Revista de Educación Matemática
Volumen 38, N° 1, páginas 10 – 21
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

*Artículo de Matemática*

# SOBRE FUNCIONES INCIERTAS

Sebastián Freyre y Juan Sabia

Resumen. En este trabajo, analizamos algunas propiedades básicas de las funciones reales $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación polinomial $X^2+1=0$ (es decir, tales que $f^2+id_{\mathbb{R}}=0$, donde $f^2=f\circ f$). Probamos su existencia, damos una caracterización de tales funciones y mostramos un ejemplo concreto del cual pueden derivarse infinitos ejemplos más. A continuación discutimos algunos aspectos sobre su continuidad. Finalmente, un mecanismo clásico del álgebra lineal nos permite probar que, para cualquier polinomio $P\in\mathbb{Q}[X]$, existen funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación polinomial $P=0$.

Abstract. In this paper, we analize some basic properties of the real functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfy the polynomial equation $X^2+1=0$ (that is, such that $f^2+id_{\mathbb{R}}=0$, where $f^2=f\circ f$). We prove their existence, give a characterization of such functions and show a concrete example from which infinite other examples can be derived. Next, we discuss some issues about their continuity. Finally, a classic linear algebra mechanism allows us to prove that, for every polynomial $P\in\mathbb{Q}[X]$, there exist functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that satisfy the polynomial equation $P=0$.

## §1. Introducción

Hace tiempo, en una clase de Álgebra Lineal, se mostró que una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el plano cumple que $f\circ f=-id_{\mathbb{R}^2}$ y se planteó como ejercicio probar que ninguna transformación lineal real $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ puede cumplir que $f\circ f=-id_{\mathbb{R}^3}$ (la justificación de este hecho, que no es fundamental para seguir leyendo este artículo, se basa en que $f$ tiene un polinomio característico real de grado $3$, y por lo tanto, tiene un autovalor real; si existiera tal $f$, este autovalor real al cuadrado daría $-1$, lo que es absurdo). La idea de que haya elementos en un conjunto que al cuadrado den menos la identidad nos remite inmediatamente a la unidad imaginaria $i$ y a los números complejos.

*Palabras clave*: funciones reales de una variable, continuidad, polinomios, espacios vectoriales.
*Keywords*: real univariate functions, continuity, polynomials, vector spaces.

Al finalizar la clase, un alumno se acercó al docente y le preguntó: "¿Existirá una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$?"[1] Muchos años después, recordando esa charla, nos pareció que esta pregunta podía servir de disparador para pensar un poco de matemática básica, cosa que siempre nos gusta, y también para mostrar el camino que fuimos transitando a partir de allí (aunque, evidentemente, no es el único camino posible). El resultado final, por ahora, es lo que escribimos en este trabajo. Esencialmente, decidimos obviar al principio el álgebra lineal (ya que las únicas transformaciones $\mathbb{R}$-lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son múltiplos de la identidad) e intentar encontrar propiedades básicas que deben cumplir estas funciones, lo que nos fue dando un marco para poder sospechar su existencia y construirlas en forma teórica. Una vez dilucidado el tema de la existencia, tratamos de caracterizarlas y luego, de entender algunas de sus propiedades. Por ejemplo, nos enfocamos en el análisis de la continuidad. Finalmente, nos abocamos a las soluciones que propone el álgebra lineal y a generalizar el problema.

Se podría pensar que resolver este problema es más fácil en $\mathbb{R}$ que en dimensiones mayores. Sin embargo, si conseguimos una tal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ también satisface lo pedido, con lo cual, por ejemplo, podremos encontrar $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F^2(x) = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ (que obviamente no será $\mathbb{R}$-lineal).

Para facilitar la comunicación, pongámosle un nombre a las funciones que estamos buscando:

**Notación 1.1.** *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice* **incierta** *si cumple que*

$$f \circ f(x) = -x \; \forall \; x \in \mathbb{R}$$

(*o, lo que es lo mismo, si $f^2 + id_{\mathbb{R}} = 0$*).

Si el lector llegó hasta acá y nos cree, ya sabe que las funciones inciertas existen y hasta le puede sonar mal el nombre. Sin embargo, nos gustó mantener la incerteza original hasta el final (después de todo, ¿qué tiene de imaginario el número $i$ con el que sabemos operar y de hecho lo usamos para cálculos de lo más "reales" y concretos?). Le proponemos al lector entonces un ejercicio: que se detenga aquí y se ponga a pensar por qué estamos tan seguros de la existencia de funciones inciertas, que encuentre alguna de estas funciones o que deduzca por qué razón deben existir. Probablemente, si puede contestar o avanzar en alguna de estas direcciones, aprenderá mucho más que simplemente leyendo el recorrido que nosotros hicimos.

Si, por el contrario, el lector decide continuar con la lectura, una buena política sería frenar en cada lugar en que haya un enunciado y tratar de pensarlo o demostrarlo o buscarle contraejemplos, y cada vez que aparezca un nombre o

[1] El alumno era Sebastián Freyre y el docente, Juan Sabia

un tema que no conozca, intentar averiguar de qué se trata. Esta es una forma de aprendizaje que a nosotros nos sirvió y nos sigue sirviendo a lo largo de los años.

## §2. Algunas propiedades inciertas

Si $f$ es una función incierta, necesariamente cumple las siguientes propiedades, de muy fácil demostración:

- $f$ es impar (es decir $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$): $f(-x) = f(f^2(x)) = f^2(f(x)) = -f(x)$. En particular, resulta que $f(0) = 0$.
- $f$ es biyectiva pues su inversa es $-f = -id_{\mathbb{R}} \circ f$ ya que la composición en los dos sentidos da la identidad: $-f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ (-id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}$ y $f \circ (-f) = f \circ (-id_{\mathbb{R}}) \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ f \circ f = -id_{\mathbb{R}} \circ (-id_{\mathbb{R}}) = id_{\mathbb{R}}$.
- Si $f(a) = a$, $-a = f^2(a) = f(a) = a$, con lo cual $a = 0$. También, si $f(a) = -a$, $-a = f^2(a) = f(-a)$ y $-a = 0 = a$.
- Por lo anterior, si $a \neq 0$, el conjunto $\{f^i(a) \;/\; i \in \mathbb{N}_0\}$ (llamado la órbita de $a$ por $f$) consta de cuatro elementos distintos: $a$, $f(a)$, $f^2(a) = -a$ y $f^3(a) = f(-a)$ (notar que $f^4(a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$).
- El conjunto de conjuntos $\{\{a, f(a), -a, f(-a)\} \;/\; a \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$ que consta de conjuntos de cuatro elementos y del conjunto $\{0\}$ (recordemos que decir que un conjunto de conjuntos es una partición de $A$ significa que ninguno es vacío, que la unión de todos da $A$ y que los conjuntos son disjuntos dos a dos):

  Lo único que falta ver para que sea una partición es que los conjuntos sean disjuntos dos a dos o, lo que es lo mismo, que si hay un elemento en la intersección de dos de ellos, los conjuntos deben ser iguales.

  Supongamos que $\{a, f(a), -a, f(-a)\} \cap \{c, f(c), -c, f(-c)\} \neq \emptyset$. Esto quiere decir que $f^i(a) = f^j(c)$ para algunos $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$, pero como $f^4 = id_{\mathbb{R}}$, resulta que

$$\begin{aligned}
&\{a, f(a), -a, f(-a)\} = \{f^i(a), f^{i+1}(a), f^{i+2}(a), f^{i+3}(a)\} = \\
&= \{f^j(c), f^{j+1}(c), f^{j+2}(c), f^{j+3}(c)\} = \{c, f(c), -c, f(-c)\}.
\end{aligned}$$

Con estas pocas propiedades básicas, ya estamos en condiciones de comenzar a construir funciones inciertas:

**Teorema 2.1.** *Sea $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ una familia de pares ordenados de $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ tales que $\{a_i, b_i\}_{i \in I}$ es una colección de subconjuntos de exactamente dos elementos de $\mathbb{R}_{>0}$ que son disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{i \in I} \{a_i, b_i\} = \mathbb{R}_{>0}$. Entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

*definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ b_i & \text{si } x = a_i \text{ con } i \in I \\ -a_i & \text{si } x = b_i \text{ con } i \in I \\ -b_i & \text{si } x = -a_i \text{ con } i \in I \\ a_i & \text{si } x = -b_i \text{ con } i \in I \end{cases}$$

*es incierta. Más aún, cualquier función incierta puede construirse de esta forma.*

*Demostración.* Las condiciones dadas sobre los elementos $a_i$ y $b_i$ nos aseguran que cada real positivo forma parte de un par ordenado (ya que la unión da todo $\mathbb{R}_{>0}$) y solo de uno (ya que los conjuntos de dos elementos son disjuntos dos a dos). Esto nos indica que $f$ está bien definida sobre los reales positivos (está definida y la definición es única). Por la misma razón, la función está bien definida para los negativos. Falta ver que $f^2(x) = -x$ para todo número real $x$. Esta prueba se puede hacer caso por caso:

$$\begin{aligned} f^2(0) &= f(f(0)) = f(0) = 0 \\ f^2(a_i) &= f(f(a_i)) = f(b_i) = -a_i \\ f^2(b_i) &= f(f(b_i)) = f(-a_i) = -b_i \\ f^2(-a_i) &= f(f(-a_i)) = f(-b_i) = a_i \\ f^2(-b_i) &= f(f(-b_i)) = f(a_i) = b_i \end{aligned}$$

Para probar la recíproca, sea $f$ una función incierta y, para cada $a \neq 0$ consideremos la órbita de $a$, $\{a, f(a), -a, f(-a)\}$. Entonces necesariamente es verdadera una y sólo una de las siguientes condiciones:

- $a$ y $f(a)$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(a, f(a))$
- $f(a)$ y $-a$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(f(a), -a)$
- $-a$ y $f(-a)$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(-a, f(-a))$
- $f(-a)$ y $a$ son positivos, en cuyo caso tomamos el par ordenado $(f(-a), a)$

Si recorremos todas las órbitas posibles, y elegimos el par ordenado indicado en cada órbita, resulta que la familia de pares ordenados elegidos cumple lo pedido. □

## §3. Las funciones inciertas existen

En el apartado anterior, vimos que dada una función incierta, le podemos asociar una familia de pares ordenados de reales positivos que cumple ciertas condiciones y que, dada una tal familia, podemos construir una función incierta. Pero, ¿existirá tal familia de pares ordenados?

Para probar su existencia, podríamos usar de la teoría de cardinalidad de Cantor que nos asegura que el siguiente resultado es cierto, pero para hacer el trabajo lo más autocontenido posible, vamos a hacer una demostración directa:

**Teorema 3.1.** *Existe una biyección entre* $\{0,1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ *y* $\mathbb{R}_{>0}$.

*Demostración.* Vamos a definir una biyección que mande

$$\begin{aligned}
\{0\} \times (0;1] &\to (0;1]\\
\{1\} \times (0;1] &\to (1;2]\\
\{0\} \times (1;2] &\to (2;3]\\
\{1\} \times (1;2] &\to (3;4]\\
\{0\} \times (2;3] &\to (4;5]\\
\{1\} \times (2;3] &\to (5;6]\\
\{0\} \times (3;4] &\to (6;7]\\
\{1\} \times (3;4] &\to (7;8]
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. Las biyecciones intervalo a intervalo pueden ser lineales.

La función que formalmente definimos como biyección , teniendo en cuenta que $[x]$ denota la función parte entera, es

$$\varphi(i,x) = \begin{cases} x + [x] + i & \text{si } x \notin \mathbb{N} \\ 2x - 1 + i & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Esta función $\varphi$ cumple las condiciones anteriores (es decir, manda biyectivamente los intervalos en los intervalos) y por lo tanto es una biyección de $\{0,1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ en $\mathbb{R}_{>0}$.

Si a algún lector no le convence nuestro argumento, puede verificar que la función inversa de $\varphi$ es

$$\psi(x) = \begin{cases} (1, \frac{x}{2}) & \text{si } x \in \mathbb{N} \text{ es par} \\ (0, \frac{x+1}{2}) & \text{si } x \in \mathbb{N} \text{ es impar} \\ (1, x - 1 - \frac{[x-1]}{2}) & \text{si } x \notin \mathbb{N}, [x] \text{ es impar} \\ (0, x - \frac{[x]}{2}) & \text{si } x \notin \mathbb{N}, [x] \text{ es par} \end{cases}$$

(verificación que, aunque tediosa, es directa). □

**Teorema 3.2.** *Sea* $\varphi : \{0,1\} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *una función biyectiva. Entonces la familia de pares ordenados* $\{(\varphi(0,a), \varphi(1,a))\}_{a \in \mathbb{R}_{>0}}$ *cumple las hipótesis del Teorema 2.1.*

*Demostración.* Como la función $\varphi$ es suryectiva, podemos afirmar que cualquier elemento de $\mathbb{R}_{>0}$ va a ser alguna coordenada de algún par ordenado de la familia y, por lo tanto, la unión de los conjuntos de dos elementos formados por las coordenadas darán $\mathbb{R}_{>0}$. El hecho de ser $\varphi$ inyectiva, nos asegura que ningún elemento puede aparecer en más de un par ordenado (de lo contrario habría dos elementos de $\{0,1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ con la misma imagen) por lo que los conjuntos asociados de dos elementos son disjuntos. Esto demuestra lo pedido. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 2.1, 3.1 y 3.2, tenemos probada la existencia de funciones inciertas. Más aún, notemos que cualquier función incierta puede asociarse unívocamente a una biyección $\varphi : \{0,1\} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$.

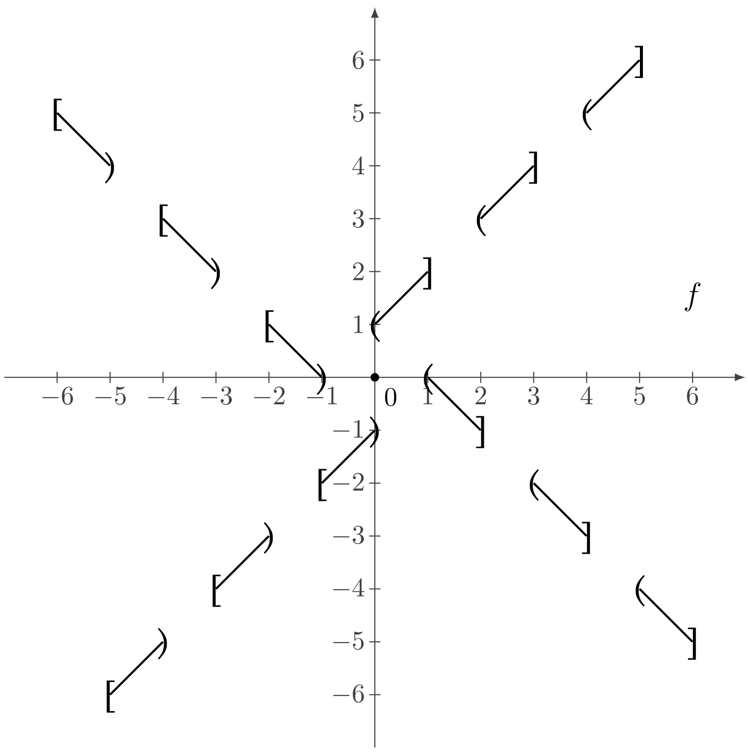
Para terminar esta sección, vamos a mostrar explícitamente una función incierta (de hecho, esta función incierta es la asociada a la biyección definida en el Teorema 3.1) :

**Ejemplo 3.3.** *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

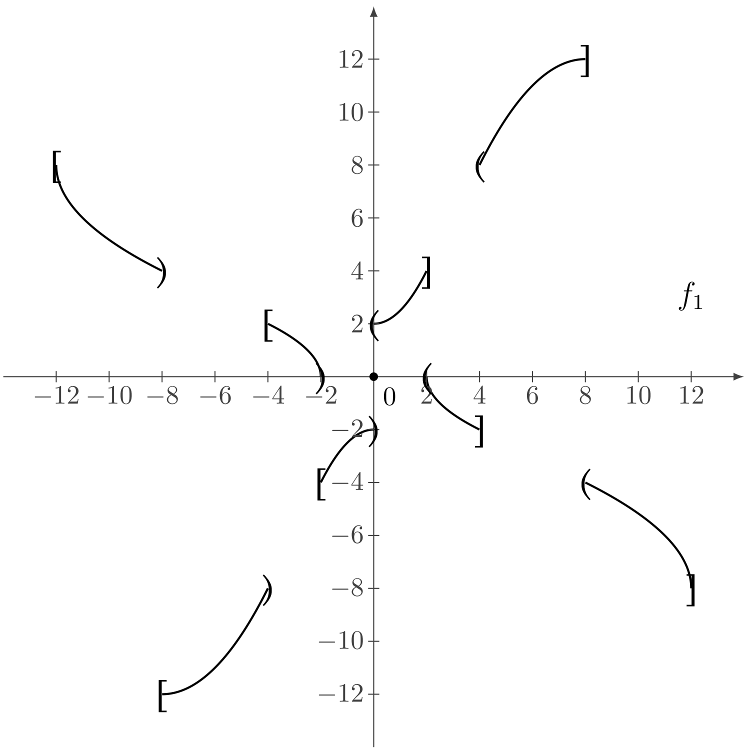
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x+1 & \text{si } 2k < x \leq 2k+1 \ (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \\ -x+1 & \text{si } 2k+1 < x \leq 2k+2 \ (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \\ x-1 & \text{si } 2k-1 \leq x < 2k \ (k \in \mathbb{Z}, k \leq 0) \\ -x-1 & \text{si } 2k-2 \leq x < 2k-1 \ (k \in \mathbb{Z}, k \leq 0) \end{cases}$$

*cumple que $f^2 = -id_R$.*

Un gráfico aproximado de $f$ sería:



Notar que hemos tomado funciones lineales como biyecciones entre intervalos, pero cualquier otra biyección que se nos ocurra va a servir. También hemos tomado intervalos de longitud $1$, pero la longitud puede ser cualquiera y ni siquiera debe estar fija para todos los intervalos:




Ya hemos probado que las funciones inciertas existen, caracterizamos cómo son en términos de conjuntos de pares ordenados de números reales asociados a una biyección de $\{0,1\} \times \mathbb{R}_{>0}$ en $\mathbb{R}_{>0}$ y dimos la definición de una función incierta en particular. Sin embargo, podemos seguir preguntándonos...

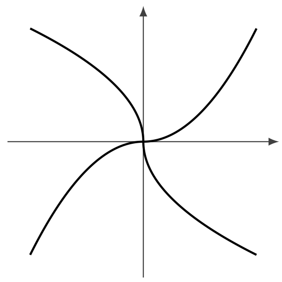
## §4. Continuidad de las funciones inciertas

Las funciones inciertas que mostramos explícitamente tienen infinitas discontinuidades. ¿Será este siempre el caso? Vayamos paso a paso, con algunas observaciones previas.

Si $f$ es incierta, entonces:

- El gráfico de $f$, Graf$(f) = \{(a, f(a)) \ / \ a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$, es invariante por la rotación antihoraria de ángulo $\frac{\pi}{2}$: Si $(a,b) \in$ Graf$(f)$, $(b,-a) \in$ Graf$(f)$, $(-a,-b) \in$ Graf$(f)$ y $(-b,a) \in$ Graf$(f)$.
- $f$ no puede ser continua en ningún intervalo que contenga al $0$. Supongamos que $f$ es continua en el intervalo $[0;a)$ con $a > 0$. Como es biyectiva, debe ser estrictamente monótona (creciente o decreciente) en $[0;a)$. Geométricamente,

la invariancia del gráfico de $f$ por la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ implicaría que, cerca del origen, el gráfico de $f$ sería del estilo:



lo que es absurdo. (Puede hacerse una demostración más formal de este hecho, pero la dejamos a cargo del lector al que no le gusten las demostraciones gráficas.)

- Si $f$ es continua en un intervalo $[a;b]$ y $x \in (a;b)$, $f$ es continua en $f(x)$:

  Como $f : [a;b] \to f([a;b])$ es continua y biyectiva, debe ser estrictamente monótona. Supongamos que es creciente (si no, tomamos $-f$ que también es incierta, y hacemos un razonamiento análogo). Resulta entonces que $f : [a;b] \to [f(a);f(b)]$ es creciente y biyectiva, por lo que resulta abierta (ya que $f$ de cualquier subintervalo abierto de $[a;b]$ es un subintervalo abierto de $[f(a);f(b)]$). Entonces, la función inversa de $f$, $f^{-1} : [f(a);f(b)] \to [a;b]$ es continua y en particular es continua en $f(x)$. Pero $f^{-1} = -f$ ya que $f$ es incierta, luego $f$ es continua en $f(x)$.

  En particular, podemos deducir que si $f$ es continua en un intervalo abierto $I$, $f$ resulta continua en el intervalo abierto $f(I)$, en $f(f(I)) = -I$ y en $f(-I)$.

- Si $f$ es continua en el intervalo abierto $I$, los intervalos $I$, $f(I)$, $-I$ y $f(-I)$ resultan disjuntos dos a dos:

  Podemos observar que $0 \notin I$ y que $0 \notin f(I)$, pues $f$ es continua en $I$ y en $f(I)$. Luego todos los elementos de $I$ tienen el mismo signo entre sí y todos los elementos de $f(I)$ también tienen el mismo signo entre sí . Si $x \in I \cap f(I)$, los elementos de $I$ y los de $f(I)$ tienen el mismo signo (el de $x$) y existe un $y \in I$ tal que $x = f(y)$. Entonces $y \in I$, $f(y) = x \in I \cap f(I)$ y $f(x) = f(f(y) = -y \in f(I)$ tienen el mismo signo, lo que es absurdo. Teniendo en cuenta que cada intervalo de la lista es $f$ aplicado al anterior, y que $f(f(-I)) = I$ se prueba fácilmente que los intervalos son disjuntos dos a dos.

- Si $f$ tiene finitas discontinuidades y es discontinua en $x$, entonces es discontinua en $f(x)$, en $-x$ y en $f(-x)$: Si $f$ fuese continua en $f(x)$, el hecho de tener finitas discontinuidades asegura que $f$ es continua en un intervalo cerrado que contiene a $f(x)$, entonces $f$ es continua en $f(f(x)) = -x$, y por el mismo razonamiento, es continua en $f(-x)$ y en $f(f(-x)) = x$ lo que contradice nuestra suposición. De la misma forma se prueba que $f$ no es continua en $-x$ ni en $f(-x)$.

Ahora estamos en condiciones de probar:

**Teorema 4.1.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es incierta, $f$ tiene infinitas discontinuidades.*

*Demostración.* Supongamos que no. Sean $a_1, \dots, a_r$ todos los valores positivos donde $f$ es discontinua. Por lo anterior $-a_1, \dots, -a_r$ serán todos los valores negativos donde $f$ es discontinua. Y necesariamente $f$ será discontinua en el $0$ (de lo contrario, sería continua en $(-a_1; a_1)$ lo que es absurdo). Por lo visto anteriormente, $\{a_1, \dots, a_r, -a_1, \dots, -a_r\}$ debe ser unión disjunta de órbitas con cuatro elementos cada una, con lo que $r = 2k$ para $k \in \mathbb{N}$. Esto implica que hay $4k + 2$ intervalos abiertos maximales donde $f$ es continua. Notar que, a cada $I$ intervalo abierto maximal donde $f$ es continua, se le asocian $f(I)$, $-I$ y $f(-I)$ abiertos maximales donde $f$ es continua y es fácil probar que, para dos intervalos maximales $I$ y $J$ donde $f$ es continua $\{I, f(I), -I, f(-I)\} = \{J, f(J), -J, f(-J)\}$ o $\{I, f(I), -I, f(-I)\} \cap \{J, f(J), -J, f(-J)\} = \emptyset$. Por lo tanto, la cantidad de abiertos maximales donde $f$ es continua debe ser múltiplo de $4$ y esto lleva a una contradicción. $\square$

Como último ejemplo para esta sección, mostramos una función incierta continua en el cero. En este caso, usamos la teoría de los cardinales de Cantor para asegurar la existencia de biyecciones entre un intervalo de $\mathbb{R}$ y un subconjunto no numerable de $\mathbb{R}^2$:

**Ejemplo 4.2.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se considera una biyección*

$$g_n : \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}\right) \to \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x > 0, y \neq 0, |(x, y)| \in \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}\right)\right\}$$

*(si $n = 1$, el intervalo considerado es $[1, +\infty)$). Sea $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x.y \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$ la función*

$$G(x) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } x = 0 \\ g_n(x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}\right) \; (n \in \mathbb{N}) \\ -g_n(x) & \text{si } -x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{1}{n-1}\right) \; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

*(Notar que $G$ resulta biyectiva y continua en el $0$.) Sea $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación en sentido antihorario de ángulo $\frac{\pi}{2}$. Entonces $f = G^{-1} \circ \rho \circ G$ es una función incierta continua en el $0$.*

## §5. Un poco de álgebra

Hasta ahora, nos ocupamos fundamentalmente de la existencia y de las condiciones de continuidad de las funciones inciertas. Ahora, vamos a comentar algunas consideraciones algebraicas sobre estas funciones. La primera pregunta que nos hicimos es si habrá alguna función incierta aditiva. Notemos que una función aditiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ resulta ser una transformación $\mathbb{Q}$-lineal. Por lo tanto, bastará definirla en una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Una idea similar a la del Teorema 2.1 nos permite contestar esta pregunta.

**Proposición 5.1.** *Sea $\{(a_i, b_i)\}_{i\in I}$ una familia de pares ordenados de $\mathbb{R}^2$ tales que $\{a_i, b_i\}_{i\in I}$ es una colección de subconjuntos de exactamente dos elementos de $\mathbb{R}$ que son disjuntos dos a dos y tales que $B = \bigcup_{i\in I}\{a_i, b_i\}$ es una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Entonces la transformación $\mathbb{Q}$-lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre $B$ como*

$$f(x) = \begin{cases} b_i & \text{si } x = a_i \text{ con } i \in I \\ -a_i & \text{si } x = b_i \text{ con } i \in I \end{cases}$$

*es incierta.*

*Demostración.* La transformación $\mathbb{Q}$-lineal $f$ existe y es única por estar definida en una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Por otra parte, $f^2(x) = -x$ para todo $x \in B$, luego $f^2 = -id_{\mathbb{R}}$. □

Para probar la existencia de la familia de pares ordenados deseada, se puede partir de una base $B$ cualquiera de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Teniendo en cuenta que el cardinal de $B$ y el cardinal de $\{0, 1\} \times B$ son iguales (propiedad cierta para todo conjunto infinito), se puede aplicar una idea similar a la del Teorema 3.2 aunque sin una biyección explícita en este caso.

Más aún, puede probarse que cualquier transformación $f$ $\mathbb{Q}$-lineal incierta proviene de esta construcción. La idea de una posible demostración, que usa herramientas un poco más sofisticadas, es la siguiente: dada $f$, se consideran los conjuntos $\{a_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathbb{R}$ que cumplen que $\{a_i\}_{i\in I} \cup \{f(a_i)\}_{i\in I}$ son conjuntos de elementos de $\mathbb{R}$ linealmente independientes. Por el lema de Zorn, estos conjuntos, ordenados por inclusión, admiten un elemento maximal y dicho elemento necesariamente resulta ser una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

**Observación 5.2.** *Las transformaciones lineales inciertas nos permiten pensar a $\mathbb{R}$ con otra estructura. Recordemos que el conjunto $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ resulta ser un cuerpo con la suma y el producto usuales de los números complejos. Si $f$ una función incierta puede probarse fácilmente que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}[i]$-espacio vectorial con la suma usual de elementos de $\mathbb{R}$ y con el producto por escalares definido por:*

$$(a + bi).r = a.r + b.f(r) \qquad (a, b \in \mathbb{Q},\ r \in \mathbb{R}).$$

*Más aún, si $\mathbb{R}$ tiene una estructura de $\mathbb{Q}[i]$-espacio vectorial, entonces $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(r) = i.r \qquad (r \in \mathbb{R})$$

*resulta ser una función incierta.*

Más en general, con herramientas básicas del álgebra lineal e ideas similares a las usadas para las funciones inciertas, puede demostrarse el siguiente resultado:

**Teorema 5.3.** *Sea* $P = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j \in \mathbb{Q}[X]$ *un polinomio mónico. Existen transformaciones $\mathbb{Q}$-lineales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $P(f) = 0$.*

*Demostración.* Sea $\{a_{i1}, \ldots, a_{in}\}_{i \in I}$ una partición de una base $B$ de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Definimos la transformación lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en los elementos de $B$, para cada $i \in I$, de la siguiente manera:

$$f(a_{ik}) = \begin{cases} a_{i(k+1)} & \text{si } k < n \\ -\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j a_{ij+1} & \text{si } k = n \end{cases}$$

Si, para cada $i \in I$, $\langle a_{i1}, \ldots, a_{in} \rangle$ denota el subespacio generado por los elementos $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ y tomamos la restricción de $f$ a este subespacio, resulta ser que la matriz de la restricción de $f$ en la base $\{a_{i1}, \ldots, a_{in}\}$ es la matriz compañera del polinomio $P$ que tiene por característico al polinomio $P$. Usando el Teorema de Hamilton-Cayley, se tiene que $P(f) : \langle a_{i1}, \ldots, a_{in} \rangle \to \langle a_{i1}, \ldots, a_{in} \rangle$ es la transformación lineal nula para todo $i \in I$. Por lo tanto, $P(f)$ es la transformación lineal nula en una base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y, por lo tanto, $P(f) = 0$. $\square$

Como en el caso de las transformaciones lineales inciertas, podría probarse que, si $\xi$ es una raíz de un polinomio irreducible mónico $P \in \mathbb{Q}[X]$, una transformación lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $P(f) = 0$ le da una estructura a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}[\xi]$-espacio vectorial.

## §6. Conclusiones

La idea de este trabajo fue mostrar algunos caminos (conocidos o no) que fuimos transitando a medida que aparecían nuevas preguntas sobre ciertas funciones reales. Nos gustaría que también sirva para que el lector (si a esta altura queda alguno) siga haciéndose preguntas (interesantes o no, fáciles o no, “utiles” o no) sobre estos (u otros) temas. Después de todo, creemos que de esta forma se va construyendo el conocimiento matemático.

Para consultar (o ahondar) en algunos temas que se tocaron en este trabajo, sugerimos la siguiente bibliografía. (Apostol, 1999) es un libro excelente para aprender y consultar sobre temas de análisis en una variable. La teoría de cardinalidad de Cantor puede leerse en el primer capítulo de (Kolmogorov y Fomin, 1975). Los temas de álgebra lineal pueden encontrarse en (Hoffman y

Kunze, 1971) y otros temas de álgebra mencionados pueden buscarse en (Lang, 2002).

## Bibliografía

Apostol, T. (1999). *Calculus I*. Barcelona: Reverté Ediciones.

Hoffman, K., y Kunze, R. (1971). *Álgebra Lineal*. México: Prentice Hall Latinoamericana.

Kolmogorov, A., y Fomin, S. (1975). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Moscú: Editorial MIR.

Lang, S. (2002). *Algebra*. Nueva York: Springer.

Sebastián Freyre
*Departamento de Ciencias Exactas, CBC, Universidad de Buenos Aires, Argentina*
(✉) *sfreyre@cbc.uba.ar*

Juan Sabia
*Departamento de Ciencias Exactas, CBC, Universidad de Buenos Aires, Argentina*
*IMAS, CONICET–UBA, Argentina*
(✉) *jsabia@dm.uba.ar*

Recibido: *26 de octubre de 2022*.
Aceptado: *2 de febrero de 2023*.
Publicado en línea: *27 de abril de 2023*.