Equilibrio en Economías con Preferencias Single-Peaked

Agustín G. Bonifacio[†]

[†]*Instituto de Matemática Aplicada San Luis, UNSL-CONICET, abonifacio@unsl.edu.ar*

Resumen: En este trabajo estudiamos la existencia de equilibrio en economías de intercambio con preferencias single-peaked, a través del *equilibrio walrasiano con slack* (Mas-Colell, 1992). Resolvemos explícitamente el equilibrio en término de los datos del modelo (dotaciones iniciales y “peaks”) y mostramos relaciones de esta solución con dos reglas de asignación conocidas: la *regla de reasignación uniforme* (Klaus *et al*, 1998) y la *regla proporcional* (Massó y Neme, 2002).

Palabras clave: *equilibrio walrasiano con slack, preferencias single-peaked, regla de reasignación uniforme.*
2000 AMS Subject Classification: 91B54 - 91B14

1. Introducción

Consideremos el problema de reasignar dotaciones iniciales de un bien en un conjunto de agentes basándonos en las preferencias de esos agentes, cuando no existe la posibilidad de eliminación libre del bien en cuestión. El concepto de solución más utilizado por los economistas para realizar tal tarea es el sistema de precios, o mecanismo walrasiano. El mecanismo walrasiano utiliza a los precios para coordinar los planes individuales de oferta y demanda al restringir las opciones disponibles a los agentes de la economía a aquellas alcanzables dadas sus restricciones de presupuesto, es decir, la valuación de sus dotaciones al precio vigente. Esta solución cumple varias propiedades deseables: el equilibrio resultante de intercambiar las dotaciones iniciales de esta manera es eficiente (nadie puede mejorar su situación sin empeorar la de otro) e individualmente racional (todos prefieren la asignación que les otorga el mecanismo a su dotación inicial).

Aquí estudiamos el mecanismo de precios cuando las preferencias de los agentes son *single-peaked*: hasta un cierto nivel crítico, un aumento en el consumo del bien incrementa el bienestar del agente; más alla de ese nivel sucede lo opuesto (siendo ese nivel crítico no necesariamente igual para todos los agentes).

El análisis de equilibrio en nuestro contexto presenta un problema: las preferencias de los agentes poseen un máximo dentro de sus conjuntos de consumo. Con preferencias saciadas no siempre es posible garantizar la existencia del equilibrio walrasiano clásico, ya que parte del ingreso de los agentes saciados no termina redistribuyéndose y, en consecuencia, la Ley de Walras es violada. Un nuevo concepto de equilibrio es necesario: el *equilibrio walrasiano con slack*, introducido por Mas-Colell [3]. El slack es una cantidad extra de ingreso que se da a todos los agentes por igual para contrarrestar el problema anterior.

Existen otras formas de hacer la redistribución de las dotaciones iniciales que no involucran al sistema de precios. Una de ellas es la *regla de reasignación uniforme*, presentada en Klaus *et al* [2], que generaliza a la regla uniforme (estudiada por Sprumont [5]) al permitir dotaciones iniciales. Otra consiste en la *regla proporcional*, analizada en Massó y Neme [4], que considera ciertos derechos definidos *a priori* a la hora de realizar el reparto del bien. En este trabajo calculamos las asignaciones y el slack de equilibrio para una economía con preferencias single-peaked y mostramos que las asignaciones del equilibrio walrasiano con slack coinciden con las de la regla de reasignación uniforme, y que el slack es útil para el cálculo de la regla proporcional.

2. Preliminares

Consideraremos una economía de intercambio de n agentes y un solo bien perfectamente divisible. Sea $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de agentes. Cada $i \in N$ está caracterizado por una dotación $e_i \in \mathbb{R}_+$ del bien y por una relación de preferencias R_i definida sobre el intervalo $[0, E]$, donde $E := \sum_{i \in N} e_i$. La economía será denotada por (R, e). Llamemos P_i a la preferencia estricta[1] asociada a R_i. Supondremos que

[1] $z_i P_i z_i' \Leftrightarrow (z_i R_i z_i'$ y no $z_i' R_i z_i)$.

las preferencias de los agentes son *single-peaked*, esto es, cada R_i tiene un único máximo $\tau(R_i)$ (su "peak") tal que, para cualesquiera $z_i, z_i' \in [0, E]$, tenemos $z_i P_i z_i'$ siempre que $z_i' < z_i < \tau(R_i)$ o $\tau(R_i) < z_i < z_i'$.

Una asignación $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ es *factible* si $\sum_{i \in N} x_i = E$. Una asignación factible x es *eficiente* si no existe otra asignación factible y tal que $y_i R_i x_i$ para todo i y $y_i P_i x_i$ para algún i; e *individualmente racional* siempre que, dada una distribución de dotaciones iniciales $e = (e_1, \ldots, e_n)$, sea $x_i R_i e_i$ para todo i. Llamemos $\mathcal{R}$ al dominio de preferencias single-peaked definidas en $[0, E]$.

3. EQUILIBRIO

Un equilibrio walrasiano consiste de un precio[2] y una asignación factible tales que los agentes maximizan sus preferencias en el conjunto de asignaciones que cumplen su restricción de riqueza, es decir, que valuadas a ese precio cuestan a lo sumo lo que cuesta su dotación inicial. Formalmente,

Definición 1 *Un* ***equilibrio walrasiano*** *para la economía (R, e) es un par $(x, p) \in [0, E]^n \times \{-1, 1\}$ tal que, para todo i, la asignación x_i maximiza R_i en la restricción presupuestaria $\beta_i(p, e_i) = \{z_i \in [0, E] : p \cdot z_i \leq p \cdot e_i\}$ y $\sum_{i \in N} x_i = E$.*

Es bien conocido que bajo esta definición un equilibrio puede no existir cuando las preferencias están saciadas. Más precisamente, si las preferencias tienen un máximo dentro de los conjuntos de consumo, entonces, a cualquier precio, los agentes pueden elegir sus consumos óptimos en el interior de sus restricciones presupuestarias. Esto lleva a la violación de la Ley de Walras y, por ende, a la inexistencia de equilibrio.

Ejemplo 1 Sean $N = \{1, 2\}$, $\tau(R_1) = \frac{1}{4}$, $\tau(R_2) = \frac{3}{4}$ y $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$. Esta economía no posee ningún equilibrio walrasiano. En efecto, si $p = 1$ tenemos que $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_1 + x_2 < e_1 + e_2$. Por otro lado, si $p = -1$ entonces $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$ y $x_1 + x_2 > e_1 + e_2$.

Sin embargo, la existencia de equilibrio puede restaurarse si se le da a todos los agentes una cantidad extra de ingreso para gastar. El estudio de equilibrio con preferencias posiblemente saciadas fue realizado por Mas-Colell en [3]. Allí se define un *equilibrio walrasiano con slack*:

Definición 2 *Un* ***equilibrio walrasiano con slack*** *para la economía (R, e) es una terna $(x, p, \lambda) \in [0, E]^n \times \{-1, 1\} \times \mathbb{R}_+$ tal que, para todo i, la asignación x_i maximiza R_i en la restricción presupuestaria $\gamma_i(p, e_i, \lambda) = \{z_i \in [0, E] : p \cdot z_i \leq p \cdot e_i + \lambda\}$ y $\sum_{i \in N} x_i = E$.*

Claramente cuando $\lambda = 0$ el equilibrio walrasiano con slack se reduce al equilibrio walrasiano clásico.

Proposición 1 *La economía (R, e) posee un único equilibrio walrasiano con slack.*

Prueba. Primero, sean $S := \{i \in N : p \cdot \tau(R_i) \leq p \cdot e_i\}$ y D su complemento, $D = N \setminus S$. S es el conjunto de agentes saciados dentro de sus restricciones presupuestarias $\beta_i(p, e_i)$ (el conjunto de oferentes), mientras que D es el conjunto de demandantes del bien. Definamos a continuación el slack por[3]:

$$\lambda := \frac{p \cdot \sum_{i \in S}(e_i - \tau(R_i))}{|D|}.$$

Notemos que $\lambda \geq 0$. Si $S = \emptyset$, $\lambda = 0$.

Primer caso: $\sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E$. Tomemos $p = 1$. Como el equilibrio con slack exige que cada agente i maximice sus preferencias en el conjunto $\gamma_i(p, e_i, \lambda) = \{z_i \in [0, E] : z_i \leq e_i + \lambda\}$ y las preferencias son single-peaked tenemos que $x_i = \text{mín}\{\tau(R_i), e_i + \lambda\}$. Si $i \in S$, claramente $x_i = \tau(R_i)$. En cambio, si $i \in D$, debe ser $x_i = e_i + \lambda$, ya que de lo contrario se contradice que $\sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E$. Para probar que (x, p, λ) es un equilibrio walrasiano con slack resta ver que $\sum_{i \in N} x_i = E$. En efecto:

[2]El precio se ha normalizado, por lo que supondremos que sólo puede tomar los valores 1 o -1. El precio negativo refleja el hecho de que la deseabilidad del bien es baja y que no existe posibilidad de eliminación libre (*no free disposal*).

[3]Dado un conjunto A, denotamos por $|A|$ a la cantidad de elementos que posee.

$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in S} \tau(R_i) + \sum_{i \in D}(e_i + \lambda) = \sum_{i \in S} \tau(R_i) + \sum_{i \in D} e_i + |D|\lambda = \sum_{i \in N} e_i = E.$

Segundo Caso: $\sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E$. Tomando $p = -1$, tenemos que $\gamma_i(p, e_i, \lambda) = \{z_i \in [0, E] : z_i \geq e_i - \lambda\}$ y en consecuencia $x_i = \text{máx}\{\tau(R_i), e_i - \lambda\}$. La factibilidad de x se prueba en forma análoga al caso anterior.

Es fácil ver que el equilibrio es único. □

Ejemplo 2 Para la economía del ejemplo 1, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $p = 1$ y $\lambda = \frac{1}{4}$ constituyen el equilibrio walrasiano con slack.

Si bien el equilibrio walrasiano con slack no es en general eficiente bajo hipótesis clásicas, en nuestro caso sí lo es. La prueba es inmediata.

Proposición 2 *Con preferencias single-peaked el equilibrio con slack es siempre eficiente e individualmente racional.*

Nota 1 Se puede interpretar el equilibrio con slack como un equilibrio que surge de una redistribución de ingreso entre los agentes que forman la economía. De hecho, dado un equilibrio walrasiano con slack (x, p, λ) puede definirse un único vector $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\sum_{i \in N} \beta_i = 0$ tal que cada x_i maximiza R_i en el conjunto $\{z_i \in [0, E] : p \cdot z_i \leq p \cdot e_i + \beta_i\}$. Una terna (x, p, β) con estas propiedades recibe el nombre de *equilibrio walrasiano con slacks balanceados* (ver Amorós [1]). En nuestro modelo los slacks balanceados toman la siguiente forma:

$$\beta_i = \begin{cases} p \cdot (\tau(R_i) - e_i) & \text{si } i \in S, \\ \lambda & \text{si } i \in D. \end{cases}$$

Claramente $\sum_{i \in N} \beta_i = 0$.

4. Regla de Reasignación Uniforme y Regla Proporcional

En Klaus *et al* [2] se estudia el problema de reasignar un bien perfectamente divisible entre agentes con preferencias single-peaked y dotaciones iniciales. Los autores proponen la *regla de reasignación uniforme* U^r como la única regla que satisface eficiencia, no manipulabilidad y otros dos axiomas[4]. Dada una economía (R, e), con $\sum_{i \in N} e_i = E$, ellos definen la regla como

$$U_i^r(R, e) = \begin{cases} \text{mín}\{\tau(R_i), e_i + \mu\} & \text{si } \sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E \\ \text{máx}\{\tau(R_i), e_i - \mu\} & \text{si } \sum_{i \in N} \tau(R_i) < E \end{cases}$$

donde $\mu \geq 0$ y resuelve $\sum_{i \in N} U_i^r = E$. Una simple inspección a la prueba de la proposición 1 nos muestra que las asignaciones del equilibrio walrasiano con slack coinciden con las de esta regla. Denotemos por $W(R, e)$ a la asignación asociada al equilibrio con slack de la economía (R, e).

Proposición 3 *Para la economía (R, e) tenemos que $W(R, e) = U^r(R, e)$.*

Prueba. Basta tomar $\mu = \lambda$, siendo λ el slack del equilibrio de (R, e). □

Esta regla es en realidad una adaptación de la regla uniforme que considera dotaciones iniciales. Para cada perfil de preferencias $R \in \mathcal{R}^n$ y una cantidad total E de un bien perfectamente divisible, la *regla uniforme* $U(R, E)$ se define como

$$U_i(R, E) = \begin{cases} \text{mín}\{\tau(R_i), \rho\} & \text{si } \sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E \\ \text{máx}\{\tau(R_i), \rho\} & \text{si } \sum_{i \in N} \tau(R_i) < E \end{cases}$$

con ρ que resuelve $\sum_{i \in N} U_i(R, E) = E$.

[4] Los otros axiomas se refieren a una noción de igual tratamiento de iguales y a una noción de simetría entre el problema cuando existe exceso de demanda y cuando existe exceso de oferta del bien.

Según muchos autores, la regla uniforme debe considerarse como la solución más importante al problema de asignar un bien perfectamente divisible entre agentes con preferencias single-peaked, ya que satisface muchas más propiedades deseables que cualquier otra solución: es eficiente, no manipulable, anónima, libre de envidia, individualmente racional desde la asignación igualitaria, entre otras propiedades . Sin embargo, la anonimidad y la no envidia la hacen inapropiada cuando existen asimetrías entre los agentes que se desearían respetar. Esas asimetrías o derechos *a priori* de los agentes vienen dadas por las dotaciones iniciales en nuestro modelo. A continuación veremos que la regla uniforme puede recuperarse en el equilibrio walrasiano con slack cuando las dotaciones iniciales de los agentes son todas iguales:

Proposición 4 *Dado el perfil $R \in \mathcal{R}^n$ y una cantidad total E del bien, tenemos que $U(R, E) = W(R, \bar{e})$ si $\bar{e} = (\frac{E}{n}, \ldots, \frac{E}{n})$.*

Prueba. Supongamos $\sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E$, el otro caso es similar. Sea $(W, 1, \lambda)$ el equilibrio con slack de $(R, \bar{e})$. Si hacemos $\rho := \frac{E}{n} + \lambda$ entonces $W_i = \text{mín}\{\tau(R_i), \rho\}$ y $\sum_{i \in N} W_i = E$, es decir, $W(R, \bar{e}) = U(R, E)$. □

Nota 2 Viendo la regla uniforme como un equilibrio walrasiano con slack es inmediata la eficiencia y la racionalidad individual desde la asignación igualitaria.

Otra regla de asignación con derechos definidos a priori fue caracterizada por Neme y Massó en [4]. Dado un perfil de preferencias $R \in \mathcal{R}^n$ y un total E del bien, los *derechos a priori* del i-ésimo agente se formalizan como una proporción $\alpha_i \in [0, 1]$, con $\sum_{i \in N} \alpha_i = 1$. Se define la *regla proporcional* $\Phi(R, \alpha, E)$ como:

$$\Phi_i(R, \alpha, E) = \begin{cases} \text{mín}\{\tau(R_i), \alpha_i \pi\} & \text{si } \sum_{i \in N} \tau(R_i) \geq E \\ \text{máx}\{\tau(R_i), \alpha_i \pi\} & \text{si } \sum_{i \in N} \tau(R_i) < E \end{cases}$$

con π satisfaciendo $\sum_{i \in N} \Phi_i(R, \alpha, E) = E$. Si bien esta regla difiere del equilibrio con slack, el cómputo del mismo es útil para calcularla. De hecho, dada la terna (R, α, E) podemos armar una economía de intercambio $(R, \tilde{e})$ donde $\tilde{e}_i = \alpha_i E$. Si λ es el slack asociado al equilibrio de $(R, \tilde{e})$ entonces podemos definir

$$\pi = E + \frac{|D|\lambda}{\alpha_D}$$

donde $\alpha_D = \sum_{i \in D} \alpha_i$. Así, $\alpha_i \pi = \tilde{e}_i + \frac{\alpha_i}{\alpha_D}|D|\lambda$. Si $i \in S$, entonces $\Phi_i(R, \alpha, E) = \tau(R_i)$, mientras que si $i \in D$ vale que $\Phi_i(R, \alpha, E) = \alpha_i \pi$. Es fácil ver que $\sum_{i \in N} \Phi_i(R, \alpha, E) = E$.

En el siguiente ejemplo mostramos que la regla proporcional difiere del mecanismo walrasiano con slack:

Ejemplo 3 Sean $N = \{1, 2, 3\}$, $\tau(R_1) = \frac{1}{4}$, $\tau(R_2) = \frac{1}{3}$, $\tau(R_3) = \frac{1}{2}$, $\tilde{e}_1 = \frac{1}{6}$, $\tilde{e}_2 = \frac{1}{2}$ y $\tilde{e}_3 = \frac{1}{3}$. Notemos que, al ser $E = 1$, se sigue que $\tilde{e} = \alpha$. Dado que $S = \{2\}$, $D = \{1, 3\}$ y que los peaks suman más que el total a repartir tenemos que el slack es $\lambda = \frac{1}{12}$ y que las correspondientes asignaciones walrasianas son $W_1 = \frac{1}{4}$, $W_2 = \frac{1}{3}$ y $W_3 = \frac{5}{12}$. Sin embargo, las asignaciones provenientes de la regla proporcional son diferentes, ya que al ser $\pi = \frac{4}{3}$, llegamos a que $\Phi_1 = \frac{2}{9}$, $\Phi_2 = \frac{1}{3}$ y $\Phi_3 = \frac{4}{9}$.

Nota 3 El slack λ es, en definitiva, una redistribución equitativa del ingreso no utilizado por los agentes saciados entre los agentes no saciados. Sin embargo, ésta no es la única forma en que podría hacerse la redistribución. La regla proporcional la realiza ponderando el peso relativo de cada agente no saciado en el total de agentes no saciados.

REFERENCIAS

[1] P. AMORÓS, *Efficiency and Income Redistribution in the Single-Peaked Preferences Model with Several Commodities*, Economics Letters, 63 (1999), pp. 341-349.

[2] B. KLAUS, H. PETERS Y T. STORCKEN, *Strategy-Proof Division with Single-Peaked Preferences and Individual Endowments*, Social Choice and Welfare, 15 (1998), pp. 297-311.

[3] A. MAS-COLELL, *Equilibrium Theory with Possibly Satiated Preferences*, en: M. Majumdar (Ed.), Equilibrium and Dynamics: Essays in Honor of David Gale (Macmillan), (1992), pp. 201-213.

[4] J. MASSÓ Y A. NEME, *Proportional Rules in the Division Problem*, Working Paper, (2002).

[5] Y. SPRUMONT, *The Division Problem with Singled-Peaked Preferences: A Characterization of the Uniform Allocation Rule*, Econometrica, 59 (1991), 509-519.