

Libros de **Cátedra**

# Astronomía Esférica

## Fundamentos de Astrometría

Laura Isabel Fernández, María Silvina De Biasi  
y Gonzalo Carlos de Elía

FACULTAD DE  
CIENCIAS ASTRONÓMICAS Y GEOFÍSICAS

**e**  
exactas

  
EDITORIAL DE LA UNLP



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE LA PLATA

***Astronomía Esférica***  
***Fundamentos de Astrometría***

Laura Isabel Fernández  
María Silvina De Biasi  
Gonzalo Carlos de Elía

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas



# Índice

Introducción	4
Prólogo	5
Capítulo 1. Sistemas y marcos de referencia	7
Capítulo 2. Paralaje	11
Capítulo 3. Aberración	27
Capítulo 4. Refracción atmosférica	42
Capítulo 5. Movimiento de los planos fundamentales en los sistemas dinámicos	71
Capítulo 6. Movimiento propio	100
Capítulo 7. Catálogos estelares	111
Capítulo 8. Efectos de la rotación terrestre	129
Capítulo 9. Escalas de tiempo	145
Capítulo 10. Sistemas y marcos de referencia, modelos y convenciones vigentes	166
Anexo A	193
Anexo B	194
Glosario	196
Autores	198

# CAPÍTULO 6

## Movimiento propio

*María Silvina De Biasi*

Durante muchos siglos, las observaciones mostraban que las posiciones de las estrellas en el cielo mantenían las configuraciones que formaban entre sí, por eso se las denominaba “estrellas fijas” a diferencia de los planetas o estrellas errantes. A principios del siglo XVIII esta situación se modifica cuando Halley detecta cambios considerables en las posiciones de Arturo ( $\alpha$ Boo) , Sirio ( $\alpha$ CMa) y Aldebaran ( $\alpha$ Tau) respecto a las posiciones de otras estrellas; a esta evidencia se suman las obtenidas por Tobias Mayer de la comparación de observaciones distanciadas en 50 años (Woolard, Clemence, 1966, p. 303). Las estrellas, entonces, se mueven.

### Componentes del movimiento estelar

Siguiendo a Green (Green, 1988, p. 259-268), el modelo adoptado, entonces, para describir este fenómeno supone que:

- El sistema de referencia celeste con origen en el Baricentro del Sistema Solar es inercial,
- La velocidad de la estrella con respecto al Baricentro Sistema Solar –que consideraremos como el Sol, sin pérdida de generalidad- cambia muy lentamente a lo largo de una rotación galáctica, aproximadamente  $2 \times 10^8$  años. En consecuencia, esta velocidad se adopta constante, lo cual es una buena aproximación y muy útil, resultando entonces el movimiento de la estrella relativa al Sol rectilíneo y uniforme en el espacio.

En el sistema de referencia adoptado, la trayectoria espacial de la estrella entre los instantes  $t_0$  y  $t_0 + dt$ , es una recta, que se observa en el plano del cielo como el desplazamiento angular  $\theta$ , como lo muestra la figura 6.1

La velocidad de la estrella relativa al Sol  $V$  medida en  $km/seg$  se descompone en la componente radial  $V_r$  y la componente tangencial  $V_T$  según:

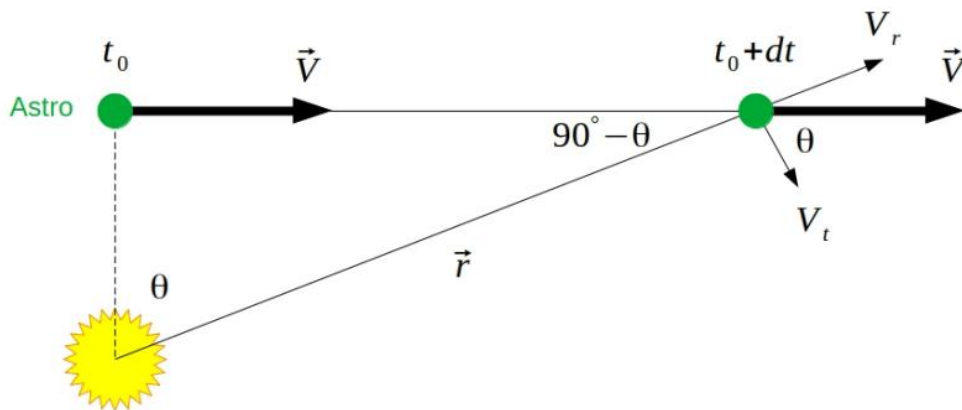
$$\vec{V} = V_r \hat{s} + \vec{V}_t \quad (6.1)$$

$$V_r = \vec{V} \cdot \hat{s} \quad (6.2)$$

$$\vec{V}_t = \hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{V}) \quad (6.3)$$

**Figura 6.1.**

*Movimiento espacial de la estrella relativo al Sol*



Para facilitar los desarrollos, la trayectoria de la estrella en el instante inicial es perpendicular a la visual,  $r$  se mide en  $km$ ,  $\theta$  en radianes y los instantes de tiempo en años. Como resulta útil expresar las velocidades en  $km/seg$  y denominando  $\tilde{n}$  al número de segundos en 1 año igual a  $3,157 \times 10^7$ , los módulos de las componentes se expresan

$$V_r = V \sin \theta = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{dr}{dt} \quad (6.4)$$

$$V_T = V \cos \theta = \frac{1}{\tilde{n}} r \frac{d\theta}{dt} \quad (6.5)$$

El movimiento propio de una estrella se define como el desplazamiento angular en un año en la esfera celeste referido a un Ecuador y Equinoccio medios. Su unidad usual es "/año, para lo cual:

$$\mu = \frac{d\theta}{dt} \frac{1}{\text{sen } 1''}, [\mu] = ''/\text{año} \quad (6.6)$$

De las ecuaciones 6.5 y 6.6, se encuentra fácilmente una relación entre la velocidad tangencial y el movimiento propio siendo conocida la paralaje.

Utilizando la ecuación  $r = \frac{a}{\pi \text{ sen } 1''}$  expresando en  $km$ , con  $[\pi] = ''$  y  $a = 1UA = 1,496 \times 10^8 km$ ,

$V_T$  resulta:

$$V_T = V \cos \theta = \frac{a}{\tilde{n}} \frac{\mu}{\pi} = 4,74 \frac{\mu}{\pi} \quad (6.7)$$

Las estrellas con mayor movimiento propio son las de Barnard (HIP 87937) y la de Kapteyn (HIP 24186), con valores de 10,393 "/año y 8,644 "/año y magnitudes visuales 9,51 y 8,53 respectivamente (fuente: Simbad, <http://simbad.cds.unistra.fr/simbad/>).

## Componentes del movimiento propio en ascensión recta y declinación

El movimiento propio se caracteriza por su módulo  $\mu$  y por su ángulo de posición  $\phi$ —medido desde el círculo horario de la estrella hacia su trayectoria—. Sin embargo, se expresa generalmente en términos de la velocidad anual de cambio (secular) en ascensión recta  $\mu_\alpha$  y en declinación  $\mu_\delta$  con respecto a un marco de referencia estándar como:  $\mu_\alpha = d\alpha/dt$  y  $\mu_\delta = d\delta/dt$ , donde  $[\mu_\alpha] = \text{seg}/\text{año}$ ;  $[\mu_\delta] = ''/\text{año}$ .

En la figura 6.2, siguiendo el desarrollo de Green (1988, p. 261-262),  $X(\alpha, \delta)$  y  $X'(\alpha + d\alpha, \delta + d\delta)$  son las posiciones de la estrella en los instantes  $t_0$  y  $t_0 + dt$  referidos a

Ecuador  $E$  y Equinoccio y Medios de una cierta Época  $T$ ,  $PNC$  es el polo de  $E$ . El ángulo  $PNC \hat{X} X'$  es  $\phi$ , el ángulo de posición del movimiento propio con valores de 0 a  $360^\circ$ .

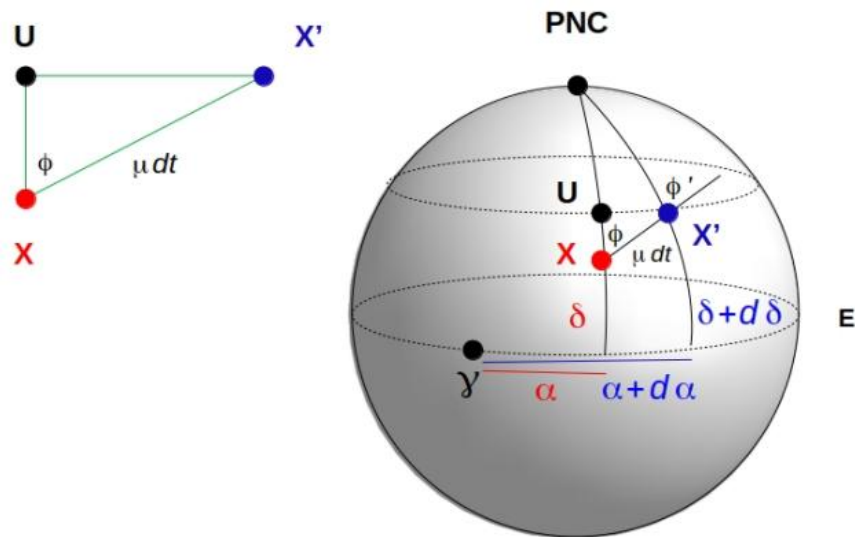
Al asumir que  $V$  es constante, la trayectoria de la estrella y el Baricentro del Sistema Solar definen un plano que interseca a la esfera celeste en un círculo máximo.

Consideremos el arco del círculo menor  $UX'$  con polo  $PNC$ . Es fácil ver que, al primer orden, resulta

$$UX' = d\alpha \cos \delta \tag{6.8}$$

**Figura 6.2.**

*Parámetros y componentes del movimiento propio*



*Nota.* Adaptado de *Spherical Astronomy* (p. 261), por Green R. M., 1985, Cambridge University Press.

$$UX = d\delta \tag{6.9}$$

La pequeña figura  $UXX'$  puede aproximarse al triángulo plano rectángulo  $\hat{U} = 90^\circ$ , luego

$$UX' = \mu dt \text{ sen } \phi \tag{6.10}$$

$$UX = \mu dt \cos \phi \quad (6.11)$$

Siendo  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$  las derivadas respecto al tiempo de las coordenadas  $\alpha$  y  $\delta$  respectivamente, expresadas en las unidades prácticas  $[\mu_\alpha] = \text{seg/año}$ ;  $[\mu_\delta] = "/\text{año}$ , se obtiene:

$$\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \mu \sin \phi \sec \delta \quad (6.12)$$

$$\mu_\delta = \frac{d\delta}{dt} = \mu \cos \phi \quad (6.13)$$

Luego, en cualquier instante  $t$  podemos conocer las coordenadas de la estrella  $(\alpha, \delta)(t)$  en función de sus coordenadas  $(\alpha, \delta)(t_0)$  y las componentes del movimiento propio  $(\mu_\alpha, \mu_\delta)$  en un instante inicial  $t_0$ , referidas a Ecuador  $E$  y Equinoccio y Medios de una cierta Época  $T$ :

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha(t - t_0) \quad (6.14)$$

$$\delta(t) = \delta(t_0) + \mu_\delta(t - t_0) \quad (6.15)$$

## Cambios intrínsecos en el movimiento propio

Las expresiones 6.14 y 6.15 son equivalentes a un desarrollo en serie de Taylor al primer orden, pero resultan insuficientes en los casos de estrellas cercanas con gran movimiento propio, donde es necesario incluir un término de segundo orden obtenido de las derivadas temporales de  $\mu_\alpha$  y  $\mu_\delta$ .

Se derivan las componentes del movimiento propio, sin cambiar el sistema de referencia celeste, materializado por el Ecuador  $E$  y Equinoccio y Medios de una cierta Época  $T$ , por lo tanto los cambios en dichas componentes se deben al movimiento de la estrella relativo al Sol en la esfera celeste, conocidos como *cambios intrínsecos en el movimiento propio*.



El procedimiento es sencillo, sólo hay que respetar las unidades en cada término. Derivando las ecuaciones 6.12 y 6.13 se obtiene

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{1}{15} \frac{d\mu}{dt} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \delta + \frac{1}{15} \mu \cos \phi \operatorname{sec} \delta \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{15} \mu \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \delta \operatorname{tg} \delta \frac{d\delta}{dt} \operatorname{sen} 1'' \quad (6.16)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = \frac{d\mu}{dt} \cos \phi - \mu \operatorname{sen} \phi \frac{d\phi}{dt} \quad (6.17)$$

que pueden expresarse, en función de 6.12 y 6.13

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{1}{15} \frac{d\mu}{dt} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sec} \delta + \frac{1}{15} \mu_\delta \operatorname{sec} \delta \frac{d\phi}{dt} + \mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.18)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = \frac{d\mu}{dt} \cos \phi - 15 \mu_\alpha \cos \delta \frac{d\phi}{dt} \quad (6.19)$$

Surgen nuevas incógnitas, las derivadas del ángulo de posición  $d\phi/dt$  y del movimiento propio total  $d\mu/dt$ . Calcularemos primero  $d\phi/dt$  aplicando el teorema del seno al triángulo esférico  $PXX'$  de la figura 6.2:

$$\cos \delta \operatorname{sen} \phi = \cos \delta' \operatorname{sen} \delta' \quad (6.20)$$

Esto significa que la estrella se mueve a lo largo del círculo máximo  $XX'$  manteniendo la cantidad  $\cos \delta \operatorname{sen} \phi$  constante, por consiguiente su derivada es nula y se obtiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} 1'' \frac{d\delta}{dt} \quad (6.21)$$

que puede expresarse como

$$\frac{d\phi}{dt} = 15 \mu_\alpha \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.22)$$

A continuación calcularemos la aceleración perspectiva  $d\mu/dt$  derivando la ecuación 6.5 para la velocidad tangencial  $V_T$  y combinándola con la ecuación 6.6 y la expresión de  $r$  utilizada en 6.7

$$-V \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\tilde{n}} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{r}{\tilde{n}} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6.23)$$

$$-V_r \mu \operatorname{sen} 1'' = V_r \mu \operatorname{sen} 1'' + \frac{1}{\tilde{n}} \frac{a}{\pi \operatorname{sen} 1''} \frac{d\mu}{dt} \operatorname{sen} 1'' \quad (6.24)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -2 \frac{\tilde{n}}{a} V_r \mu \pi \operatorname{sen} 1'' = -0,422 V_r \mu \pi \operatorname{sen} 1'' \quad (6.25)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas en 6.22 y 6.25 en 6.18 y 6.19 resulta:

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = -0,422 V_r \mu_\alpha \pi \operatorname{sen} 1'' + 2 \mu_\alpha \mu_\delta \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.26)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -0,422 V_r \mu_\delta \pi \operatorname{sen} 1'' - 225 \mu_\alpha^2 \operatorname{sen} \delta \cos \delta \operatorname{sen} 1'' \quad (6.27)$$

Finalmente, las expresiones 6.14 y 6.15 de las coordenadas de la estrella  $(\alpha, \delta)(t)$  en cualquier instante  $t$ , a partir de sus coordenadas  $(\alpha, \delta)(t_0)$  y las componentes del movimiento propio  $(\mu_\alpha, \mu_\delta)$  en un instante inicial  $t_0$ , se completan como:

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{d\mu_\alpha}{dt} (t-t_0)^2 \quad (6.28)$$

$$\delta(t) = \delta(t_0) + \mu_\delta(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{d\mu_\delta}{dt} (t-t_0)^2 \quad (6.29)$$

donde todos los parámetros intervinientes están referidos a Ecuador  $E$  y Equinoccio y Medios de una cierta Época  $T$ . Estas ecuaciones son válidas para la mayoría de las estrellas en un intervalo de tiempo de hasta 100 años. Sin embargo, las estrellas cercanas de gran movimiento propio requieren la inclusión del término de segundo orden.

### Vector movimiento propio

Si el versor dirección de la estrella en el instante  $t_0$  es  $\hat{s} = (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta)$ , se puede considerar al movimiento propio -desplazamiento angular de una estrella en 1 año a lo largo de un círculo máximo en el plano del cielo- como el vector  $\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} = \frac{d\hat{s}}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos \alpha \cos \delta, \sin \alpha \cos \delta, \sin \delta) \quad (6.30)$$

Las componentes rectangulares en “/año resultan

$$\mu_x = -15 \sin \alpha \cos \delta \mu_\alpha - \cos \alpha \sin \delta \mu_\delta \quad (6.31)$$

$$\mu_y = 15 \cos \alpha \cos \delta \mu_\alpha - \sin \alpha \sin \delta \mu_\delta \quad (6.32)$$

$$\mu_z = \cos \delta \mu_\delta \quad (6.33)$$

Los módulos de los vectores velocidad tangencial  $\vec{V}_T$  y movimiento propio  $\vec{\mu}$  se relacionan según la ecuación 6.7, por lo tanto

$$\vec{V}_T = 4,74 \frac{\vec{\mu}}{\pi} \quad (6.34)$$

Finalmente, el vector velocidad de la estrella relativa al Sol  $\vec{V}$  presentado en 6.1 resulta

$$\vec{V} = V_r \hat{s} + 4,74 \frac{\vec{\mu}}{\pi} \quad (6.35)$$

### Cambios por Precesión en el movimiento propio

En el capítulo 5 se ha analizado cómo la Precesión afecta las coordenadas de una estrella, es decir, a su versor dirección  $\hat{s}$ . Las componentes del movimiento propio indican la velocidad anual de cambio de dichas coordenadas, por lo tanto la Precesión también las modificará.

Sea  $\vec{\mu}$  el vector movimiento propio expresado en el sistema celeste materializado por el Ecuador  $E$  y Equinoccio  $\gamma$  Medios de una cierta Época  $T$  en el instante  $t_0$  y  $\vec{\mu}'$  el vector movimiento propio expresado en el sistema celeste materializado por el Ecuador  $E'$  y Equinoccio  $\gamma'$  Medios de una cierta Fecha  $T'$  en el mismo instante  $t_0$ .

El procedimiento más preciso para la transformación entre ambos vectores es aplicar la matriz de Precesión  $P_{TaT'}$ , que transforma el sistema celeste de Ecuador  $E$  y Equinoccio  $\gamma$  Medios en una cierta Época  $T$  al sistema celeste de Ecuador  $E'$  y Equinoccio  $\gamma'$  Medios en una cierta Fecha  $T'$

$$\vec{\mu}' = P_{TaT'} \vec{\mu} \quad (6.36)$$

donde  $P_{TaT'}$  es la matriz cuyos coeficientes están dados en las ecuaciones 5.32 a 5.35.

Dado que las componentes del movimiento propio son cantidades pequeñas, los cambios por Precesión son cantidades de segundo orden. Retomemos, entonces, las derivadas de  $(\mu_\alpha, \mu_\delta)$ -ecuaciones 6.16 y 6.17- que son válidas para cualquier efecto que las produzca.

Resulta claro que la Precesión no afecta al módulo  $\mu$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (6.37)$$

En cambio, el ángulo de posición  $\phi$  se verá afectado. Para deducir la expresión de la velocidad de cambio precesional  $d\phi/dt$ , utilizaremos la figura 6.3 donde  $P$  y  $P'$  son las posiciones del Polo celeste Medio en dos épocas distantes separadas por un intervalo pequeño  $dt$ , siendo  $E, E', \gamma$  y  $\gamma'$  los Ecuadores y Equinoccios Medios respectivos y  $K$  el Polo de la Eclíptica - considerado fijo-. La posición de la estrella en la Esfera Celeste es  $S$  y se desplaza por movimiento propio a lo largo del círculo máximo  $SR$ . Las coordenadas de la estrella referidas al Polo  $P$  y Equinoccio  $\gamma$  son  $(\alpha, \delta)$  y  $(\alpha', \delta')$  las referidas al Polo  $P'$  y Equinoccio  $\gamma'$ .

Asumimos que el intervalo  $dt$  es pequeño. Entonces la trayectoria de  $P$  a  $P'$  alrededor de  $K$  debido a la Precesión lunisolar se produce a lo largo del coluro equinoccial del Ecuador  $E$ , por lo que el arco  $PP'$  es igual a  $\psi \sin \varepsilon dt$  -equivalente a  $n dt$ -. Además, el ángulo  $\widehat{KPP'}$ , es igual a  $90^\circ$ , luego el ángulo  $\widehat{P'PS}$  es igual a  $\alpha$ .

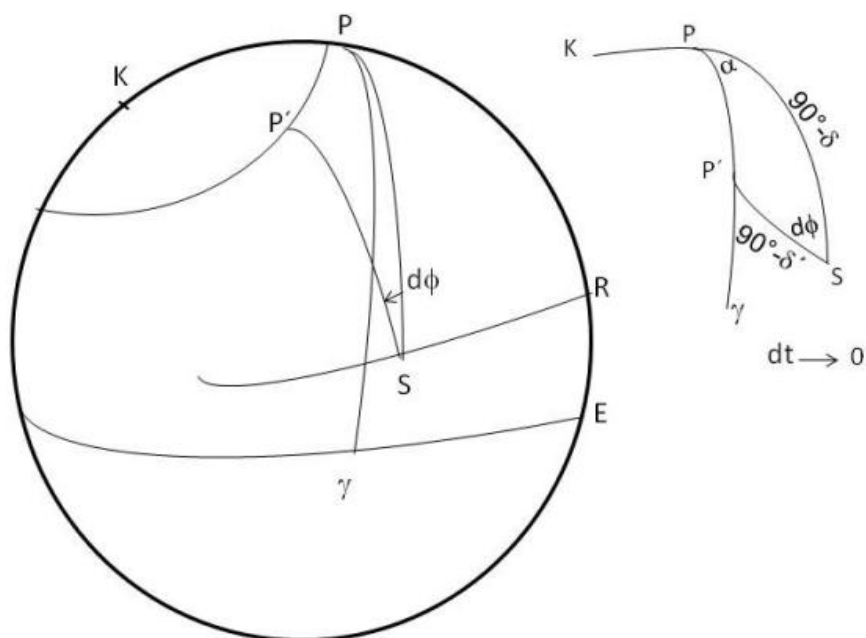
Conocidos lados y ángulos del triángulo  $PP'S$ , se aplica el teorema del seno y haciendo

uso de  $\frac{d\delta}{dt} = n \text{ sen } \alpha \text{ sen } 1''$  resulta:

$$\text{sen } d\phi \cos \delta' = \text{sen}(n dt) \text{sen } \alpha \quad (6.38)$$

**Figura 6.3**

*Cambios en el ángulo de posición por Precesión*



*Nota.* Basado en *Spherical Astronomy* (p. 267), por Green R. M., 1985, Cambridge University Press.

Como el intervalo  $dt$  es pequeño,  $\delta'$  tiende a  $\delta$  y la ecuación 6.38 se transforma en

$$\frac{d\phi}{dt} = n \text{ sen } \alpha \text{ sec } \delta \text{ sen } 1'' \quad (6.39)$$

Reemplazando la expresión  $d\delta/dt$  debida a la Precesión lunisolar y las obtenidas en 6.37, 6.38 y 6.39 en las ecuaciones 6.16 y 6.17, se llega a las siguientes expresiones de las velocidades de cambio por Precesión de  $(\mu_\alpha, \mu_\delta)$

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = n \left( \mu_\alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \delta + \frac{\mu_\delta}{15} \operatorname{sen} \alpha \sec^2 \delta \right) \operatorname{sen} 1'' \quad (6.40)$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -15n \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 1'' \quad (6.41)$$

Finalmente, se obtienen las componentes del movimiento propio en el sistema celeste materializado por el Ecuador  $E'$  y Equinoccio  $\gamma'$  Medios de la Época  $T'$  siendo conocidas las componentes en el sistema celeste materializado por el Ecuador  $E$  y Equinoccio  $\gamma$  Medios de la Época  $T$  resultan:

$$\mu_\alpha|_{T'} = \mu_\alpha|_T + \frac{d\mu_\alpha}{dt} (T' - T) \quad (6.42)$$

$$\mu_\delta|_{T'} = \mu_\delta|_T + \frac{d\mu_\delta}{dt} (T' - T) \quad (6.43)$$

En caso de que  $(T' - T)$  sea un intervalo de tiempo extenso, debe tomarse el valor de  $n$  correspondiente a la mitad de dicho intervalo.

## Referencias

- Green, R. M. (1985). *Spherical Astronomy*. Cambridge University Press.  
 Woolard, E.W, Clemence, G.M. (1966). *Spherical Astronomy*. Academic Press Inc.