hyperreals, *Mathematical Studies*, 2019, No. 51 (2), pp. 200–224.

Boyer, C. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover, 1949. 346 p.

Cantor, G. *Briefe*. Ed. by H. Meschkowski, W. Nilson. Berlin, 1991. 535 S.

Cantor, G. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hrsg. von Ernest Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin, 1932. 486 S.

Cantor, G. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: B.G. Teubner, 1883. 47 S. Cantor, G. K ucheniyu o transfinitnom [Communications on the Theory of the Transfinite], in: *Works on Set Theory*, Moscow: Nauka Publ., 1985, pp. 268–325. (In Russian)

Cantor, G. K obosnovaniyu ucheniya o transfinitnykh mnozhestvakh [Contributions to the Justification of Transfinite Set Theory], in: *Works on Set Theory*, Moscow: Nauka Publ., 1985, pp. 173–245. (In Russian)

Cantor, G. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 1887, No. 91, pp. 81–125.

Cantor, G. Osnovy obshchego ucheniya o mnogoobraziyakh [Foundations of a General Theory of Manifolds], in: *Works on Set Theory*, Moscow: Nauka Publ., 1985, pp. 63–106. (In Russian)

Cantor, G. O razlichnykh tochkakh zreniya na aktual'no beskonechnoe [Concerning Various Perspectives on the Actual Infinite], in: *Works on Set Theory*, Moscow: Nauka Publ., 1985, pp. 262–268. (In Russian)

Cantor, G. Rezension von: Hermann Cohen: Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik, *Deutsche Literaturzeitung*, 23. Feb. 1884. No. 5, S. 266–268.

Cantor, G. Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das Aktuelle Unendliche, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 1886. No 88, S. 224–233.

Cassirer, E. Leibniz' System in seinen wissenschaftlichen Grundlagen, in: *Gesammelte Werke*, Bd. 1. Hamburg, 1998.

Cassirer, E. Substanzbegriff und Funktionsbegriff: Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik, in: *Gesammelte Werke*, Bd. 6. Hamburg, 2000.

Cohen, H. *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte: ein Kapitel zur Grundlegung der Erkenntnisskritik*. Berlin, 1883. 162 S.

Cohen, H. Einleitung mit kritischem Nachtrag zur Geschichte des Materialismus von F.A. Lange, in: Cohen, H. Einleitung mit kritischem Nachtrag zur Geschichte des Materialismus von F.A. Lange, in: Cohen H. *Werke. Vol. 5. 3rd Edition.* Reedited by H. Holzhey. Hildesheim: Olms. S. 5–125.

Cohen, H. *Kants Begründung der Ethik*. Berlin: F. Dümmlers, 1877. 328 S.

Cohen, H. *Kants Theorie der Erfahrung*, 2nd Edition. Berlin: F. Dümmlers, 1885. 616 S.

Cohen, H. *Logik der reinen Erkenntnis. System der Philosophie*, T. 1, 1st Edition. Berlin, 1902. 520 S.

Cohen, H. *Teoriya opyta Kanta* [Kant's Theory of Experience], per. s nem. V.N. Belova. Moscow: Akademicheskii Proekt Publ., 2012. 618 p. (In Russian)

Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics. Ed. by M. Bitbol, P. Kerszberg, J. Petitot, Cham: Springer Publ., 2009. 544 p.

Dauben, J. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press, 1979. 404 p.

Dauben, J. *Abraham Robinson. The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1995. 580 p.

Edel, G. *Von der Vernunftkritik zur Erkenntnislogik. Die Entwicklung der theoretischen Philosophie Hermann Cohens*. Freiburg, München: Alber, 1988. 545 S.

Ehrlich, P. The Rise of non-Archimedean mathematics and the roots of a misconception I: The emergence of non-Archimedean systems of magnitudes, *Archive for History of Exact Sciences,* 2006, No. 60, pp. 1–121.

From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, *vol II*. Ed. by W.B. Ewald. Oxford, New York: Clarendon Press, Oxford University Press, 2007. 1340 p.

Ferrari, M. Dimitrij Gawronsky und Ernst Cassirer: Zur Geschichte der Marburger Schule zwischen Deutschland und Russland, in: *Gegenstandsbestimmung und Selbstgestaltung. Transzendentalphilosophie im Anschluss an Werner Flach*. Ed. by Ch. Krijnen, K. Zeidler. Würzburg: Königshausen & Neumann, 2011, pp. 89–106.

Fisher, G. Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum, in: *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*. Ed. by P. Ehrlich. Dordrecht: Springer, 1994, pp. 107–145.

Fletcher, P., Hrbacek, K., Kanovei, V., Katz, M., Lobry, C., Sanders, S. Approaches to analysis with infinitesimals following Robinson, Nelson, and others, *Real Analysis Exchange* 2017, vol. 42, No. 2, pp. 193–252.

Fraenkel, A.A. *Abstract Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1953. 479 p.

Fraenkel, A.A. *Recollections of a Jewish Mathematician in Germany*. Basel: Birkhäuser Cham, 2016. 234 p.

Frege, G. Rezension von: H. Cohen, Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritikm*, 1885, No. 87, S. 324–329.

Gawronsky, D. *Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen*. Marburg, 1910. 119 S.

Giovanelli, M. *Reality and Negation. Kant's Principle of Anticipations of Perception*. Dordrecht: Springer, 2011. 252 p.

Giovanelli, M. Hermann Cohen's Das Princip der Infinitesimal-Methode: The history of an unsuccessful book, *Studies in History and Philosophy of Science*, 2016, No. 58, pp. 9–23.

González P.M., *Estudos Neokantianos*, San Pablo, 2011. 322 p.

Holzhey, H. *Cohen und Natorp*, 2 vol. Basel, Stuttgart: Schwabe, 1986.

Kant and Neo-Kantianism. Ed. by D. Heidemann, *Kant Yearbook*, 2020 No. 12, Boston, Berlin: De Gruyter. 171 p.

Kant, I. Ob odnom otkrytii, posle kotorogo vsyakaya novaya kritika chistogo razuma stanovitsya izlishnei vvidu nalichiya prezhnei (Protiv Eberkharda) [On a Discovery According to Which Any New Critique of Pure Reason Has Been Made Superfluous by an Earlier One (Against Eberhard)], in: *Traktaty. Retsenzii. Pis'ma (vpervye izdannye v "Kantovskom sbornike")* [Treatises. Reviews. Letters (First Published in "Kantian Journal")], pod. red. L.A. Kalinnikova, Kaliningrad: RSU im. Kanta Publ., 2009, pp. 38–108. (In Russian)

Kant, I. *Gesammelte Schriften,* Hrsg.: Bd. 1–22 Preussische Akademie der Wissenschaften, Bd. 23 Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, ab Bd. 24 Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin, 1900 ff.

Kant, I. Sem' nebol'shikh zametok (1788–1791 gody) [Seven Small Notes (1788–1791)], per. s nem. A.I. Trotsaka, pod red. I.D. Koptseva, *Kantian Journal*, 2012, Vol. 3, pp. 66–73. (In Russian)

Kant, I. Kritika chistogo razuma: v 2 ch. Ch. 1 [The Critique of Pure Reason in 2 parts. Part 1], in: *Sochineniya na nemetskom i russkom yazykakh. T. 2* [Collected Works in Russian and German. Vol. 2]. Moscow: Nauka Publ., 2006. 1081 p. (In Russian)

Kant, I. Kritika chistogo razuma: v 2 ch. Ch. 2 [The Critique of Pure Reason in 2 parts. Part 2], in: *Sochineniya na nemetskom i russkom yazykakh. T. 2* [Collected Works in Russian and German. Vol. 2]. Moscow: Nauka Publ., 2006. 935 p. (In Russian)

Kanovei, V., Katz, K., Katz, M., Mormann, T. What makes a theory of infinitesimals useful? A view by Klein and Fraenkel, *Journal of Humanistic Mathematics*, 2018, No. 8 (1), pp. 108–119.

Kauark-Leite, P. The Transcendental Role of the Principle of Anticipations of Perception in Quantum Mechanics, in: *Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics*. Ed. by M. Bitbol, P. Kerszberg, and J. Petitot. Cham: Springer Publ., 2009, pp. 203–213.

Kerry, B. Ueber G. Cantors Mannigfaltigkeitsuntersuchungen, *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 1885, No. 9, S. 191–232.

Meschkowski, H. Aus den Briefbüchern Georg Cantor, *Archive for History of Exact Sciences*, 1965, No. 2, pp. 503–519.

Moore, M. A Cantorian Argument Against Infinitesimals, *Synthese*, 2002, No. 133, pp. 305–330.

Mormann, T., Katz, M. Infinitesimals as an issue of neo-Kantian philosophy of science, *Hopos: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science*, 2013, No. 3 (2), pp. 236–280.

Mormann, T. Zur Mathematischen Wissenschaftsphilosophie des Marburger Neukantianismus, in: Damböck, C. *Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen*. Cham: Springer, 2018, S. 101–134.

Moynahan, G.B. The Challenge of Psychology in the Development of Cohen's System of Philosophy and the Marburg School Project, in: Damböck, C. *Philosophie und Wissenschaft bei Hermann Cohen*. Cham: Springer, 2018, S. 41–76.

Natorp P. *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*. Leipzig: Teubner, 1910. 416 S.

Natorp, P. Kant i Marburgskaya shkola [Kant and Marburg School], in: *Selected Works*, sost. V.A. Kurennoi. Moscow: Territoriya budushchego Publ. House, 2006, pp. 119–145. (In Russian)

Natorp P. Kant und die Marburger Schule, *Kant-Studien*, 1912, No. 17, S. 193–221.

Natorp, P. Zu Cohens Logik, in: Holzhey, H.: *Cohen und Natorp, vol. 2*. Basel, Stuttgart: Schwabe, 1986, S. 43–78.

Peiffer-Reuter, R. L'infini relatif chez Veronese et Natorp, in: *La mathématique nonstandard.* Ed. by H. Barreau, J. Harthong. Paris: Éd. du CNRS, 1989, pp. 117–142.

Petitot, J. Esthétique transcendantale et physique mathématique, in: *Neukantianismus. Perspektiven und Probleme*. Ed. by H. Holzhey, E.-W. Orth. Würzburg: Königshausen und Neumann, 1994, S. 185–213.

Pollok, K. The "Transcendental Method". On the Reception of the Critique of Pure Reason in Neo-Kantianism, in: *The Cambridge Companion to Kant's Critique of Pure Reason*. Ed. by P. Guyer. CUP, 2010, pp. 346–379.

Proietti C. Natural Numbers and Infinitesimals: A Discussion between Benno Kerry and Georg Cantor, *History and Philosophy of Logic*, 2008, No. 29 (4), pp. 343–359.

Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua. Ed. by P. Ehrlich. Dordrecht: Springer, 1994. 288 p.

Robinson, A. *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966, 293 p.

Robinson, A. Concerning Progress, *The Philosophy of Mathematics. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 1975, No. 80, pp. 41–52.

Russell, B. The Principles of Mathematics, Cambridge: CUP, 1903. 534 p.

Schulthess, P. Introduction to: Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte, in: Cohen, H. *Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*. Hildesheim, Zürich, New York, 1984, pp. 7–46.

Veit, B. *Hermann Cohens Infinitesimal-Logik*, Dissertation, Universität Würzburg, 2017, 175 S.

Veronese, G. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica*. Padova, Tipografia del Seminario, 1891, 630 p.

Veronese, G. *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*. Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von A. Schepp, Leipzig: Teubner, 1894, 710 S.