

Libros de **Cátedra**

Astronomía Esférica

Fundamentos de Astrometría

Laura Isabel Fernández, María Silvina De Biasi
y Gonzalo Carlos de Elía

FACULTAD DE
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS

e
exactas

**Eduulp**
EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE LA PLATA

Astronomía Esférica
Fundamentos de Astrometría

Laura Isabel Fernández
María Silvina De Biasi
Gonzalo Carlos de Elía

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas



Índice

Introducción	4
Prólogo	5
Capítulo 1. Sistemas y marcos de referencia	7
Capítulo 2. Paralaje	11
Capítulo 3. Aberración	27
Capítulo 4. Refracción atmosférica	42
Capítulo 5. Movimiento de los planos fundamentales en los sistemas dinámicos	71
Capítulo 6. Movimiento propio	100
Capítulo 7. Catálogos estelares	111
Capítulo 8. Efectos de la rotación terrestre	129
Capítulo 9. Escalas de tiempo	145
Capítulo 10. Sistemas y marcos de referencia, modelos y convenciones vigentes	166
Anexo A	193
Anexo B	194
Glosario	196
Autores	198

CAPÍTULO 5

Movimiento de los planos fundamentales en los sistemas dinámicos

Laura Isabel Fernández, Gonzalo Carlos de Elía, María Silvina De Biasi

Presentaremos las nociones de los efectos físicos involucrados detrás de las correcciones a las coordenadas estelares utilizando los modelos de Precesión IAU 1976 y de Nutación IAU 1980. Estos modelos fueron íntegramente desarrollados para los sistemas de referencia celestes dinámicos vigentes en su época y nos permitirán entender y visualizar el fenómeno involucrado de manera didáctica, simplificando así la presentación de los modelos de corrección convencionales actualmente vigentes que se desarrollarán en los capítulos siguientes.

Con estos objetivos, el presente capítulo aborda el tratamiento dinámico aproximando a la Tierra sometida a torques externos como un giroscopio. Luego estudiaremos las consecuencias del movimiento resultante sobre los planos fundamentales y las variaciones seculares y periódicas a las coordenadas estelares que estos movimientos implican.

Precesión y Nutación: consideraciones generales

Para poder entender en una primera aproximación las consideraciones de los modelos físicos, analizaremos de modo muy sencillo, el problema de la Tierra en rotación y traslación sometida a torques externos vista desde un sistema de referencia celeste. Estos torques involucran a las fuerzas de atracción gravitacional ejercida sobre nuestro planeta. Por lo anterior, las mayores contribuciones a los torques provendrán del objeto celeste más cercano a la Tierra (Luna) y del más masivo del Sistema Solar (Sol).

Si ambos cuerpos celestes (tractor y atraído) fueran esferas perfectas, las fuerzas de atracción gravitacional no producirían ningún torque. Pero sabemos que la figura matemática que mejor aproxima la forma de nuestro planeta es un elipsoide de revolución, abultado en el Ecuador y achatado en los polos¹. Este elipsoide, que asumimos axialmente simétrico, está rotando en torno a un eje que atraviesa los polos norte y sur pasando por el centro de la Tierra². En consecuencia, la atracción gravitacional del Sol y la Luna causarán torques cuyo efecto neto será un cambio progresivo y lento (a razón de 50" por año con un periodo cercano a los 25.800 años) en la posición del eje de rotación vista desde el sistema de referencia celeste conocido como **Precesión lunisolar**.

El mismo efecto causado por los torques de los planetas del Sistema Solar sobre la Tierra implica una inclinación extremadamente lenta en el plano orbital medio de la Tierra. La literatura (Green, 1985 p. 50; Kovalevsky y Seidelman, 2004 p. 176) suele denominar a este efecto como **Precesión planetaria**. Sin embargo, y siguiendo a Dehant y Mathews (2015), debemos aclarar que esta denominación es engañosa dado que no involucra ningún movimiento neto del eje de rotación visto desde el sistema celeste.

Si además consideramos que la Luna orbita en torno a la Tierra en un plano inclinado aproximadamente 5° con respecto al plano orbital terrestre, el efecto neto de los torques incorporará términos periódicos vinculados a la retrogradación del nodo lunar en el período de los Saros (18,6 años). Este último efecto periódico se conoce como **Nutación**.

Diferentes autores (Smart, 1962, p. 226; Green, 1985, p. 51; Kovalevsky y Seidelman, 2004, p. 176) atribuyen el descubrimiento de la Precesión a Hiparco de Rodas en el siglo II A.C. Según estos autores, Hiparco comparó sus propias observaciones con posiciones de las mismas estrellas registradas un siglo y medio antes y descubrió que mientras las latitudes eclípticas permanecían constantes, las longitudes se incrementaban con el tiempo³.

Este fenómeno sólo podía tener dos explicaciones posibles. La primera era muy poco probable y por lo tanto fue desestimada: que todas las estrellas observadas formen parte de una misma estructura física moviéndose en una dirección preferencial a medida que transcurre el tiempo. La segunda hipótesis asume que el equinoccio vernal retrograda secularmente y por lo tanto las longitudes eclípticas y las ascensiones rectas aumentarán con el tiempo (Smart, 1962, p. 226). Hiparco tuvo entonces el mérito de descubrir que el equinoccio vernal no podía considerarse como un punto fijo en el cielo a medida que transcurría el tiempo. Además, dado que no observó cambios en la latitudes eclípticas, asumió que la Eclíptica era un plano fijo. Como los equinoccios corresponden a la proyección en la esfera celeste de la línea nodal Eclíptica – Ecuador Celeste, el razonamiento de Hiparco sólo desplaza al Ecuador celeste manteniendo la oblicuidad de la eclíptica sin cambios dramáticos.

¹ El radio ecuatorial es aproximadamente 21 km mas grande que el radio polar (Dehant y Mathews, 2015)

² En aquí en adelante, nos referiremos a este punto como el Geocentro

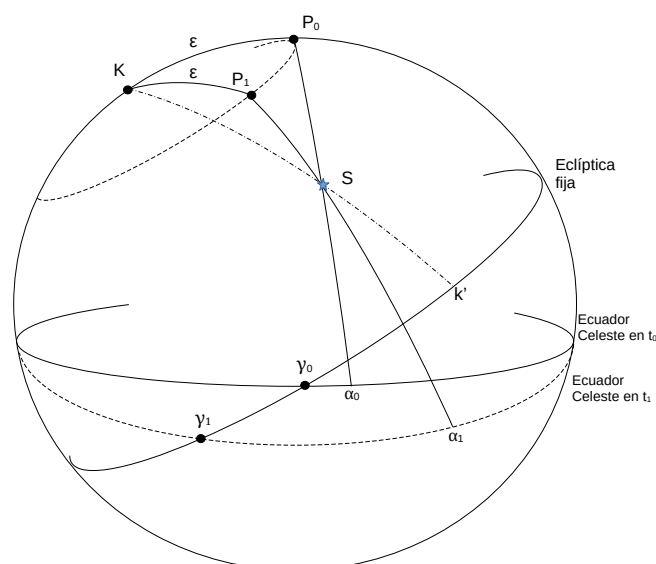
³ Hiparco estima una tasa de variación de 36" por año, levemente inferior al valor hoy aceptado de unos 50" por año

La figura 5.1 esquematiza el razonamiento de Hiparco. Asumiendo a la Eclíptica fija, el Ecuador celeste en el instante t_1 se desplaza respecto de su posición en t_0 causando una retrogradación del equinoccio vernal a la posición γ_1 . Por lo tanto las longitudes eclípticas (λ) resultarán $\lambda_1 > \lambda_0$, dado que $\text{arco}(\gamma_1 k') > \text{arco}(\gamma_0 k')$. Otra consecuencia del movimiento del Ecuador es el desplazamiento de su polo desde la posición P_0 en t_0 a la posición P_1 en t_1 . Nótese que este desplazamiento tendrá lugar en una circunferencia de radio ε^4 constante en torno al polo ecliptical (K).

Según Smart (1953 p. 343; 1962, p. 227), Newton en su obra *Principia* fue el primero en encontrar una explicación dinámica al fenómeno de la Precesión, mientras que Bradley descubre la Nutación en 1748 demostrando que la Eclíptica tampoco es un plano fijo, la oblicuidad de la Eclíptica no es constante y la retrogradación del Equinoccio no es uniforme.

Figura 5.1.

Desplazamiento del Polo y el Ecuador celeste por Precesión según Hiparco.



Nota. Adaptado de *Textbook on Spherical Astronomy* (p. 227), de W. M. Smart, 1977, Cambridge University Press.

Efectivamente, la Nutación entendida como el efecto periódico y de pequeña amplitud⁵ que se superpone al movimiento del Polo celeste en torno al Polo ecliptical, necesitó la aparición de relojes lo suficientemente precisos como para distinguir el efecto en las determinaciones de la declinación hechas a partir de observaciones meridianas en el siglo XVIII (Green, 1985, p. 51).

⁴ Oblicuidad de la Eclíptica

⁵ Menor a 15"

Desde la Astrometría, aparte del entendimiento cabal del problema, nos ocupa el movimiento que este efecto causa sobre los planos fundamentales y como estos cambios alteran las coordenadas de los cuerpos celestes. Dado que ambos planos fundamentales cambiarán de posición, es esperable que varíen sus coordenadas celestes sin importar si se trata del sistema de coordenadas ecuatorial celeste o ecliptical.

El efecto combinado del cambio secular y periódico de la orientación del eje de rotación terrestre visto desde el sistema de referencia celeste, admite ser modelado. En particular desarrollaremos los lineamientos de las teorías de Precesión y Nutación adoptadas por la IAU en 1977 (Lieske et al., 1977; Lieske, 1979) y en 1980 (Seidelmann, 1982), respectivamente. Normalmente ambos efectos se superponen y se calcula su influencia en las coordenadas de los objetos celestes. Tales correcciones son apreciables y deben aplicarse aún cuando el periodo transcurrido desde el instante de referencia sea corto⁶.

Precesión: presentación del problema físico

Ya hemos visto que la Precesión lunisolar se origina en la atracción gravitacional del Sol y la Luna sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra. La solución dinámica rigurosa del problema excede los contenidos básicos presentados en esta obra. Se trata de un problema complejo dado que deben calcularse los torques antedichos para la Tierra considerando una distribución irregular de masas y un núcleo que no es rígido (Walter y Sovers, 2000, p. 22). Por lo anterior, aproximaremos la solución dinámica a un giroscopio bajo las siguientes suposiciones: a) que la Tierra admite describirse matemáticamente por un elipsoide de revolución y b) que la distribución de masas en el interior terrestre es radialmente simétrica (Walter y Sovers, 2000, p. 22; Dehant y Mathews, 2015, p. 1).

La Tierra, representada por un elipsoide de revolución, esta rotando con velocidad angular $\vec{\Omega}$ en torno a un eje inclinado un ángulo $(90^\circ - \varepsilon)$ con respecto al plano orbital, donde ε refiere a la oblicuidad de la Eclíptica, y sea K la dirección perpendicular al plano orbital (ver Figura 5.2).

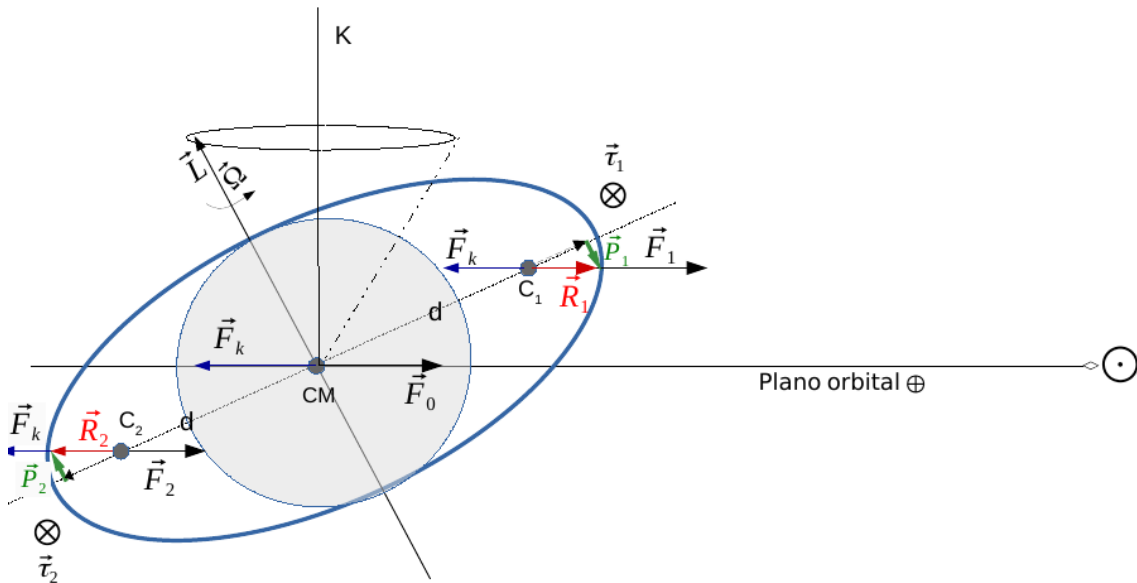
Para analizar las fuerzas actuantes asumiremos que toda la masa del planeta se distribuye en tres puntos. Uno de estos puntos esta ubicado en el Geocentro (CM), los otros dos puntos (C1 y C2) están simétricamente ubicados a una distancia d en el plano del Ecuador a ambos lados del Geocentro. La ubicación de los puntos C1 y C2 representa a los respectivos excedentes de masa del elipsoide al remover la masa de la esfera de radio polar. Estos excedentes también se conocen como abultamientos ecuatoriales.

⁶ Un año o menos

Comenzaremos considerando la atracción gravitacional ejercida por el Sol. Dado que la fuerza de atracción gravitacional es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre cuerpo atraído y tractor, el módulo de esta fuerza será diferente en cada uno de los puntos C1, C2 y CM resultando $\vec{F}_1 > \vec{F}_0 > \vec{F}_2$.

Figura 5.2.

Esquema de fuerzas y torques considerando a la Tierra como un giroscopio.



Nota. Adaptado de *Astrometry of Fundamental Catalogues* (p. 18), de Walter H. G. y Sovers O. J., 2000, Springer.

Haciendo un poco de álgebra, puede demostrarse que los módulos de \vec{F}_0 , \vec{F}_1 y \vec{F}_2 pueden vincularse linealmente entre sí en términos de $(2d)$. De modo conveniente

entonces podemos aproximar $\vec{F}_1 = \vec{F}_0 + \Delta \vec{F}$ y $\vec{F}_2 = \vec{F}_0 - \Delta \vec{F}$, donde $\Delta \vec{F} \approx \frac{\vec{F}_0 2d \cos \varepsilon}{R}$

siendo R la distancia desde el Geocentro al centro del Sol.

Además, dado que el sistema Tierra – Luna se encuentra en equilibrio dinámico en el campo de gravedad del Sol, la fuerza ejercida sobre el centro de masa será de igual módulo y sentido opuesto a la fuerza centrífuga \vec{F}_k (Walter y Sovers, 2000, p. 19). Por lo anterior, en el Geocentro resulta $\vec{F}_0 = -\vec{F}_k$. Dado que $d \ll 1$ UA, e ignorando la rotación de la Tierra, asumimos que el efecto de la fuerza centrífuga es idéntico en los 3 puntos considerados C1, CM y C2.

Sumando \vec{F}_k en C1 y C2 respectivamente quedará, $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 - \vec{F}_0$ y $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 - \vec{F}_0$. Por lo anterior, resulta $\vec{R}_1 = \Delta \vec{F}$ y $\vec{R}_2 = -\Delta \vec{F}$ o lo que es lo mismo $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$. Si descomponemos estas fuerzas en sus componentes paralela y perpendicular al plano del Ecuador obtenemos \vec{P}_1 y \vec{P}_2 , tal que $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$. Los torques resultantes coincidirán en módulo $\tau_1 = \tau_2$, siendo ambos perpendiculares y con sentido entrante al plano del esquema. La consecuencia neta del torque solar será entonces intentar alinear el plano del Ecuador con el plano de la órbita terrestre en torno al Sol (Walter y Sovers, 2000, p. 20).

De modo análogo, la Luna también ejerce torques sobre la Tierra. Aunque es esperable que la magnitud de tales torques sea mayor en virtud de las menores distancias entre los cuerpos tractor y atraído, su efecto será similar al torque solar en una primera aproximación. Efectivamente, el efecto neto del torque lunar será inclinar el plano Ecuatorial hacia el plano orbital de la Luna. Pero dado que el plano orbital de la Luna y la órbita terrestre están inclinados aproximadamente 5° entre sí, el torque lunar actuará esencialmente en la misma dirección que el torque solar (Walter y Sovers, 2000, p. 20) y ambos torques combinados darán origen al efecto precesional dominante también conocido como Precesión lunisolar, donde cerca de $\frac{2}{3}$ de la magnitud del efecto se debe a la Luna y $\frac{1}{3}$ del mismo al Sol (Smart, 1962, p. 228).

La comprensión integral de la Precesión vista desde el sistema de referencia celeste, exige aplicar la conservación del momento angular. Según hemos visto en párrafos anteriores los torques ejercidos sobre los abultamientos ecuatoriales tienen igual dirección y sentido. En consecuencia, su suma será distinta de cero.

Dado que asumimos una Tierra sólida con tensor de inercia I , rotando con velocidad angular constante $\vec{\Omega}$, su momento angular $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ tendrá modulo constante, con \vec{L} compartiendo la dirección de $\vec{\Omega}$, esto es: en la dirección del eje de rotación o eje polar. En consecuencia, para cumplir con la conservación del momento angular, \vec{L} deberá cambiar su dirección con el tiempo.

Por lo anterior, en la Figura 5.2 puede verse que la Precesión se manifiesta como el movimiento del eje polar sobre la superficie de un cono de apertura $= 2\epsilon$ en torno a la dirección perpendicular al plano orbital terrestre K^7 . El circuito se completa en aproximadamente 25800 años con una tasa estimada de $50''/\text{año}$. La consecuencia observacional de este fenómeno se manifiesta en las distintas ubicaciones del Polo celeste proyectado en la esfera celeste y es muy notable con intervalos de algunos miles de años. Dado que usualmente se ubica al Polo norte celeste en la esfera celeste por su cercanía a las distintas constelaciones, y actualmente

⁷ Recordar que K proyectado en la esfera celeste es el polo ecliptical

se encuentra en la dirección de α Ursae Minoris⁸, por causa de la Precesión en aproximadamente 12000 años se ubicará en cercanías de α Lyrae⁹.

Para concluir debemos aclarar que la descripción antedicha asume que la dirección perpendicular al plano orbital (K) está fija. Si bien esta suposición es válida durante intervalos menores a 1 año (Green, 1985, p. 209), K se desplazará como consecuencia de la llamada Precesión planetaria como veremos en una sección siguiente.

Movimiento del Ecuador celeste

Para poder cuantificar las correcciones a las coordenadas estelares por Precesión lunisolar, es necesario analizar el problema físico desde la esfera celeste y calcular los desplazamientos modelados de los planos fundamentales, analizando sus consecuencias sobre las posiciones en el sistema de referencia celeste. A continuación, y dado que la Precesión lunisolar es el efecto dominante, derivaremos fórmulas de corrección al primer orden sobre el efecto geométrico esquematizado en la Figura 5.1.

Asumiendo un instante inicial t_0 , las posiciones del Polo celeste y el Equinoccio vernal serán P_0 y γ_0 , respectivamente. A causa de la Precesión lunisolar, el Polo celeste se moverá desde P_0 hasta P_1 , donde P_1 indica la posición del Polo celeste en un instante posterior $t_1 = (t_0 + \Delta t)$. Dado que asumimos a la Eclíptica fija, este desplazamiento se efectúa a lo largo de una circunferencia con centro en el polo ecliptical K y radio ε . Dicho de otro modo, la distancia entre el Polo celeste y el Polo ecliptical se mantendrá constante e igual a ε a medida que pasa el tiempo. Sin embargo la posición de P_1 respecto de P_0 quedará establecida por el ángulo

$\widehat{P_0 K P_1} = \psi_A \Delta t$, donde ψ_A es

$$\psi_A = 50,387'' + 0,0049'' T \quad (5.1)$$

con T expresado en fracción de siglos Julianos contados desde J2000,0¹⁰ (Green 1985, p. 211).

En consecuencia, el Ecuador celeste se desplazará hacia el oeste¹¹ desde su posición en t_0 a su nueva ubicación en t_1 , siendo γ_1 el nuevo Equinoccio vernal. Por lo anterior, es claro que el arco $\gamma_0 \gamma_1 = \psi_A \Delta t$.

⁸ Polaris

⁹ Vega

¹⁰ $T = (t - 2000)/100$, con t en años

¹¹ "hacia atrás", retrogradará

A continuación analizaremos las consecuencias de estos movimientos sobre las coordenadas estelares. Dado que la Eclíptica permanece fija durante Δt es fácil ver que en coordenadas eclípticas las variaciones admiten expresarse como

$$\begin{cases} d\lambda = \psi_A \Delta t \\ d\beta = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

donde $d\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$; $d\beta = \beta_1 - \beta_0$. El cambio de las coordenadas ecuatoriales celestes por Precesión lunisolar se calcula a partir de una transformación de coordenadas que puede realizarse a partir de la trigonometría esférica o utilizando matrices de rotación. Para ejemplificar ambos procedimientos realizaremos aquí la transformación de coordenadas usando rotaciones y aplicaremos trigonometría esférica en la sección siguiente.

Sean \hat{s}_{ECU} y \hat{s}_{ECL} los respectivos versores posición en coordenadas ecuatoriales celestes y eclípticas, respectivamente.

$$\hat{s}_{ECU} = R_x(-\varepsilon) \hat{s}_{ECL} \quad (5.3)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varepsilon) & \sin(-\varepsilon) \\ 0 & -\sin(-\varepsilon) & \cos(-\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

La solución de (5.4) conduce a

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta \quad (5.5a)$$

$$\sin \alpha \cos \delta = \cos \varepsilon \sin \lambda \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \quad (5.5b)$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \cos \varepsilon \sin \beta \quad (5.5c)$$

Derivamos (5.5c) aplicando regla de la cadena y considerando que $d\varepsilon$ y $d\beta$ son nulas, quedará

$$\cos \delta d\delta = \sin \varepsilon \cos \lambda \cos \beta d\lambda \quad (5.6)$$

Reemplazando (5.5a) y (5.2) en la ecuación (5.6) quedará

$$d\delta = \psi_A \Delta t \sin \varepsilon \cos \alpha \quad (5.7)$$

donde $d\delta = \delta_1 - \delta_0$. Luego derivando (5.5a) y considerando que $d\beta = 0$ resulta

$$-\sin \alpha \cos \delta d\alpha - \cos \alpha \sin \delta d\delta = -\cos \beta \sin \lambda d\lambda \quad (5.8)$$

Es necesario operar para sustituir el producto $\cos \beta \sin \lambda$ en términos de coordenadas ecuatoriales celestes. Multiplicando la ecuación (5.5b) por $\cos \varepsilon$, la ecuación (5.5c) por $\sin \varepsilon$ y sumando ambas ecuaciones resultantes quedará

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon &= \cos^2 \varepsilon \sin \lambda \cos \beta - \cos \varepsilon \sin \varepsilon \sin \beta \\ &+ \sin^2 \varepsilon \sin \lambda \cos \beta + \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \beta \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\sin \alpha \cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon = \cos \beta \sin \lambda \quad (5.10)$$

Determinamos $d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, multiplicando ambos miembros de la ecuación (5.8) por (-1), reemplazando $d\lambda$ por (5.2), $d\delta$ por (5.7), $\cos \beta \sin \lambda$ por (5.10) y operando algebraicamente resulta

$$d\alpha = \psi_A \Delta t (\cos \varepsilon + \operatorname{tg} \delta \sin \varepsilon \sin \alpha) \quad (5.11)$$

Como se mencionó más arriba, las ecuaciones (5.2), (5.7) y (5.11) fueron deducidas al primer orden usando una aproximación geométrica del efecto de Precesión que asume a la Eclíptica fija y al Ecuador móvil durante el intervalo Δt . Por lo tanto las fórmulas aquí deducidas son válidas para un intervalo de 1 año o menos tiempo (Green, 1985, p. 210).

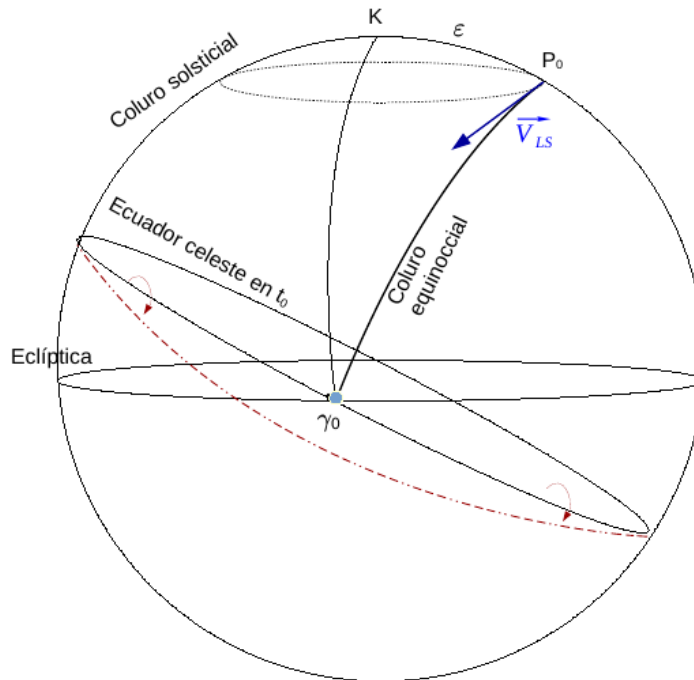
Velocidad precesional instantánea del Ecuador

Siguiendo Woolard y Clemence (1966, p. 244-247), el movimiento instantáneo del Polo del Ecuador celeste medio puede aproximarse como una rotación en torno al eje de la Eclíptica fija de la época con velocidad tangencial $|\vec{V}_{ls}| \approx (d\psi_A/dt) \sin \varepsilon$, manteniendo constante la orientación relativa de ambos planos (ε). Dicho de otro modo, podemos pensar al Polo celeste medio moviéndose en una circunferencia con centro en K y radio ε .

Por definición de velocidad tangencial, este movimiento será instantáneamente perpendicular al coluro solsticial y por lo tanto tendrá la dirección del coluro equinoccial. En consecuencia, el Ecuador medio también se moverá rotando en torno a un eje que pasa por el coluro solsticial y produciendo un desplazamiento del equinoccio vernal hacia el oeste (ver Figura 5.3).

Figura 5.3.

Esquema del movimiento instantáneo del Ecuador celeste por Precesión lunisolar.



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 245), de Woolard E. W. y Clemence G. M., 1966, Academic Press.

Sin embargo, debe notarse que este desplazamiento estará afectado por pequeñas variaciones seculares adicionales a $d\psi_A/dt$ de origen dinámico. Su consecuencia está en la trayectoria del Polo medio, que no reproduce exactamente una circunferencia ni se repite en revoluciones sucesivas. Además, las series de potencias de las expresiones teóricas no resultan válidas para periodos mayores a algunos cientos de años (Woolard y Clemence, 1966, p. 246). Finalmente, también debe notarse que la trayectoria real del Polo celeste tampoco se realiza estrictamente en un arco de círculo máximo dado que el nodo también se desplaza (Woolard y Clemence, 1966, p. 245).

Movimiento de la Eclíptica

Previamente tratamos la acción de los torques gravitacionales ejercidos sobre la Tierra. En particular, analizamos la acción de los dos cuerpos tractores más importantes: el Sol por su masa y la Luna por su corta distancia a nuestro planeta.

Los torques gravitacionales ejercidos por el resto de los planetas del Sistema Solar sobre la Tierra también deben ser tenidos en cuenta, y aunque su influencia sobre la dirección del momento angular del planeta sea despreciable, la perturbación introducida alterará los elementos orbitales de la Tierra (Green, 1985, p. 211). Esta perturbación es mencionada en los textos clásicos como *Precesión planetaria* (Smart, 1962, p. 236-237; Woolard y Clemence, 1966, p. 236; Green, 1985, p. 211).

Recordando que el plano orbital medio de nuestro planeta define el plano de la Eclíptica en la esfera celeste, la consecuencia de esta perturbación será un movimiento de la Eclíptica y su polo con el tiempo.

A continuación analizaremos en la esfera celeste las consecuencias de estos movimientos sobre las coordenadas estelares usando trigonometría esférica. El desarrollo contemplará las consecuencias del desplazamiento del plano de la Eclíptica para un intervalo Δt de un año o menos tiempo considerando al Ecuador celeste fijo. De modo que si partimos de la configuración geométrica en un instante inicial t_0 (ver Figura 5.4), el instante posterior t_1 será $t_1 = t_0 + \Delta t$.

En la figura 5.4, P es el Polo celeste, K_0 y γ_0 son el Polo ecliptical y el Equinoccio vernal en el instante t_0 , respectivamente. Sea R el punto de intersección entre las dos Eclípticas. A consecuencia de la Precesión planetaria, la Eclíptica en t_0 rotará en torno al nodo $\overline{RR'}$ con una tasa aproximada de $0,5''$ por año de modo que, luego del intervalo Δt , ocupará una nueva posición caracterizada por el polo K_1 y el equinoccio vernal γ_1 en t_1 . A simple vista es fácil ver que el Equinoccio vernal nuevamente se desplaza pero esta vez se moverá a lo largo del Ecuador fijo y en sentido directo.

Dado que el equinoccio se desplaza en la misma dirección en la cual se miden las ascensiones rectas crecientes, si $d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, luego $d\alpha < 0$ dado que $\alpha_0 > \alpha_1$ porque $\gamma_0 A > \gamma_1 A$. La consecuencia directa sobre las coordenadas ecuatoriales absolutas será

$$\begin{cases} d\alpha = -\chi_A \Delta t \\ d\delta = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

donde $d\delta = \delta_1 - \delta_0$ y χ_A es la tasa anual de Precesión Planetaria dada por

$$\chi_A = 0,1055'' - 0,0189'' T \quad (5.13)$$

con T expresado en fracción de siglos Julianos contados desde J2000,0 (Lieske et al, 1977, p. 15; Green 1985, p. 214).

Analizaremos en detalle los parámetros teóricos involucrados en la rotación del plano ecliptical desde el triángulo sombreado en la figura 5.4 (arriba). La figura 5.4 (abajo) nos muestra ese triángulo en detalle. Ya hemos visto que el desplazamiento de γ_1 con respecto a γ_0 a lo largo del Ecuador fijo durante Δt será χ_A . Se denomina Π_A al arco $\gamma_0 R$, o lo que es lo mismo a la longitud ecliptical del eje de rotación de la Eclíptica en el instante t_0 . Por otro lado, π_A es el ángulo $\gamma_0 R \gamma_1$ rotado por la Eclíptica durante el intervalo Δt . Si tomamos como época de referencia J2000.0, la teoría nos ofrece valores numéricos para calcular Π_A y π_A

$$\begin{aligned} \Pi_A &= 174,8764^\circ + 0,9137^\circ T \\ \pi_A &= 0,47'' - 0.0007'' T \end{aligned} \quad (5.14)$$

con T expresado en fracción de siglos Julianos contados desde J2000.0 (Lieske et al, 1977, p. 15; Green 1985, p. 214).

Por lo anterior, el ángulo entre las dos Eclípticas estará dado por $(\pi_A \Delta t)$ con Δt expresado en fracción de siglos (Lieske et al, 1977, p. 15).

Antes de calcular la variación a las coordenadas eclipticales por Precesión planetaria, es importante remarcar que el efecto también alterará la oblicuidad de la Eclíptica.

Denominando ε_0 a la oblicuidad de la Eclíptica en t_0 , el respectivo valor de la oblicuidad en t_1 será $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + d\varepsilon$.

Aplicando la fórmula del seno al triángulo esférico de la figura 5.4 (abajo) y considerando que el restante ángulo interior del triángulo es el suplementario de $(\varepsilon_0 + d\varepsilon)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sin [180^\circ - (\varepsilon_0 + d\varepsilon)] \sin (\chi_A \Delta t) &= \sin (\pi_A \Delta t) \sin \Pi_A \\ \sin (\varepsilon_0 + d\varepsilon) \sin (\chi_A \Delta t) &= \sin (\pi_A \Delta t) \sin \Pi_A \end{aligned} \quad (5.15)$$

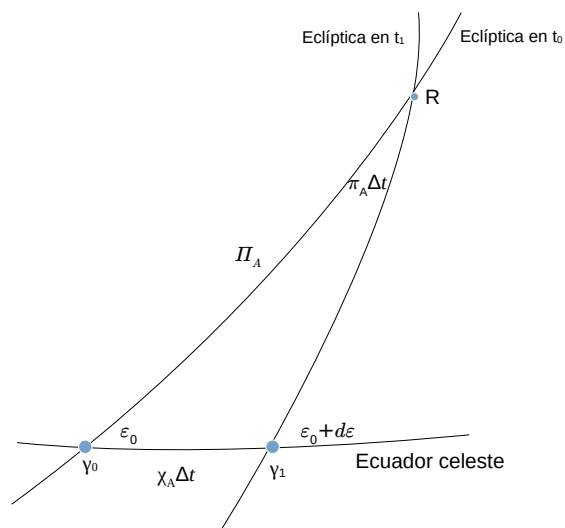
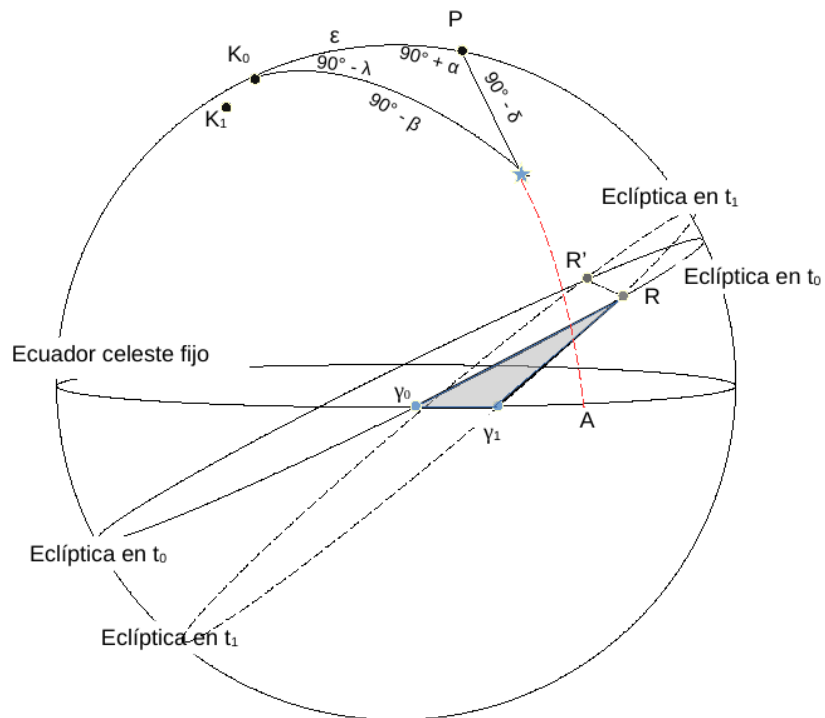
Desde las ecuaciones (5.13) y (5.14), puede verse que los valores de χ_A y π_A resultarán muy pequeños para $\Delta t \leq 1 \text{ año}$. Por lo tanto, aproximando $\varepsilon_0 + d\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ y expresando los ángulos en radianes, la ecuación (5.15) quedará

$$\chi_A \approx \pi_A \sin \Pi_A \operatorname{cosec} \varepsilon_0 \quad (5.16)$$

(Lieske et al., 1977, p. 12). Aplicando la fórmula de las cuatro partes al triángulo esférico de la figura 5.4 (abajo) quedará (ver Anexo B, ecuación B.12)

Figura 5.4.

(Arriba) *Movimiento de los planos fundamentales en la esfera celeste debido a la Precesión Planetaria.* (Abajo) *Detalle de los planos, arcos y ángulos involucrados.*



Nota. Por claridad, los desplazamientos se han magnificado y están fuera de escala. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p, 212), por Green R. M., 1985, Cambridge University Press.

$$\cotg \Pi_A \operatorname{sen}(\chi_A \Delta t) = \cos(\chi_A \Delta t) \cos \varepsilon_0 + \operatorname{sen} \varepsilon_0 \cotg [180^\circ - (\varepsilon_0 + d \varepsilon)] \quad (5.17)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (5.17) por $\operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \cotg \Pi_A \operatorname{sen}(\chi_A \Delta t) \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) &= \cos(\chi_A \Delta t) \cos \varepsilon_0 \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \\ &\quad - \operatorname{sen} \varepsilon_0 \cotg(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Aproximando $\operatorname{sen}(\chi_A \Delta t) \approx \chi_A \Delta t$ y $\cos(\chi_A \Delta t) \approx 1$ dado que $\chi_A \Delta t$ está expresado en radianes y resulta ser un ángulo pequeño para $\Delta t \leq 1 \text{ año}$, quedará

$$\cotg \Pi_A (\chi_A \Delta t) \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \approx \cos \varepsilon_0 \operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) - \operatorname{sen} \varepsilon_0 \cos(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \quad (5.19)$$

$d \varepsilon$ también es una cantidad pequeña para $\Delta t \leq 1 \text{ año}$ y está expresada en radianes. Convenientemente en el primer miembro podemos aproximar $\operatorname{sen}(\varepsilon_0 + d \varepsilon) \approx \operatorname{sen} \varepsilon_0$

$$\cotg \Pi_A (\chi_A \Delta t) \operatorname{sen} \varepsilon_0 \approx \operatorname{sen}[(\varepsilon_0 + d \varepsilon) - \varepsilon_0] \quad (5.20)$$

Aproximando $\operatorname{sen} d \varepsilon \approx d \varepsilon$ quedará

$$d \varepsilon \approx \chi_A \Delta t \cotg \Pi_A \operatorname{sen} \varepsilon_0 \quad (5.21)$$

Finalmente, reemplazando la ecuación (5.16) en (5.21) resulta

$$\boxed{d \varepsilon \approx \pi_A \Delta t \cos \Pi_A} \quad (5.22)$$

Para obtener la variación a las coordenadas eclípticas, considero la estrella S en la Figura 5.4 (arriba) y asumo sus coordenadas (α, δ) y (λ, β) conocidas para el instante inicial t_0 . Aplicando la fórmula del coseno al triángulo esférico de vértices $K_0 P S$ (donde S refiere a la estrella) y operando algebraicamente sobre el resultado, quedará (Green, 1985, p. 213)

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \alpha \quad (5.23)$$

Derivamos aplicando regla de la cadena, reemplazamos $d \delta = 0$ y operamos algebraicamente obteniendo

$$\cos \beta \, d\beta = -\cos \delta \cos \alpha \sin \varepsilon \, d\alpha - (\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon) \, d\varepsilon \quad (5.24)$$

Aplicando la fórmula del seno al mismo triángulo esférico se obtiene¹²

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta \quad (5.25)$$

Aplicando la fórmula de los cinco elementos

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \beta) \cos(90^\circ - \lambda) &= \cos(90^\circ - \delta) \sin \varepsilon - \sin(90^\circ - \delta) \cos \varepsilon \cos(90^\circ + \alpha) \\ \cos \beta \sin \lambda &= \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.26)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.25), (5.26), (5.21) y (5.12) en (5.24) y operando algebraicamente, quedará (Green, 1985, p. 213)

$$d\beta = \pi_A \Delta t \sin(\Pi_A - \lambda) \quad (5.27)$$

donde $d\beta = \beta_1 - \beta_0$. Para deducir las variaciones en λ , derivamos la ecuación (5.25) aplicando regla de la cadena y recordando que $d\delta = 0$

$$\sin \lambda \cos \beta \, d\lambda = \sin \alpha \cos \delta \, d\alpha - \cos \lambda \sin \beta \, d\beta \quad (5.28)$$

Para reemplazar las coordenadas ecuatoriales celestes en la ecuación (5.28), aplico la fórmula de los cinco elementos sobre el triángulo esférico de la figura 5.4 (abajo)

$$\cos \delta \sin \alpha = \sin \beta \sin \varepsilon - \cos \beta \cos \varepsilon \sin \lambda \quad (5.29)$$

Reemplazando (5.29), (5.12), (5.16) y (5.27) en la ecuación (5.28), operando algebraicamente y ordenando quedará (Green, 1985, p. 213)

$$d\lambda = \pi_A \Delta t [\operatorname{tg} \beta \cos(\Pi_A - \lambda) - \operatorname{cotg} \varepsilon \sin \Pi_A] \quad (5.30)$$

donde $d\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$. Finalmente, una expresión más familiar puede obtenerse desde la ecuación (5.30), usando la ecuación (5.16) para expresar $d\lambda$ explícitamente en términos de la tasa anual de Precesión planetaria, resultará (Green, 1985, p. 213)

¹² Nótese que las ecuaciones 5.5a y 5.25 son iguales dado que los métodos de transformación de coordenadas son equivalentes

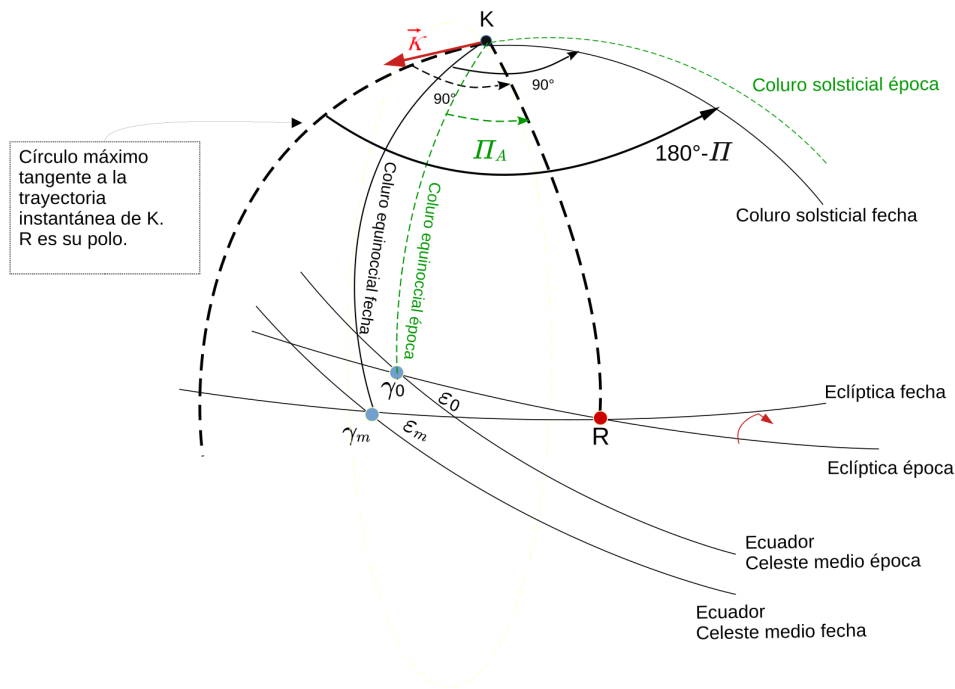
$$\dot{\lambda} = \pi_A \Delta t \operatorname{tg} \beta \cos (\Pi_A - \lambda) - \chi_A \Delta t \cos \varepsilon \quad (5.31)$$

Velocidad precesional instantánea de la Eclíptica

El desplazamiento instantáneo del Polo ecliptical en la esfera celeste no tiene lugar a lo largo de un círculo máximo, sin embargo tomaremos como referencia el círculo máximo que es tangente a la trayectoria instantánea del Polo ecliptical (ver Figura 5.5). Denominaremos genéricamente $(180^\circ - \Pi)$ al ángulo que este círculo máximo forma hacia el Este con el coluro solsticial medio de la fecha (Woolard y Clemence, 1966, p. 176).

Figura 5.5.

Detalle del movimiento instantáneo de la Eclíptica.



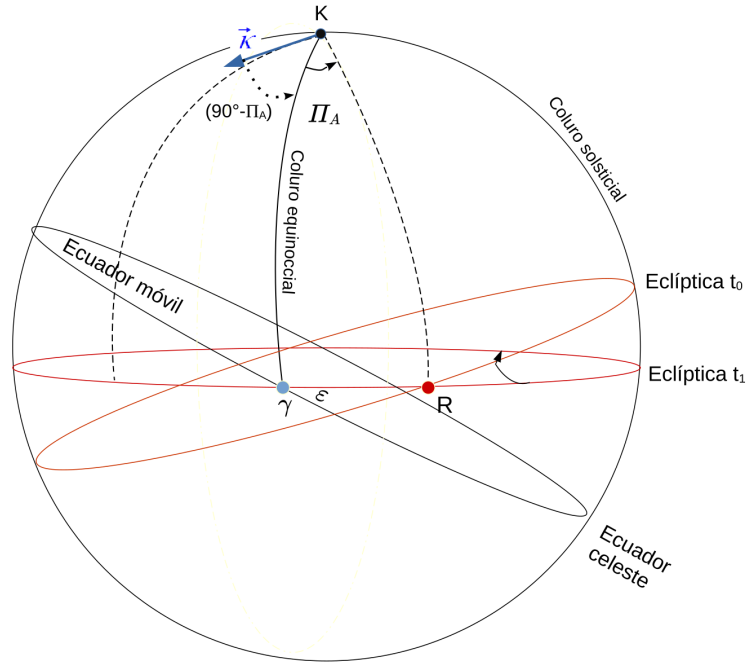
Consideraremos la longitud ecliptical del nodo de la Eclíptica de la fecha con respecto a la Eclíptica fija de la época fundamental¹³ (R) medido sobre la Eclíptica de la fecha, este ángulo será Π (no marcado en el gráfico) y se mide desde el Equinoccio medio de la fecha (γ_m). Si en cambio medimos la longitud ecliptical de R sobre la Eclíptica fija de la época fundamental (γ_0 , ver figura 5.5),

¹³ Presentado en la sección anterior como *eje de rotación de la Eclíptica*

podremos estimar un valor angular conocido (Π_A) calculado desde la teoría dinámica de movimiento de la Tierra en el Sistema Solar.

Figura 5.6.

Esquema del movimiento instantáneo de la Eclíptica por Precesión planetaria



Nota. Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 245), por Woolard E. W. y Clemence G. M., 1966, Academic Press.

Según Woolard y Clemence (1966) la posición instantánea del Polo eclíptico puede representarse por sus coordenadas en un sistema cartesiano rectangular con origen en el Polo eclíptico de la época fundamental, eje x en el coluro equinoccial de la época y eje y en el coluro solsticial de la época hacia la dirección de 90° de longitud (de color verde en la Figura 5.5). De este modo, las coordenadas del Polo eclíptico instantáneo serán $x_{Ecl} = \pi_A \sin \Pi_A$ y $y_{Ecl} = -\pi_A \cos \Pi_A$, donde convencionalmente π_A será negativo para instantes previos a la época fundamental. Aunque se trata de una proyección sobre la esfera celeste, la magnitud de los desplazamientos acumulados durante algunos siglos permiten aproximar el triángulo esférico resultante en un triángulo plano. (Woolard y Clemence, 1966, p. 177). Por esta misma razón, aproximaremos Π como Π_A sin perder generalidad.

Como se mencionó anteriormente, la velocidad instantánea del Polo eclíptico K es tangente al círculo máximo que aproxima su trayectoria, y tiene como módulo $|\vec{k}| = d\pi_A/dt$ (Woolard

y Clemence, 1966, p. 178) y la dirección ($90^\circ - \Pi_A$) al Oeste del coluro equinoccial (ver Figura 5.6).

La aplicación de la regla de la cadena a las expresiones de x_{Ecl} , y_{Ecl} nos proveerán las componentes cartesianas de la velocidad instantánea. La componente $\kappa \sin \Pi_A$ a lo largo del coluro equinoccial medio de la fecha provocará una rotación en el plano de la Eclíptica que no cambia la oblicuidad (ϵ) pero desplazará el equinoccio hacia el Este a lo largo del Ecuador móvil con una tasa χ_A , según la ecuación (5.16) a la cual podemos aproximarnos en radianes dada la magnitud de los ángulos involucrados.

Por otro lado, la componente $-\kappa \cos \Pi_A$ a lo largo del coluro solsticial, rotará a la Eclíptica provocando una variación en la oblicuidad ($\epsilon_m \neq \epsilon_0$, ver ecuación 5.22). Lieske y colaboradores (1977) proveen los valores numéricos de las componentes $\kappa \sin \Pi_A$ y $\kappa \cos \Pi_A$ adaptados a las convenciones y masas planetarias vigentes para la IAU en 1976. Estas expresiones siguen el formalismo de Newcomb, de modo que son equivalentes a las variaciones temporales de $\sin \pi_A \sin \Pi_A$ y $\sin \pi_A \cos \Pi_A$, respectivamente y admiten desarrollarse en series de potencias del tiempo (Lieske et al., 1977).

Precesión general

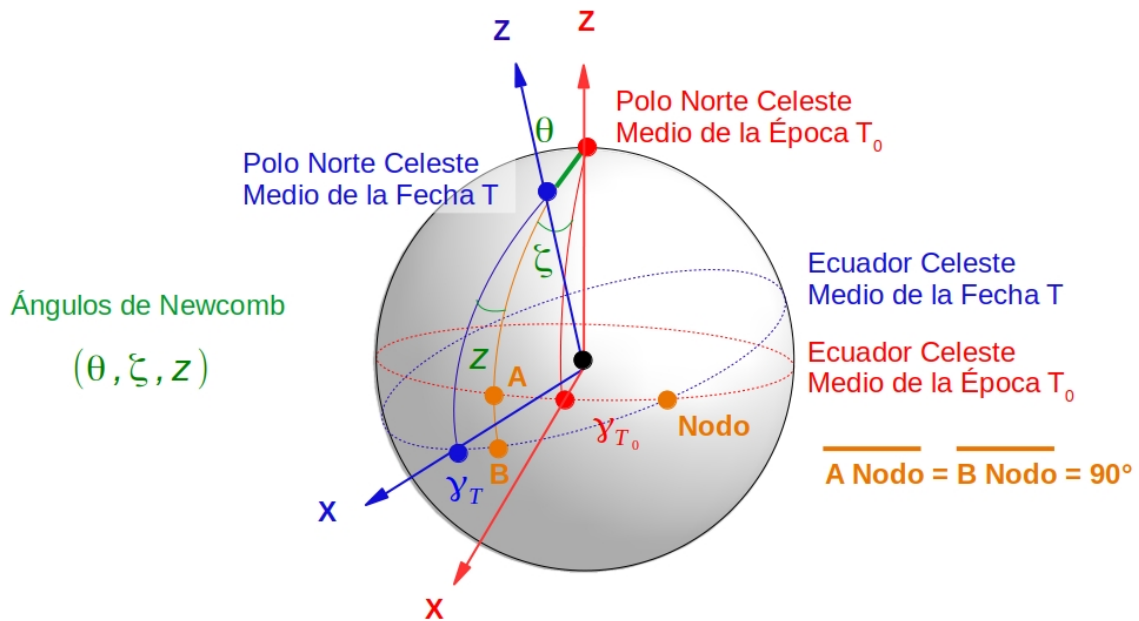
Fórmulas de corrección rigurosas

Para llevar a cabo una transformación rigurosa de las coordenadas de un astro por efectos de Precesión general debemos hacer uso de un método vectorial. La Figura 5.7 ilustra los elementos necesarios para el desarrollo de dicho procedimiento. En efecto, en dicha figura se representan el Polo norte celeste, el Ecuador y Equinoccios medios, y el coluro equinoccial de la época inicial T_0 y de la fecha final T , los cuales son ilustrados en color rojo y azul, respectivamente. Además, se representa el círculo horario que pasa por los Polos celestes de la época inicial T_0 y de la fecha final T , el cual se muestra de color naranja. Tal como se expone en la figura, cada uno de los arcos subtendidos entre los puntos A y B y el nodo entre ambos Ecuadores celestes medios es equivalente a 90° . En color verde se definen los **Ángulos de Newcomb** (θ, ζ, z), (Newcomb, 1906, p. 239-240) los cuales describen el efecto de la Precesión general acumulada sobre las coordenadas ecuatoriales celestes de un astro. La Figura 5.7 muestra también los ejes cartesianos asociados al sistema ecuatorial celeste medio de la época inicial T_0 y de la fecha final T , los cuales son ilustrados en color rojo y azul, respectivamente. En cada uno de los sistemas mencionados, el eje Z tiene la dirección del Polo

norte celeste medio, el eje X está orientado hacia el equinoccio vernal medio, y el eje Y (no representado) apunta hacia la intersección del Ecuador celeste medio con el coluro solsticial.

Figura 5.7.

Representación de los Ángulos de Newcomb



Si conocemos las coordenadas ecuatoriales celestes $(\alpha_{T_0}, \delta_{T_0})$ de un astro referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la época inicial T_0 y deseamos calcular las coordenadas ecuatoriales celestes (α_T, δ_T) de dicho astro referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la fecha final T , debemos construir la matriz de Precesión haciendo uso de los Ángulos de Newcomb. Dicha matriz está definida a partir del producto entre las siguientes tres matrices de rotación (Lieske et al. 1977):

- Primero $R_Z^{dir}(90^\circ - \zeta)$, la cual lleva el eje X desde el Equinoccio Vernal Medio de la época inicial T_0 γ_{T_0} hacia el Nodo,
- Segundo $R_X^{dir}(\theta)$, la cual lleva el eje Z desde el Polo Norte Celeste Medio de la época inicial T_0 hacia el Polo Norte Celeste Medio de la fecha final T ,
- Tercero $R_Z^{ret}(90^\circ + z)$, la cual lleva el X desde el Nodo hacia el Equinoccio Vernal Medio de la fecha final T γ_T .

Luego, si $\vec{r}_{T_0} = (\cos \delta_{T_0} \cos \alpha_{T_0}, \cos \delta_{T_0} \sin \alpha_{T_0}, \sin \delta_{T_0})$ representa el vector posición de un astro en el sistema ecuatorial celeste medio de la época inicial T_0 , es posible calcular el vector posición \vec{r}_T de dicho astro en el sistema ecuatorial celeste medio de la fecha final T a partir de la expresión

$$\vec{r}_T = R_Z^{ret}(90^\circ + z) R_X^{dir}(\theta) R_Z^{dir}(90^\circ - \zeta) \vec{r}_{T_0} \quad (5.32)$$

El lado derecho de esta ecuación matricial queda expresado en función de las coordenadas ecuatoriales celestes medias del astro $(\alpha_{T_0}, \delta_{T_0})$ referidas a la época inicial T_0 , las cuales representan un dato conocido, y de los Ángulos de Newcomb. A partir de los estudios desarrollados por Lieske et al. (1977), dichos ángulos pueden ser calculados mediante funciones polinómicas del tiempo, a partir de expresiones de la forma

$$\theta = (2004,3109'' - 0,85330'' \tau - 0,000217'' \tau^2) t - (0,42665'' + 0,000217'' \tau) t^2 - 0,041833 t^3 \quad (5.33)$$

$$\zeta = (2306,2181'' + 1,39656'' \tau - 0,000139'' \tau^2) t + (0,30188'' - 0,000345'' \tau) t^2 + 0,017998 t^3 \quad (5.34)$$

$$z = (2306,2181'' + 1,39656'' \tau - 0,000139'' \tau^2) t + (1,09468'' + 0,000066'' \tau) t^2 + 0,018203 t^3 \quad (5.35)$$

donde $\tau = \frac{T_0 - 2000,0}{100}$ y $t = \frac{T - T_0}{100}$, siendo T_0 y T la época inicial y fecha final, respectivamente, ambas expresadas en años.

A modo de ejemplo, si las coordenadas ecuatoriales celestes iniciales que asumimos como dato están referidas a Ecuador y Equinoccio medios J2000,0, $T_0 = 2000,0$ y $\tau = 0$, con lo cual las ecuaciones (5.33), (5.34), y (5.35) se verán muy simplificadas. Vale la pena remarcar que la fecha final T no necesariamente debe ser mayor que la época inicial T_0 .

Una vez cuantificados cada uno de los términos del segundo miembro de la ecuación (5.32), podemos calcular las componentes cartesianas del vector posición del astro $\vec{r}_T = (r_{T,x}, r_{T,y}, r_{T,z})$ referido a Ecuador y Equinoccio medios de la fecha final T . Calculadas tales componentes, la ecuación matricial dada por

$$\begin{pmatrix} \cos \delta_T \cos \alpha_T \\ \cos \delta_T \sin \alpha_T \\ \sin \delta_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{T,x} \\ r_{T,y} \\ r_{T,z} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

nos lleva a derivar las coordenadas ecuatoriales celestes (α_T, δ_T) del astro bajo consideración referidas a Ecuador y Equinoccio medios de la fecha final T a partir del siguiente esquema de resolución:

$$\delta_T = \arcsen r_{T,z} \quad (5.37)$$

$$\alpha_T = \arctg\left(\frac{r_{T,y}}{r_{T,x}}\right) \quad (5.38)$$

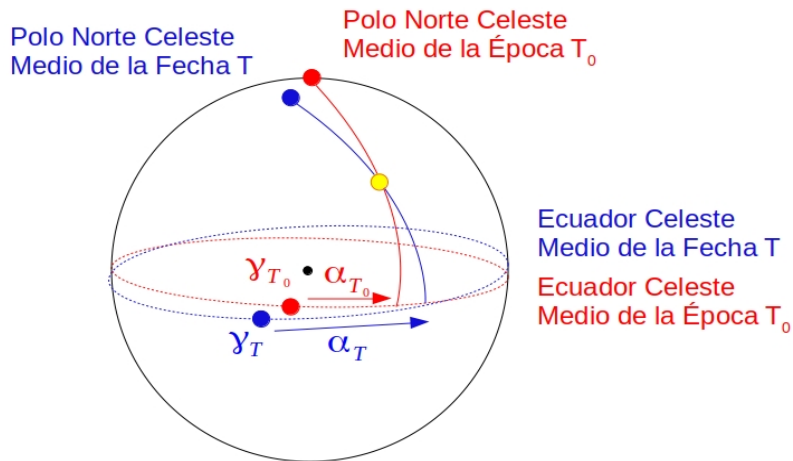
De modo similar a lo mencionado en el Capítulo 2 concerniente a Paralaje, destacamos que es sumamente necesario calcular el cuadrante al cual pertenece la ascensión recta α_T , previo al uso de la ecuación (5.38). En efecto, de acuerdo a la ecuación (5.36) y considerando que $\cos \delta_T$ es una cantidad positiva, el signo de las coordenadas cartesianas $r_{T,x}$ y $r_{T,y}$ nos permite conocer el signo de $\cos \alpha_T$ y $\sin \alpha_T$, respectivamente, lo cual nos lleva a especificar el cuadrante de α_T .

Fórmulas de corrección aproximadas

Si las correcciones en las coordenadas ecuatoriales celestes medias de un astro $\Delta \alpha$ y $\Delta \delta$ por efectos de Precesión general son pequeñas, es posible utilizar fórmulas aproximadas para cuantificar tales cambios. Es importante remarcar que para garantizar que $\Delta \alpha$ y $\Delta \delta$ tengan valores chicos, es necesario que el intervalo entre la época inicial T_0 y la fecha final T sea pequeño, y además que el astro bajo consideración no esté cerca de los Polos Celestes. La Figura 5.8 ilustra de manera esquemática los cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes medias por efectos de Precesión general para un astro ubicado lejos y para otro localizado cerca del Polo norte celeste medio. Resulta claro a partir de dicha figura que un astro ubicado cerca de uno de los Polos celestes puede experimentar grandes cambios en ascensión recta incluso cuando el intervalo entre la época inicial y la fecha final resulta ser pequeño. En términos prácticos y con el fin de garantizar que $\Delta \alpha$ y $\Delta \delta$ tengan valores chicos, las fórmulas aproximadas que nos dan las correcciones en las coordenadas ecuatoriales celeste medias por efectos de Precesión general podrán ser utilizadas siempre y cuando el intervalo entre la época inicial y la fecha final $|T - T_0| \lesssim 1$ año y la declinación del astro bajo estudio sea tal que $|\delta| \lesssim 80^\circ$.

Figura 5.8.

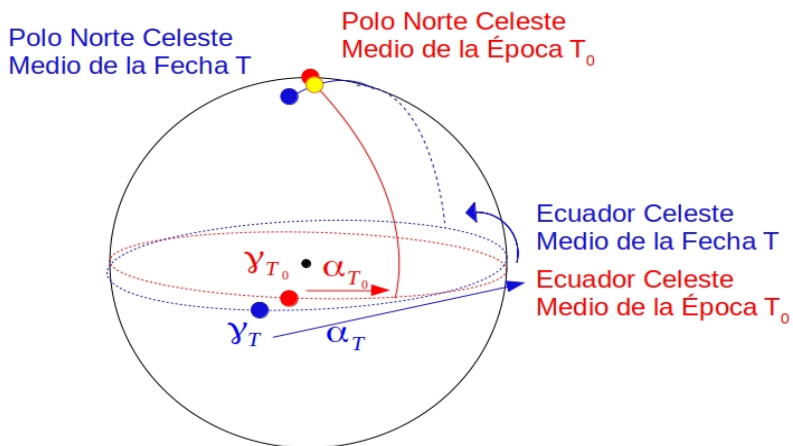
(Arriba) Cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes medias por *Precesión general* para astros lejos del Polo celeste. (Abajo) *Idem* para astros cerca del Polo celeste.



$$|\Delta T| = |T - T_0| < 1 \text{ año}$$

Para un astro lejos del polo ($|\delta| < 80^\circ$):

$\Delta \alpha, \Delta \delta$ pequeños



$$|\Delta T| = |T - T_0| < 1 \text{ año}$$

Para un astro cerca del polo ($|\delta| > 80^\circ$):

$\Delta \delta$ pequeño

$\Delta \alpha$ grande

Las fórmulas aproximadas que nos permiten calcular las correcciones en las coordenadas ecuatoriales celestes medias de un astro por efectos de Precesión general son construidas a partir de las ecuaciones (5.7), (5.11) y (5.12), y están dadas por

$$\alpha_T = \alpha_{T_0} + (m + n \operatorname{sen} \alpha_{T_0} \tan \delta_{T_0}) t \quad (5.39)$$

$$\delta_T = \delta_{T_0} + n \cos \alpha_{T_0} t \quad (5.40)$$

donde $m = \psi_A \cos \varepsilon - \chi_A$ y $n = \psi_A \operatorname{sen} \varepsilon$ representan la velocidad anual de Precesión General en ascensión recta y declinación, respectivamente, y $t = \frac{T - T_0}{100}$, siendo T_0 y T la época inicial y fecha final, respectivamente, ambas expresadas en años. De acuerdo con Lieske et al. (1977), las velocidades m y n tienen unidades de ''/siglo y pueden ser cuantificadas a partir de las siguientes expresiones

$$m = 4612,4362'' + 2,79312'' \tau - 0,000278'' \tau^2 \quad (5.41)$$

$$n = 2004,3109'' - 0,85330'' \tau - 0,000217'' \tau^2 \quad (5.42)$$

donde $\tau = \frac{T_0 - 2000,0}{100}$.

Vale la pena destacar que las fórmulas aproximadas dadas por las ecuaciones (5.39) y (5.40) pueden ser derivadas también a partir de la ecuación (5.32), asumiendo que tanto los cambios en las coordenadas ecuatoriales celestes así como también los valores de los Ángulos de Newcomb son cantidades pequeñas, para $|T - T_0| \lesssim 1$ año y astros con $|\delta| \lesssim 80^\circ$.

El desarrollo de este procedimiento es muy interesante ya que permite vincular de manera explícita las velocidades anuales de Precesión general m y n con la tasa de cambio en el tiempo de los Ángulos de Newcomb. En efecto, a partir del tratamiento propuesto, es posible

verificar que $m = \left(\frac{d(\zeta + z)}{dt} \right)_{T_0}$ y $n = \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{T_0}$ (Lieske et al. 1977).

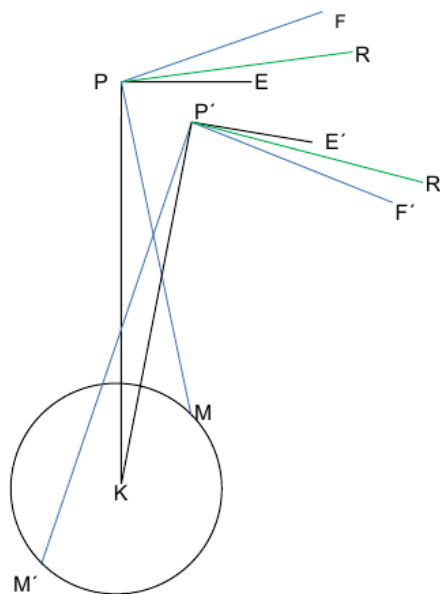
Nutación

Como se menciona más arriba, el efecto neto del torque lunisolar agrega cambios periódicos en la orientación del eje de rotación terrestre visto desde un sistema de referencia celeste; analizaremos su origen y principales características.

El movimiento del eje de rotación en la esfera celeste es la resultante de dos movimientos simultáneos: uno en torno al polo de la Eclíptica de la fecha producido por la acción del Sol y el otro alrededor del Polo móvil de la órbita de la Luna provocado por la acción de la Luna.

Figura 5.9.

Movimiento lunisolar del polo norte terrestre visto desde arriba del polo



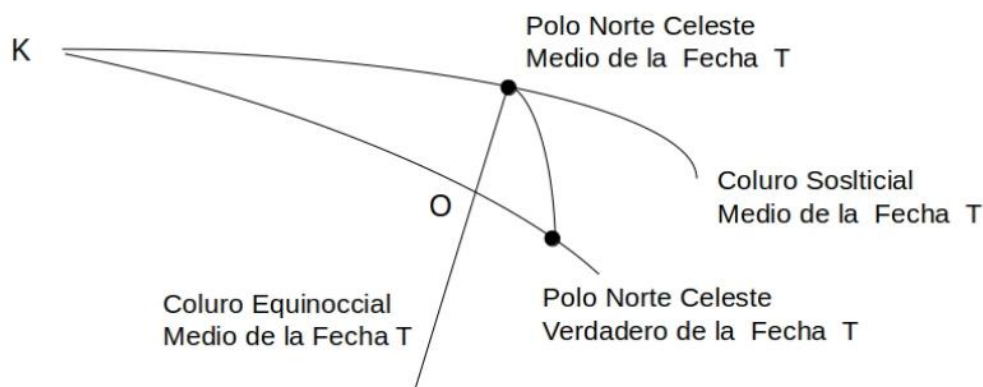
Nota. Basado en *A compendium of Spherical Astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars* (p. 247), por Newcomb S., 1906, The Macmillan Company.

La figura 5.9 muestra al Polo norte del Ecuador P, al polo norte de la Eclíptica de la fecha K y al Polo norte de la órbita de la Luna M. Por la acción del Sol, P se mueve en la dirección PE a 90° de la dirección PK; por acción de la Luna P se mueve en la dirección PF a 90° de la dirección PM. El movimiento instantáneo resultante de P por la acción combinada del Sol y de la Luna es en la dirección PR, que depende de las posiciones relativas de P, K y M y de las velocidades relativas en las direcciones PF y PE.

Además, el polo M completa un giro alrededor de K a una distancia prácticamente invariable de aproximadamente 5° en un período de 18,6 años debido a la retrogradación del nodo lunar. Nótese la posición de las direcciones PF y PF' respecto a la de las direcciones PE y PE', respectivamente, en dos instantes distintos de dicho giro. El movimiento de M alrededor de K produce que el movimiento de P en la dirección PF oscile continuamente a uno y otro lado de la dirección PE en 18,6 años. Luego, P describe en la esfera celeste una curva sinuosa a velocidad variable alrededor del polo de la Eclíptica fija, completa un giro en aproximadamente 26000 años al que se le superpone una senoide principal con período igual al de rotación del polo de la órbita lunar M (Woolard, Clemence, 1966, p.182-183).

Figura 5.10.

Movimiento del Polo celeste Verdadero respecto del Polo medio de la fecha



Nota. Adaptado de *A compendium of Spherical Astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars* (p. 249), por Newcomb S., 1906, The Macmillan Company.

El Polo norte celeste P es el Polo norte celeste verdadero, P_{vF} , su trayectoria en la esfera celeste puede representarse como un giro alrededor del Polo celeste medio de la fecha P_{mF} en un recorrido casi elíptico de semieje mayor aproximadamente $9''$ a velocidad variable denominado **Nutación**, al mismo tiempo que el Polo celeste medio de la Fecha P_{mF} se mueve de manera uniforme en un círculo alrededor del Polo norte ecliptical de la época K_0^{14} - Precesión lunisolar- (Woolard, Clemence, 1966, p. 182-183).

En la figura 5.10 se grafican, para un dado instante, las posiciones del Polo norte ecliptical de la fecha, del Polo celeste medio de la fecha, del Polo celeste verdadero de la fecha y del

¹⁴ Considerando despreciables las variaciones seculares en la velocidad de movimiento y en el radio del círculo igual a la oblicuidad media de la fecha

Coluro Solsticial medio de la fecha; sus notaciones son K , P_{mF} , P_{vF} y CS_{mF} , respectivamente. La dirección $P_{mF}O$ perpendicular a CS_{mF} es el coluro equinoccial medio de la fecha. El ángulo en K es pequeño ya que no supera los $20''$, el valor máximo de la distancia $P_{mF}P_{vF}$ es aproximadamente $10''$, por lo que el triángulo $P_{mF}OP_{vF}$ puede considerarse plano.

Bajo esta restricción, la componente OP_{vF} de la Nutación será el cambio en oblicuidad, y $P_{mF}KP_{vF}$ el cambio en la Precesión lunisolar producido por la Nutación, los que se representan por $\Delta \varepsilon$ y $\Delta \psi$ (Newcomb, 1906, p. 248-249).

La Nutación describe el movimiento del Polo celeste verdadero de la fecha relativo al Polo celeste medio de la fecha y puede resolverse en las componentes en longitud $\Delta \psi$ y en oblicuidad $\Delta \varepsilon$, que se muestran en la figura 5.11 (ESAA 1992, p. 114).

El modelo de nutación IAU 1980 (Seidelmann, 1982) describe este movimiento de corto período del eje de rotación terrestre respecto a un sistema de coordenadas celeste fijo adoptando un modelo de Tierra no rígida e incluye el movimiento debido a los torques externos debidos a la Luna, y en menor medida al Sol y a los planetas sobre el abultamiento ecuatorial – Nutación forzada- y cualquier Nutación libre que puede excitarse por procesos internos que se determinan sólo por observaciones. El Polo de referencia tanto para la Nutación como para el movimiento del polo (ver capítulo 8) se denomina Polo celeste de Efemérides (CEP), y tiene la ventaja de carecer de componentes de movimiento diurno o casi diurno respecto a un sistema de coordenadas celeste fijo o a un sistema de coordenadas terrestre fijo (ESAA, 1992, p.109).

Este modelo provee desarrollos en serie para la Nutación en longitud y en oblicuidad

$$\Delta \psi = \sum_{i=1}^n S_i \sin A_i \quad (5.43a)$$

$$\Delta \varepsilon = \sum_{i=1}^n C_i \cos A_i \quad (5.43b)$$

$$A_i = a_i l + b_i l' + c_i F + d_i D + e_i \Omega \quad (5.43c)$$

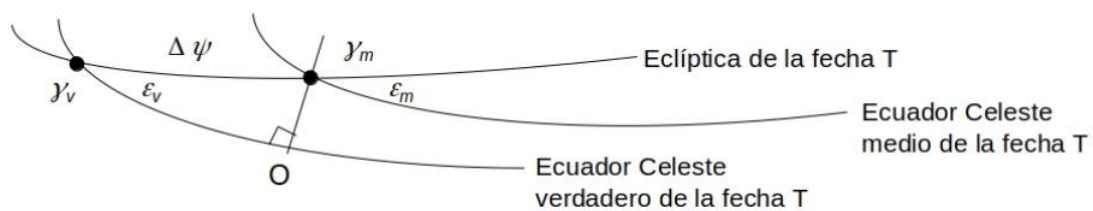
Los 106 términos de las series de la Nutación quedan definidas por los multiplicadores a_i , b_i , c_i , d_i y e_i — enteros—, los coeficientes S_i , C_i y los argumentos fundamentales l , l' , F , D y Ω funciones de la longitud media de la Luna, del perigeo lunar, del Sol, del perigeo solar, del nodo

lunar y del nodo ascendente de la órbita lunar medida desde el Equinoccio medio de la fecha (ver tablas 3.222.1 y 3.222.2 en ESAA, 1992, p. 118-119).

La precisión de las observaciones realizadas con la técnica VLBI motivaron una mejora del modelo con la introducción de nuevos términos, tales como los directos e indirectos y la Nutación planetaria, requeridos ante una precisión del milisegundo de arco (ver tablas 3.224.1 y 3.224.2 ESAA, 1992, p. 116-117).

Figura 5.11.

Componentes de la Nutación



Nota. Adaptado de *A revision to the Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac* (p. 114), por Seidelmann P. K. (ed.), 1992, University Science Books.

Similar al caso de la Precesión general, la transformación rigurosa de las coordenadas de un astro por los efectos de la Nutación se realiza aplicando tres rotaciones que utilizan las componentes de la Nutación y la oblicuidad media de la fecha ϵ_m . La figura 5.12 muestra, en el instante de observación T, los parámetros recién mencionados como así también los ejes cartesianos de los sistemas celestes materializados por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha y por el Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha.

La secuencia de las tres rotaciones que transforma el sistema Ecuador y Equinoccio medios de la fecha en el sistema Ecuador y Equinoccio verdaderos de la fecha es la siguiente:

- Primero: $R_x^{dir}(\epsilon_m)$ lleva el eje Z del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha al eje Z al Polo norte ecliptical de la fecha.
- Segunda: $R_z^{ret}(\Delta\psi)$ lleva el eje X del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio medios de la fecha al eje X del sistema celeste materializado por el Ecuador y Equinoccio verdadero de la fecha.

- Dehant, V., Mathews, P. M. (2015). *Precession, nutation and wobble of the Earth*. Cambridge University Press.
- (ESAA) Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac (1992) *A revision to the Explanatory Supplement of the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*. P.K. Seidelmann (ed.). Mill Valley, CA. University Science Books.
- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press.
- Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. (1977). Expressions for the precession quantities based upon the IAU/1976/system of astronomical constants. *Astronomy and Astrophysics*, 58, 1-16.
- Lieske, J. H. (1979). Precession Matrix Based on IAU (1976) System of Astronomical Constants. *Astronomy and Astrophysics*, 73, 282-284.
- Newcomb, S. (1906). *A compendium of Spherical Astronomy with its applications to the determination and reduction of positions of the fixed stars*. The Macmillan Company.
- Seidelmann, P. K. (1982). 1980 IAU theory of nutation: The final report of the IAU working group on nutation. *Celestial mechanics*, 27(1), 79-106.
- Smart W. M. (1953). *Celestial Mechanics*. J Wiley & sons.
- Smart W. M. (1962) *Text-Book on Spherical Astronomy*. Quinta edición. Cambridge University Press
- Walter, H. G., Sovers, O. (2000). *Astrometry of fundamental catalogues: the evolution from optical to radio reference frames*. Springer Science & Business Media.
- Woolard, E. W. y Clemence G. M. (1966) *Spherical Astronomy*. Academic Press.