Estudiar límite y derivada en la escuela secundaria

Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico

Verónica Parra
María Rita Otero

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN)
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

ISBN 978-950-658-431-3
9 789506 584313

2017

Parra, Verónica
Estudiar límite y derivada en la escuela secundaria : una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico / Verónica Parra ; María Rita Otero. - 1a ed. - Tandil : Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2107.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-658-431-3

1. Matemática. 2. Escuela Secundaria. 3. Didáctica. I. Otero, María Rita II. Título
CDD 510.7

Imagen de Tapa: Verónica Parra. *Mi jardín*. Tandil (2014).

Estudiar límite y derivada en la escuela secundaria

Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico

Verónica Parra ▪ María Rita Otero

Índice

Introducción 6

Capítulo 1.. 8

Los recorridos de estudio e investigación (REI) 8

Génesis de la noción de REI 8

¿Por qué el calificativo “herbartiano”? 14

Estructura de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)........... 15

Las funciones didácticas mesogénesis, topogénesis y cronogénesis en un REI 17

Capítulo 2.. 19

Antecedentes de enseñanzas por REI 19

Capítulo 3.. 32

Punto de equilibrio en modelos de mercado: un posible modelo praxeológico de referencia... 32

Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) en la TAD 32

Un posible MPR matemático-microeconómico 33

Capítulo 4.. 56

Implementación y descripción de un REI en el aula de matemática...... 56

Las dialécticas: gestos conductores de una enseñanza por investigación 56

Contexto de implementación de REI 61

Propuesta e implementación de un posible recorrido de estudio e investigación 64

Reflexiones finales.. 80

Referencias.. 83

Introducción

En este trabajo proponemos un *recorrido de estudio e investigación* (REI) concebido para el último año del nivel secundario argentino. de Los REI requieren abordar la enseñanza de la Matemática desde un paradigma emergente y muy diferente del tradicional, según los postulados centrales de la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) (Chevallard, 1999, 2004, 2013a). Uno de los principios fundamentales puede enunciarse en los siguientes términos: enseñar matemática a partir de la formulación de preguntas con la consecuente búsqueda de respuestas por parte de la comunidad de estudio (estudiantes y profesor) de manera colectiva.

Enseñar matemática a partir de preguntas se vincula a un paradigma centrado en el estudio y la investigación y en el cuestionamiento, ya que no se puede investigar sin preguntas que es lo opuesto del paradigma etiquetado como “tradicional. En el paradigma tradicional”, los saberes no se cuestionan, por el contrario, se asumen como verdaderos, se enumeran haciendo un inventario. En el marco de la TAD, se ha caracterizado un fenómeno denominado *monumentalización de los saberes* (Chevallard, 2013a). Este fenómeno didáctico, emergente del no cuestionamiento del saber, puede ser descripto con una analogía a la visita en un museo. Un museo es un lugar donde se coleccionan, conservan y exponen objetos que, por alguna razón, la sociedad o un sector de la misma, considera que se deben salvaguardar. Estos museos tienen como premisa preservar esos objetos, que podemos titular “obras”. Cuando una persona o un grupo de personas visita un museo, puede mirar, pero no tocar las obras. Incluso, no acercarse demasiado a ellas. Análogamente a esta situación, en los sistemas de enseñanza, la Matemática se estudia como si fuese un *monumento* a honrar, a admirar, como una “obra” expuesta a los estudiantes que sólo tiene raros usos.

En contraposición a esta enseñanza monumental, Chevallard (2004) propone el paradigma *de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM) y define en este contexto, el dispositivo *recorridos de* *estudio e investigación* (REI). Así, con los REI se propicia la funcionalidad de las disciplinas, en particular y en nuestro caso, de la Matemática, posicionando las preguntas como punto de partida de los procesos de estudio. Preguntas en sentido fuerte, es decir, preguntas tales que su respuesta no sea una simple búsqueda de información, sino que sea necesario investigar al mismo tiempo que construir y/o reconstruir obras matemáticas y no matemáticas.

Gestionar este tipo de dispositivos no puede ni debe producirse con los gestos de una enseñanza tradicional. Lanzar y conducir un REI es pilotear un sistema didáctico formado, en el caso de una clase de matemática, por un grupo de estudiantes, un profesor y una pregunta Q o un conjunto de preguntas, cuya respuesta debe ser construida de forma colectiva por la comunidad de estudio. Este sistema construye un medio de estudio que le permite "fabricar" la respuesta R a la pregunta Q. En este proceso de construcción de respuestas, la comunidad desarrolla ciertos gestos propios de la actividad de estudiar e investigar, gestos denominados "dialécticas" (Chevallard, 2012). Estos "gestos dialécticos" son centrales en este libro pues describiremos, en el capítulo 4, los resultados de una implementación a partir de las acciones que podrían considerarse dentro de estos gestos. Previamente, presentamos en primer lugar, la génesis de la noción de REI, su definición y características más importantes. Luego, detallamos los antecedentes en torno a los trabajos que han abordado enseñanzas por REI o propuestas análogas, determinando los contextos de implementación y análisis de resultados. Posteriormente, presentamos un posible modelo praxeológico de referencia (MPR) que construimos como potencial referente del REI diseñado, implementado y analizado. Consecutivamente, describimos las dialécticas propuestas en el marco de la TAD describiendo con ellas parte de los resultados obtenidos al implementar el REI y, finalmente, los aportes y conclusiones.

Capítulo 1

Los recorridos de estudio e investigación (REI)

Génesis de la noción de REI

La génesis de la noción de *recorrido de estudio e investigación* (REI) se remonta fuera de las clases de matemáticas. Surgió a partir del dispositivo "institucional" denominado *trabajos personales encuadrados* (TPE), dispositivo instalado en el sistema escolar francés en las clases de primer año (estudiantes de 16-17 años) a comienzos del año 2000-2001, y cuyo antecesor inmediato son los denominados *trabajos de iniciativa personal encuadrados* (TIPE). Los TIPE se crearon en Francia en 1995 como una opción para los concursos de ingreso a las denominadas "grandes escuelas científicas" (GPGE)[1] volviéndose en 1997 una prueba obligatoria para la mayor parte de los concursos. Específicamente, los TIPE tienen por objetivo desarrollar en los estudiantes el espíritu del cuestionamiento y de abertura colocándolos en situaciones de investigación como el caso de los investigadores e ingenieros. En estos trabajos, organizados en grupos de no más de cinco integrantes, los estudiantes deben definir un tema de interés desde el primer año del CPGE con el cuál desarrollarán una investigación. Cada estudiante debe registrar, en una carpeta, los métodos empleados, las fuentes utilizadas, las justificaciones de la selección del tema, y cualquier otro documento desarrollado y/o utilizado durante el trabajo (por ejemplo, fotos, presentaciones, etc.).

Seguida a la introducción de los TIPE en las GPGE, se propusieron para el nivel secundario (liceo en Francia) los TPE. La modalidad de los TPE, heredada de los TIPE, corresponde al trabajo de los estudiantes, organizados en grupos o de forma autónoma y dirigidos por un equipo de

[1] Las grandes escuelas científicas (GPGE) son establecimientos de enseñanza superior que seleccionan alumnos por concursos y que garantizan una formación preferente bajo la tutela del Ministerio de Educación Francesa.

profesores, en un proyecto que articulaba nociones resultantes de los programas de dos disciplinas diferentes. Los temas se seleccionan por los profesores a partir de una lista propuesta en el boletín oficial de Francia. Por ejemplo, la lista del ciclo escolar 2000-2001 comportaba los temas siguientes: “Crecimiento”, “Agua”, “Imagen”, “Riesgos naturales y tecnológicos”, “Ciencia y alimentos”, “Tiempo, ritmos y períodos” (Chevallard, 2001, Chevallard, Matheron, 2002). En torno al tema seleccionado, los profesores formulan una pregunta Q, a la cual los estudiantes X deben aportar respuestas con la dirección de un equipo Y de profesores. Es esto lo que va a dar lugar a los *REI codisciplinares*, es decir, con la integración de dos o más disciplinas.

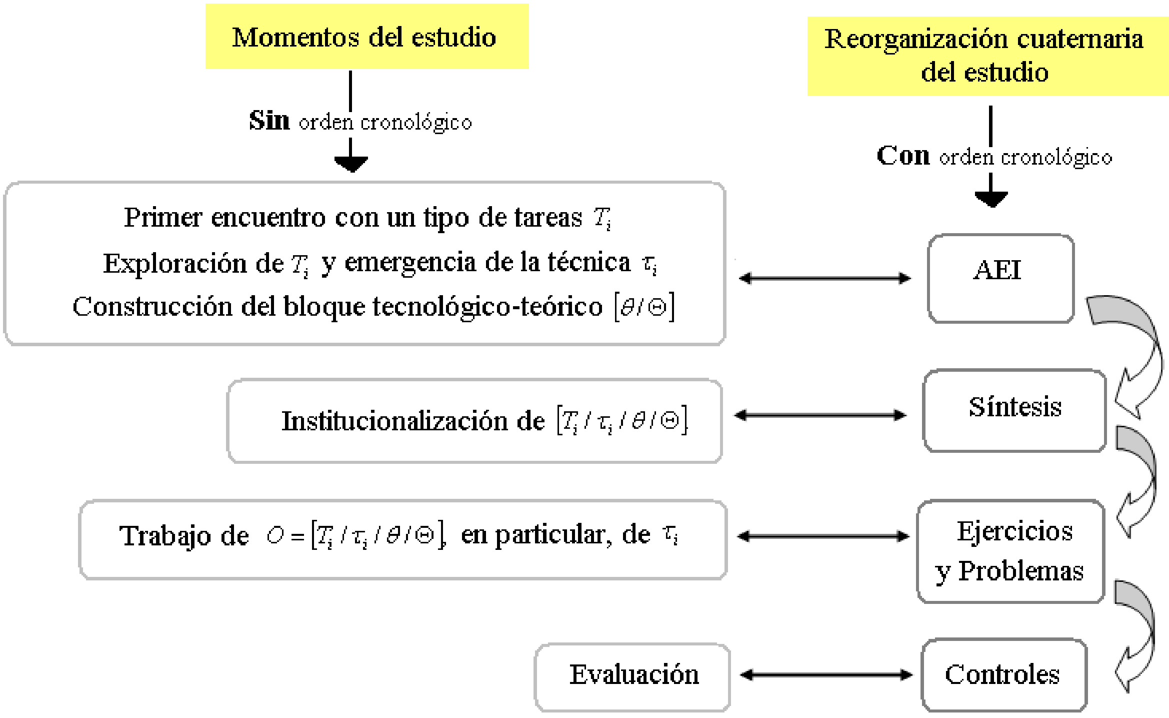
Con la introducción de los TPE, específicamente se introduce a los estudiantes, según Chevallard (2001), en un proceso de modelización a ***cinco tiempos***: ***observar*** las respuestas existentes, denotadas por $R^{\diamond}$; ***analizar*** esas respuestas; ***evaluarlas***; ***desarrollar*** una “nueva” respuesta, denotada por $R^{\heartsuit}$ y finalmente, **difundir y *defender*** esa “nueva” respuesta producida. Estos tiempos del estudio deben ser llevados a cabo en un espacio de trabajo estructurado por lo que Chevallard (2001, 2007, 2013a) ha denominado *dialécticas*.

Es posible advertir aquí que, desde el dispositivo TPE, se comienzan a gestar la idea de “cuestionar”, de colocar las preguntas como punto de partida de los procesos de estudio, pero. ¿Por qué entonces los TPE no fueron suficientes para concretar esta nueva manera de enseñar matemática a partir de la investigación y del cuestionamiento del mundo? Y la respuesta tiene sus orígenes en el lugar que ocupaba la Matemática en la construcción de la respuesta $R^{\heartsuit}$, además de las dificultades tales como la debilidad de los vínculos que creaban los TPE entre las disciplinas al interior de la Escuela. Una de las preguntas que Chevallard (2001) formula en relación a estos obstáculos es *¿Cómo se coloca entonces el problema de la presencia de las matemáticas en los TPE, y específicamente en la producción de una respuesta R a una pregunta Q?* Este cuestionamiento condujo a formular los REI que, colocando las preguntas como punto de partida de cualquier proceso de estudio, considera fuertemente el lugar funcional de la matemática en términos de *codisciplinaridad* (bidisciplinar en el caso de los TPE).

Las primeras formulaciones de los REI se realizaron en términos de *actividades de estudio e investigación* (AEI). Se definió un REI como una sucesión organizada de AEI que provocan la integración de diferentes organizaciones matemáticas locales (OM) en estructuras más complejas y completas. Las AEI son dispositivos generadores de procesos de estudio e investigación cuyo punto de partida son las preguntas y cuyos metas y fines están parcialmente determinados de antemano (Chevallard, 2013c). Chevallard (Ibid.) propone que el abordaje de una AEI debe conducir al grupo de estudio a encontrar los elementos del saber deseado, o al menos, tener mayor probabilidad de encuentros con una obra esperada estudiar. En estas formulaciones, la noción de AEI fue considerada más próxima a la noción de "situaciones" de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau.

Según Bosch y Gascón (2010), la cuestión generatriz de una AEI, aunque sea sugerida por el profesor, no está perfectamente formulada, sino que deberá evolucionar y "refinarse" a medida que es abordada por la comunidad de estudio. Tampoco es una cuestión que pueda resolverse llevando a cabo una simple actividad previamente establecida y con una respuesta predeterminada. Las respuestas tentativas y/o provisorias que vayan surgiendo deberán poder ser consideradas y contrastadas por la propia comunidad de estudio, en lugar de delegar al profesor la responsabilidad absoluta de dicha evaluación. A lo largo del desarrollo de una AEI aparecerán otras dimensiones del proceso de estudio, por ejemplo, momentos donde deberán llevarse a cabo un repertorio de "ejercicios" de manera metódica de tal forma que pondrán en marcha el momento del trabajo de la técnica, es decir, de la manera de resolver las tareas. Chevallard (2007) propuso así, con la introducción de las AEI, una reorganización *cuaternaria* del proceso de estudio: la ***AEI*** llaman en primer lugar a una ***síntesis***, la cual se completaba de un trabajo que consistía en ***ejercicios*** (en el verdadero sentido del concepto) así como en el estudio de ***problemas*** que probaban los límites de la organización matemática cuyos componentes técnicos y tecnológicos-teóricos (esto es, componentes justificadores de las formas de hacer, de las técnicas) se habrían producido en las AEI (o de una sucesión de AEI) y que la síntesis habría acabado de hacer emerger. Todo esto llamaba a ***controles*** que permitían una evaluación con un doble objetivo – evaluar la organización del saber construido, y evaluar la relación de la clase (o de cada uno de los alumnos) con esta organización del saber –. Esta arquitectónica didáctica responde, estructuralmente, al denominado modelo funcional de los “momentos del estudio”.

Este modelo consiste en que, cualquiera sea el proceso de estudio, se llega o arriba “un momento” en el cuál un gesto o acción debe ser puesta en marcha: un momento de primer encuentro con un tipo de tareas; otro momento de exploración de ese tipo de tareas y de construcción de una manera de hacer esas tareas, esto es, de la construcción de una técnica; otro momento donde esa manera de hacer (la técnica) debe justificarse, explicarse, validarse, esto es, un momento constitutivo del entorno tecnológico-teórico de la técnica; otro momento donde se realiza un trabajo profundo de la técnica, determinando sus alcances y limitaciones; otro momento donde se institucionaliza lo que se ha elaborado; y un momento de evaluación, donde se debe hacer un balance de lo producido. Teniendo en cuenta estos momentos, las *AEI* en sí mismas fueron consideradas equivalente a los momentos del primer encuentro con un tipo de tareas T_i, de la exploración de T_i y de la emergencia de la técnica τ_i, y de la construcción del bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$. Luego, un momento de *síntesis* era el tiempo por excelencia de la *institucionalización* de $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$. Los *ejercicios y problemas* eran un tiempo indispensable de *trabajo* de la organización matemática $O =[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ en particular de la técnica τ_i, así como de la relación tanto de la clase como de cada uno de sus miembros con *O*. Los *controles* estaban en el corazón del momento de la evaluación (Chevallard, 2007).



Esquema 1: Reorganización cuaternaria de los momentos del estudio a partir de las AEI. Fuente: elaboración propia

Esta reorganización del proceso de estudio, ya sea a partir de una AEI como a partir de cualquier otro proceso de estudio que promueva el cuestionamiento y la investigación, implica una modificación profunda en los sistemas de enseñanza y en las funciones didácticas denominadas *topogénesis* (gestión de las tareas a desarrollar a cargo de los estudiantes y el profesor), *cronogénesis* (gestión del tiempo de clase) y *mesogénesis* (gestión del medio de estudio). Por ejemplo, el “topos” del profesor y el “topos” de los estudiantes se modifica: el profesor “reduce” su acción corriéndose del lugar central de la clase y, en consecuencia, dejando más responsabilidades al topos del estudiante, quienes incorporan en sus actividades, por ejemplo, la posibilidad de participar en la gestión de casi todos los momentos (tecnológico-teórico, síntesis, evaluación, etc.) que, en la enseñanza monumentalista, se situaban bajo la responsabilidad exclusiva del profesor (Bosch, Gascón, 2010, p.80).

Las AEI pretendían colocar en primera plana al menos una “razón de ser” de las OM locales propuestas a estudiar en la escuela. Según Bosch y

Gascón (2010), las AEI vienen determinadas por una OM local que un profesor (Y) debe hacer reconstruir y hacer accesible a un grupo de alumnos (X) a partir de una cuestión generatriz Q cuya búsqueda de respuestas conduzca a la reconstrucción de los principales elementos de la OM de partida. Se genera así el sistema didáctico S(X; Y; Q) cuyo desarrollo debe conducir, de alguna manera, a una respuesta final en forma de praxeología (Bosch, Gascón, 2010) – designada por R♥. Según Chevallard (2013 libro), entonces habría que "concebir" una AEI para cada obra o cada detalle de obra, de manera tal de concretar los encuentros con el saber, resultando ser "demasiado arreglados". Este "encuentro" arreglado condujo al desarrollo del *dispositivo recorrido de estudio e investigación* (REI), donde los encuentros con el saber "no están tan arreglados de antemano". Partiendo, al igual que en una AEI, de la formulación de una pregunta con la consecuente búsqueda de respuesta, los REI responden al denominado *esquema herbartiano*[2] – que Chevallard (2013b) denomina *one more time.* Primero, es importante distinguir dos tipos de sistemas didácticos: los sistemas didácticos de la forma $S(X;Y;♥)$ y los sistemas de la forma $S(X;Y;Q)$. En el primer caso, se estudia una praxeología "dada", por ejemplo, una OM local; en el segundo caso, una pregunta "dada". El primer caso es el "clásico": ♥ es visto como lo que *X* (y/o cada uno de los miembros $x \in X$) deben integrar a su equipamiento praxeológico. El segundo caso es a partir del cual se propone la estructura de los REI en función del *esquema herbartiano*. En su forma reducida, este esquema se escribe de la siguiente manera:

$$S(X;Y;Q) \hookrightarrow R^{♥}$$

Este esquema indica que una pregunta *Q* es estudiada y una respuesta *R* debe ser producida (esto es lo que indica la flecha ↪) (Chevallard, 2009b, 2009c, 2009d). Si bien la noción de AEI, respecto a la noción de REI, es un dispositivo más limitado en términos de amplitud de recorridos, su implementación resulta viable en la medida en que se pretende

[2] El calificativo utilizado aquí que remite al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841).

alcanzar un punto intermedio en el intento de pasar de un paradigma monumentalista a uno más funcional.

¿Por qué el calificativo “herbartiano”?

Herbart (1776-1841) es considerado el fundador de la pedagogía como disciplina científica. Para Benner (en Runge Peña, 2009), Herbart es el Newton de la psicología. Para Herbart (1935), la educación debe cumplir, en la formación moral y ética, un papel mediador determinante, como instancia mediante la cual se fomenta tal forma final de ser y en donde se ayuda a la naturaleza, al niño en formación, para que, en aras de dicha meta, se relacione con el entorno, consigo mismo, con los otros y con el mundo. “El hombre no es nada fuera de la sociedad”. De allí entonces la relevancia que adquiere para Herbart la intuición estética para la formación moral y ética del ser humano.

Oponiéndose al antiguo principio que consideraba al aprendizaje como fin de la instrucción y al interés como medio, Herbart sentó una ley: “El aprender sirve para producir un interés. El aprendizaje debe ser transitorio, el interés perenne”. Uno de los conceptos claves de Herbart es el de *interés*. Realiza una clasificación de los intereses y asegura que la instrucción debe despertar el interés, que es una actividad propia, desarrollada sobre la base de una atención involuntaria y, ciertamente, de la aperceptiva. Herbart dividió al interés en interés del conocimiento e interés de la simpatía. El primero abarca la naturaleza y la humanidad, conteniendo lo que se denomina el interés múltiple: el interés empírico, observación, interés especulativo, reflexión y el interés por las relaciones estéticas. El segundo sólo alcanza algunas manifestaciones de la humanidad, simpatía, interés social, espíritu nacional y el interés religioso. Por otra parte, Herbart propone el denominado triángulo herbartiano, el cual está conformado (al igual que el sistema didáctico) por tres elementos: el sujeto de la educación (el que dispone a consentir a ser educado), el agente de la educación (sobre el que recae la responsabilidad, como representante de la cultura, de transmitir el patrimonio cultural a cada uno de los sujetos con los que trabaja) y los contenidos de la educación (los bienes culturales a transmitir).

Teniendo en cuenta el rol que Herbart le da al interés y su formulación del triángulo educativo, podrían comprenderse, o al menos comenzar a comprender, porqué Chevallard estructura los REI utilizando el esquema herbartiano. Es decir, para que el saber tenga sentido debe estudiarse como respuesta a una pregunta, es decir, debe tener un "interés" y por supuesto, dentro de una Institución ese estudio e investigación no puede realizarse sin los actores de la comunidad de estudio: estudiantes, saber y ayudas al estudio. En la sección siguiente especificamos la estructura de los REI.

Estructura de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

La elaboración de $R^{\heartsuit}$ a partir de Q supone la "fabricación" de un *medio didáctico, M*, un medio de estudio y de construcción de respuesta a Q. Esto se expresa en el *esquema herbartiano semi-desarrollado*:

$$[S(X;Y;Q) \rightharpoonup M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Es decir, el sistema didáctico construye y organiza ($\rightharpoonup$) el medio M con el cuál engendrará o producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$. Este esquema indica que la elaboración del medio M se articula de modo complejo con la elaboración de la respuesta $R^{\heartsuit}$, es decir, indica que el medio no está construido de antemano, sino que se construye de forma paralela a la búsqueda de respuestas. De esta manera, es necesario buscar, analizar, desarrollar y evaluar objetos, obras, recursos, información, etc. que pueden ingresar al medio de estudio y ser parte indispensable para la construcción de R corazón. Esta observación se aplica el *esquema herbartiano desarrollado* que se escribe así:

$$[S(X;Y;Q) \rightharpoonup \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \dots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Donde $M = \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \dots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$ es el *medio didáctico* o *medio para el estudio* (de Q). Las respuestas "sellos" $R_i^{\diamond}$, las preguntas derivadas Q_j y las otras obras O_l son instrumentos útiles, aunque sea parcialmente, para el estudio de *Q*, instrumentos a *estudiar convenientemente* – en "calidad" y en "cantidad", para ser utilizados en el momento oportuno, de manera efectiva y eficaz en el estudio de *Q* y entonces en la construcción y validación de $R^{\heartsuit}$. Los adjetivos "calidad" y "cantidad" refieren a estudiar lo necesario, lo útil, lo efectivamente oportuno para construir la respuesta R corazón. Las respuestas denotadas por $R_i^{\Diamond}$ para $i = 1, \ldots, n$ son respuestas "hechas" – por ejemplo, un libro, la Web, el curso de un profesor, etc. –; las O_j para $j = n + 1, \ldots, m$ son otras obras – por ejemplo, teorías, montajes experimentales, praxeologías, etc. – consideradas útiles para deconstruir las respuestas $R^{\Diamond}$ y extraer qué de necesario hay allí para construir la respuesta $R^{\heartsuit}$. Así, con la introducción del esquema herbartiano desarrollado, Chevallard (2009) precisa lo que puede ser visto como un *recorrido de estudio y de investigación*.

Usualmente, en una clase "tradicional", que podría notarse por $[X, y]$ (donde *X* es el grupo de alumnos e $Y = \{y\}$ un único profesor, por ejemplo, el profesor de matemática), cuando se estudia una pregunta *Q*, el profesor *y* aporta *su* respuesta, R_y, la cuál, finalmente se volverá la respuesta $R^{\heartsuit}$ de la clase. Así, tendríamos un tipo particular de esquema herbartiano, $[S(X; Y; Q) \rightharpoonup \{R_1^{\Diamond}, O_2\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, donde $R_1^{\Diamond} = R_y$, $O_2 = \heartsuit$ y $R^{\heartsuit} = R_y$. Aquí, la praxeología ♥ aparece como la única que permite elaborar la respuesta R_y, la que *X* deberá *finalmente* adoptar como propia. La noción de REI contrasta con este tipo de esquemas. Para que exista un REI o un germen de REI, en un sentido razonable, es necesario que la organización didáctica presente un cierto número de condiciones que demandan modificaciones en las funciones didácticas *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*.

Las funciones didácticas mesogénesis, topogénesis y cronogénesis en un REI

La mesogénesis es considerada la “fabricación” del medio *M*. La primera característica de la mesogénesis en un REI es que el medio *M* no está “totalmente hecho o construido de antemano”. El medio *M* se constituye por la clase a partir de las producciones diversas, tanto *externas* como *internas* a ella, incluyendo particularmente las respuestas R_x, es decir, las respuestas propuestas por los alumnos *x* a partir de su propia actividad. El medio *M*, conformado así por las distintas *R* “sellos” y otras obras disponibles, debe permitir la gestión de la dialéctica media-medio. Es necesario remarcar que muchos de los componentes de este medio M es diferente al medio de una enseñanza tradiciones. Muchos de los componentes del medio de una enseñanza por REI son excluidos del medio de estudio de una enseñanza tradicional. En un REI, el trabajo sobre el medio cambia al mismo tiempo que cambia así su *naturaleza* (Chevallard, 2009a).

La mesogénesis movilizada en una enseñanza por REI va a la par de una condición relativa a la *topogénesis*: la constitución del medio *M* es un producto de la clase, profesor y estudiantes, no solamente del profesor. El “*topos*” (esto es, el lugar ocupado) de los alumnos recibe en este sentido una extensión importante: no solamente un alumno podrá aportar *su* respuesta personal R_x sino que también podrá proponer introducir en *M* toda obra que desee, y que considere pertinente para la elaboración de $R^{\heartsuit}$. A este cambio en el *topos* de los alumnos corresponde un cambio importante en el *topos* del profesor, es decir, del *director del estudio* – el que dirige el estudio de *Q* – o del *director de la investigación* – el que dirige la investigación sobre *Q*. Al igual que los estudiantes, el profesor podrá verter en medio *M* las “piezas” que necesariamente no sean “su” respuesta personal (si es que tiene una). En todos los casos, la respuesta notada más arriba R_y , es decir, la respuesta del profesor, no será tratada de otro modo que como una más de las respuestas $R_i^{\diamond}$. Esto significa que, en una enseñanza por REI, ningún media tendrá privilegios y ninguno será "creído bajo palabra". Cada componente que se incorpore al medio de estudio, se lo hace con el estatus de conjetura, como una suposición que deberá probarse. De aquí, que esta dialéctica entre media y medio también supone una dialéctica entre conjeturas y pruebas.

La constitución y el "trabajo" del medio *M* provocan una *dilatación del tiempo didáctico* y, correlativamente, una *extensión del tiempo de reloj*. Construir el medio *M* con vistas a producir $R^{\heartsuit}$ comprende al menos *particularmente* un estudio de las obras O_j. Esta exigencia funcional conduce a que el sistema didáctico $S(X;Y;Q)$ se transforme momentáneamente en un sistema didáctico de tipo "clásico" $S(X;Y;O_j)$. Este tipo "clásico" de sistema conduce a las preguntas siguientes: ¿Cómo usar O_j para deconstruir algunas de las $R_i^{\Diamond}$? O ¿Cómo sacar provecho de determinada obra O_k para "fabricar" $R^{\heartsuit}$? ¿Cuáles son las razones de ser y cómo "funcionan"? etc. En todo esto, se supone que el profesor no se dejará desbordar por el hábito profesoral que consiste en "secuenciar y cerrar demasiado el estudio" de las obras. Debe tener la virtud de asociar estas obras a la organización disciplinar de forma tal que su "estudio" sea a partir de una "necesidad" (Chevallard, 2009a).

Capítulo 2

Antecedentes de enseñanzas por REI

En esta sección describiremos 22 trabajos que han sido desarrollados en el contexto de enseñanzas por REI o propuestas abiertas de REI. Describiremos, en primer lugar, los trabajos según su codisciplinaridad, ya sea con la Economía y/o Ciencias Económicas y empresariales y/o Administración y dirección de empresas, con la Biología, la Física, la Medicina o las Ciencias de la Ingeniería. Luego, describiremos los recorridos monodisciplinares (cuyas cuestiones son intra-matemáticas) y un recorrido propuesto para estudiar cuestiones de la Didáctica de la Matemática.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a la Economía y/o Ciencias Económicas y empresariales y/o Administración y dirección de empresas, situamos los trabajos de Fonseca (2010, 2011a), Serrano, Bosch y Gascón (2010) y Salgado, Otero, y Parra (2017) en el nivel universitario; y los trabajos de Ruiz Munzón (2010), Ruiz, Bosch y Gascón (2007), Donvito, Otero y Sureda (2014), Parra, Otero y Fanaro (2015) y Parra y Otero (2017) en el nivel secundario.

Fonseca (2010, 2011a) implementó un REI cuya cuestión generatriz corresponde a la movilidad del personal de una empresa, planteando hipótesis respecto no sólo de las políticas de movilidad sino también, sobre la repartición de los trabajadores. La implementación de recorrido se realizó en un taller-seminario con estudiantes de una facultad de ciencias económicas y empresariales. El REI provocó la emergencia de la diagonalización y multiplicación de matrices y resolución de sistemas de ecuaciones. El análisis y descripción de resultados se centró en las organizaciones matemáticas desarrolladas y en la determinación y descripción de los momentos del estudio. Continuando con el estudio de la diagonalización de matrices, Fonseca (2011a) diseñó e implementó un REI en un taller de matemática con estudiantes de una Escuela de

Ingeniería Industrial cuya pregunta de partida se refiere a la fabricación de tres modelos de motos. Para cada fábrica se especifican los índices de producción, los costos, ingresos, precio de venta y forma de trabajo, construyendo modelos matriciales lineales, y utilizando el software Mathematica. El análisis y descripción de resultados se realiza en términos de los momentos del estudio y de las técnicas matemáticas propuestas.

Serrano, Bosch y Gascón (2010) diseñaron un taller de modelización y lo implementaron en cuatro grupos de primer año de una carrera de administración y dirección de empresas. Proponen iniciar el taller con una cuestión generatriz vinculada a la previsión de ventas. El taller, que funcionó de forma paralela al desarrollo del curso, tuvo una duración de 5 sesiones de clases. Previo a la concreción del taller, se llevaron a cabo cuatro “clases teóricas” para que los estudiantes tuvieran conocimientos sobre ciertas familias de funciones ya estudiadas en secundaria tales como función afín, función cuadrática, función cúbica, función hiperbólica y funciones exponenciales. Se realizó un análisis a priori de las posibles cuestiones derivadas y se evaluó la experimentación según las restricciones identificadas y la dialéctica de los medias y medio.

Salgado, Otero y Parra (2017) presentan resultados parciales sobre la introducción en el nivel universitario de una enseñanza basada en el dispositivo didáctico Recorridos de Estudio e Investigación (REI). El REI propuesto parte de la pregunta Q_0*: ¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento?* Se describen los resultados obtenidos de dos implementaciones en dos cursos de Matemática del primer año de una universidad pública argentina conformados por un total de 73 estudiantes que cursan carreras vinculadas a la Economía y a la Administración de Empresas. El análisis de resultados se realiza en términos de los indicadores didáctico-matemáticos definidos en Parra y Otero (2017) para determinar el funcionamiento o no funcionamiento de los gestos didácticos que la TAD denomina dialécticas.

Donvito, Otero, Sureda (2014) diseñaron, implementaron y analizaron la viabilidad de un REI cuya pregunta generatriz se refiere a los planes de ahorro. Se realizaron implementaciones en cursos habituales de matemática de tres instituciones con características diferentes: una institución secundaria estatal (estudiantes de 16-17 años), una institución secundaria privada (estudiantes de 16-17 años) y una institución secundaria para adultos (estudiantes de 16-60 años). El REI suscita el estudio de funciones, funciones lineales, funciones exponenciales, logaritmos, límites y el número e, sucesiones y series, capitalización, amortización (constantes y variables). El análisis de resultados fue realizado a partir de las actitudes de la PICM: herbartiana, procognitiva, exotérica, de problematización, y enciclopedista ordinario.

Ruiz Munzón (2010) y Ruiz, Bosch, y Gascón (2007) proponen el diseño y la experimentación de un taller de modelización matemática cuya pregunta generatriz corresponde a los beneficios, la producción y venta de camisetas. La experimentación se realizó en tres grupos de estudiantes del nivel secundario durante el tercer trimestre 2004/05. Se propone la utilización de la calculadora simbólica Wiris (CSW) para facilitar la creación, representación gráfica y manipulación de diferentes expresiones algebraicas. Se distingue, a lo largo del trabajo, dos casos en relación a la función costes (costes lineales y costes cuadráticos), suponiendo que la función de ingresos es igual al producto entre las cantidades vendidas y el precio de venta por unidad del producto. Se propone una caracterización del desarrollo hipotético de la modelización funcional, en tres niveles caracterizados mediante praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes. Además, el análisis de datos se realizó a partir de las cuestiones derivadas y los modelos construidos para dar respuesta.

Parra, Otero y Fanaro (2015) y Parra y Otero (2017) proponen y describen una metodología de análisis basada en la formulación de un conjunto de indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas” del estudio y la investigación. Estos indicadores se construyeron a partir de los datos obtenidos al diseñar, implementar y evaluar un recorrido de estudio e investigación (REI) cuyas preguntas de partida se vinculan al equilibrio de mercado de un modelo de oferta y demanda. Se realizaron dos implementaciones en el último año del nivel secundario argentino (16-17años) (N = 60). El profesor propuso a los estudiantes preguntas del tipo siguiente: *¿Cómo calcular el punto de equilibrio en un modelo lineal de mercado? ¿Cuánto varía exactamente el punto de equilibrio al modificar los parámetros del modelo?* Se concluye que las dialécticas más identificadas son del individuo y del colectivo, del tema y fuera-de-tema, del estudio y de la investigación, del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica y de las cajas negras y cajas claras.

- Respecto a los REI codisciplinares a la Biología, ubicamos el trabajo de Barquero (2009, 2011) y Barquero, Bosch y Gascón (2013) en el nivel universitario y el trabajo de Ruiz-Higueras y García García (2011), en el nivel inicial.

Barquero (2009, 2011) y Barquero, Bosch y Gascón (2013) diseñaron e implementaron un REI cuyas preguntas generatrices corresponden a la dinámica de poblaciones. La implementación se realizó en un curso denominado "taller de modelización matemática" con estudiantes de ingeniería técnica química industrial de la Universidad Autónoma de Barcelona. Este taller se desarrolló de forma paralela al curso tradicional de Matemática. El recorrido propuso estudiar la evolución de una población, cuyo tamaño varía con el tiempo. La pregunta generatriz condujo al diseño de tres REI que permitieron cubrir parte de las organizaciones matemáticas propuestas para estudiar en el programa de estudio de los primeros cursos universitarios de Ciencias Experimentales: por ejemplo, cuestiones de álgebra lineal y cálculo diferencial en una variable. El análisis y descripción de las experimentaciones fue realizado en términos de cuestiones generatrices, cuestiones derivadas, modelos poblaciones y organizaciones matemáticas construidos para dar respuesta a tales cuestiones.

Ruiz-Higueras y García García (2011) describieron las praxeologías que surgen al desarrollar tareas de modelización matemática a partir de un sistema configurado por una colección de gusanos de seda que se transformará (metamorfosis) a lo largo del tiempo. En la propuesta participaron una maestra y un grupo de alumnos (3 a 6 años) de la educación infantil. Los niños trabajaron en un taller de matemática que permitió abordar no sólo las diferentes cantidades de magnitudes discretas, sino también, la necesidad de medirlas y de formular esta medida. La descripción de los resultados se realizó a partir de la determinación de las praxeologías matemáticas construidas y a partir de la caracterización de la praxis y logos didáctico de la profesora.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a la Física, situamos el trabajo de Costa, Arlego y Otero (2014) en el nivel universitario y el trabajo de Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016), en el nivel secundario, en la formación de profesores y con investigadores en formación.

Costa, Arlego y Otero (2014) diseñaron e implementaron un REI codisciplinar a la Física en un curso habitual de matemática de una Facultad de Ingeniería. La pregunta generatriz se refiere a la construcción de edificaciones sustentables. Esta pregunta y sus derivadas permiten emerger las razones de ser del Cálculo Vectorial integrando campos como la Termodinámica, la Mecánica de los Fluidos, la Hidrodinámica, la Electricidad y el Magnetismo. El análisis de datos se realizó a partir de la escala de niveles de codeterminación didáctica y de las dialécticas, concluyendo en una serie de condicionamientos en las diferentes escalas que dificultan el desarrollo del REI.

Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016) diseñaron, implementaron y evaluaron un REI a partir de la pregunta generatriz *¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil?* Se realizaron implementaciones en cursos de los últimos años del nivel secundario, en cursos de formación de profesores de matemática y con investigadores en formación. Se estudiaron cuestiones referidas a los sistemas oscilantes, movimiento armónico simple, ecuaciones del movimiento, funciones armónicas, oscilaciones amortiguadas y forzadas, resonancia, nociones de período, frecuencia, ciclo en una oscilación, funciones seno y coseno. Los resultados se analizaron en términos de preguntas derivadas, de las organizaciones matemáticas y físicas desarrolladas y de los modelos construidos.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a la Medicina Nuclear, situamos el trabajo de Olivera Lucas (2015) en la última etapa de la enseñanza secundaria y el principio de los estudios universitarios del sistema educativo portugués.

Oliveira Lucas (2015) pone especial atención en la forma como se ha tratado la problemática del cálculo diferencial en el paso de Secundaria a la Universidad y en las relaciones que las diversas investigaciones didácticas propugnan entre éste y la modelización funcional en dicho nivel educativo (p.7). Describe la experimentación y evaluación de recorridos de estudio e investigación diseñados para la enseñanza del cálculo diferencial elemental en un primer curso de una Licenciatura de Medicina Nuclear de la enseñanza universitaria portuguesa. Estos recorridos parten de datos concretos y se basaban en problemas vinculados a la propagación de epidemias y a la variación de la concentración de un medicamento. Se realiza la construcción y descripción de los posibles recorridos matemáticos a priori y se analiza cada sesión de clase en términos de las cuestiones, actividades y técnicas.

- Respecto a los trabajos codisciplinares a las Ciencias de la Ingeniería, ubicamos el trabajo de Byache, Beaubiat y Spaier (2016), en el nivel secundario.

Byache, Beaubiat y Spaier (2016) implementaron un REI, durante un año escolar entero, sobre la geometría y los algoritmos con estudiantes de segundo año del liceo francés (estudiantes de 15 años). El recorrido parte de la pregunta *¿Cómo una computadora (que, a priori, sabe sólo hacer* *cálculos) puede hacer para proponer un videojuego en pantalla?* Esta cuestión comienza pidiendo a los estudiantes fijando en la pantalla un círculo rojo o un rectángulo verde, hacerlos desplazar, poner en marcha ciertos acontecimientos tales como explosiones en momentos precisos, hacerlos rebotar sobre una pared de la zona gráfica o hacerlos seguir trayectorias parabólicas. Este trabajo permitió aportar mejoras en la programación de cada movimiento y utilizar nociones matemáticas como, por ejemplo, las nociones de función, de intervalo, ecuaciones de rectas, vectores y expresiones de segundo grado. Paralelamente, esta cuestión permitió que los estudiantes programen algoritmos sobre la calculadora.

- Respecto a los recorridos monodisciplinares, ubicamos el trabajo de Llanos y Otero (2015), Barachet, Demichel y Noirfalise (2007), Gaud y Minet (2009) y Minet (2008) en el nivel secundario; y los trabajos de Fonseca, Pereira y Casas (2010) y Fonseca (2011b, 2011c) en la transición entre el nivel secundario y universitario.

Llanos y Otero (2015) diseñaron, implementaron y evaluaron un REI cuya pregunta generatriz corresponde a la multiplicación de curvas. El REI fue implementado en dos cursos en paralelo por cada año durante tres años consecutivos con estudiantes de cuarto año (14-15 años) del nivel secundario argentino. El recorrido permite estudiar varias organizaciones matemáticas, según las curvas que se elijan y las operaciones entre ellas: funciones polinómicas, funciones racionales, funciones homográficas, funciones potenciales, funciones radicales, funciones trascendentes. "La generatividad de la cuestión inicial propuesta en el REI, planteada en los dominios geométrico, gráfico y funcional; da sentido a los puntos notables de las curvas y a las características generales de la representación gráfica de dicha función" (Llanos y Otero, 2015: 270). Se realiza un análisis detallado en función de las funciones didácticas (mesogénesis, topogénesis y cronogénesis)

Barachet, Demichel y Noirfalise (2007) diseñan e implementan una actividad de estudio e investigación en dos cursos de segundo año (estudiantes de 15 años) del nivel secundario (liceo francés). El punto de partida de la AEI corresponde a tres problemas: en principio, la realización de un patrón de una pirámide a partir de una representación en perspectiva caballera, luego, la determinación de una pirámide de base cuadrada con volumen máximo y finalmente, el corte por un plano de una pirámide. Las preguntas propuestas son *Q_1: ¿Podemos construir un patrón de una pirámide y calcular su volumen?*; *Q_2: ¿Podemos construir este objeto? (La pirámide)* y *Q_3: Seccionamos la pirámide por el plano que pasa por tres puntos P, Q y R y conservamos la parte que no contiene el vértice. ¿Cómo hacer el patrón del nuevo sólido obtenido?* Estas cuestiones permitieron abordar una gran parte del programa de segundo, específicamente, la geometría en el espacio: longitud, área, volumen, ángulo, secciones planas de sólidos, representación plata de un sólido en el espacio, construcción de un patrón a partir del sólido y viceversa.

Gaud y Minet (2009) proponen un recorrido de estudio e investigación para el segundo año de nivel secundario francés (estudiantes de 15 años) cuya pregunta de partida es *Q_0: ¿Cómo construir una figura geométrica que cumpla determinadas condiciones?* Los autores proponen, además, otras dos cuestiones posibles de abordar*: Q_1: ¿Cómo saber si un método de construcción es exacto o aproximado?* Y *Q_2: ¿Cómo construir segmentos de longitud dada a partir de las relaciones entre otros segmentos?* Los autores esquematizan las posibles nociones que Q_0 permitiría abordar: triángulos isométricos y triángulos semejantes, círculos tangentes, propiedades de las transformaciones y sus demostraciones, e inscripción y circunscripción de una figura en otra. Se describen momentos de algunas de las sesiones de clases y algunas de las actividades propuestas a los estudiantes a partir de la descripción del recorrido en cinco etapas.

Minet (2008) propone un recorrido para el segundo año del nivel secundario francés (estudiantes de 15 años). El REI parte de tres preguntas generatrices cuyas respuestas requieren la construcción de praxeologías en torno a la optimización de funciones, dependencia entre dos cantidades, variaciones de una cantidad y comparación de dos cantidades. Las preguntas son Q_1*: ¿Cómo optimizar una cantidad?*, Q_2*: ¿Cómo estudiar las variaciones de una cantidad?* Y Q_3: *¿Cómo comparar dos cantidades?* Se presentan las "grandes cuestiones" del REI, sus actividades y técnicas utilizadas para resolverlas. Se muestra una posible organización de la clase en cinco etapas a partir de la presentación de la cuestión generatriz y algunas cuestiones derivadas.

Fonseca, Pereira y Casas (2010) diseñaron e implementaron en un "taller de problemas", un recorrido para estudiantes de Ingeniería Química cuya pregunta de partida se refiere a la optimización de funciones. Se otorgó un rol fundamental al software GeoGebra y al software Máxima. Se construyó un primer modelo algebraico identificando sus componentes, relaciones y expresión. El análisis de la experimentación se realizó en términos de las modificaciones posibles de realizar a la cuestión inicial para lograr transponerla de la institución secundaria a la institución universidad, en función de los momentos del estudio y determinando los grados de completitud de las organizaciones matemáticas reconstruidas.

Fonseca (2011b, 2011c) diseñó un REI en torno al "diseño y fabricación de un contenedor que tenga el mayor volumen posible" (Fonseca 2011b: 16). Su objetivo fue promover una continuidad en el proceso de estudio desde el nivel secundario hacia los primeros años de la universidad, a partir de la ampliación de una misma cuestión generatriz. El REI no fue implementado en la escuela secundaria y sí en la Universidad, en la Escuela de Ingeniería Industrial (electrónica y química) durante tres sesiones de un "taller de matemática". En este nivel, se propone estudiar unidades relativas al Cálculo y Álgebra Lineal. El objetivo particular de este recorrido es abordar el estudio de la derivada introduciendo la optimización de funciones como respuesta a la pregunta generatriz y a sus derivadas, recuperando tareas que abarcan por ejemplo, el estudio de la monotonía de la primera y segunda derivada, los extremos de una función y la interpretación de derivadas. Los datos se analizan a partir de la determinación de los grados de completitud de las organizaciones matemáticas reconstruidas.

- Finalmente, el recorrido propuesto para estudiar cuestiones de la Didáctica de la Matemática corresponde al trabajo de Corica y Otero (2016) realizado en el nivel universitario.

Corica y Otero (2016) diseñaron, implementaron y evaluaron un REI para la formación de profesores. El recorrido se desarrolló en un curso del tercer año de la carrera de profesora en matemática en una universidad pública argentina. Se propuso a los futuros profesores la cuestión generatriz *¿Cómo diseñar e implementar dispositivos didácticos para el estudio de la matemática?* El análisis se realiza a partir de la categorización de las preguntas derivadas según el género de tarea al que remite su estudio, la identificación de los tipos de tareas asociados a los mismos y las actitudes que pueden describirse en términos de las dialécticas.

La caracterización y clasificación de estos trabajos, se resumen en la Tabla 1. La primera columna contiene la codisciplinaridad de cada trabajo; la segunda columna informa el(los) autor(es) de los trabajos y el año de publicación; la tercera columna, los tema(s) implicados en la propuesta, la cuarta columna comprende la(s) cuestión(es) generatriz(ces); la quinta columna, el contexto donde se desarrolló la investigación (esto es, universidad, nivel secundario, otros) y finalmente, la sexta columna describe el foco de análisis de los datos.

	Nivel	Autor(es) (año)	Tema(s) implicados. Cuestión(es) generatriz(ces)	Contexto	Descripción/Análisis de datos
Ciencias Económicas, Administración y Dirección de Empresas y/o Microeconomía	Universitario	Fonseca (2010)	Política de movilidad de una empresa *Una empresa tiene tres sedes A, B y C. El director de recursos humanos ha adoptado una política de movilidad del personal senior que consiste en cambiar cada año algunos trabajadores de sucursal, con la posibilidad de volver a la sucursal de origen en los años posteriores. Si se aplica durante varios años seguidos la misma política (presentada en una matriz),* Q_1*: ¿Cómo evolucionará la distribución de trabajadores seniors en cada sucursal?* Q_2*: ¿Qué política se debe aplicar si se quiere que, a la larga, haya una determinada proporción p1-p2-p3 de trabajadores seniors en cada sucursal?*	Ciencias Económicas y Empresariales /Seminario	Organizaciones Matemáticas desarrolladas. Momentos del estudio
		Fonseca (2011a)	Fabricación de motos Q_0*: Se nos pide desde la dirección de nuestra empresa información económica: por un lado, sobre tres modelos de motos que se fabrican en la terminal T en el que intervienen cuatro variables: ventas, costes, ingresos y beneficios y, por otro lado, sobre la contratación de un plan de pensiones para sus trabajadores.*	Escuela de Ingeniería Industrial/Taller de matemática	Momentos del estudio y tipos de tareas propuestos.
		Serrano, Bosch y Gascón (2010)	Previsión de ventas *La empresa de software educativo TAD (Tecnologías Aplicadas a la Docencia) lleva un registro de las ventas trimestrales de 7 de sus principales productos durante los últimos 3 años. Nos encarga un informe sobre las cuestiones siguientes:* Q_1*: ¿Qué ventas se pueden prever durante los próximos trimestres para cada producto? ¿Y para los próximos meses? Presentar una fórmula que permita calcular las previsiones y justificarla explicando las garantías y limitaciones de cada propuesta.* Q_2*: ¿Para qué productos se prevén unas ventas con un crecimiento mayor al 10% trimestral? ¿Para cuáles se prevé un decrecimiento mayor al 12% anual?*	Administración y dirección de empresas/Taller de matemática/Taller de modelización	Análisis a priori de las cuestiones. Evaluación de la experimentación según las restricciones y la dialéctica de los medias y medio.
		Salgado, Otero, y Parra (2017)	Costos de un microemprendimiento, funciones de dos variables reales. Q_0*: ¿Cómo calcular los costos en un micro-emprendimiento?*	Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración de Empresas y Contador Público/Curso usual de Cálculo	Indicadores didáctico-matemáticos de cada una de las dialécticas.
	Secundario	Ruiz Munzon (2010) Ruiz, Bosch y Gascón (2007)	Ventas, precio unitario, costos de producción (Economía) Q_0*: En las condiciones iniciales ¿es posible obtener en la última fiesta del curso 04/05 un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas?*	Taller de matemática	Cuestiones y modelos a construir. caracterización del desarrollo hipotético de la modelización funcional en tres niveles caracterizados mediante praxeologías matemáticas de complejidad y completitud crecientes
		Donvito, Otero y Sureda (2014)	Planes de ahorro *¿Cuál es el mejor plan de ahorro para que la agrupación (grupo* Q_0*: de alumnos) genera la mayor cantidad de ingresos con bajo riesgo?*	Curso de matemática	Actitudes de la PICM (herbartiana, procognitiva, exotérica, de problematización, enciclopedista ordinario)
		Parra, Otero y	Modelos de oferta y de demanda Q_1: *¿Cómo calcular el punto de equilibrio en un modelo lineal de mercado?*	Clases usuales de Matemática	Dialécticas del estudio y de la investigación: identificación, generación

		Fanaro (2015) Parra y Otero (2017)	Q_2: *¿Cuánto varía exactamente el punto de equilibrio al modificar los parámetros del modelo?*	(estudiantes de 16-17 años).	y descripción de indicadores didáctico-matemáticos.
Biología	Universitario	Barquero (2009, 2011) Barquero, Bosch y Gascón (2013)	Dinámica de poblaciones Q_0: *Si suponemos que conocemos el tamaño de la población X en algunos periodos de tiempo, ¿podemos predecir cómo evolucionará después de n períodos? ¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de X a largo plazo? ¿Qué hipótesis sobre el entorno, la población y su crecimiento se tienen que asumir? ¿Cómo hacer predicciones sobre la evolución del tamaño de X y cómo validarlas?*	Ingeniería Técnica Química Industrial/Taller de matemática	Cuestiones, modelos y respuestas.
	Inicial	Ruiz-Higueras y García García (2011)	Metamorfosis Q_0: *Hoy nos han regalado una caja con gusanos de seda. Debemos cuidarlos para que crezcan y se hagan muy grandes ¿Cómo debemos alimentar a nuestros gusanos con las hojas de morera para que puedan crecer y desarrollarse adecuadamente?*	Inicial/Taller de matemática/Taller de modelización	Praxeologías matemáticas construidas. Caracterización de la praxis y logos didáctico de la profesora.
Física	Universitario	Costa, Arlego y Otero (2014)	Edificaciones sustentables Q_0: *¿Cómo construir edificaciones sustentables?*	Facultad de Ingeniería/Curso de matemática	Descripción de un modelo praxeológico de referencia. Análisis en términos de niveles de codeterminación. Descripción de las dialécticas.
	Secundario y Formación de Profesores	Otero, Gazzola, Llanos y Arlego (2016)	Sistemas oscilantes Q_0: *¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil?*	Formación de profesores-Investigadores en Formación/Curso de matemática	Preguntas derivadas, organizaciones matemáticas desarrolladas y modelos construidos.
Medicina Nuclear	Secundario y Universitario	Olivera Lucas (2015)	Propagación de epidemias Q_1: *¿Cómo varia la masa de una sustancia radiactiva desde su desintegración?* Q_2: *¿Cómo estudiar la variación en la concentración de un radiofármaco en el plasma Sanguíneo de un paciente t minutos después de su administración?* Q_3: *Conociendo la velocidad de administración, por vía endovenosa, de una dosis de un fármaco, ¿cómo puede variar esa dosis (cantidad) a lo largo del tiempo?* Q_4: *¿Cómo se puede prever a lo largo del tiempo el número de casos de cáncer de tiroides en las poblaciones más próximas del accidente en la antigua central ucraniana de Tchernobil?* Q_5: *¿Cómo se podrá prever la evolución del impacto de estos efectos genéticos en las generaciones futuras?*	Curso del nivel secundario portugués. Licenciatura en Medicina Nuclear/Curso de matemática	Construcción y descripción recorridos matemáticos a priori. Análisis de cada sesión de clase en términos de las cuestiones, actividades y técnicas.
Ciencias de la Ingeniería	Secundario	Byache, Beaubiat y Spaier (2016)	Principio de programación de una página Web, las nociones de función, de intervalo, ecuaciones de rectas, vectores, expresiones de segundo grado. Q_0: *¿Cómo puede hacer una computadora para proponer un videojuego en la pantalla?*	Escuela secundaria (estudiantes de 15 años)	Cuestiones derivadas y respuestas. Relaciones entre la matemática y algoritmos en la enseñanza y el nivel de desarrollo de los instrumentos digitales disponibles.
Monodisciplinar	Secundario	Llanos y Otero (2015)	Operación entre curvas (Matemática) Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si sólo se conocen sus representaciones gráficas y la unidad en los ejes?*	Secundario/Curso de matemática	Funciones didácticas (mesogénesis, topogénesis y cronogénesis)

		Barachet, Demichel y Noirfalise (2007)	Geometría en el espacio: longitud, área, volumen, ángulo, secciones planas de sólidos, representación plata de un sólido en el espacio, construcción de un patrón a partir del sólido y viceversa (Matemática) Q_1: *¿Podemos construir un patrón de una pirámide y calcular su volumen?* Q_2: ¿Podemos construir este objeto? (La pirámide)	Escuela secundaria (estudiantes de 15 años)	Presentación de las cuestiones, las actividades propuestas a los estudiantes, las técnicas utilizadas y las tecnologías. Descripción de la organización de las sesiones de clase.
		Gaud y Minet (2009)	Geometría plana: triángulo, rectas remarcables, círculos tangentes. (Matemática). Q_0: *¿Cómo construir una figura geométrica que cumpla determinadas condiciones?*	Escuela secundaria (estudiantes de 15 años)	Mostrar las “grandes cuestiones” del REI, sus actividades y técnicas para resolverlas. Mostrar una posible organización de la clase en cinco etapas. Presentación de la cuestión generatriz y algunas cuestiones derivadas.
		Minet (2008)	Optimización de funciones, dependencia entre dos cantidades, variaciones de una cantidad, comparación de dos cantidades (Matemática) Q_1: *¿Cómo optimizar una cantidad?* Q_2: *¿Cómo estudiar las variaciones de una cantidad?* Q_3: *¿Cómo comparar dos cantidades?*	Escuela secundaria (estudiantes de 15 años)	Mostrar las “grandes cuestiones” del REI, sus actividades y técnicas utilizadas para resolverlas. Mostrar una posible organización de la clase en cinco etapas. Presentación de la cuestión generatriz y algunas cuestiones derivadas.
	Transición entre Secundaria y Universidad	Fonseca, Pereira y Casas (2010)	Optimización de funciones (Matemática) Q_0: *¿Cómo afrontar problemas que requieran la búsqueda de una solución óptima (máxima o mínima) para una función real?*	Secundario-Universitario (Ingeniería Química) /Taller de problemas.	Modificaciones a la cuestión inicial. Momentos del estudio. Grados de completitud de las organizaciones Matemáticas.
		Fonseca (2011a, 2011b)	Optimización de caudal (Matemática) Q_0: *Tenéis que diseñar un acueducto para obtener el mayor caudal posible a partir de una lámina rectangular metálica: ¿Cómo se debe efectuar este doblaje de modo que el caudal sea máximo?*	Secundario/ Universitario (Ingeniería Industrial) /Taller de matemática	Grado de completitud de las Organizaciones Matemáticas desarrolladas.
Didáctica de la	Universitario	Corica y Otero (2016)	Formación de profesores (Didáctica de la Matemática) Q_0: *¿Cómo diseñar e implementar dispositivos didácticos para el estudio de la matemática?*	Universitario (Facultad de Ciencias Exactas) /Curso de Didáctica de la Matemática	Cuestiones derivadas, géneros y tipos de tareas didácticas. Descripción de dialécticas.

Tabla 1: Caracterización y clasificación de los trabajos relativos a enseñanzas por REI o propuestas abiertas de REI. Fuente: elaboración propia**.**

Capítulo 3

Punto de equilibrio en modelos de mercado: un posible modelo praxeológico de referencia

Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) en la TAD

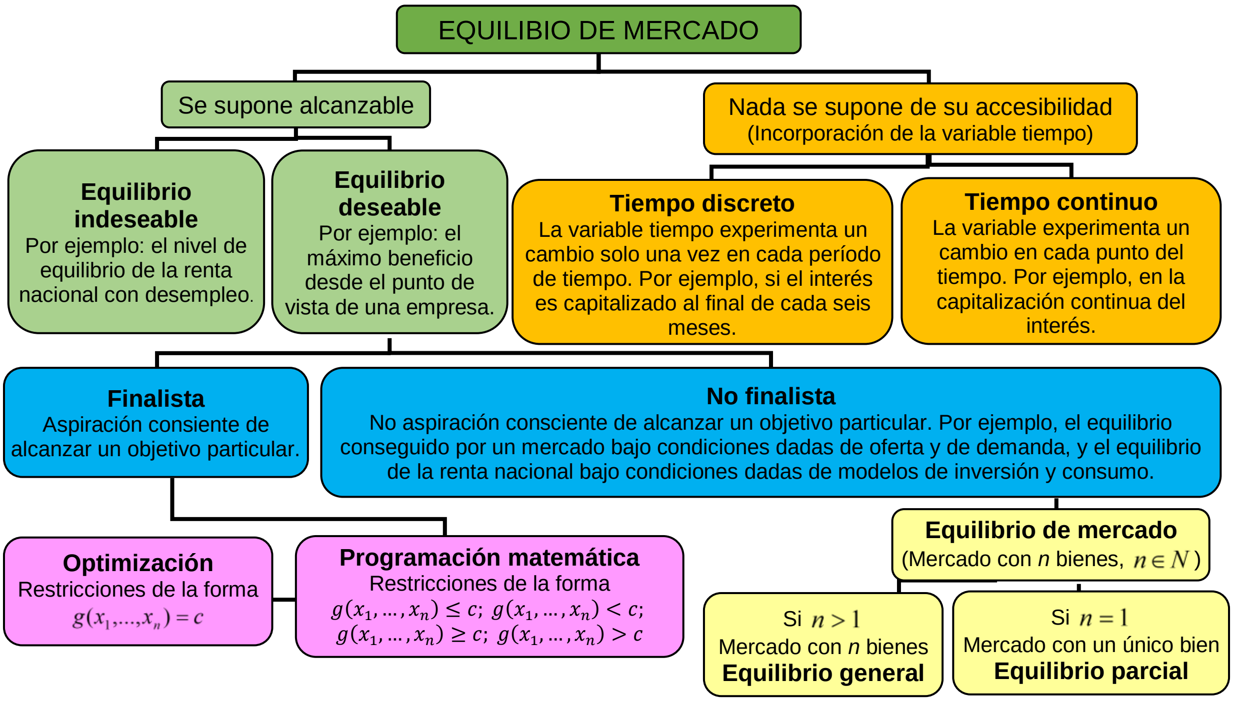
Investigar y estudiar a partir de una pregunta generatriz compromete a los actores del proceso de estudio en un trabajo próximo al desarrollado por un equipo de investigadores. Este proceso se funda a partir de las posibles preguntas derivadas que pueden emerger de la pregunta generatriz y las potenciales obras y demás recursos que cada pregunta puede activar. Esto delimita una serie de caminos, de recorridos, que el investigador, el didacta, el profesor, quien ser el encargado de dirigir el proceso de estudio debe poder desarrollar. Estos posibles caminos constituyen lo que Chevallard (2012) denomina un *modelo praxeológico de referencia* (MPR). Para Chevallard (Ibid.), cuando una persona se aproxima a un campo praxeológico con la intención de estudiar una pregunta *Q*, debe poder construir, al menos, un MPR para las obras (cualquiera sea su naturaleza) de ese campo praxeológico. Dicho MPR tiene el carácter de provisorio y abierto, es decir, es un análisis siempre provisorio y potencialmente abierto de praxeologías que el estudio de *Q* hará o podría hacer encontrar o reencontrar de un modo u otro. Para Bosch y Gascón (2009), el concepto de MPR para el investigador cumple una función clave en la recomposición o reconstrucción del campo de investigación en didáctica más allá de su fragmentación “disciplinar” actual: frente a una obra *O* de un campo praxeológico, los investigadores en didáctica deben asumir la exigencia de construir un MPR adecuado a su proyecto de investigación. Esto conduce al problema del análisis praxeológico en las investigaciones en didáctica y al problema del análisis didáctico, es decir, a una dialéctica entre análisis (y síntesis) praxeológica y análisis (y síntesis) didáctica.

Un posible MPR matemático-microeconómico

Presentaremos aquí un posible MPR construido a partir de una pregunta vinculada a los modelos de oferta y de demanda. Desde el lugar de un profesor, este MPR serviría como posible referente de los posibles recorridos potencialmente emergentes de las diferentes preguntas propuestas y sus derivadas. Se trata de considerar no sólo las praxeologías matemáticas sino también, en este caso, las vinculadas a los modelos de oferta y de demanda. Comenzaremos definiendo lo que se considera, en microeconomía, un mercado. El mercado se define como cualquier conjunto de transacciones o acuerdos de negocios entre compradores y vendedores: comprar y vender a un determinado precio. En contraposición con una simple venta, el mercado implica el comercio regular y regulado, donde existe cierta competencia entre los participantes. El mercado se define también como el ambiente social que propicia las condiciones para el intercambio. Se interpreta como la institución u organización social a través de la cual los ofertantes (productores y vendedores) y demandantes (consumidores o compradores) de un determinado bien o servicio, entran en estrecha relación comercial a fin de realizar ciertas transacciones comerciales (Schiller, 1994; Gould, Lazear, 2000; Chiang, 1987).

Un modelo económico construido adecuadamente, puede informar y/o predecir, de forma aproximada, el comportamiento de un mercado. La construcción de tal modelo requiere variables. Se pueden identificar dos tipos de variables: las endógenas y las exógenas. Las primeras son aquellas cuyos valores se pueden conocer a partir del mismo modelo. Las segundas se suponen externas al modelo y sus magnitudes se aceptan como datos dados. Estas últimas son los parámetros del modelo.

Una variable central en un modelo de mercado de oferta y de demanda es la noción de equilibrio. La noción de equilibrio puede clasificarse según la accesibilidad (es decir, la seguridad de obtenerlo o la necesidad de estudiar si es posible o no alcanzarlo) y según el estado (deseable o indeseable). Dentro del estado deseable, a su vez, se clasifica en finalista y no finalista. A su vez, dentro de la variedad finalista se clasifica en optimización y programación matemática y dentro del estado no finalista se clasifican en equilibrio parcial y equilibrio general (Chiang, 1987). Construimos el esquema siguiente para mostrar las posibles clasificaciones del equilibrio de mercado que originarán distintos recorridos:



Esquema 2. Se presentan las posibles clasificaciones del equilibrio de mercado**.** Fuente: elaboración propia.

Asumiendo cualesquiera de las posibles clasificaciones anteriores, pueden formulase preguntas cuyas respuestas – en sentido fuerte – se materialicen en la construcción de un conjunto de praxeologías matemáticas (OM) y praxeologías microeconómicas (OE) articuladas entre sí. Antes de describir los posibles trayectos es necesario, en este caso, asumir algunas hipótesis de partida. Comenzaremos suponiendo que el punto de equilibrio de un modelo de mercado existe y que es posible alcanzarlo. Así, bajo esta hipótesis diremos que la pregunta clave es la siguiente: *¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables endógenas que permitan alcanzar el equilibrio del modelo?*

Posteriormente, habiendo hallado el punto de equilibrio formulamos la siguiente pregunta, que asumiremos como pregunta derivada de la anterior, *¿Cómo y cuánto se modificaría el punto de equilibrio en respuesta a cierto cambio en un parámetro del modelo?* Descartando la hipótesis anterior, es decir, descartando la hipótesis que el equilibrio existe y es alcanzable, asumiremos una nueva hipótesis. Asumiremos no saber nada a acerca de la accesibilidad del equilibrio, es decir, asumiremos no tener garantías de que el equilibrio exista y menos aún que sea alcanzable. Bajo esta nueva hipótesis, la pregunta clave es la siguiente: *¿Alcanzará el modelo de mercado la posición de equilibrio?* La naturaleza de ambas hipótesis y, consecuentemente, de ambas preguntas es bien diferente. Se requieren análisis y estudios disímiles, no sólo desde el punto de vista de la matemática, sino también, de la microeconomía. En la Tabla 2 resumimos las hipótesis antes mencionadas junto con las preguntas. A su vez, presentamos cómo se denominan en Microeconomía (Chiang, 1987) cada uno de los análisis que estas preguntas generan.

Hipótesis	**H_0: El equilibrio existe y es posible alcanzarlo (Accesibilidad supuesta)**	**H_0: El equilibrio existe y es posible alcanzarlo (Accesibilidad supuesta)**	**H_1: Nada se sabe respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio**
Tipo de análisis	ANÁLISIS ESTÁTICO (El análisis se centra en hallar el valor del punto de equilibrio)	ANÁLISIS ESTÁTICO-COMPARATIVO (El análisis se centra en hallar el valor del punto de equilibrio, modificar los parámetros del modelo y luego, comparar ambos estados de equilibrios)	ANÁLISIS DINÁMICO (El análisis se centra en incluir la variable tiempo y analizar si el punto de equilibrio es o no alcanzable)
Pregunta generatriz	Q_0: ¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables endógenas que permitan alcanzar el equilibrio del modelo?	Q_1: ¿Cómo y cuánto se modificaría el punto de equilibrio en respuesta a cierto cambio en un parámetro del modelo?	Q_2: ¿Alcanzará el modelo de mercado la posición de equilibrio?

Tabla 2: Resumen de las posibles hipótesis, las preguntas y las denominaciones de los tipos de análisis. Fuente: elaboración propia.

A continuación, detallaremos cómo cada pregunta permite derivar otras y que obras permitirían activar. La pregunta Q_0: *¿Cómo hallaríamos el conjunto de valores de las variables endógenas que permitan alcanzar el* *equilibrio del modelo?* conduce, por un lado, al estudio de un conjunto amplio de funciones y de su comportamiento pues, dependiendo de las hipótesis de partida que se formulen sobre el conjunto de datos, las funciones de oferta y de demanda pueden ser de cualquier tipo. Considerando que el equilibrio existe y es alcanzable, el estudio de la pregunta Q_0 pasa a considerar dos grandes tipos de equilibrio de mercado: el *equilibrio parcial* y el *equilibrio general*. El primer caso trata un modelo de determinación del precio en un mercado aislado. Las funciones de oferta y demanda de un artículo son funciones del precio de ese artículo exclusivamente. El segundo caso corresponde al equilibrio general, donde la función de demanda de un artículo debe tomar en consideración el efecto no sólo del precio de ese artículo, sino de todos los artículos relacionados con él (Chiang, 1987). En cada caso de equilibrio de mercado, las funciones oferta y demanda pueden o no ser lineales. Incluso aquí, podría ser necesario el estudio estadístico de la regresión (lineal o no lineal) en función de la dispersión de los datos. Continuando con esta hipótesis, la del equilibrio de mercado alcanzable, formulamos otra, más específica, que denominamos H_2 y que refiere a la condición de equilibrio. Esta hipótesis es asumida dependiendo de las necesidades del estudio e investigación puesto que, podríamos considerar un punto de equilibrio, no de un mercado sino de una empresa, dirigiendo el recorrido hacia el dominio de las finanzas. En ese último caso, el estudio correspondería a la relación entre costos y gastos fijos, costos y gastos variables, volumen de ventas y utilidades operacionales de la empresa en cuestión. Se debería entonces buscar el nivel de producción y ventas que una empresa alcanza para lograr cubrir los costos y gastos con sus ingresos obtenidos. Es decir, en que nivel de producción y ventas la utilidad operacional es cero. O equivalentemente, buscar el nivel de producción y ventas en que los ingresos son iguales a la sumatoria de los costos y gastos operacionales. Restringiremos en este libro, el MPR sólo al análisis del equilibrio de mercado.

***H*2**: El equilibrio en el mercado se alcanza si, y sólo si la demanda excedente es cero. Esto es: $C_d(p) - C_o(p) = 0$ o bien $C_o(p) - C_d(p) = 0$, lo cual, matemáticamente podría escribirse como $|C_d(p) - C_o(p)| = 0$, siendo C_d la función de demanda (o bien, las cantidades demandadas), C_o la función de oferta (o cantidades ofrecidas) y *p* el precio de la mercancía (o el bien o servicio).

Asumiendo H_2, podemos enunciar una nueva hipótesis con el objetivo de precisar respecto a la naturaleza de las funciones de oferta y de demanda. Denominamos esta hipótesis por H_3, y una nueva pregunta, derivada de Q_0, que denominaremos $Q_{0.1}$

***H*3**: Las funciones C_d y C_o tienen un comportamiento afín y ambas dependen del precio p de una única mercancía.

***Q*0.1**: ¿Cómo determinar C_d , C_o y p para hallar el equilibrio de mercado?

Considerando las hipótesis anteriores podemos construir un modelo de mercado que permita responder la pregunta planteada $Q_{0.1}$. Puesto que se considera una única mercancía, sólo es necesario incluir tres variables en el modelo: la cantidad demandada de la mercancía (C_d), la cantidad ofrecida de la mercancía (C_o) y su precio (p). Hasta aquí, hemos especificado que las funciones de oferta y de demanda son ambas afines. Consideremos uno de los postulados básicos de la ley de oferta y de demanda: *un aumento en el precio tiende a disminuir la demanda y a aumentar la oferta. Inversamente, una disminución en el precio tiende a aumentar la demanda y disminuir la oferta*. A partir de este postulado obtenemos especificaciones que nos permiten construir un posible modelo. Alineándonos a este postulado, diremos entonces que la curva de oferta es una curva creciente mientras que la curva de demanda, decreciente. Proponemos así una nueva hipótesis, que denominamos H_4.

Con estas especificaciones podemos aportar una respuesta a la pregunta $Q_{0.1}$.

***H*₄:** La función C_d es afín decreciente y la función C_o es afín creciente.

$Q_{0.1}$: ¿Cómo determinar C_d, C_o y p para hallar el equilibrio de mercado?

El modelo afín puede construirse de dos maneras:

$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - bp \ \ (a, b > 0) \\ Q_s = -c + dp \ \ (c, d > 0) \end{cases} \text{ o } \begin{cases} Q_d = Q_s \\ p = -\frac{1}{b} Q_d + \frac{a}{b} \ \ (a, b > 0) \\ p = \frac{1}{d} Q_s + \frac{c}{d} \ \ (c, d > 0) \end{cases}$$

En ambos casos, la primera ecuación corresponde a la ecuación del equilibrio de mercado; la segunda, a la ecuación de la cantidad demandada y la tercera, a la ecuación de la cantidad ofrecida. En el primer caso, tanto la oferta como la demanda dependen del precio del bien. En el segundo caso, el precio depende de la cantidad ofrecida y de la cantidad demandada. Consideremos el primer modelo. En este modelo, los parámetros *a*, *b*, *c* y *d* se consideran positivos. Cuando representamos la función de demanda, como en la Figura 1, su intersección vertical está en *a* y su pendiente es – *b*, que es negativa, tal y como se necesita para satisfacer el postulado de la demanda. La función de oferta también tiene el tipo de pendiente requerida en el postulado de la oferta, *d* positiva, pero su intersección vertical es negativa, en –*c*. Consideramos una intersección vertical en un valor negativo pues de esta manera, la curva de oferta tiene una intersección con el eje horizontal positiva, propuesta en la Figura 1 como P_1, y en consecuencia satisface otra de las condiciones fundamentales en un modelo de oferta y de demanda que es que la oferta no aparezca a menos que el precio sea suficientemente positivo y alto.

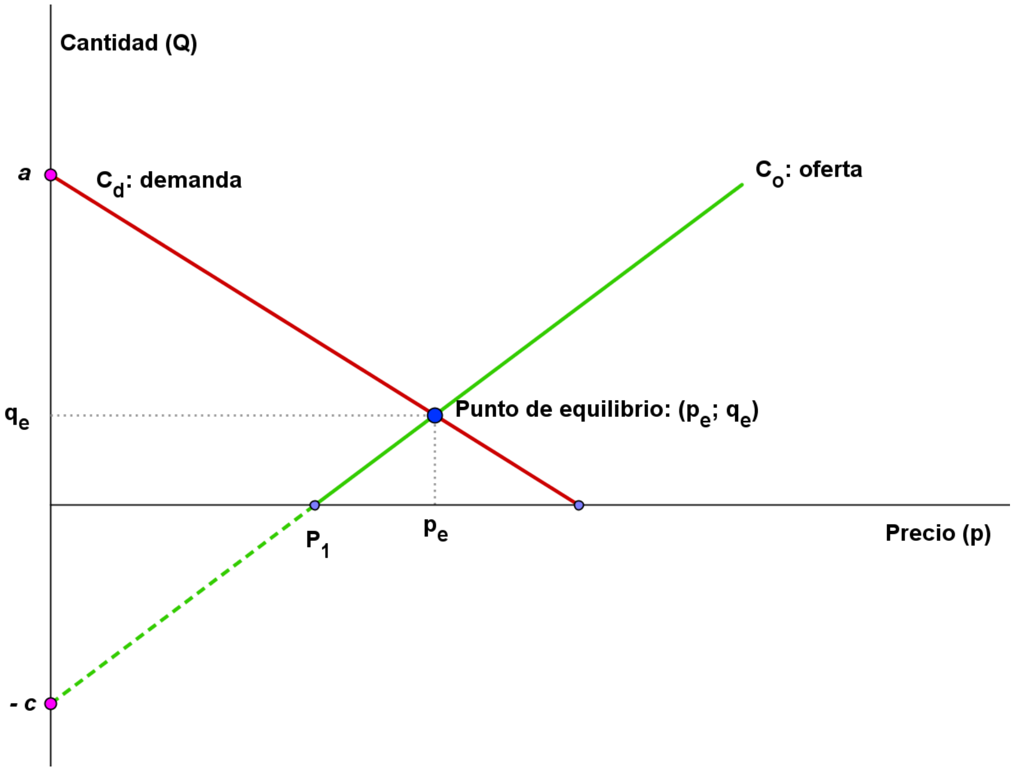


Figura 1: Se representa la recta de oferta (C_o), la recta de demanda (C_d) y el punto de intersección de ambas, esto es, el punto equilibrio (p_e; q_e). Fuente: elaboración propia.

Luego de construir el modelo – cualquiera de ellos – obtenemos las soluciones del sistema, esto es, los valores del precio y la cantidad de equilibrio, que denotamos en la Figura 1 por p_e y q_e. Hemos mostrado una manera de responder la pregunta $Q_{0.1}$ con la construcción de un modelo de tipo afín. Decimos "una" manera y no "la" manera porque la misma pregunta puede responderse a partir de la construcción de modelos no afines. Para ello, debemos cambiar la hipótesis sobre el comportamiento de las curvas de oferta y de demanda, de ambas o sólo de alguna de ellas. De esta manera, podemos estudiar Organizaciones Matemáticas relativas a funciones no diferentes a la función afín, incluso como se mencionó anteriormente, la obra estadística de la regresión. Por ejemplo, considerando la hipótesis que denominamos más abajo H_5, y manteniendo la misma pregunta anterior, podemos estudiar el comportamiento de una función de demanda polinómica de grado dos y una función de oferta afín creciente, o viceversa. Este es un posible recorrido que permitiría el estudio de la función polinómica de grado dos, de la función afín y de los sistemas mixtos. En cualquier caso, las funciones a considerar deben respetar la ley de la oferta y demanda antes mencionada.

***H_5*: La función C_d es cuadrática, la función C_o es afín creciente y dependen del precio de una única mercancía.**

***$Q_{0.1}$*: ¿Cómo determinar C_d, C_o y p para hallar el equilibrio de mercado?**

Así, podríamos construir un modelo no afín con tres ecuaciones: la función de demanda (función polinómica de grado dos), la función de oferta (función afín creciente) y la ecuación del equilibrio de mercado. Este modelo, además de las variables endógenas, requerirá, al igual que en ejemplo anterior, analizar los parámetros, específicamente el signo de cada uno de ellos de manera que se ajusten a los postulados de la oferta y la demanda. La hipótesis H_5 permite generar una diversidad de modelos, no se reducen al ejemplo antes mencionado. Habrá tantos recorridos posibles como tipos de funciones de oferta y demanda y las combinaciones de ambos se consideren. Cada uno de esos recorridos permitirá reconstruir y estudiar diferentes OM que podríamos rotular como la OM de las Funciones, ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Los modelos anteriores (ya sean afines o no) corresponden a modelos de mercado aislados, donde las funciones de oferta y demanda de un único artículo dependen solamente del precio de ese artículo. Pero un sistema "más realista" de esta situación debe considerar no sólo el efecto del precio de ese artículo sino también de todos aquellos relacionados con él. Cuando los precios de las otras mercancías se incorporan, debemos ampliar la estructura del propio modelo para que permita determinar los valores del equilibrio de esos otros precios (Chiang, 1987). Consideremos esta situación. Modificamos entonces la hipótesis de partida por una que contemple varias mercancías. La hipótesis que denominamos a continuación por H_6 se ajusta a este caso:

***H*₆**: En un mercado con n ($n > 1, n \in \mathbb{N}$) bienes o mercancías se alcanza el equilibrio si y solo si las $C_{di} - C_{oi} = 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$ donde C_{di} corresponde a las funciones de demanda y C_{oi} corresponde a las funciones de oferta de cada uno de los *n* bienes o mercancías.

Con esta hipótesis podemos plantear (al igual que ocurría con la hipótesis de dependencia del precio de una única mercancía) tantos modelos como naturaleza de funciones de oferta y de demanda se consideren. Por ejemplo, podemos plantear la hipótesis siguiente H_7 y formular una pregunta derivada de la pregunta inicial que denominaremos $Q_{0.2}$.

H_7: Las funciones C_{oi} y C_{di} son afines y dependen del precio de *n* mercancías (para $i = 1, 2, \dots, n$).

$Q_{0.2}$: ¿Cómo determinar cada una de las C_{oi}, C_{di} y p_i para hallar el equilibrio de mercado?

Según intervengan más artículos en un modelo, habrá más variables, más ecuaciones, y las ecuaciones serán más complejas (Chiang, 1987). En general, con *n* mercancías en total, podemos expresar las funciones de oferta, de demanda y la ecuación de equilibrio de la siguiente manera:

$$\begin{cases} C_{di} = C_{di}(p_1, \dots, p_n) & i = 1,2, \dots, n \\ C_{oi} = C_{oi}(p_1, \dots, p_n) & i = 1,2, \dots, n \\ C_{di} = C_{oi} & i = 1,2, \dots, n \end{cases}$$

De acuerdo con los subíndices de las ecuaciones de oferta y de demanda, el modelo posee una cantidad de $2n$ ecuaciones (cuya naturaleza dependerá de las hipótesis de partida). Al adicionarle la condición de equilibrio, el modelo se completa con un total de $3n$ ecuaciones. No obstante, sustituyendo las funciones C_{oi} y C_{di} en la ecuación de equilibrio, podemos reducir el modelo a un total de *n* ecuaciones simultáneas. Podemos escribir entonces el conjunto anterior de ecuaciones usando sólo la ecuación de equilibrio, que llamaremos *E*:

$$E_i(p_1, p_2, \dots, p_n)\ (i = 1,2, \dots, n)$$

Resolviendo simultáneamente las *n* ecuaciones, podremos determinar los *n* precios de equilibrio p_{ei} y posteriormente los valores correspondientes a las cantidades q_{ei} para cada $i = 1,2, \dots, n$. De esta manera, podemos reconstruir componentes claves de la OM relativa a los sistemas de *n* ecuaciones con *n* incógnitas, direccionando el recorrido a los componentes de la OM del Álgebra Matricial.

El análisis del punto de equilibrio que hemos caracterizado hasta aquí se denomina análisis estático. Este análisis se centra en hallar los valores de equilibrio de las variables endógenas del modelo, es decir, el precio y la cantidad de equilibrio. Un punto débil de este análisis es que cuando se cambia el valor de alguno de los parámetros del modelo, el estado de equilibrio puede no ser alcanzable (Chiang, 1987). Entonces, si cambiamos el valor de alguno de los parámetros podemos realizar dos recorridos: uno, suponer que el "nuevo equilibrio" es alcanzable, y entonces analizar la dirección y amplitud del cambio; el otro, no suponer nada respecto a la accesibilidad del nuevo estado de equilibrio y entonces realizar un análisis incluyendo la variable "tiempo". En este último caso, podemos a su vez, considerar dos posibles recorridos los cuáles dependerán de la variable "tiempo": si la suponemos discreta (en términos de períodos de tiempo) o continua.

Supongamos que, luego de realizar cambios en alguno de los parámetros del modelo, el nuevo estado de equilibrio es alcanzable. Continuemos con las hipótesis H_0 (equilibrio alcanzable) y H_2 (el equilibrio en el mercado se alcanza si y solo si la demanda excedente es cero). Nos interesa responder la pregunta siguiente, que denominamos Q_1:

Q_1: ¿Cómo y cuánto se modificaría el punto de equilibrio en respuesta a cierto cambio en un parámetro del modelo?

El análisis a realizar para responder esta pregunta compara diferentes estados de equilibrio. Por esta razón, una de las hipótesis de partida es que existe un equilibrio inicial y que el nuevo equilibrio es alcanzable, tal como lo era el anterior. Ahora bien, si introducimos un cambio que desequilibre el modelo – mediante una variación en el valor de algún parámetro – el equilibrio inicial cambiará. Como resultado, las variables precio y cantidad deberán experimentar ciertos ajustes. Asumiendo como hipótesis que el nuevo estado de equilibrio puede alcanzarse, hipótesis que denominamos H_8, planteamos la pregunta siguiente $Q_{1.1}$ derivada de la Q_1:

***H*$_8$**: Se asume que existe y el alcanzable un estado de equilibrio ante cualquier cambio que desequilibre el modelo.

***Q*$_{1.1}$**: ¿Cómo se puede comparar el nuevo equilibrio con el anterior?

La comparación a través del análisis estático-comparativo puede ser de carácter cuantitativa o cualitativa. Si, por ejemplo, nos interesa la pregunta relativa a cómo varía el valor de equilibrio (es decir, si crecerá o disminuirá cuando se modifique algún parámetro del modelo), el análisis será cualitativo porque sólo estudiamos la dirección del cambio. Pero si nos interesa la pregunta relativa a cuánto variará el valor del equilibrio, estudiaremos la magnitud del cambio, y entonces, el análisis será cuantitativo. Sin embargo, si obtenemos una respuesta cuantitativa podemos identificar la dirección del cambio a partir de su signo algebraico. Así, una pregunta a responder podría ser la siguiente:

***Q*$_{1.2}$**: ¿Cómo hallar la tasa de cambio del punto de equilibrio con respecto al cambio en un parámetro del modelo?

La respuesta a esta pregunta nos permite reconstruir la OM relativa a la variabilidad de funciones, que contiene la OM de la derivada y la OM del límite de funciones. El estudio a realizar dependerá de la naturaleza de las funciones de oferta y de demanda que, tal como lo mencionamos anteriormente, pueden o no ser de comportamiento afín y pueden o no depender de una única variable. Presentamos aquí, a modo de ejemplo, el caso más sencillo. Este caso corresponde al modelo con un único bien y con funciones de oferta y de demanda ambas afines. Este modelo es el siguiente:

$$\begin{cases} C_d = a - b \cdot p & a, b > 0 \\ C_o = -c + d \cdot p & c, d > 0 \\ C_d = \quad C_o & \end{cases}$$

El precio y la cantidad de equilibrio obtenidas a partir de este modelo son, respectivamente, $p_e = \frac{a+c}{b+d}$ y $q_e = \frac{ad-bc}{b+d}$. Ambas soluciones se denominan formas reducidas pues tanto el precio (p_e) como la cantidad (q_e) han sido reducidas a expresiones explícitas de los cuatro parámetros *a*, *b*, *c* y *d* (Chiang, 1987).

Para hallar cómo afectará – por ejemplo, al valor de p_e – un cambio infinitesimal en uno de los parámetros tenemos que diferenciar parcialmente las formas reducidas con respecto a cada uno de los parámetros. Si determinamos el signo de la derivada parcial, conocemos la dirección del cambio. De igual manera, procedemos respecto a q_e. Considerando p_e, por ejemplo, se pueden obtener las cuatro derivadas parciales a partir de su expresión reducida, es decir, a partir de $p_e = \frac{a+c}{b+d}$.

$$\frac{\partial p_e}{\partial a} = \frac{1}{b+d};\ \frac{\partial p_e}{\partial b} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2};\ \frac{\partial p_e}{\partial c} = \frac{1}{b+d} \text{ y } \frac{\partial p_e}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2}$$

Recordemos que todos los parámetros, en este modelo, están restringidos a ser positivos, y por lo tanto se puede concluir que:

$$\frac{\partial p_e}{\partial a} = \frac{\partial p_e}{\partial c} = \frac{1}{b+d} > 0 \text{ y } \frac{\partial p_e}{\partial b} = \frac{\partial p_e}{\partial d} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2} < 0$$

Gráficamente también podemos observar que ocurre si realizamos un cambio en uno de los parámetros. Presentamos aquí, a modo de ejemplo, el caso de la variación del parámetro *a* (ordenada de la recta de demanda, recta rotulada en la Figura 2 como Q_{di}).

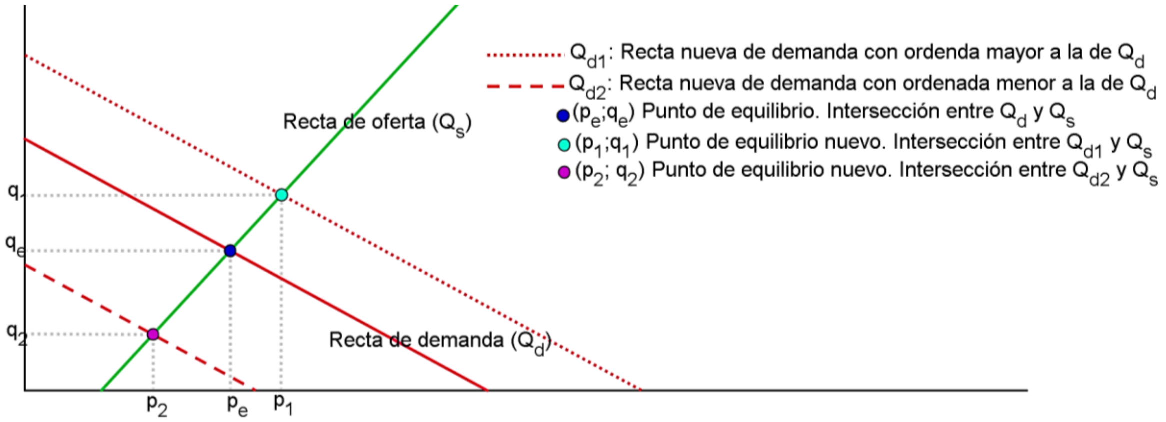


Figura 2: Se representan las variaciones del punto de equilibrio según se varíe el parámetro *a*. Fuente: elaboración propia.

Concluimos que cuando el parámetro *a* (ordenada de la recta de demanda) aumenta, el punto de equilibrio también aumenta tanto en el precio como en la cantidad ($p_1 > p_e$ y $q_1 > q_e$), mientras que cuando el parámetro *a* disminuye, p_e y q_e también ($p_2 < p_e$ y $q_2 < q_e$). Podemos realizar un análisis análogo para las variaciones de los demás parámetros. Este resultado coincide con lo obtenido por las derivadas parciales. Tengamos en cuenta que $\frac{\partial p_e}{\partial a} = \frac{1}{b+d} > 0$, con lo cual la relación de cambio es directa. Lo mismo puede realizarse para analizar las variaciones en la ordenada al origen de la recta de oferta, tal como se muestra a continuación:

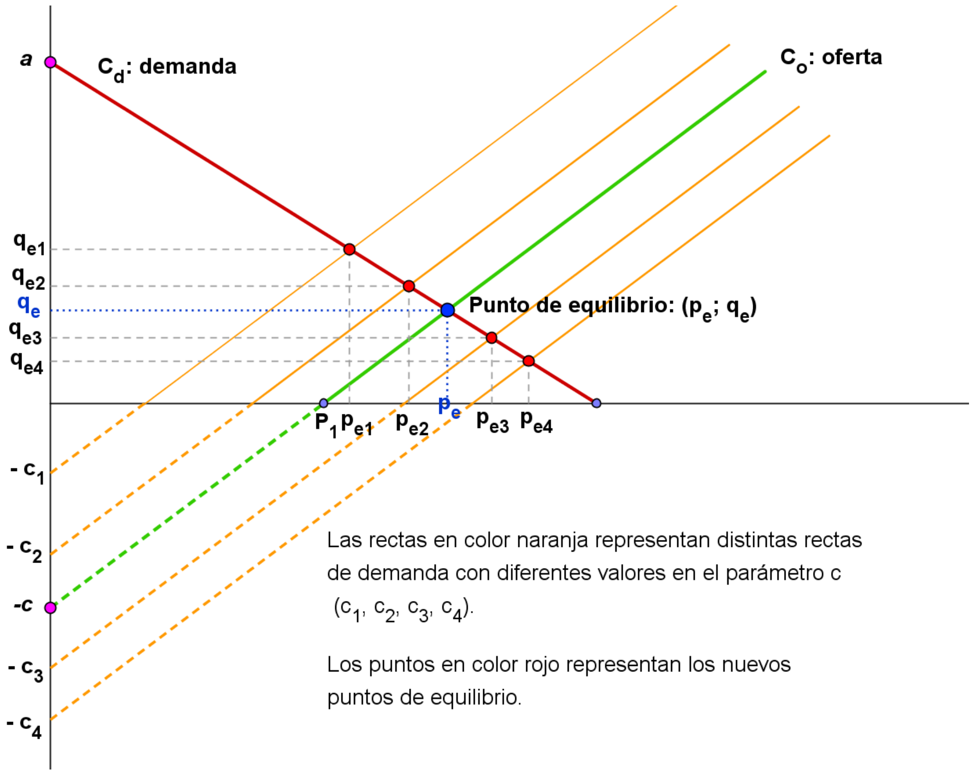


Figura 3: Se representan las variaciones del punto de equilibrio según se varíe el parámetro *d*. Fuente: elaboración propia.

Otro ejemplo sería considerar un modelo no lineal y analizar estas mismas variaciones. Por ejemplo, considerar el modelo

$$\begin{cases} C_d(p) = -ap^2 \pm bp + c \\ C_o(p) = dp^2 \pm ep - f \\ C_d(p) = C_o(p) \end{cases}$$

Cuya gráfica – con las variaciones en la curva de demanda – sería la siguiente:

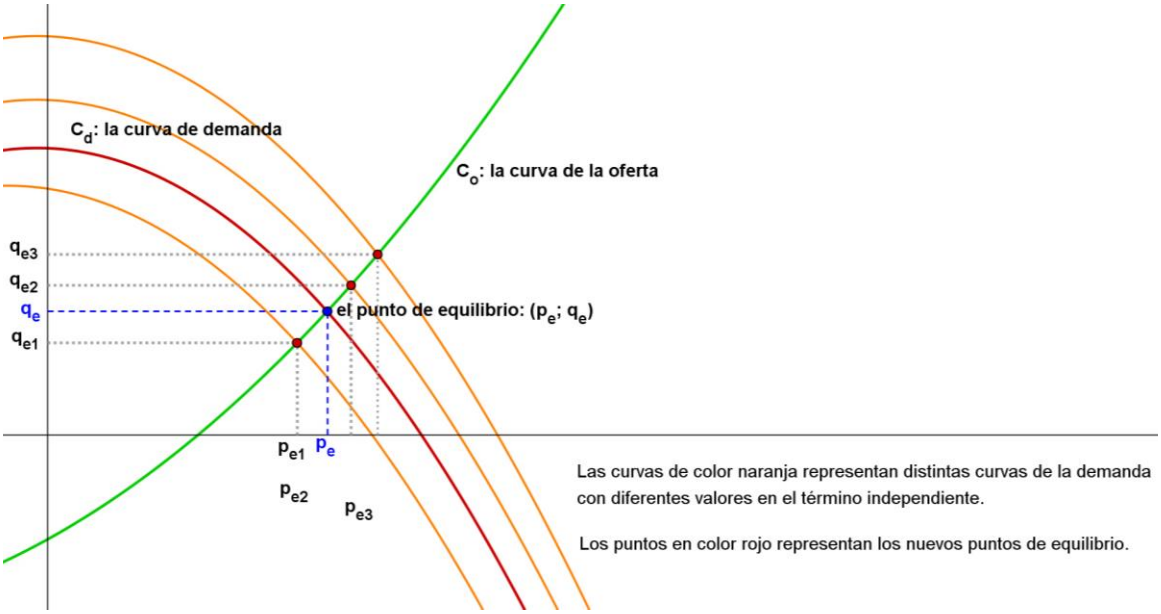


Figura 4: Variaciones de un modelo no lineal. Fuente: elaboración propia.

Estas conclusiones pueden obtenerse con la gráfica sólo cuando la cantidad de variables y de parámetros del modelo permiten realizar la representación. Otra situación frecuente en la microeconomía es que a un determinado precio la cantidad de producto que demandan los consumidores puede ser superior a la que ofrecen las empresas, quedando muchos consumidores sin satisfacer, algunos de los cuales estarán dispuestos a pagar un mayor precio por el bien. A esta situación se le denomina exceso de demanda o superávit de los consumidores. A su vez, a un determinado precio, la cantidad de producto que demandan los consumidores puede ser inferior a la que ofrecen las empresas. Esta situación se denomina exceso de oferta o superávit del productor: hay abundancia de productos por lo que las empresas, al no vender la producción, optan por bajar el precio.

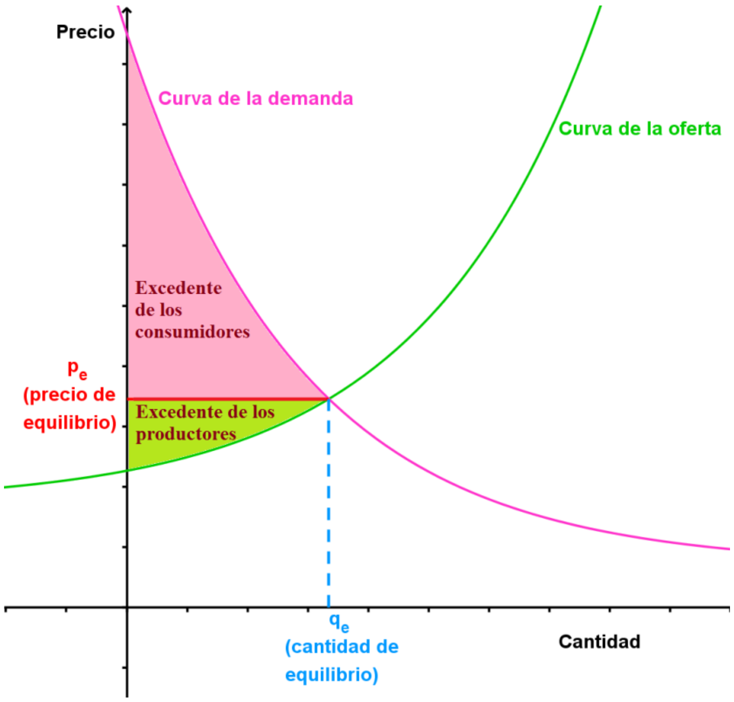


Figura 5: Excedente de los productores y excedente de los consumidores. Fuente: elaboración propia.

Teniendo en cuenta ambas situaciones y considerando las mismas hipótesis anteriores (precio de equilibrio accesible) se puede formular la pregunta siguiente:

***Q*1.3**: ¿Cuál es el excedente de los consumidores y de los productores en un determinado modelo de mercado de oferta y de demanda?

Responder esta pregunta implica estudiar la praxeología matemática en torno a las integrales, que, dependiendo de las variables del modelo, serán integrales definidas de funciones de una o varias variables. Observar que el excedente de los consumidores no es otra cosa que el área comprendida entre la curva de demanda y la recta $y = p_e$, siendo p_e el precio de equilibrio, mientras que el excedente de los consumidores es el área comprendida entre la curva de oferta y la misma recta anterior.

$$Excedente\ de\ los\ consumidores = \int_0^{q_e} [Q_d(p) - p_e]\, dp$$

$$Excedente\ de\ los\ productores = \int_0^{q_e} [p_e - Q_o(p)]\, dp$$

Consideremos nuevamente la hipótesis para el modelo con *n* mercancías (que ya mencionamos y denominamos H_6), formulemos la misma pregunta $Q_{1.2}$ y analicemos cómo podríamos responderla:

> $\boldsymbol{H_6}$: En un mercado con *n* bienes se alcanza el equilibrio si y solo si las $C_{di} - C_{oi}\ i = 1, 2, \dots, n$.
>
> $\boldsymbol{Q_{1.2}}$: ¿Cómo hallar la tasa de cambio del punto de equilibrio con respecto al cambio en un parámetro del modelo?

Presentemos nuevamente el modelo de mercado con *n* bienes, construido anteriormente, bajo las hipótesis del equilibrio accesible:

$$\begin{cases} C_{di} = C_{di}(p_1, \dots, p_n) & i = 1,2, \dots, n \\ C_{oi} = C_{oi}(p_1, \dots, p_n) & i = 1,2, \dots, n \\ C_{di} = C_{oi} & i = 1,2, \dots, n \end{cases}$$

Como ya se indicó, para obtener las soluciones del modelo p_{ei} y q_{ei} para $i = 1,2, \dots, n$ debemos utilizar alguna de las técnicas del álgebra matricial. Luego, nos interesa estudiar cómo afectará un cambio infinitesimal en cada uno de los parámetros a cada valor de p_{ei} y de q_{ei}. Nuevamente aquí habría que diferenciar parcialmente las formas reducidas con respecto a cada uno de los parámetros y obtener conclusiones a partir de la expresión de las derivadas parciales, tal como en el caso anterior. En este caso resulta imposible realizar un análisis a partir del gráfico por limitaciones dimensionales, por lo tanto, la técnica de diferenciación es la única posibilidad.

El estudio de las derivadas parciales permite analizar el tipo más simple de problemas de estática-comparativa, en los cuales la solución del equilibrio del modelo puede expresarse en la forma reducida (Chiang, 1987). En ese caso, la diferenciación parcial de la solución dará directamente la información estático-comparativa deseada. Recordemos que la definición de derivada parcial requiere la ausencia de cualquier relación funcional entre las variables independientes (por ejemplo, x_1), de modo que pueda variar sin afectar a los valores de $x_2, x_3, \dots, x_n$. Esto significa, en el análisis estático-comparativo, que los parámetros o las variables exógenas que aparecen en la solución en forma reducida deben ser independientes entre sí. La estática-comparativa ignora la inestabilidad del modelo. Es decir, ignora que el nuevo equilibrio no se alcance jamás. El estudio de tal proceso pertenece al campo denominado dinámica económica (Chiang, 1987). En este análisis dinámico, la hipótesis de partida es que nada se sabe respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio. Ya hemos denominado a esta hipótesis con H_1.

H_1: Nada se sabe respecto a la accesibilidad del estado de equilibrio a medida que transcurre el tiempo.

***$Q_{2.1}$*:** ¿Cómo cambia una variable a lo largo del tiempo?

***$Q_{2.2}$*:** ¿Tenderá el modelo a alcanzar el punto de equilibrio?

Para construir respuestas a las preguntas $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$ debemos introducir en el modelo la variable "tiempo", lanzando así dos posibles estudios. Por un lado, el producido al considerar la variable tiempo como una variable de tipo discreta y por otro, el considerarla de tipo continua. En el primer caso, la variable dependiente solamente cambiará cuando la variable "tiempo" cambie de un valor entero al siguiente, por ejemplo, de $t = 1$ a $t = 2$. Y en este sentido, se considera discreta. En el segundo, la variable tiempo manifestará siempre un cambio entre dos valores determinados. El primer caso, puede producir el encuentro con los componentes OM relativa a las ecuaciones en diferencias. En el segundo caso, con la OM relativa al cálculo diferencial e integral. Podemos formular así dos nuevas hipótesis (una de ellas que denominaremos H_9 y la otra, H_{10}). En cada caso, mantenemos las mismas preguntas $Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$:

***H_9*:** La variable experimenta un cambio sólo una vez en cada período de tiempo (Variable discreta).

$Q_{2.1}$: ¿Cómo cambia una variable a lo largo del tiempo?

$Q_{2.2}$: ¿Tenderán a converger hacia ciertos valores de equilibrio?

Al responder estas preguntas bajo la hipótesis del tiempo discreto, podemos ingresar, como ya lo indicamos, en la Organización Matemática relativa a las ecuaciones en diferencias. Recordemos que, en este sentido los valores del tiempo t se interpretan cómo referidos a períodos de tiempo. El término período se utiliza en economía no en el sentido del calendario, sino en el sentido analítico. Es decir, un período puede involucrar una cierta extensión de tiempo de calendario en un modelo económico particular, pero una totalmente distinta en otro. Es más, aún en el mismo modelo, períodos sucesivos no necesariamente tiene que significar igual tiempo de calendario. Un período es el lapso que transcurre antes de que la variable dependiente experimente un cambio (Chiang, 1987). De esta manera, si queremos analizar cómo varía determinada variable "y" según un tiempo t discreto debemos considerar el intervalo de cambio de la variable en cuestión respecto al intervalo de tiempo en el cuál se ha producido el cambio. Esto es, matemáticamente, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$. Si en cambio, consideramos la hipótesis de la variable continua (denominada H_{10}) y mantenemos las mismas preguntas ($Q_{2.1}$ y $Q_{2.2}$), podemos ingresar en la Organización Matemática relativa al cálculo diferencial e integral.

H_{10}: En cada punto del tiempo, le ocurre algo a la variable (Variable continua).

$Q_{2.1}$: ¿Cómo cambia una variable a lo largo del tiempo?

$Q_{2.2}$: ¿Tenderán a converger hacia ciertos valores de equilibrio?

En cualquiera de los casos, la búsqueda de respuestas a las preguntas conduce a las tareas, técnicas, tecnologías y teorías matemáticas de las ecuaciones en diferencias (tiempo discreto) por un lado, y del cálculo integral y las ecuaciones diferenciales (tiempo continuo), por otro.

Mencionaremos finalmente las OM que podemos construir si recorremos la rama del Esquema 1 que contempla el equilibrio denominado “finalista”. Recordemos que este tipo de equilibrio de mercado pretende alcanzar un objetivo determinado, como puede ser la optimización de funciones y la programación matemática. En su forma más simple, la pregunta a responder resolverá problemas de este tipo:

$$\max(min)\, f(x)$$
$$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

Donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el vector de las variables de decisión, $f(x)$ es la función objetivo y Ω es el conjunto de decisiones o restricciones del problema. Cuando el conjunto Ω está representado por restricciones de la forma $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, la organización matemática a que podrá aportar respuestas corresponde a la optimización matemática. Cuando el conjunto está formado por restricciones de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, $g(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ o $g(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$, la organización matemática corresponde a la programación matemática. Conviene destacar que, cuando se pretende implementar alguno de estos posibles recorridos, las hipótesis formuladas no se explicitan a los estudiantes como tales, es decir, como hipótesis de trabajo. Estas hipótesis, conocidas por el profesor, quedan implícitas en los datos de los problemas que los alumnos deberán resolver. Por ejemplo, la hipótesis sobre la naturaleza de las funciones será considerada por el profesor en el momento en que consideren el conjunto de datos.

De los posibles recorridos caracterizados anteriormente, hemos realizado la implementación, análisis y evaluación en la escuela secundaria, del que permite realizar parcialmente un análisis estático y parcialmente también un análisis estático-comparativo. Este recorrido particular nos permitió reconstruir componentes de la OM relativa a la *Función Afín*, la OM referente a *Rectas en el plano*, la OM de *Sistemas de dos ecuaciones* *lineales con dos incógnitas*, y la OM en torno al *Límite y Derivada de funciones* desde el punto de vista de la variabilidad. Describimos algunos resultados de esta implementación en el capítulo siguiente. Finalizamos este capítulo presentando los posibles recorridos en un esquema, que como ya indicamos, cada trayecto dependerá de las hipótesis de partida en primer lugar y, en segundo lugar, de las preguntas generatrices.

Esquema 3: esquema de recorridos en términos de estudio e investigación. Fuente: elaboración propia

Utilizando el esquema herbartiano desarrollado propuesto por Chevallard, escribimos los REI de la manera siguiente:

REI_1: $S(X, Y, Q_0)$ ➦ { Q'_0, Q''_0, OM $_{\text{Funciones}}$, R $_{\text{Oferta y demanda}}$} ➥ {$R^{\heartsuit}_{0'}$, $R^{\heartsuit}_{0''}$}

REI_2: $S(X, Y, Q_1)$ ➦ { Q'_1, Q''_1, OM $_{\text{Funciones}}$, R $_{\text{Oferta y demanda}}$; $R^{\Diamond}_{0'}$, $R^{\Diamond}_{0''}$}➥{

$R^{\heartsuit}_{1'}$; $R^{\heartsuit}_{1''}$}

REI_3: $S(X, Y, Q_2)$ ➦ {Q'_2, Q''_2, $OM_{\text{Funciones}}$, $R_{\text{Oferta y demanda}}$; $R^{\Diamond}_{0'}$, $R^{\Diamond}_{0''}$; $R^{\Diamond}_{1'}$; $R^{\Diamond}_{1''}$} ➥ {$R^{\heartsuit}_{2'}$, $R^{\heartsuit}_{2''}$}

Este MPR no es absoluto ni definitivo. Está en constante cambio y como tal, puede ampliarse. En este caso, no sólo a partir de la incorporación del equilibrio en finanzas, sino también, por ejemplo, incorporando una rama que cuestione la conformación de los precios que intervienen en el modelo.

En el capítulo siguiente, presentaremos resultados parciales de la implementación de un posible recorrido de estudio e investigación diseñado bajo las hipótesis y preguntas que se detallan en la segunda sección de Capítulo siguiente. La implementación se realizó en el último año del nivel secundario. Describiremos su desarrollo en términos de los gestos que la comunidad de estudio desarrolla durante el proceso de búsqueda de respuestas a una pregunta, gestos conformes a la actividad de estudiar e investigar, que, como ya lo indicamos en la Introducción, Chevallard (2001, 2012) denomina “dialécticas”. En la primera sección del capítulo describiremos las cuatro dialécticas más importantes.

Capítulo 4

Implementación y descripción de un REI en el aula de matemática

Las dialécticas: gestos conductores de una enseñanza por investigación

Existen diferentes acepciones del concepto “dialéctica”. Una de ellas es interpretarla como “la ciencia del movimiento”. Esta concepción es muy indeterminada y subraya la movilidad o carácter dinámico de todo. Otra acepción de término es definirla como concepción de la “diversidad de relaciones” implicadas en cualquier proceso: significa que todo está interconectado y que hay un proceso continuo de cambio en esta interrelación (Bueno, 1972). La tercera acepción de dialéctica es definirla como concepción que subraya la estructura de “retroalimentación negativa” de ciertos sistemas, llamados precisamente por este motivo, dialécticos (Olleta, 1997). La cuarta acepción, que fundamenta la noción de dialéctica en una enseñanza por REI, es la que la define en función de las contradicciones implicadas en los procesos analizados. En este caso, en los procesos de estudio. Esta concepción acepta los cambios originados en las contradicciones, a partir del conflicto o del enfrentamiento. Aquí, en un aula de clase, en una comunidad de estudio provista de intenciones de responder una pregunta generatriz y sus derivadas.

Adhiriendo a la noción de dialéctica como una “teoría de las contradicciones”, y considerando el carácter metafórico de la ciencia en general y de la didáctica en particular, asumimos que los gestos, las maneras de hacer, que ocurren en el desarrollo de una clase pueden encuadrarse en diferentes *gestos dialécticos*: del estudio y de la investigación; del individuo y del colectivo; del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica; del tema y fuera-de-tema; del paracaidista y de las trufas; de las cajas negras y cajas claras; media-medio; de la lectura y de la escritura, y de la difusión y de la recepción

(Chevallard, 2001, 2013b) y de las preguntas y respuesta. Esta última dialéctica fue considerada como un sinónimo de la del estudio e investigación. Pero, en Chevallard (2013b) la propone como una dialéctica diferente al resto. Tendríamos entonces, un total de 10 gestos encuadrados dentro del término dialéctica.

Es importante destacar que no hay dualidad en una dialéctica, sino un proceso interactivo, una interrelación entre los polos de la misma, que generan "algo nuevo". Por ejemplo: formular una pregunta y construir una respuesta son acciones contrapuestas, no duales, una acción llama a la otra. Dentro de esta dialéctica, si se comenzó a construir una respuesta, habrá también que formular nuevas preguntas, nuevos cuestionamientos que conducen y delimitan el recorrido cuyo punto de llegada es la respuesta R corazón. Describiremos a continuación las diez dialécticas:

1. La dialéctica *del estudio y de la investigación*: un REI supone una "buena combinación" del estudio (de respuestas ya hechas R rombos; de cuestiones nuevas Q_i y de cualquier otra obra O_j que se incorpore al medio de estudio) y la investigación (para pasar de las obras precedentes a la respuesta R) (Chevallard; 2013b, p.5)

2. La dialéctica *del individuo y del colectivo* (o *de la autonomía y de la sinonimia*): el trabajo necesario a desarrollas en una enseñanza por REI es un trabajo colectivo entre los actores de la comunidad de estudio. Es decir, es necesario construir colectivamente una respuesta a las cuestiones a partir de las respuestas y de las investigaciones individuales. Esta construcción pasa por momentos de discusión y por momentos de acuerdos.

3. Dialéctica *del análisis-síntesis praxeológica y del análisis-síntesis didáctica*: consideraremos esta dialéctica no en el sentido estricto, es decir, sin distinguir el análisis-síntesis praxeológico del análisis-síntesis didáctico. Preferimos sin embargo mantener el nombre

asignado por Chevallard (2013b) pero asumimos que la construcción de una respuesta a una pregunta no se limita a buscar, investigar y estudiar los saberes útiles para construir la respuesta. Es necesario concretar un análisis de esos saberes para determinar qué es lo útil, lo funcional para la construcción de la respuesta buscada. Este análisis comporta además la realización de una síntesis, entendida no como un resumen de esos saberes sino como una producción personal-grupal de los saberes, identificando las relaciones y los elementos útiles para la construcción de respuestas.

4. Dialéctica *del tema y fuera-de-tema*: una auténtica pregunta generatriz, vinculada o no con disciplinas diferentes a la matemática, conduce inevitablemente a estudiar e investigar saberes ligados directa o indirectamente a la pregunta de partida. La búsqueda de respuestas a una pregunta no es lineal y directa. Es necesario transitar por un camino con ramificaciones que generan "salidas" al estudio e investigación de obras que parecen ser pertinentes para la construcción de la respuesta a construir – aunque luego resulten no serlo.

5. Dialéctica *del paracaidista y de las trufas*: un proceso de estudio que tiene como punto de partida una pregunta generatriz necesita "rastrillar" áreas amplias, de gran alcance, áreas donde se estima puede encontrase un saber útil a la construcción de una respuesta. Una vez identificadas las áreas pertinentes es necesario realizar enfoques cada vez más próximos con el objetivo de identificar las "pepitas" – las "trufas" – que permitirán progresar en el estudio e investigación. Los términos "paracaidista" y "trufas" se deben al historiador francés Emmanuel Leroy-Ladurie, quien clasificó a los historiadores en paracaidistas y buscadores de trufas. Por un lado, los paracaidistas realizan una exploración en extensas áreas de territorio, mientras los buscadores de trufas sacan a la luz tesoros

enterrados. “Buscadores de trufas y “paracaidistas: los primeros hurgan en tormo a sí con las narices metidas en la tierra; en tanto que los segundos descienden en medio de las nubes, inspeccionando el panorama de todo el campo, pero desde una altura tan elevada que no alcanzan a percibir con claridad nada en detalle” (Bouza Álvarez, 1990: 99).

6.Dialéctica de las *cajas negras y cajas claras*: en una enseñanza tradicional, las obras deben estudiarse porque así se ha explicitado en el programa de estudios, sin cuestionar demasiado su utilidad, por qué y para qué de su estudio. En una enseñanza por REI, en cambio, se trata de buscar un nivel intermedio sobre cuánto y qué estudiar de una obra. Este nivel es considerado como el nivel de gris más óptimo en función de una necesidad. Esta dialéctica estimula el estudio de los saberes pertinentes, los necesarios para “clarificar” algunos aspectos de las obras que son necesarias y dejar en la “oscuridad” los que no lo son.

7.La dialéctica de médias y medios (o de la conjetura y de la prueba): el medio didáctico de una enseñanza por REI es un medio didáctico más próximo al medio de estudio desarrollado en una práctica de investigación, por ejemplo, al medio de estudio que desarrolla un equipo de investigadores cuando desarrollan, ejecutan y evalúan un proyecto. El medio de un REI no está determinado a priori, es construido y sus componentes son puestos a prueba paralelamente a la construcción de respuestas. Un “media” es (…) todo sistema de puesta en representación de una parte del mundo natural o social destinado a cierto público: el “curso” de un profesor de matemática, un artículo de química, el diario de un presentador de televisión, un periódico regional o nacional, un sitio de Internet; etc.” (Chevallard, 2007, p.1).

8. Dialéctica de *la lectura y de la escritura* (**D_{L-E}**): el proceso de búsquedas de respuestas disponibles en los diferentes medias conduce a una “deconstrucción” de estas respuestas. Esta deconstrucción refiere a un desglosamiento, a identificar, a separar, a “leer” las obras que pueden servir a la construcción de la respuesta buscada. Esta “lectura” activa así, en principio, tres tipos de tareas: *observar, analizar y evaluar* estas respuestas para luego, activar otros tres tipos de tareas, más propios de la “escritura”: *desarrollar*, *difundir* y *defender* la respuesta producida. Esta dialéctica incita al desarrollo de diversos niveles de escritura: diarios de clase, notas de síntesis, glosarios, producción final, etc.

9. Dialéctica *de la difusión y de la recepción* (**D_{D-R}**): una vez construida la respuesta, cada miembro o grupo de estudio debe difundirla, darla a conocer, explicando sus componentes y justificando las elecciones realizadas. Esta difusión no consiste en una simple presentación de la respuesta, sino que debe ser una difusión que considere la recepción del resto de la comunidad, es decir, una difusión que considere los cuestionamientos, las aceptaciones y resistencias del resto de la clase.

10. La dialéctica de las preguntas y respuestas: una pregunta generatriz “fuerte” debe permitir formular diferentes preguntas derivadas y al mismo tiempo, potenciar un estudio de respuestas ya construidas. El estudio de una praxeología, una obra, cualquiera que sea, supone una doble interrogación, un doble cuestionamiento: se puede partir ya sea una respuesta (para ir en la dirección de una pregunta) o de una pregunta (para ir en la dirección de construcción de su respuesta). En ambos casos, el rol clave lo tiene la utilidad de la praxeología.

Contexto de implementación de REI

La implementación del REI fue llevada a cabo en el último año del nivel secundario argentino desde el primer día del ciclo lectivo, y estuvo a cargo del investigador. Comenzar con la implementación desde el primer día de clases fue una decisión tomada durante la etapa de diseño del REI pues, de esta forma, no se realizó un “entrenamiento” previo en las praxeologías que permitirían dar respuesta a las preguntas, es decir, los estudiantes no sabrían qué nociones matemáticas permitirían aportar las respuestas. La implementación de mayor duración se desarrolló durante 36 sesiones de clases en un grupo de estudiantes del último año del nivel secundario argentinos (16-17años), distribuidos (a elección de los estudiantes) en 6 grupos de trabajo ubicados, por decisión institucional, en mesas redondas. Las 36 clases se desarrollaron a lo largo de siete meses. Los encuentros se concretaban dos veces por semana con una duración de 2 horas cada sesión. Se realizó observación participante, se tomaron notas de campo que permitieron registrar en un diario de clase las intervenciones, dificultades, sensaciones, acontecimientos, etc. Se registró el desarrollo de las clases en audios generales para facilitar su registro cronológico, y principalmente se recolectaron las producciones de los estudiantes de todas y cada una de las sesiones de clase. Estas producciones eran escaneadas y devueltas la sesión siguiente.

El REI fue implementado dentro de las clases usuales de Matemática. El profesor y los estudiantes acordaron que el proceso de estudio a desarrollar diferiría de la forma a la que estaban habituados a trabajar. Este grupo de estudiantes ha realizado toda su escolaridad en una enseñanza enmarcada en el paradigma tradicional, donde el profesor de matemática explica un “tema” del programa y, los alumnos resuelven actividades de aplicación del “tema” previamente expuesto. En esta oportunidad, el profesor les propuso trabajar de una forma diferente: estudiarían matemática a partir de preguntas, preguntas que cada grupo debería responder, luego comunicar y defender. No se redactó un contrato de trabajo, pero sí se mencionaron algunas “cláusulas” respecto a:

- la modalidad de trabajo: los estudiantes trabajarían en grupo de máximo cinco integrantes cada uno. La conformación de los grupos era voluntaria y debían permanecer estables a lo largo de todo el recorrido.

- los recursos a utilizar: además del propio profesor de matemática, los estudiantes podían consultar a los demás profesores del colegio, en particular al profesor de economía. Se incorporó la utilización de las computadoras: cada grupo disponía de una computadora con acceso a Internet permitiendo realizar búsquedas cuando lo consideraban necesario o utilizar el GeoGebra si lo consideraban pertinente. Además, se acordó asistir a la biblioteca del establecimiento para consultar los libros de textos (de matemática y/o de microeconomía) allí disponibles.

- la evaluación: se acordó que la evaluación sería a lo largo del proceso de estudio, clase a clase, a partir de las producciones individuales y grupales diarias. Luego, habría una instancia de síntesis que también formaría parte de la evaluación de todo el proceso de estudio.

Como ya se indicó, las preguntas generatrices del REI se refieren a la Microeconomía, específicamente al comportamiento de las leyes de oferta y la demanda de mercado. El REI permiten construir y analizar las variaciones de un modelo afín de oferta y de demanda, donde las ecuaciones dependen únicamente del precio del bien (p) y de las cantidades del mismo (cantidad demanda y cantidad ofrecida). Estas hipótesis, no se explicitaron al grupo de alumnos como tales, sino que fueron consideradas durante las primeras fases de la ingeniería didáctica, puntualmente, durante la construcción del MPR. Las hipótesis son las siguientes:

H

H_0: El equilibrio existe y es posible alcanzarlo (Accesibilidad supuesta)
H_2: El equilibrio en el mercado se alcanza si, y sólo si la demanda excedente es cero. Esto es: $C_d(p) - C_o(p) = 0$ o bien $C_o(p) - C_d(p) = 0$, lo cual, matemáticamente podría escribirse como $|C_d(p) - C_o(p)| = 0$, siendo C_d la función de demanda (o bien, las cantidades demandadas), C_o la función de oferta (o cantidades ofrecidas) y p el precio de la mercancía (o el bien o servicio).
H_3: Las funciones C_d y C_o tienen un comportamiento afín y ambas dependen del precio p de una única mercancía.
***H_4*:** La función C_d es afín decreciente y la función C_o es afín creciente.

Bajo estas hipótesis, las preguntas generatrices tal cual fueron presentadas a los estudiantes se irán presentando a lo largo del Capítulo. Es importante mencionar que las preguntas fueron presentadas en el orden que se presentarán en la sección siguiente. Es decir, fue una sucesión de preguntas donde cada una de ellas fue propuesta por el profesor en los momentos donde lo creía conveniente. Cada grupo de alumnos tenía la tarea de aportar una respuesta, comunicarla y defenderla ante el resto. Las preguntas que surgían en los distintos grupos de alumnos eran consideradas por la comunidad de estudio y también debían responderse. Cada grupo debía aportar respuestas utilizando las sesiones de clases necesarias y los recursos disponibles. El profesor recorría los grupos para seguir el trabajo de cada uno y gestionaba las puestas en común ayudando, pero sin aportar las respuestas a las preguntas planteadas, permitiendo que los alumnos asuman su papel en la construcción de respuestas y planteo de nuevas preguntas. Los alumnos debían hacerse cargo de las preguntas y comprometerse con la elaboración de respuestas genuinas y no simplemente buscando información.

Respecto a los temas del programa que el REI permitió transitar: rectas del plano (en diversos momentos del proceso de estudio), a la derivada de funciones que condujo al estudio del límite de funciones (invirtiendo así el orden “habitual”, que en general se realiza a la inversa, primero se estudia el límite y luego, la derivada), a la continuidad (como una técnica de cálculo de límite) y al análisis de algunas funciones sencillas (búsqueda final desarrollada por los grupos a partir de una gráfica de una función polinómica y ante la pregunta *¿Cómo utilizar la derivada para analizar el comportamiento de una función cualquiera?*). Respecto a las obras de la microeconomía, fue posible estudiar el esquema de funcionamiento de un modelo económico, el análisis de los mercados, concepto, clases, funcionamiento, equilibrio y la determinación de precios.

Cada pregunta permitió a los grupos (y con la ayuda del profesor) formular una serie de preguntas derivadas, que no detallaremos aquí. Conviene mencionar que las preguntas derivadas emergieron durante el proceso de estudio. Como ya lo indicamos anteriormente, el profesor propuso a los estudiantes las preguntas que presentamos bajo el rótulo Q_{REI1}, Q_{REI2}, Q_{REI3}, Q_{REI4} y Q_{REI5}.

Propuesta e implementación de un posible recorrido de estudio e investigación

Como ya lo mencionamos, se ha implementado un REI cuyas preguntas e hipótesis de partida permiten construir y analizar las variaciones de un modelo afín de oferta y de demanda, donde las ecuaciones dependen únicamente del precio del bien (p) y de las cantidades del mismo (siendo C_d la cantidad demanda y C_o la cantidad ofrecida). Cada grupo de alumnos debía aportar una respuesta a las preguntas, cuya pregunta número uno es la siguiente:

Q$_{\text{REI1}}$**:** Supongamos que se están elaborando pastas con la intención de venderlos y de recaudar dinero. De un ensayo de ventas previo se obtuvo la información ofrecida en las tablas siguientes:

Precio	Cantidades demandadas	Cantidades ofrecidas
10	300	
11		174
13	270	
14		231
23		402
24	160	
25		440
26	140	

¿Cómo determinar a qué precio por unidad todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha? ¿Qué modelo permitiría estudiar el comportamiento de la oferta y demanda en este mercado?

Pregunta 1 – Primera pregunta planteada a los grupos de estudio.

Para responder estas preguntas, y las siguientes, los alumnos tienen que inspeccionar “zonas de gran alcance”, de la matemática y de la microeconomía, para determinar y decidir qué de específico y qué “semillas” aportan a la respuesta, esto es, hacer funcionar la dialéctica del “paracaidista y de las trufas”. Los alumnos investigaron las leyes de oferta y de demanda en el campo de la microeconomía, el punto de equilibrio, la manera de hallarlo (precio y cantidad de equilibrio) y cómo construir el modelo de mercado de un único bien. Así, se genera una “salida” al área de la microeconomía y también al área de la matemática, pues para construir el modelo, debió estudiarse como hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos y como construir y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Luego, volver a la pregunta inicial y construir el modelo para determinar a qué precio debía venderse el bien y en qué cantidad para estar en equilibrio. Estos procesos pueden inscribirse en el funcionamiento de la dialéctica de “entrar y salir del tema” y también de las “cajas negras y cajas claras”, pues el grupo decidió cuánto estudiar – nivel de “gris” – acerca de las leyes de oferta y de demanda, de las rectas y de los sistemas de ecuaciones.

Como se considera una única mercancía, sólo es necesario incluir tres variables en el modelo: la cantidad demandada de la mercancía (C_d), la cantidad ofrecida (C_o) y su precio (p). Con estas tres variables pueden construirse dos modelos diferentes: uno considera que las funciones de oferta y de demanda dependen del precio y el otro, supone que el precio depende de la cantidad demandada y de la cantidad ofrecida. El punto de equilibrio se obtiene resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, en este caso, es afín. La solución del sistema es el valor del precio y la cantidad del bien para el cual la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida.

Las preguntas de la Microeconomía se respondieron a partir de consultas realizadas en Internet, en libros de economía y al profesor de economía. Esta actividad, dirigida a construir el medio a partir de una búsqueda múltiple de los elementos que se incorporarán a él, indica el funcionamiento de la dialéctica “media-medio”, pues, todas las respuestas preestablecidas que los alumnos encontraron en cualesquiera de los medias antes mencionados, ingresaron a la clase y se de-construyeron y reconstruyeron en la medida en que eran funcionales al medio, y pasaron a formar parte del mismo.

Algunos grupos de estudio construyeron la gráfica, ubicando los datos en un sistema cartesiano – considerando las cantidades (ofrecidas y demandadas) como la variable dependiente y el precio, como la variable independiente – y trazando un segmento de recta para cada . El algunos casos, indicaron además que en la zona de intersección de las rectas se encontraría el punto de equilibrio. Otros grupos, en cambio, ubicaron los datos en ejes cartesianos diferentes, no pudiendo determinar así, la zona de equilibrio. A continuación, se escribe la ecuación general de una recta en forma explícita, y se utilizan los valores de las tablas para obtener ambas ecuaciones. Algunos procedieron como se presenta a continuación:

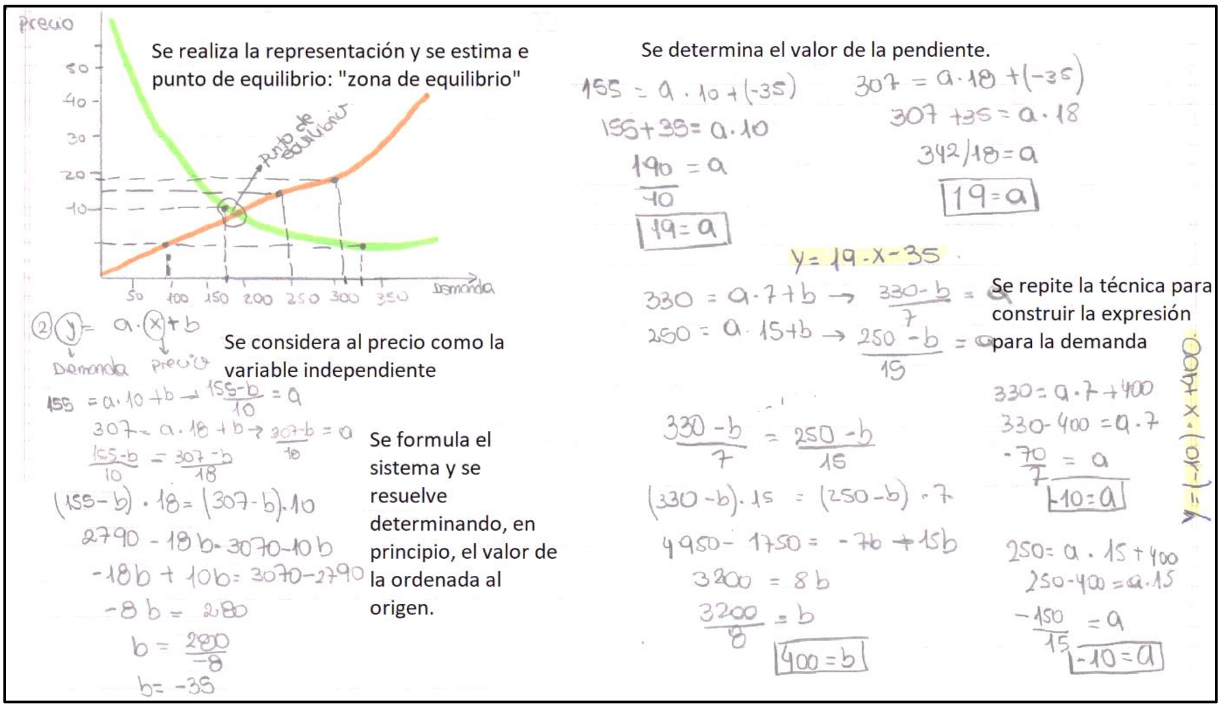


Figura 6 – Respuesta parcial de uno de los grupos de estudio. Fuente: elaboración propia.

La Figura 7 muestra la resolución de otro grupo de estudio. En este caso, intentan responder las preguntas utilizando una técnica diferente a la anterior pues considera al precio como la variable dependiente, y la cantidad ofrecida (y la cantidad demandada) como independiente.

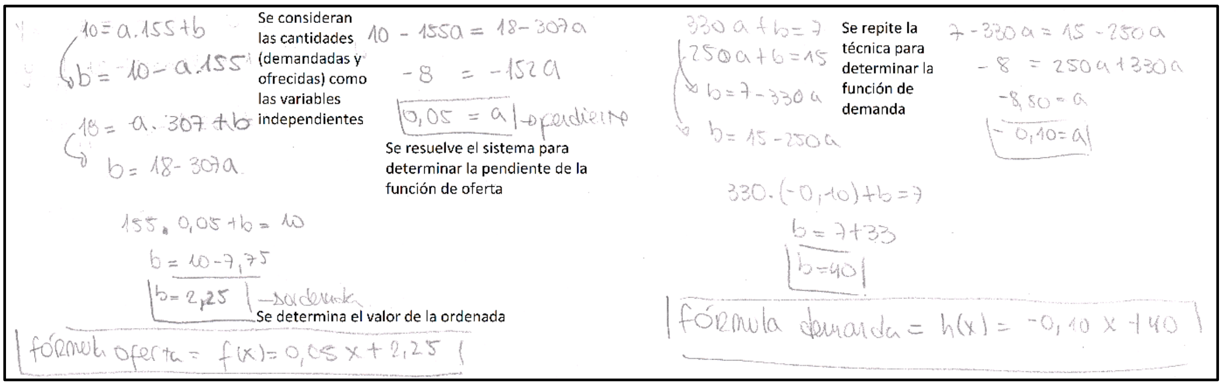


Figura 7 – Respuesta parcial de otro grupo de estudio. Fuente: elaboración propia.

Las producciones anteriores, así como todas las realizadas al interior de cada grupo indican necesarios acuerdos entre los integrantes del grupo. Por ejemplo, para determinar qué será considerada como la variable independiente requiere acordar y producir en consecuencia, una respuesta colectiva. Así, podríamos suponer un ejemplo de un gesti dialéctico propio del individuo y colectivo.

Ambos modelos satisfacen las leyes de la oferta y la demanda: cuando aumenta el precio, aumenta la cantidad ofrecida, pero disminuye la cantidad demandada. Todas las respuestas fueron validadas por la comunidad de estudio. Los grupos estudiaron e investigaron las preguntas sobre la oferta, la demanda y las referidas a ecuaciones de rectas, variables, parámetros, ordenadas al origen, pendiente, y sistemas de ecuaciones sólo a partir de la pregunta Q_{REI1} e incluso, la definición de “modelo”. La Figura 8 presenta el apunte que uno de los grupos aportó a la clase y que utilizó para construir el modelo. Este apunte, según lo manifestaron los integrantes de ese grupo, es parte de la búsqueda de realizaron en Internet previo a intentar construir el modelo.

El postulado, principio o incluso ley de la oferta y demanda es el modelo económico básico de la formación de precios de mercado de los bienes, usándose para explicar una gran variedad de fenómenos y procesos tanto macro como microeconómicos. Además, sirve como base para otras teorías y modelos económicos.

El modelo se basa en la relación entre el precio y las ventas de dicho bien y asume que en un mercado de competencia perfecta, el precio se establecerá en un punto —llamado punto de equilibrio— en el cual el se produce un vaciamiento del mercado, es decir, todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha.

El postulado de la oferta y la demanda implica tres leyes:

I.- Cuando, al precio corriente, la demanda excede la oferta, el precio tiende a aumentar. Conversamente, cuando la oferta excede la demanda, el precio tiende a disminuir.

II.- Un aumento en el precio tiende, mas tarde o más temprano, a disminuir la demanda y a aumentar la oferta. Conversamente, una disminución en el precio tiende, mas tarde o más temprano, a aumentar la demanda y disminuir la oferta.

III: El precio tiende al nivel en el cual la demanda iguala la oferta

El modelo establece que en un mercado libre, la cantidad de productos ofrecidos por los productores y la cantidad de productos demandados por los consumidores dependen del precio de mercado del producto. La **ley de la oferta** indica que la oferta es directamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio del producto, más unidades se ofrecerán a la venta. Por el contrario, la **ley de la demanda** indica que la demanda es inversamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio, menos demandarán los consumidores. Por tanto, la oferta y la demanda hacen variar el precio del bien.
Según la ley de la oferta y la demanda, y asumiendo esa competencia perfecta, el precio de un bien se sitúa en la intersección de las curvas de oferta y demanda. Si el precio de un bien está demasiado bajo y los consumidores demandan más de lo que los productores pueden poner en el mercado, se produce una situación de escasez, y por tanto los consumidores estarán dispuestos a pagar más. Los productores subirán los precios hasta que se alcance el nivel al cual los consumidores no estén dispuestos a comprar más si sigue subiendo el precio. En la situación inversa, si el precio de un bien es demasiado alto y los consumidores no están dispuestos a pagarlo, la tendencia será a que baje el precio, hasta que se llegue al nivel al cual los consumidores acepten el precio y se pueda vender todo lo que se produce mejor.

Figura 8: Información buscada previo a la construcción del modelo. Fuente: elaboración propia.

Esta acción puede interpretarse como una manera de hacer propia de la dialéctica denominada “de la inscripción y la excripción”, ya que la comunidad de estudio vinculó las preguntas con ciertos saberes matemáticos y de la economía, sin transcripciones textuales, es decir, utilizó sólo los saberes relevantes y funcionales para responder la pregunta. El fragmento presentado en la Figura 8 muestra que la información buscada es la necesaria en función de la pregunta formulada. Luego, el profesor propuso la segunda pregunta:

Q_{REI2}: ¿Cómo se podría estudiar el comportamiento de las leyes de oferta y la demanda para cualquier par de funciones afines de oferta y de demanda? ¿Cómo podría hallarse en este caso el punto de equilibrio?

Pregunta 2 – Segunda pregunta planteada a los grupos de estudio.

Responder esta pregunta exige construir el modelo para dos funciones afines cualesquiera, lo cual permitirá luego, estudiar la variación de los parámetros que dará lugar al estudio de la praxeología relativa a la noción de derivada. La construcción del modelo para cualquier par de funciones afines de oferta y de demanda puede realizarse también de dos maneras diferentes, ya sea, considerando las cantidades (demandadas y ofrecidas) dependientes del precio o viceversa. En el área de Microeconomía se utiliza más comúnmente el primer modelo, es decir, donde la oferta y la demanda dependen del precio.

En esta instancia del recorrido, consideramos necesario acordar con los alumnos que el primer modelo es el más adecuado pues es el que está disponible en diferentes medias tales como los libros de Microeconomía, Internet, y otras fuentes de información y difusión. Aquí, nuevamente un gesto de la dialéctica del individuo y colectivo que se manifiesta no al interior de cada grupo, sino, de la clase en su totalidad. La Figura 9 presenta el modelo construido para responder la pregunta Q_{REI2}. Este grupo analiza los parámetros del modelo, indicando los signos que deben tener. Nuevamente aquí, tuvieron en cuenta los postulados de la oferta y de la demanda. De lo contrario, los parámetros que allí colocan no estarían restringidos.

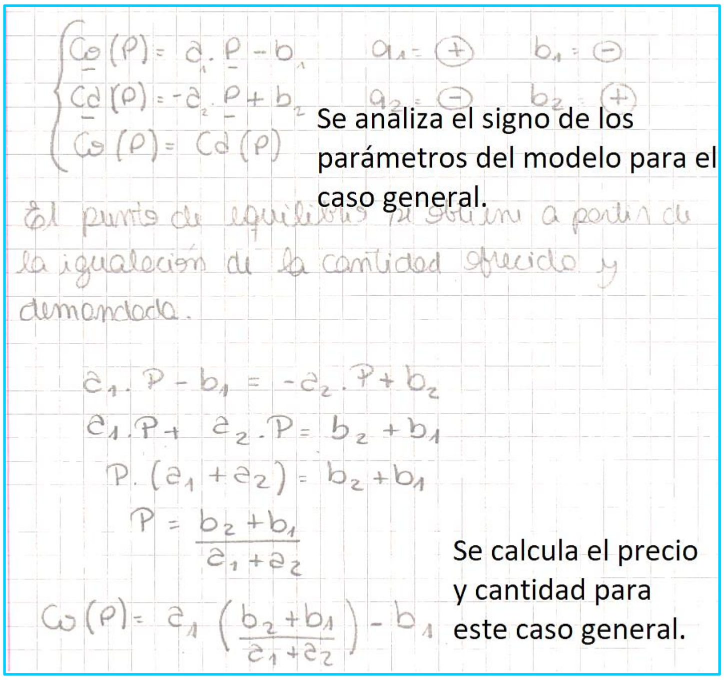


Figura 9 – Modelo construido por otro de los grupos de clase. Fuente: elaboración propia.

Se advierte aquí la relevancia que los alumnos concedieron a los signos de los parámetros, evidenciando que la pendiente de la oferta debe ser positiva mientras que la pendiente de la demanda negativa, pues, en caso contrario, no se cumpliría una de las leyes esenciales de la oferta y la demanda. Una vez construido el modelo, lo siguiente consistió en obtener las soluciones de equilibrio para la cantidad demandada, la cantidad ofrecida y el precio, C_d, C_o y p. La Figura 9 contiene parte de esta solución de equilibrio. La Figura 10 siguiente presenta la respuesta formulada por otro estudiante, integrante del mismo grupo quien completa el cálculo.

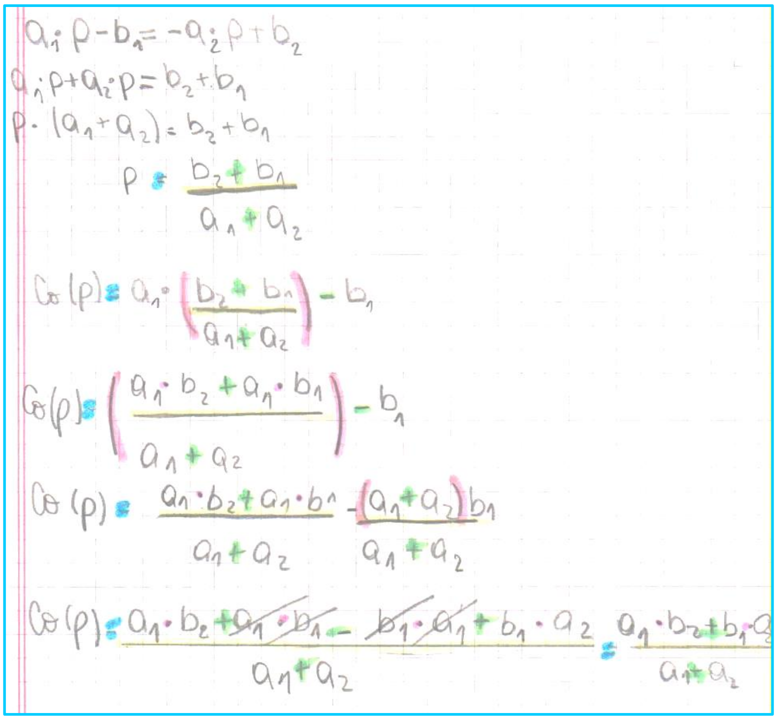


Figura 10 – Respuesta a la segunda pregunta. Fuente: elaboración propia.

Este grupo de estudiantes logró obtener el precio y la cantidad de equilibrio a partir del modelo general construido previamente. Esto es, a partir de los parámetros del modelo que, en este caso, denominaron a_1, a_2, b_1 y b_2. Para estudiar cómo un cambio infinitesimal en uno de estos parámetros afectará al valor del precio y/o cantidad de equilibrio habría que diferenciar parcialmente los valores del precio y/o cantidad de equilibrio con respecto a cada uno de los parámetros.

Así, determinando el signo de cada derivada parcial puede conocerse la dirección del cambio del valor (precio y cantidad) de equilibrio. La pregunta Q_{REI3} fue propuesta por el profesor para estudiar y analizar estos cambios en el valor de equilibrio utilizando una técnica que no emplee las derivadas parciales, pues el programa correspondiente al último año del nivel secundario, no las incluye.

Q$_{REI3}$: Supongamos que la función de oferta de un modelo de mercado está dada por la función $C_o(p) = 3p - 2$ y que la función de demanda, por $C_d(p) = -4p + 6$ ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si sólo se modifica el valor de la ordenada al origen de la recta correspondiente a la función de demanda? ¿Y si en cambio se modifica el valor de la ordenada al origen de la recta correspondiente a la función de oferta?

Pregunta 2 – Tercera pregunta planteada a los alumnos

Las dos sub-preguntas de Q$_3$ pueden responderse empleando una técnica analítica y/o gráfica para obtener como respuesta a la primera que, al aumentar el valor de la ordenada de la recta de demanda, también aumenta el precio y la cantidad de equilibrio. Interesa en esta conclusión que la relación de cambio entre el parámetro ordenada al origen de la recta demanda y el precio (y cantidad) de equilibrio, es directa. La respuesta a la segunda pregunta es que, si se aumenta el valor de la ordenada de la recta oferta, aumenta también el precio de equilibrio, pero disminuye la cantidad, o bien, si se disminuye el valor de la ordenada, disminuye el precio y aumenta el valor de la cantidad de equilibrio.

La figura siguiente presenta los resultados obtenidos por uno de los grupos. Este grupo, al igual que los demás, utilizó el software GeoGebra para representar la recta de oferta junto a distintas rectas de demanda con igual pendiente a la dada, pero diferente ordenada (propuestas por ellos mismos). Luego, hallaron el punto de equilibrio en cada caso y compararon los valores obtenidos (Figura 11, izq.). De forma análoga, procedieron para responder respecto a las variaciones de la ordenada de la recta de demanda (Figura 11, der.).

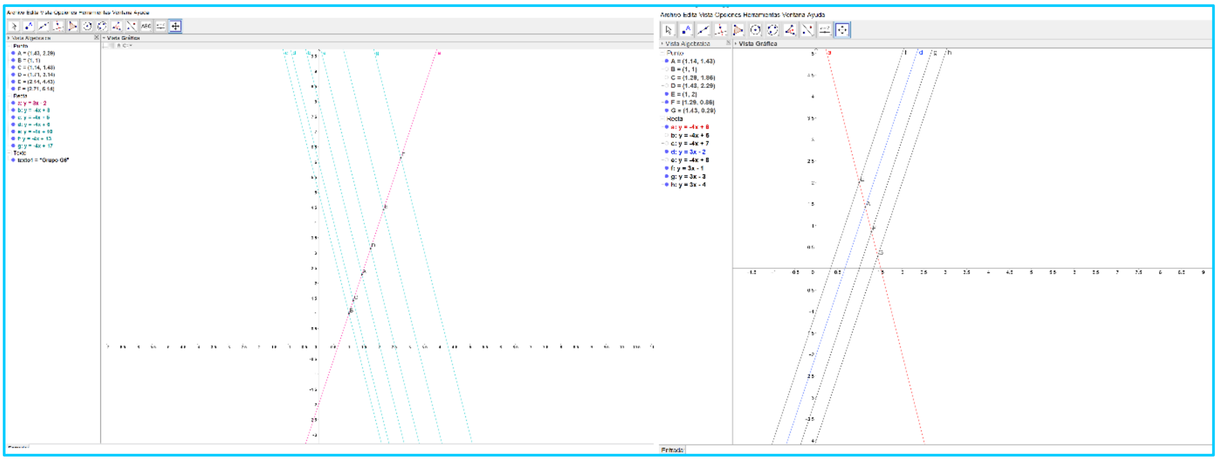
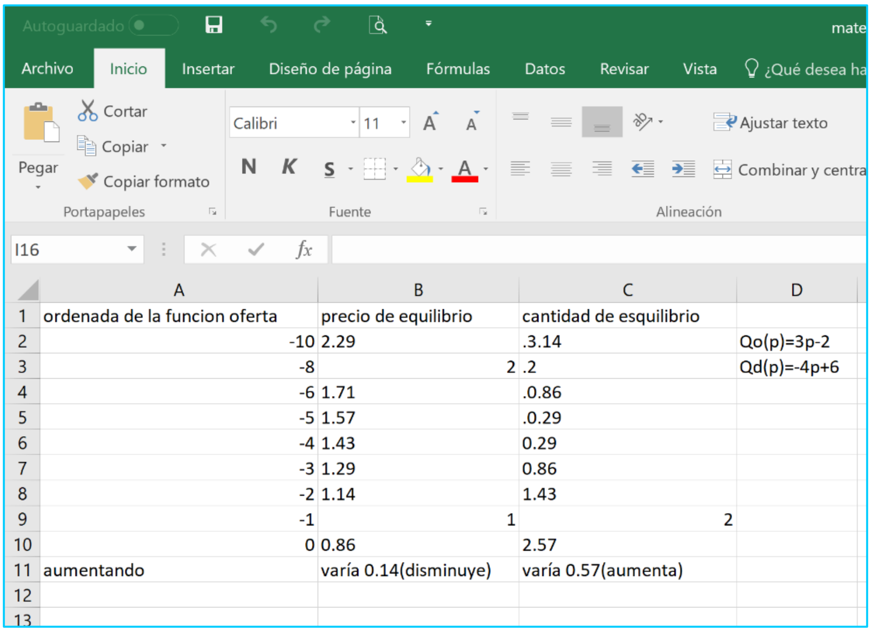


Figura 11 – Izquierda: variaciones en la ordenada de la recta de demanda. Derecha: variaciones en la ordenada de la recta de oferta. Fuente: elaboración propia.

Incluso, uno de los grupos incorporó una hoja de cálculo para determinar las variaciones del punto de equilibrio. Con esta tabla, incluso logran determinación el valor de esa variación. La Figura siguiente presenta el extracto de la hoja de cálculo donde indican esto.



	A	B	C	D
1	ordenada de la funcion oferta	precio de equilibrio	cantidad de esquilibrio	
2	-10	2.29	.3.14	Qo(p)=3p-2
3	-8	2	.2	Qd(p)=-4p+6
4	-6	1.71	.0.86	
5	-5	1.57	.0.29	
6	-4	1.43	0.29	
7	-3	1.29	0.86	
8	-2	1.14	1.43	
9	-1	1	2	
10	0	0.86	2.57	
11	aumentando	varía 0.14(disminuye)	varía 0.57(aumenta)	
12				
13				

Figura 12: Utilización de planilla de cálculo. Fuente: elaboración propia**.**

La forma de utilizar estos softwares, relativamente autónoma, por parte de los alumnos mostraría cómo un “media” ingresa al “medio” de manera funcional para lograr la identificación de las variaciones del punto de equilibrio según se varíe uno a la vez, los parámetros del modelo.

Luego, el profesor propuso la pregunta Q_{REI4} cuyo objetivo es estudiar las variaciones del equilibrio modificando las pendientes de las rectas de oferta y demanda, de a una a la vez.

> **Q_{REI4}**: Sigamos considerando las mismas funciones de oferta y de demanda del caso anterior. ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si ahora sólo se modifica el valor de la pendiente de la función de demanda? ¿Y si sólo se modifica el valor de la pendiente de la función de oferta?

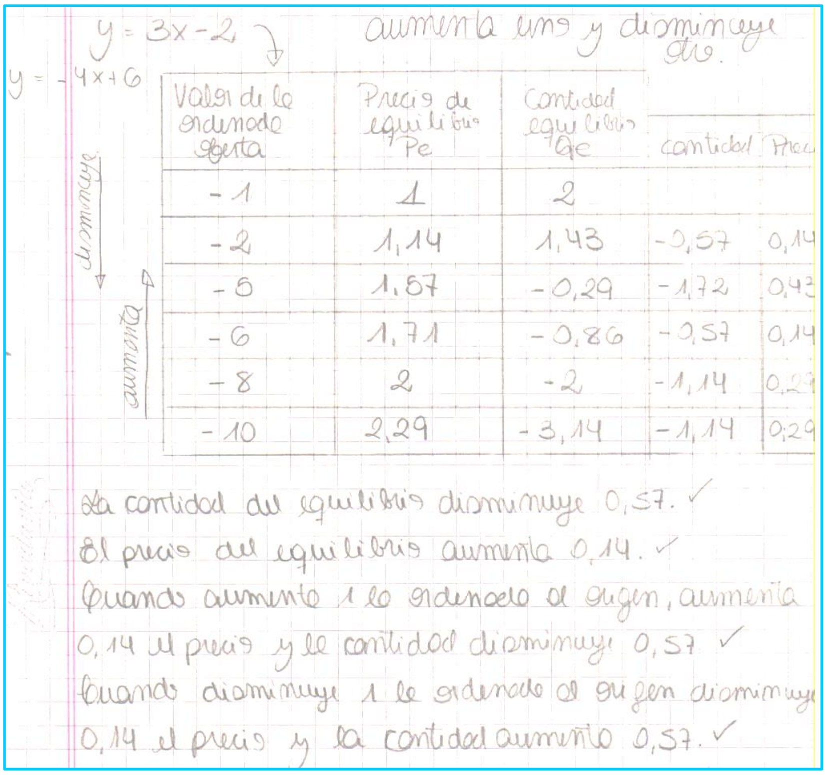
Pregunta 3 – Cuarta pregunta propuesta a los estudiantes

Para responder puede utilizarse la misma técnica de variaciones empleada en Q_{REI3}: variar la pendiente de la función que corresponda y analizar qué pasa con el punto de equilibrio utilizando el GeoGebra y/o una hoja de cálculo. En este caso, ambos softwares fueron utilizados de forma similar a la realizada para la pregunta anterior. Si bien, las preguntas anteriores fueron formuladas en términos de "¿Cómo?", es importante destacar que algunos grupos, a través de la hoja de cálculo, lograron dar una respuesta cuantitativa. Luego de la puesta en común, se decidió entonces incorporar una nueva pregunta a partir de estos datos. La pregunta se formuló en términos de "¿Cuánto?" es decir, cuánto variará el punto de equilibrio en cada caso. Aquí conviene destacar la presencia de un cambio relevante a nivel de la topogénesis, pues los mismos estudiantes preguntaron respecto a las variaciones.

> **Q_{REI5}**: Hasta aquí hemos podido determinar cómo variará el precio y la cantidad según varíen las pendientes y las ordenadas de las funciones oferta y de demanda. Pero ¿Cuánto varía ***exactamente*** el punto de equilibrio en cada caso?

Pregunta 4 – Pregunta formulada por los alumnos y reformulada junto con el profesor

Para responder Q_{REI5}, los alumnos buscaron las diferencias entre un estado de equilibrio y el otro. El profesor sugirió considerar la confección de una tabla similar a la elaborada por el grupo que había utilizado la hoja de cálculo en las preguntas anteriores. La Figura 13 muestra las tablas construidas y las conclusiones obtenidas por uno de los grupos. Aquí en la tabla se colocó, en la primera, segunda y tercera columna respectivamente, los valores de las ordenadas de la recta de oferta, el precio y la cantidad de equilibrio. Luego, incorpora dos columnas donde indican respectivamente, las diferencias entre el "nuevo" valor de equilibrio obtenido y el anterior. De forma análoga, analizó las variaciones de la ordenada de la recta de demanda, obteniendo en ambos casos, una respuesta cuantitativa.


y = 3x - 2

aumenta uno y disminuye otro.

y = -4x+6

disminuye

aumenta

Valor de la ordenada oferta	Precio de equilibrio Pe	Cantidad equilibrio Qe	cantidad	Prec
-1	1	2		
-2	1,14	1,43	-0,57	0,14
-5	1,57	-0,29	-1,72	0,43
-6	1,71	-0,86	-0,57	0,14
-8	2	-2	-1,14	0,29
-10	2,29	-3,14	-1,14	0,29

La cantidad de equilibrio disminuye 0,57. ✓
El precio de equilibrio aumenta 0,14. ✓
Cuando aumenta 1 la ordenada al origen, aumenta 0,14 el precio y la cantidad disminuye 0,57 ✓
Cuando disminuye 1 la ordenada al origen disminuye 0,14 el precio y la cantidad aumenta 0,57. ✓

Figura 13 – Respuesta de uno de los grupos. Fuente: elaboración propia.

Es importante destacar que este alumno obtuvo la dirección y la magnitud del cambio sin la necesidad de recurrir a la noción de derivada. Concluyó como y cuanto varía el punto de equilibrio si se modifica la ordenada de la recta de oferta y de demanda una a la vez. Luego de realizar la puesta en común, los alumnos preguntaron al profesor si podían obtener estas conclusiones sin la necesidad de realizar todo este trabajo y qué justificaba estos “números” obtenidos a partir de las tablas. Esto permitió al profesor actuar como media e institucionalizar la noción de “derivada” como un tipo particular de límite y como noción matemática que permite realizar el análisis de estas variaciones de manera directa y justificar los valores previamente obtenidos. Aquí, podríamos identificar un gesto dialéctico propio del medio-media en términos de conjeturas y pruebas. Es decir, una conjetura (en este caso, los valores obtenidos del cambio) que requieren justificarse sobre la manera en que fueron obtenidos. Fue necesario reconstruir parcialmente la praxeología relativa al límite de funciones, pues los alumnos realizaron ciertas preguntas respecto al “límite”. El estudio del límite de funciones es otras de las “salidas”, pues se realiza a partir de la definición de la derivada de funciones. Una vez estudiado el límite de funciones, el grupo debió volver y retomar el estudio de la derivada y recién entonces retornar a la pregunta. Se tiene así, una salida dentro de otra salida, que dificultó considerablemente al grupo el reingreso, es decir, volver a “entrar al tema”. Esto que acabamos de describir, no es otra cosa que el funcionamiento de la dialéctica de “entrar y salir de tema”. Conviene mencionar que este grupo de estudiantes había estudiado el límite de funciones durante el año anterior, razón por la cual, el profesor les propuso revisar y traer sus notas, carpetas, apuntes, etc., para las próximas clases. La reconstrucción de la praxeología en torno al límite de funciones se realizó a partir de una lista de preguntas, algunas formuladas por el profesor y otras, por los propios alumnos. Es muy importante apreciar hasta qué punto se ha modificado la topogénesis durante el REI y el “costo” que esto ha tenido para los estudiantes, que lo expresan libremente. La Figura 14 presenta estas preguntas:

1. ¿Cuál es la "idea" intuitiva de límite?
2. Sea $G(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ con $Dom(G) = \mathbb{R} - \{1\}$. ¿Si $G(1)$ no existe, implica que el límite de $G(x)$ cuando x tiende a 1 no existe?
3. ¿Existe siempre el límite de una función?
4. ¿Puede una función tener dos límites distintos?
5. ¿Qué significa que una función sea continua?
6. ¿Cuáles son las propiedades del límite?
7. ¿Cuáles son los límites infinitos?
8. ¿Cuáles son los límites en el infinito?
9. ¿Cuántas indeterminaciones encontraron? ¿Cómo se pueden salvar?
10. En un límite, $\frac{1}{0}$ ¿existe? Si es así, ¿a qué tiende?

Figura 14 Lista de preguntas a responder para estudiar el límite de funciones de una variable real. Fuente: elaboración propia

No presentamos en este libro los resultados relacionados con las respuestas a estas preguntas por razones de espacio. Una vez que cada grupo aportó respuestas a estar preguntas, realizaron una defensa de cada una de ellas frente a toda la clase. Esta puesta en común, y todas las realizadas a lo largo del estudio, puede interpretarse en términos de la dialéctica de la difusión y recepción ya que, los grupos no sólo "exponen" sus respuestas, sino que los demás grupos cuestionan y critican esas respuestas. Luego de estas respuestas sobre el límite de funciones, el profesor retomó la pregunta por la derivada. Se estudiaron los casos elementales de derivación, las reglas y las propiedades como una obra en términos del sistema de la forma S(X; Y, O). Finalmente, el profesor propuso a los grupos de alumnos realizar una síntesis de todas las preguntas estudiadas desde el primer día de clases. A continuación, se presenta la síntesis realizada por uno de los grupos.

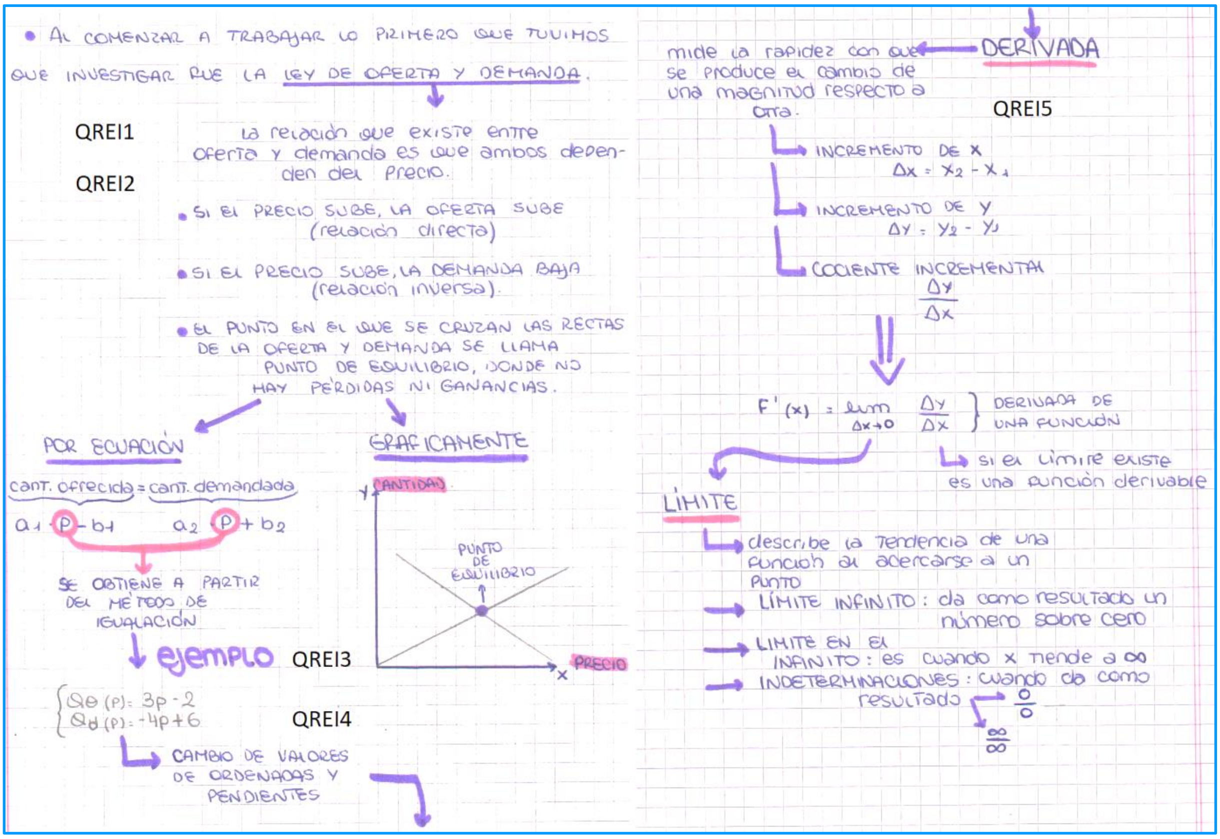


Figura 15 Síntesis propuesta por un grupo de estudiantes. Fuente: elaboración: propia

La síntesis realizada por los alumnos, permite reconstruir el recorrido desarrollado a partir de las preguntas. Comenzando por las leyes de oferta y demanda, el punto de equilibrio y los modelos lineales se reconstruyó parte de la praxeología relativa a “Rectas en el plano” incluyendo los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Las variaciones (constantes y no constantes) permitieron el ingreso a la praxeología relativa a la “Derivada” desde el punto de vista de la variabilidad, para luego, institucionalizarla como un límite particular, permitiendo así, reconstruir parte de la praxeología en torno al “Límite de funciones” (la cual corresponde a otra de las unidades del programa de estudios).

Finalmente, la dialéctica “de las preguntas y respuestas” –central en una enseñanza por REI–, la dialéctica de la “producción y recepción” y la del “individuo y colectivo” se manifiestan en cada tramo del recorrido. Por ejemplo, la búsqueda de respuestas a la pregunta ¿cómo hallar el punto de equilibrio? conduce a formular otras preguntas tales como ¿qué es el punto de equilibrio?, ¿cómo se resuelve un sistema de ecuaciones, siempre tiene solución?, entre otras, muestra la operatividad de la dialéctica de las “preguntas y respuestas”. La “producción y recepción” de las respuestas se presenta en cada puesta en común. Cada grupo debe comunicar su respuesta y defenderla. Esta dialéctica está estrechamente ligada a la dialéctica del “individuo y del colectivo”, pues, el trabajo en clase es realizado en grupos de alumnos, donde cada uno debe participar en la búsqueda de respuestas cooperativas.

Reflexiones finales

El objetivo de este texto ha sido presentar un posible REI, el MPR construido a partir de las preguntas generatrices y la implementación en un aula real del REI concebido para el último año del nivel secundario. No se pretendió aquí realizar un análisis de los datos obtenidos sino, ejemplificar y describir las características centrales de esta puesta en marcha. Podemos concluir que este caso fue posible en llevar a cabo este REI en la escuela secundaria y estudiar parte del programa de estudios del curso con preguntas de la Microeconomía, tratando de recuperar al menos un posible sentidode las obras que este REI activa y a las cuales permite acceder.

Se experimentaron e identificaron ciertos gestos dialécticos que hemos intentado presentar a partir de cada pregunta, analizando el proceso de estudio a partir de ellas, excepto, el momento de la acreditación escolar, que no debe confundirse con lo que en la TAD se denomina evaluación. El de la acreditación, es un problema originado en las restricciones de la institución, que tiene consecuencias didácticas de gran porte, y que es considerado por los docentes y por las autoridades escolares como un obstáculo para la introducción de una enseñanza por investigación y cuestionamiento en la escuela secundaria, un obstáculo ligado al fenómeno de la dilatación del tiempo didáctico, y a una serie de mitologías y praxeologías espontáneas que operan en la institución escuela secundaria.

No debemos dejar de lado que el proceso de gestión de un REI, requiere cambios radicales en el lugar que los profesores y estudiantes ocupan en el aula (topogénesis), los tiempos destinados al estudio de las diferentes obras (cronogénesis) y la gestión de los instrumentos potencialmente utilizables en el aula, por ejemplo, Internet, softwares, apuntes de otras materias, consultas a otros profesores, etc. (mesogénesis). La primera pregunta fue planteada el primer día del ciclo lectivo, maximizando el funcionamiento de la dialéctica del “paracaidista y los buscadores de trufas”. Así, las dialécticas del “paracaidista y las trufas”, “de la producción y recepción” y del “individuo y colectivo” inciden en la topogénesis originando cambios de costo elevado en términos de esfuerzo para los estudiantes. Ellos debieron hacerse cargo de las preguntas a responder –en principio, con bastante resistencia – de forma individual y a su vez, de manera grupal. Cada grupo de alumnos debía, con la colaboración de todos sus integrantes, aportar una respuesta a las diferentes preguntas, comunicarlas y defenderlas. Es difícil para el profesor no ceder ante la demanda de los estudiantes, habituados al lugar del profesor explicador. Esto lleva a preguntarse por las dificultades de instalar una enseñanza por REI, cuando el profesor no es experimentado, ni está familiarizado con la TAD.

Las dialécticas de las “cajas negras y cajas claras”, “de la inscripción y excripción” y del “medio-medias” incidieron preponderantemente en la mesogénesis. El medio didáctico fue construido a partir de las preguntas, las respuestas y de los diferentes “media” disponibles: las búsquedas en Internet, los libros de Microeconomía, las consultas al profesor de Economía y al profesor del curso. Fue necesario establecer en qué nivel de “gris” determinados saberes ingresaron al medio, tales como, el nivel de “gris” con el cuál estudiar las leyes de oferta y de demanda y, qué de esos saberes “transcribir” en sus carpetas durante las clases. Por ejemplo, qué transcribir de toda la información disponible sobre los modelos de oferta y de demanda.

Las dialécticas de “entrar y salir del tema” y de las “preguntas y respuestas” incidieron en la cronogénesis, dilatando considerablemente el tiempo de reloj -empleado para realizar las “salidas” y las “entradas”- y para responder cualquier pregunta surgida durante la búsqueda de respuestas a las preguntas iniciales. Aquí también el profesor está expuesto a restricciones relativas a si completó o no el programa, a si reunió la cantidad de calificaciones exigidas para cada alumno, etc.

Finalmente, destacamos que como en toda investigación, quedan una variedad de zonas grises y de aspectos a profundizar y reconsiderar, por ejemplo: ¿Cómo gestionar el impacto emocional que se percibe en los estudiantes, que han vivido decenas de años en el paradigma tradicional, con relación a la incertidumbre que generan las nuevas responsabilidades y la distancia entre estas y los hábitos de obediencia y dependencia instalados en la enseñanza tradicional? ¿Cuál es "el" nivel de "gris" pertinente para estudiar las praxeologías matemáticas reconstruidas en el aula? ¿Cómo gestionar en una enseñanza por REI las acreditaciones de los estudiantes? ¿Cómo determinar la amplitud de los programas de estudios – la mayoría de ellos abarcar muchas nociones matemáticas y las praxeologías asociadas a las mismas – para que una enseñanza por REI permita "cubrirlos"? ¿Cómo equipar a los profesores para enseñar conforme al nuevo paradigma?

Referencias

Barachet, F. ; Demichel, Y. & Noirfalise, R. (2007). Activités d'étude et de recherche (AER) pour dynamiser l'étude de la géométrie dans l'espace en classe de seconde. *Petit X*, 75, 34-49.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Barquero, B. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 339-352.

Barquero, B.; Bosch, M. & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, 33(3), 307-338.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En. Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). Uzès : IUFM de l'académie de Montpellier.

Bouza Álvarez, F. J. (1990). Reverenter Absolvit: Nadie ha inventado la Historia. *Manuscrits: Revista d'història moderna*, 8, 87-104.

Bueno, G. (1972). Sobre dialéctica. In G. Bueno (Ed.), *Ensayos materialistas* (pp. 371-389). Madrid: Taurus Ediciones S. A.

Byache, P. ; Beaubiat, D. & Spaier, C. (2016). Un parcours d'étude et de recherche sur la géométrie et l'algorithmique en seconde. *MathémaTICE*, 52, 1-16.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2001). *Les TPE comme problème didactique*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2004). Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009a). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009b). *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009c). *Journal du séminaire TAD/IDD 2008-2009. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2008-2009-2.pdf

Chevallard, Y. (2009d). *La TAD face au professeur de mathématiques*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2012). Journal du Seminaire TAD/IDD. Éléments de didactique du développement durable. Notes & documents. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf

Chevallard, Y. (2013a). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of*

Research in Mathematics Education, 2 (2), pp. 161-182. doi:10.4471/redimat.201 3.26

Chevallard, Y. (2013b). *Éléments de didactique du développement durable. Notes & documents*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf

Chevallard, Y. (2013c). *La matemática en la escuela*. Buenos Aires: Libros El Zorzal.

Chevallard, Y. & Matheron, Y. (2002). *Travaux Personnels Encadrés: un cadre d'analyse didactique pour un changement majeur dans l'enseignement au Lycée*. Communication aux actes Journées de la commission inter-IREM Didactique. IREM, pp. 141-150. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=50

Chiang, A. (1987). *Métodos fundamentales de la economía matemática*. México: McGraw-Hill.

Corica, A. & Otero, M. R. (2016). Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(55), 763-785.

Costa, V. A., Arlego, M. & Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*, 7(1), 20-40.

Donvito, A., Otero, M. R. & Sureda, P. (2014). Actitudes de la pedagogía de la investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. *Ikastorratza, e-Revista de didáctica*, 12, 1-27.

Herbart, J. (1935). *Pedagogía general derivada del fin de la educación*. Madrid: Ed. la Lectura, Espasa-Calpe.

Fonseca, C. (2010). Una posible "razón de ser" de la diagonalización de matrices en ciencias económicas y empresariales. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs)* *comme outils de connaissance et d'action* (pp. 595-614). Montpellier: IUFM de Montpellier.

Fonseca, C. (2011c). Recorridos de Estudio e Investigación: una propuesta dentro de la teoría antropológica de lo didáctico para la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. *Paradigma*, 32(1), 55-70.

Fonseca, C. (2011a). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, 23(1), 97-121.

Fonseca, C. (2011b). Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa São Paulo*, 13(3), 547-580.

Fonseca, C., Pereira, A., Casas, J. (2010). Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 671-684). Bellaterra: CRM Centre de Recerca Matemàtica.

Gaud, D. & Minet, N. (2009). Parcours d'étude et de recherche en géométrie pour la classe de seconde. *Petit X*, 79, 49-71.

Gould, J. & Lazear, E. (2000). *Teoría microeconómica*. Buenos Aires/México: Fondo de Cultura Económica.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime*, 18 (2), 245-275.

Minet, N. (2008). Un parcours d'étude et de recherche sur les fonctions en classe de 2nde. In B. Grugeon-Allys (Coord.), *Actes du 15e Colloque de la CORFEM* (pp.96-121). Antony, Val de Bievre: Universite de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles.

Olivera Lucas, C. (2015). Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional (Tesis Doctoral). Universidad de Vigo.

Olleta, J. E. (1997). *Filosofía contemporánea*. Madrid: Edinumen.

Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Llanos, V. C. & Arlego, M. (2016). Co-disciplinary Physics and Mathematics research and study course (RSC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers. *Review of science, mathematics and ICT education*, 10(2), 55-78.

Parra, V. & Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las "dialécticas". *Educación Matemática*, en prensa.

Parra, V.; Otero, M. R. & Fanaro, M. (2015). Recorrido de estudio e investigación codisciplinar a la microeconomía en el último año del nivel secundario. Preguntas generatrices y derivadas. *Uno. Revista de Didáctica de la Matemáticas*, 69, 1-10.

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. In L. Ruiz Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 677-704). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz-Higueras, L. & García García, F.J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Relime*, 14 (1), 41-70.

Runge Peña, A. (2009). La ética de Johann Friedrich Herbart como estética en sentido formativo o de cómo abrirle un espacio de posibilidad a la educación. *Revista Educación y Pedagogía*, 21 (55), pp. 55-74. Disponible en http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/viewFile/9757/8971

Salgado, D.; Otero, M. R. & Parra, V. (2017). Gestos didácticos en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación en el nivel universitario relativo al cálculo: el funcionamiento de las dialécticas. *Perspectiva Educacional*, 56(1), 84-108.

Schiller, B. (1994). *Principios esenciales de la economía*. Madrid: McGraw-Hill.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). “Cómo hacer una previsión de ventas”: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M., Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action* (pp.835-857). Montpellier: IUFM de l’Académie de Montpellier.

Verónica Parra, es Profesora en Matemática y Licenciada en Educación Matemática por la UNICEN. Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias mención Matemática, graduada en la UNICEN. Realizó formación posdoctoral en el Centre de Recherche sur l'Éducation les Apprentissages et la Didactique (CREAD), École Supérieure de professorat et de l'éducation (Espe de Bretagne), Université de Bretagne Occidentale (UBO). Es Investigadora Asistente de CONICET en el área Psicología y Educación. Es Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN a nivel de grado e integra el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Ha sido profesora de Matemática en el nivel secundario y terciario.

María Rita Otero, es Profesora en Matemática y Física y Magister en Psicología de la Educación por la UNICEN y Doctora en Enseñanza de las Ciencias, por la Universidad de Burgos. Realizó formación posdoctoral en la Université de Paris V. Es Investigadora Principal del CONICET en el área de Psicología y Educación y Profesora Titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, a nivel de grado y posgrado. Dirige el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN y es Directora del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Ha sido profesora de Matemática y de Física en el nivel secundario.