Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

MACI

Vol. 4

2013

Trabajos presentados al IV MACI 2013

Proceedings of IV MACI 2013

Buenos Aires, 15 al 17 de mayo de 2013

asa maci
ASOCIACION ARGENTINA DE MATEMATICA APLICADA COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

ISSN: 2314-3282

ASAMACI
Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial
Güemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina.
http://asamaci.org.ar/
E-mail: asamaci@gmail.com

Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

ISSN 2314-3282

MACI

Vol. 4 (2013)

IV MACI 2013

4to Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial

4th Congress on Industrial, Computational and Applied Mathematics

15 al 17 de mayo de 2013

May 15 to 17, 2013

Buenos Aires, ARGENTINA

G. LA MURA, D. RUBIO y E. SERRANO (Eds.)

ASOCIACIÓN ARGENTINA DE MATEMÁTICA APLICADA, COMPUTACIONAL E INDUSTRIAL

Patrocinadores / Sponsors

Auspiciantes

ESTABILIDAD POR GRUPO EN JUEGOS DE ASIGNACIÓN GENERALIZADOS.

Pablo Arribillaga†, Jordi Mass‡ y Alejandro Neme†

†Instituto de Matemática Aplicada San Luis (UNSL-CONICET) Av. Ejército de los Andes 950, 5700 San Luis, Argentina rarribi@unsl.edu.ar, aneme@unsl.edu.ar
‡Departament d'Economia i d'Història Econòmica and CODE. Universitat Autònoma de Barcelona. 08193, Bellaterra (Barcelona), Spain, jordi.masso@uab.es

Resumen: Estudiamos distintas soluciones cooperativas y competitivas para una generalización muchos a muchos de los juegos de asignación bi-lateral de Shapley y Shubik (1972). Consideramos tres nociones cooperativas distintas de estabi-lidad por grupos y el núcleo. Demostramos que cada una de las soluciones de estabilidad por grupos está muy relacionada con el núcleo de determinados juegos definidos a partir de las correspondientes nociones de bloqueo y que las soluciones mantienen una relación estrictamente anidada. Además, demostramos que cada una de las soluciones está identificada con un conjunto de matrices de precios (discriminados) que indican cómo se distribuye entre cada comprador y cada vendedor la ganancia por unidad intercambiada de cada bien. En todos los casos dichas matrices surgen como solución a un sistema de inecuaciones lineales. De todo ello se deduce que todas las soluciones tienen las mismas propiedades desde un punto de vista estructural y calculatorio.

Palabras clave: *Juegos de Asignación, Estabilidad por grupos, Core, Equilibrios Competitivos*
2000 AMS Subject Classification: 91A12

1. INTRODUCCIÓN

Massó y Neme (2011) y Jaume, Massó y Neme (2012) consideran un modelo de asignación bilateral cardinal muchos a muchos (o *mercados*) en el cual compradores y vendedores intercambian unidades indivisibles de bienes por dinero y en donde cada vendedor puede poseer (y por lo tanto vender) varias unidades de distintos bienes y cada comprador puede comprar varias unidades de distintos bienes. Massó y Neme (2011) estudian como las soluciones cooperativas de estabilidad por grupos y núcleo convergen, cuando se replica el mercado, al conjunto de vectores de pagos asociados a los equilibrios competitivos.

En este modelo existen varias nociones alternativas de estabilidad por grupos. Difieren entre ellas según que tipo de transacciones puedan mantener, total o parcialmente, los agentes de una coalición bloqueadora con los agentes de fuera de la coalición. En la noción de estabilidad por grupos definida en Massó y Neme (2011) se supone que los contratos son unidad por unidad ya que el intercambio entre un comprador y un vendedor de cada unidad de cada bien se hace independiente de las demás unidades y de los demás bienes; un agente puede reducir (pero no aumentar) el intercambio de un determinado bien en las unidades que lo considere conveniente, sin que por esto deba reducir el intercambio de las otras unidades de dicho bien o de los demás bienes. En este artículo consideramos las otras dos nociones de estabilidad por grupos que serían más adecuadas en aquellos casos en los que la naturaleza de los contratos sean bien por bien o globales. En el primer caso, el intercambio de un bien entre un comprador y un vendedor incluye todas las unidades del bien, y es independiente de los demás bienes y por lo tanto, o se mantiene el intercambio de todas las unidades del bien o se suprime el intercambio del mismo. En el segundo, el intercambio entre un comprador y un vendedor incluye todas las unidades de todos los bienes y por lo tanto, o se mantienen todos los intercambios de todas las unidades de todos los bienes o se suprimen todos.

Primero demostramos que cada una de las tres nociones de estabilidad por grupos están directamente identificadas con la unión de los núcleos de determinados juegos cooperativos (con utilidad transferible). Por lo tanto, la noción de núcleo está más vinculada a las nociones de estabilidad por grupos de lo que se supone en la literatura, si los juegos a los que les calculamos el núcleo están definidos adecuadamente. A partir de la identificación anterior demostramos que se verifican las siguientes propiedades relacionadas con la estructura de los vectores de pagos en las distintas nociones de estabilidad por grupos.

(a) Las tres nociones de estabilidad por grupos están soportadas por una estructura de producto cartesiano entre un determinado conjunto de *matrices de precios* (las cuales pueden ser interpretadas como un conjunto de vectores de precios discriminados para cada par comprador-vendedor) y el conjunto de las asignaciones óptimas del mercado.

(b) Todos los vectores de pagos en cualquiera de las tres nociones de estabilidad por gupos están completamente identificados con un conjunto de matrices de precios (adecuado en función de la naturaleza de los contratos)

(c) Todos los vectores de pagos en cualquiera de las tres nociones de estabilidad por grupos están completamente identificados con la solución de un sistema de inecuaciones lineales acotado.

2. PRELIMINARES

Un juego de asignación generalizado (un mercado) definido por Jaume, Massó y Neme (2012) consiste en tres conjuntos finitos disjuntos: los compradores $\mathcal{B} = \{1, ..., B\}$, los bienes $\mathcal{G} = \{1, ..., G\}$ y los vendedores $\mathcal{S} = \{1, ..., S\}$. Denotamos un comprador genérico por i, un bien genérico por j, y un vendedor genérico por k. Los compradores tienen una valoración marginal constante de cada bien. Sea $v_{ij} \geq 0$ la valoración monetaria que el comprador i asigna a una unidad del bien j; es decir, v_{ij} es el máximo precio que el comprador i esta dispuesto a pagar por cada unidad del bien j. Denotamos por $V = (v_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{B}\times\mathcal{G}}$ a la *matriz de valoraciones*. Suponemos que el comprador $i \in \mathcal{B}$ puede comprar a lo sumo $d_i \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\}$ unidades en total, donde $\mathbb{Z}_+$ es el conjunto de los enteros no negativos. Denotamos por $d = (d_i)_{i\in\mathcal{B}}$ al *vector de demanda máxima*. Cada vendedor $k \in \mathcal{S}$ tiene $q_{jk} \in \mathbb{Z}_+$ unidades indivisibles de cada bien $j \in \mathcal{G}$. Denotamos por $Q = (q_{jk})_{(j,k)\in\mathcal{G}\times\mathcal{S}}$ a la *matriz de capacidades*. Sea $r_{jk} \geq 0$ la valoración monetaria que el vendedor k asigna a cada unidad del bien j. Denotamos por $R = (r_{jk})_{(j,k)\in\mathcal{G}\times\mathcal{S}}$ a la *matriz de precios de reserva*.

Un *mercado* M es una 7-upla $(\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, V, d, R, Q)$

Sea M un mercado. Una asignación para M es una matriz entera tridimensional (es decir, un tensor de tercer orden) $A = (A_{ijk})_{(i,j,k)\in\mathcal{B}\times\mathcal{G}\times\mathcal{S}} \in \mathbb{Z}_+^{B\times G\times S}$ describiendo una colección de asignaciones de unidades de los bienes a los compradores. Cada A_{ijk} debe ser interpretada como que "el comprador i recibe A_{ijk} unidades del bien j del vendedor k".

La asignación A es *factible* para un mercado M si cada comprador i compra a lo sumo d_i unidades y cada vendedor k vende a lo sumo q_{jk} unidades de cada bien j. Estamos interesados solamente en el siguiente conjunto de asignaciones factibles.

$$\{A \in \mathbb{Z}_+^{B\times G\times S} \mid \sum_{jk} A_{ijk} \leq d_i \text{ para todo } i \in \mathcal{B} \text{ y } \sum_{i} A_{ijk} \leq q_{jk} \text{ para todo } (j,k) \in \mathcal{G}\times\mathcal{S}\}.$$

Denotamos dicho conjunto por $\mathcal{F}^0(M)$.

La *ganancia total* del mercado M en una asignación factible A es

$$T^M(A) = \sum\nolimits_{ijk} (v_{ij} - r_{jk}) \cdot A_{ijk}.$$

Definicin 1 *Una asignación factible A es* óptima *para un mercado M si, para cualquier asignación factible A', $T^M(A) \geq T^M(A')$.*

Sea $\mathcal{F}(M)$ (o simplemente $\mathcal{F}$) el conjunto de todas las asignaciones óptimas para el mercado M. El conjunto $\mathcal{F}$ es no vaco (ver Jaume, Massó y Neme (2012)). Denotamos por T^M a la ganancia total de un mercado M en cualquier asignación óptima.

3. ESTABILIDAD POR GRUPOS

Dado un mercado M, Massó y Neme (2011) definen estabilidad por grupos, aquí la llamaremos de estabilidad por grupo tipo 1. Proponemos dos nociones alternativas de estabilidad por grupos ya descritas en la Introducción. La noción de tipo 2 tiene sentido cuando los contratos se realizan bien a bien y por lo tanto los agentes de la coalición bloqueadora pueden mantener con agentes de fuera de la coalición el intercambio de todas las unidades del bien o suprimir el intercambio de todas ellas. La noción de tipo 3 tiene sentido cuando entre un comprador y un vendedor sólo exite un contrato y por lo tanto, los agentes de la coalición bloqueadora o mantienen todos los intercambios con un agente de fuera de la coalición o los suprimen todos.

Sea $M = (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{S}, V, d, R, Q)$ un mercado y $C \subseteq \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ una coalición. Denotamos al conjunto de compradores y vendedores en C por $\mathcal{B}^C = C \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{S}^C = C \cap \mathcal{S}$, respectivamente.

Definicin 2 (Massó y Neme (2011)) *Sea M un mercado y $C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ una coalición. Una asignación $\widehat{A} \in \mathcal{F}^0$ es SW^1-*compatible con C *si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que:*
(i) *Para cada $i \in \mathcal{B}^C$, $\widehat{A}_{ijk} > 0$ implica que $k \in \mathcal{S}^C$ o bien $\widehat{A}_{ijk} \leq A_{ijk}$.*
(ii) *Para cada $k \in \mathcal{S}^C$, $\widehat{A}_{ijk} > 0$ implica que $i \in \mathcal{B}^C$ o bien $\widehat{A}_{ijk} \leq A_{ijk}$.*

Definicin 3 *Sea M un mercado y $C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ una coalición. Una asignación $\widehat{A} \in \mathcal{F}^0$ es SW^2*-compatible con C *si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que:*
(i) *Para cada $i \in \mathcal{B}^C$, $\widehat{A}_{ijk} > 0$ implica que $k \in \mathcal{S}^C$ o bien $\widehat{A}_{ijk} = A_{ijk}$.*
(ii) *Para cada $k \in \mathcal{S}^C$, $\widehat{A}_{ijk} > 0$ implica que $i \in \mathcal{B}^C$ o bien $\widehat{A}_{ijk} = A_{ijk}$.*

Definicin 4 *Sea M un mercado y $C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ una coalición. Una asignación $\widehat{A} \in \mathcal{F}^0$ es SW^3*-compatible con C *si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que:*
(i) *Para cada $i \in \mathcal{B}^C$, $\widehat{A}_{ijk} > 0$ implica que $k \in \mathcal{S}^C$ o bien $\widehat{A}_{ijk} = A_{ijk}$ para todo $j \in \mathcal{G}$.*
(ii) *Para cada $k \in \mathcal{S}^C$, $\widehat{A}_{ijk} > 0$ implica que $i \in \mathcal{B}^C$ o bien $\widehat{A}_{ijk} = A_{ijk}$ para todo $j \in \mathcal{G}$.*

Sea M un mercado, $C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ una coalición y $t \in \{1, 2, 3\}$. Denotamos por $\mathcal{F}^t(C)$ al conjunto de todas las asignaciones SW^t-compatibles con C.

Una matriz tridimensional $\Gamma = (\Gamma_{ijk})_{(i,j,k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}}$ es una *matriz de distribución* si para todo $(i, j, k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}$ tal que $v_{ij} \geq r_{jk}$ y $j \in G_{ik}^{>}$, ocurre que $v_{ij} \geq \Gamma_{ijk} \geq r_{jk}$. Sea Γ una matriz de distribución y supongamos que $v_{ij} \geq r_{jk}$ para algún $(i, j, k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}$ y $j \in G_{ik}^{>}$. Entonces, Γ_{ijk} describe una posible manera de como el comprador i y el vendedor j pueden dividir la ganancia $v_{ij} - r_{jk}$ que podrían obtener intercambiando una unidad del bien j: el comprador i recibe $v_{ij} - \Gamma_{ijk}$ y el vendedor k recibe $\Gamma_{ijk} - r_{jk}$. Si $j \notin G_{ik}^{>}$ el valor Γ_{ijk} será irrelevante porque i y k no intercambiaran del bien j en ninguna asignación óptima. Denotamos porb$\mathcal{D}(M)$ (o $\mathcal{D}$) al conjunto de todas las matrices de distribución para M.

Decimos que $(u_i, w_k)_{i \in \mathcal{B}, k \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{B \times S}$ es un pago factible para M si $\sum_{i \in \mathcal{B}} u_i + \sum_{k \in \mathcal{S}} w_k = T^M$.

Sea M un mercado y $C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ una coalición. Para cada $\Gamma \in \mathcal{D}$ y cada $\widehat{A} \in \mathcal{F}^0$, definimos la ganancia para C en $\widehat{A}$ de acuerdo con Γ a la expresión[1]

$$\begin{aligned}\phi^M(C, \widehat{A}, \Gamma) \equiv \quad & \sum_{(i,j,k)\, \in \mathcal{B}^C \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}^C} (v_{ij-} r_{jk}) \cdot \widehat{A}_{ijk} + \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{B}^C \times \mathcal{G} \times (\mathcal{S}^C)^c} (v_{ij} - \Gamma_{ijk}) \cdot \widehat{A}_{ijk} \\ & + \sum_{(i,j,k) \in (\mathcal{B}^C)^c \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}^C} (\Gamma_{ijk} - r_{jk}) \cdot \widehat{A}_{ijk}.\end{aligned}$$

Definicin 5 *Sea M un mercado y $t \in \{1, 2, 3\}$. Un pago factiblr (u, w)* no está SW^t-bloqueado *si existe una matriz de distribución $\Gamma = (\Gamma_{ijk})_{(i,j,k) \in \mathcal{B} \times \mathcal{G} \times \mathcal{S}} \in \mathcal{D}$ tal que para cada coalición $C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$ y cada $\widehat{A} \in \mathcal{F}^t(C)$,*

$$\sum_{i \in \mathcal{B}^C} u_i + \sum_{k \in \mathcal{S}^C} w_k \geq \phi^M(C, \widehat{A}, \Gamma).$$

Definicin 6 *Sea M un mercado y $t \in \{1, 2, 3\}$. Un pago factible (u, w) es $t-$*estable por grupos *para M si no es SW^t-bloqueado.*[2]

[1] Dado un conjunto Y denotamos su complemento por Y^c. El lector no debería confundirse cuando Y es $\mathcal{B}^C$ o $\mathcal{S}^C$, cuyos complementos son denotados por $\left(\mathcal{B}^C\right)^c$ y $\left(\mathcal{S}^C\right)^c$, respectivamente.

[2] El conjunto de pagos $1-$estable por grupos corresponde a la noción de estabilidad por grupos definida en Massó y Neme (2011).

Denotamos por $\mathcal{SW}^t(M)$ (o simplemente $\mathcal{SW}^t$) al conjunto de todos los pagos $t-$estables por grupos para el mercado M. Es sencillo ver que

$$\mathcal{SW}^1 \subsetneq \mathcal{SW}^2 \subsetneq \mathcal{SW}^3.$$

Por la observación anterior, y el hecho que $\mathcal{SW}^1 \neq \emptyset$ (ver Massó y Neme (2011)), tenemos que

$$\mathcal{SW}^t(M) \neq \emptyset$$

Definicin 7 *Dado* $\Gamma \in \mathcal{D}$ *y* $t \in \{1,2,3\}$ *el* juego con utilidad transferible, $(\mathcal{B} \cup \mathcal{S}, v^{t\Gamma})$ asociado a t y Γ *está definido por*

$$v^{t\Gamma}(C) = max_{\hat{A} \in \mathcal{F}^t(C)} \phi^M(C, \widehat{A}, \Gamma) \textit{ para todo } C \subset \mathcal{B} \cup \mathcal{S}.$$

Denotaremos por $\mathcal{C}^{t\Gamma}(M)$ (o simplemente $\mathcal{C}^{t\Gamma}$) al núcleo del juego $(\mathcal{B} \cup \mathcal{S}, v^{t\Gamma})$.

Teorema 1 *Sea M un mercado y $t \in \{1,2,3\}$. Entonces,*

$$\mathcal{SW}^t = \bigcup_{\Gamma \in \mathcal{D}(M)} \mathcal{C}^{t\Gamma}.$$

3.1. Estructura de producto cartesiano y cálculo

Sea $\Gamma \in \mathcal{D}$ y sea $A \in \mathcal{F}^0$. Definimos la *utilidad del comprador $i \in \mathcal{B}$* en el par (Γ, A) como

$$u_i(\Gamma, A) = \sum_{jk} (v_{ij} - \Gamma_{ijk}) \cdot A_{ijk}. \tag{1}$$

Similarmente, definimos la *utilidad del vendedor $k \in \mathcal{S}$* en el par (Γ, A) como

$$w_k(\Gamma, A) = \sum_{ij} (\Gamma_{ijk} - r_{jk}) \cdot A_{ijk}. \tag{2}$$

Dado (Γ, A), denotaremos por $u(\Gamma, A) = (u(\Gamma, A))_{i \in \mathcal{B}}$ y por $w(\Gamma, A) = (w_k(\Gamma, A))_{k \in \mathcal{S}}$ a los vectores de utilidades de los compradores y vendedores en (Γ, A), respectivamente.

Denotamos por $\mathcal{D}^t(M) = \{\Gamma : \mathcal{C}^{t\Gamma}(M) \neq \emptyset\}$

Corolario 1 *Sea M un mercado y $t \in \{1,2,3\}$. Entonces,*

$$\mathcal{SW}^t = \{(u_{(\Gamma,A)}, w_{(\Gamma,A)}) : (\Gamma, A) \in \mathcal{D}^t \times \mathcal{F}\}.$$

Si $\Gamma \in \mathcal{D}^t$ y $A \in \mathcal{F}$ tenemos que $(u_{(\Gamma,A)}, w_{(\Gamma,A)})$ es independiente de A, de donde se obtiene,

Corolario 2 *Sea M un mercado y $t \in \{1,2,3\}$. Entonces,*

$$\mathcal{SW}^t = \{(u_{(\Gamma)}, w_{(\Gamma)}) : \Gamma \in \mathcal{D}^t\}.$$

Para $A \in \mathcal{F}$ (fijo) consideremos el sistema, en Γ, de inecuaciones lineales dado por:

$$\phi^M(C, \hat{A}, \Gamma) \leq \phi^M(C, A, \Gamma) \text{ para todo } C \text{ y para todo } \hat{A} \in \mathcal{F}^t(C) \tag{3}$$

Proposicin 1 *Sea M un mercado y $t \in \{1,2,3\}$. $\Gamma \in \mathcal{D}^t$ si y sólo si Γ es solución del sistema 3.*

Referencias

[1] D. Jaume, J. Massó y A. Neme, *The Multiple-partners Assignment Game with Heterogeneous Sells and Multi-unit Demands: Competitive Equilibria*, Forthcoming in Mathematical Methods of Operations Research 2012.

[2] J. Massó y A. Neme., *On Cooperative Solutions of a Generalized Assignment Game: Limit Theorems to the Set of Competitive Equilibria*, Under rewiev

[3] L. Shapley y M. Shubik., *The assignment game I: the core* International Journal of Game Theory (1972), pp. 111-130.

[4] M. Sotomayor *Connecting the cooperative and competitive structures of the multiple-partners assignment game* Journal of Economic Theory Vol. 134 (2007), pp. 155-174.