Enseñanza por Investigación en la Escuela Secundaria

Explorando la relación entre la matemática y las finanzas personales

Angel Donvito • María Rita Otero • Patricia Sureda

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN)
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Tandil – Buenos Aires – Argentina

2017

ISBN 978-950-658-410-8

Donvito, Angel
Enseñanza por investigación en la escuela secundaria: explorando la relación entre la matemática y las finanzas personales / Angel Donvito; María Rita Otero; Patricia Sureda. - 1a ed. - Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2017.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: online
ISBN 978-950-658-410-8

1. Enseñanza. 2. Matemática. 3. Investigación. I. Otero, María Rita II. Sureda, Patricia III. Título
CDD 510.7

Fotografía de tapa por Guillermo Donvito. Tandil (2017).

Enseñanza por Investigación en la Escuela Secundaria

Explorando la relación entre la matemática y las finanzas personales

Angel Donvito • María Rita Otero • Patricia Sureda

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN)
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Tandil – Buenos Aires – Argentina

Contenidos

Capítulo I

¿Por qué es imprescindible cambiar la forma de enseñar matemática en la Escuela Secundaria?

El diseño curricular para la Educación Secundaria propone entre otros objetivos: “la formación de ciudadanos plenamente capaces de ejercer sus derechos y deberes, y de ingresar en el mundo productivo con herramientas indispensables para transitar el ámbito laboral”. Para cumplir este objetivo la utilidad de la Matemática y de la Ciencia en el mundo de la vida y del trabajo, son centrales. Sin embargo, aunque esto pueda estar en la teleología de los sistemas educativos, cuando nos adentramos en los resultados vemos que la matemática que se enseña no es percibida como útil a la formación ciudadana. Es difícil encontrar estudiantes u actores sociales –incluso profesores– que puedan reconocer usos relevantes de la matemática escolar en la vida adulta. De esta manera, la matemática en la escuela secundaria se estudia –y se enseña– sin sentido. Las consecuencias de estudiar los contenidos solo porque el currículo lo prescribe, se evidencia en que el interés de los estudiantes en ellos finaliza, en el mejor de los casos, junto con el examen.

Los contenidos matemáticos que propone el diseño curricular se enseñan poco relacionados, tanto entre sí, como con otras disciplinas. Al terminar el estudio de una unidad temática se continúa con un “tema nuevo”, lo cual sugiere que el contenido anterior ahora es obsoleto.

Cada “tema”, es considerado importante por sí mismo, sin tomar en cuenta la razón que en algún momento motivó la construcción de las nociones que lo sustentan. Tampoco, se asigna suficiente importancia a los usos que tales contenidos matemáticos tienen en la actualidad.

Esto incide en una predisposición escasa de los alumnos por estudiar matemática, quienes generalmente se expresan con frases como “¿esto para qué sirve?” o “¡esto no lo voy a usar jamás!”. Algunos estudiantes, afirman que para la carrera que van a seguir no necesitan saber tanta matemática, o incluso que para la vida adulta la aritmética es toda la matemática que necesitan.

El estudio inmotivado de la matemática, sin sentido, y vinculado a unos pocos y esotéricos usos, puede ser revertido para que esta disciplina pase de ser un problema, a develarse como la solución, que de hecho representa, para vivir en el mundo que nos toca. Así mismo, es importante recuperar el carácter problemático de todo conocimiento, la cultura humana ha creado y continúa creando conocimiento por necesidad, como respuesta a problemas relevantes. Ni la matemática, ni ninguna ciencia, son ajenas a este principio que establece que todo el conocimiento se origina en preguntas y genera preguntas. Por lo tanto, es necesario recuperar el sentido y sustituir la enseñanza de respuestas, por la enseñanza de preguntas, que es esencialmente lo que queremos decir con enseñanza por investigación.

La búsqueda, construcción y difusión de posibles respuestas fundadas a preguntas relevantes, es básicamente lo que hace la ciencia. Pero también es lo que hace un ciudadano que responsablemente toma decisiones acerca de la sociedad en la que vive.

Como profesores, tenemos que asumir la responsabilidad de adoptar una forma de enseñar que permita restablecer el papel de la matemática en la sociedad mostrando su utilidad para vivir en el mundo.

¿Por qué Enseñanza por Investigación?

La etapa de escolarización es solo una pequeña parte de la vida de las personas. Pensar que durante esta etapa se aprende todo lo necesario para el resto de la vida sería un error.

Durante varios siglos, y también en la actualidad, la enseñanza tradicional ha sobredimensionado el papel del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje. Es él quien decide qué estudiar, cuánto, cómo y cuándo hacerlo. El profesor tradicional debe ser alguien que “tiene todas las respuestas” y las enseña. Esto podía haber sido razonable en una época en que el conocimiento permanecía relativamente estable, pero no en la actualidad, ya que el conocimiento crece de manera exponencial en todos los ámbitos. Además, sin la decisión de aprender, y la responsabilidad consiguiente de hacerlo, no puede ocurrir el aprendizaje.

Por otro lado, el mundo actual requiere aprender toda la vida, ¿qué sucederá entonces cuando un ciudadano tenga la necesidad de estudiar e investigar una pregunta fuera de la etapa escolar sin que disponga de un profesor que le indique qué debe hacer? Se evidencia así, la importancia y la urgencia de llevar a cabo una revolución epistemológica y didáctica en la enseñanza en general, y de la matemática en particular.

En una Enseñanza por Investigación, los estudiantes asumen una responsabilidad mucho mayor que en la enseñanza clásica, para integrar junto con el profesor y los demás estudiantes una comunidad de estudio e investigación. Así, además de proponer preguntas, buscan la información en distintos lugares y sistemas de difusión, deciden si esa información es pertinente o no, la critican, deciden cuánto de esa información necesitan y elaboran posibles respuestas, que discuten con los demás.

El rol del profesor en este tipo de enseñanza, es ser el director del estudio. Como en un equipo de investigación, dirige el proceso porque domina la tarea de investigar, pero no tiene la respuesta.

Esta nueva enseñanza parece apropiada para promover en los estudiantes, actitudes propias para el ejercicio de una ciudadanía crítica y plena, para enfrentar preguntas y problemas y para desenvolverse en ambientes laborales en permanente cambio. Los estudiantes aprenden a lidiar con preguntas nuevas, en lugar de evadirlas; a estudiar saberes desconocidos, en lugar de limitarse solo a los que ya conocen; a no considerarse ajenos a ningún campo de conocimiento que pueda demandar su estudio; y a plantearse cuestiones que requieran aprender nuevos conocimientos.

Por otro lado, la necesidad de estudiar matemática para dar respuesta a una cuestión interesante, le da sentido a los contenidos matemáticos involucrados de la ES. A su vez, si la pregunta que se estudia, necesita dos o más contenidos e incluso disciplinas, se produce una articulación del diseño curricular, en lugar de la segmentación dominante.

¿Por qué explorar la relación entre la matemática y las finanzas personales?

Las decisiones financieras son propias de la vida adulta. Cualquier ciudadano argentino, tiene o debería tener acceso a medios de pago electrónico y a sistemas de bancarización y ahorro. Pero, que un ciudadano sepa administrar sus recursos económicos y tomar decisiones financieras favorables para su vida, dependerá, en parte, de la formación que tenga al respecto.

Aunque la Escuela Secundaria (ES) sería un lugar apropiado para estudiar cuestiones referidas a las finanzas personales, no hay materias que se dediquen a ello. En la modalidad *Economía y administración,* se estudian nociones administrativas, pero orientada a empresas y no a personas. No hay en la ES actual, vinculaciones con una matemática que permita iniciar a los estudiantes en lo financiero.

Sin embargo, en la clase de matemática es posible estudiar algunas cuestiones referidas a las finanzas personales, que permitirían a los estudiantes comprender algunas nociones involucradas: el funcionamiento de las inversiones a plazo fijo, el funcionamiento y el costo de una tarjeta de crédito, crédito personal, planes de ahorro, etc. Estos contenidos, son básicos para cualquier ciudadano que pretenda: comprar una casa o auto, ahorrar para algún fin determinado, comprar un electrodoméstico o incluso, hacer las compras del mes.

Por otro lado, estudiar matemática como una herramienta para mejorar el rendimiento de un capital, le daría una razón de ser al contenido matemático de la ES. Por ejemplo, analizar la diferencia entre recapitalizar los intereses en un plazo fijo, o retirarlos periódicamente, permitiría darle sentido al estudio de las funciones lineales y exponenciales. A su vez, con las mismas nociones matemáticas, se podría entender cómo aumenta la deuda de una tarjeta de crédito cuando no se la paga -o sólo se abona el mínimo- y la diferencia entre pagar una mora o pagar interés.

Si bien, durante la etapa escolar son los padres quienes toman las decisiones financieras por sus hijos, en los últimos años de la secundaria los estudiantes se proponen reunir fondos para costear deferentes proyectos: viaje de egresados, fiesta de graduación, farándula, entre otros. Es común verlos realizar eventos y emprendimientos de venta de diferentes tipos, para ahorrar dinero por uno o dos años. Esta situación, resulta una oportunidad para incluir en las clases de matemática, cuestiones sobre capitalización y ahorro.

En base a esto, se diseñó el dispositivo didáctico que se presenta en el siguiente capítulo. El mismo parte de la pregunta inicial ¿Cuál es el mejor plan de ahorros para generar la mayor cantidad de ingresos con un depósito bancario que paga intereses? Enfrentar esta pregunta basándose en las posibilidades de ahorro de la agrupación, requerirá investigar cuestiones referidas a los plazos fijos, y a su vez, estudiar los contenidos matemáticos de la ES como una herramienta de análisis.

Capítulo II

¿En qué consiste el dispositivo didáctico?

El dispositivo didáctico es un Recorrido de Estudio e Investigación[1] (REI). En un REI se parte de una pregunta inicial Q_0, que es formulada por el profesor. A Q_0 se la llama pregunta generatriz, porque es potencialmente capaz de originar una variedad de preguntas a estudiar, que están vinculadas con el programa de estudio que se desea cubrir. Dicha pregunta no admite una respuesta inmediata, o binaria, y para poder abordarla es necesario documentar investigar y aprender nuevos saberes, de los que surgen nuevas cuestiones a estudiar a medida que se avanza en la investigación.

En este tipo de enseñanza, los estudiantes proponen qué preguntas responder antes de Q_0, qué contenidos, matemáticos o no, es preciso estudiar, e incluso desde qué sistema de información o media, conviene estudiarlos. El rol del profesor es ayudar a los alumnos a investigar, pero él no es considerado un sistema de información privilegiado, sino un media más, cuyas afirmaciones pueden ponerse en duda como las de cualquiera de la clase. A diferencia de su papel tradicional, el profesor puede no tener respuesta a la pregunta propuesta, porque no se trata de encontrar "la" respuesta sino la respuesta posible a una cierta comunidad de estudio y sus circunstancias.

Así tanto las respuestas de los estudiantes, como las del profesor, deberán ser validadas, defendidas frente al grupo de estudio, quien establecerá si son o no respuestas pertinentes para la investigación. Así, se construye un medio didáctico, que consiste en una especie de repertorio de todos los conocimientos que se consideran importantes para la investigación, de las preguntas que se formulan y de todas las documentaciones y respuestas que se hayan encontrado

---

[1] *Para más información sobre los REI y su marco teórico, se recomienda consultar la bibliografía que presentamos al final del libro.*

en libros o en internet. Es decir, todo aquello que se considere un aporte para responder Q_0.

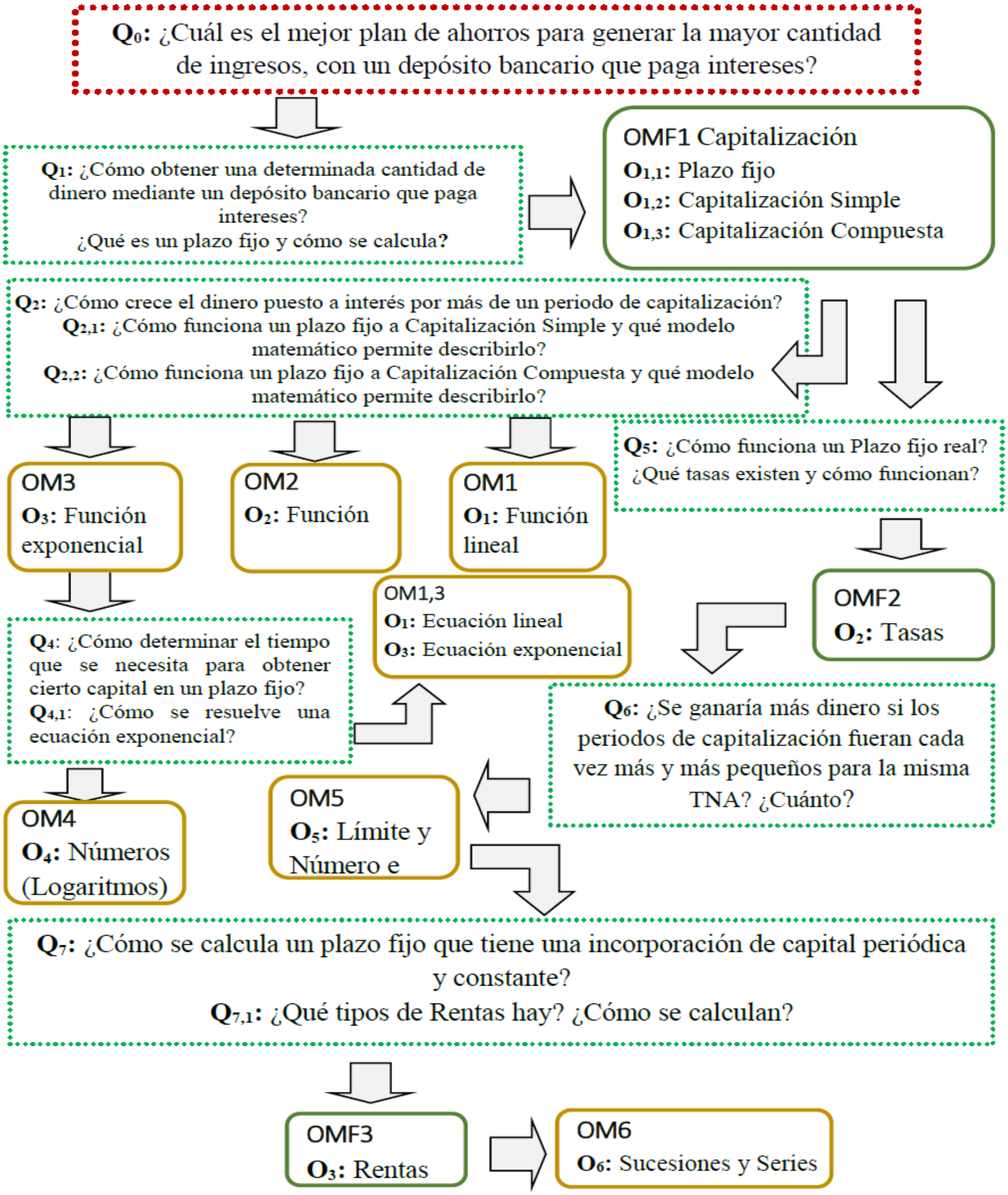
La creación de un dispositivo didáctico como el que se acaba de describir, y el análisis de su viabilidad en la escuela secundaria, ha requerido de un proceso de ingeniería didáctica que los autores hemos llevado a cabo a lo largo de bastante tiempo y en varias instituciones. En este proceso, se analizó Q_0 en profundidad y se consideraron distintas formas de estudiar el problema, se analizaron los contenidos matemáticos involucrados y su relación con el diseño curricular. La implementación del dispositivo en distintas instituciones, permite realizar ajustes en función de los resultados. A continuación, proponemos el dispositivo didáctico, el conocimiento que lo sustenta y algunas ideas para utilizarlo y readaptarlo.

El REI

El dispositivo didáctico inicia cuando el profesor lleva a la clase la pregunta inicial Q_0: *¿Cuál es el mejor plan de ahorros para generar la mayor cantidad de ingresos con un depósito bancario que paga intereses?* Como el grupo de clase no está en condiciones de responder a la pregunta sin estudiar, se convierte en un problema que debe ser investigado. El profesor puede sugerir considerar otras preguntas, más sencillas, que sí puedan abordarse, y que permitan aproximarse a comprender Q_0.

La investigación podría tomar tantos caminos como preguntas puedan proponer los estudiantes y retos que estén dispuestos a asumir. Sin embargo, hay preguntas más importantes que otras. Mientras preguntas como: ¿Qué operaciones bancarías pagan interés?, ¿Qué es un plazo fijo y cómo funciona? o ¿Qué porcentaje de interés se pagan en los plazos fijos? conducirán a buscar una definición en internet, otras cómo las relacionadas con el mejor rendimiento, requerirán estudiar los conocimientos matemáticos del diseño curricular de ES para responderlas.

En el esquema 1 se han sintetizado algunas de las preguntas que ocupan un lugar importante en el dispositivo, y los contenidos a los que conduce su estudio. Es importante destacar que se enumeran los contenidos y las preguntas para facilitar su descripción, pero esto no representa un orden a seguir.



Esquema 1: preguntas y contenidos del REI

A menos que los estudiantes tengan conocimiento relativo a los plazos fijos, las primeras preguntas que se estudiarán en el dispositivo serán las referidas a esto (Q_1). Toda la información necesaria, y actualizada, para iniciar un plazo fijo, está disponible en internet.

Una vez investigado lo que es un plazo fijo y cómo funciona, será necesario saber calcular cuánto dinero se tendrá al final de un depósito. Esto, se puede calcular de distintas maneras -ya que existen calculadoras de plazos fijos on-line, o incluso, aplicaciones para teléfonos celulares-, pero, buscar la mejor opción requiere un análisis con mayor profundidad.

Cuando los períodos de capitalización son dos o más, es posible retirar los intereses en cada uno (Capitalización Simple, $Q_{2,1}$) o recapitalizarlos (Capitalización Compuesta, $Q_{2,2}$). Dependiendo de esta decisión, el capital aumentará lineal o exponencialmente. El análisis de cada una de estas opciones se puede realizar estudiando la expresión del capital final como una función (C2) de dominio discreto, particularmente como una función lineal, (C1) si no se recapitalizan los intereses; o exponencial (C3), en el caso que sí se recapitalizan.

Preguntarse por el tiempo en que se necesita para alcanzar determinado capital (Q_4), requiere el estudio de ecuaciones, que, dependiendo del tipo de interés, serán lineales o exponenciales.

Al averiguar las tasas que ofrecen los bancos y descubrir que existen distintos tipos de tasas, los estudiantes estudiarán tasas equivalentes. Aquí, es posible notar que, al capitalizar en periodos más pequeños, los intereses se recapitalizan más veces. Preguntarse cuánto se ganaría si existiera un tipo de capitalización instantánea, donde la cantidad de periodos tienda a infinito, conduciría a introducir la noción de límite y el número irracional *e*.

Si se propone un plan de ahorros donde en cada periodo se agregue una cuota, se estudiará algún tipo de Renta financiera, a partir de sucesiones y series, particularmente la geométrica y la aritmética.

Considerando estas cuestiones el dispositivo permitiría abordar: tres organizaciones matemática relativas al estudio de funciones (C1, C2, C3), una referida al estudio de los números y sus propiedades (C4), otra relativa al estudio de sucesiones y series (C6), y una última vinculada al estudio del límite (C5).

Si bien, en el esquema 1 se presentaron los contenidos que podrían estudiarse con el dispositivo y a partir de qué preguntas se estudiarían, no es posible determinar, a priori, en qué grado se profundizarán. Esto dependerá las nociones que se estudien de cada contenido (tabla 1).

Contenidos	Nociones	
C1: Función Lineal	C1,1	Variación lineal
	C1,2	Representación gráfica
	C1,3	Ecuación lineal
C2: Función	C2,1	Variables independiente y dependiente
	C 2,2	Crecimiento, decrecimiento
	C 2,3	Ordenada al origen y ceros de una función
	C 2,4	Representación gráfica
C3: Función Exponencial	C3,1	Variación Exponencial
	C3,2	Función Exponencial con desplazamiento vertical
	C3,3	Análisis de Parámetros
	C3,4	Ecuación Exponencial
	C3,5	Ceros de la FE
	C3,6	Análisis de la FE
C4: Números	C4,1	Logaritmo: definición y propiedades
	C 4,2	Números Reales
	C 4,3	Operatoria
C5: Limite y número e	C 5,1	Concepto de límite
	C 5,2	Limite infinitesimal
C6: Sucesiones y Series	C 6,1	Sucesiones por termino general
	C 6,2	Sucesiones por recurrencia
	C 6,3	Sucesión aritmética
	C 6,4	Sucesión geométrica
	C 6,5	Serie aritmética
	C 6,6	Serie geométrica

Tabla 1: Contenidos matemáticos

Por otro lado, aunque el dispositivo didáctico se use en clases de matemática, se deben estudiar contenidos de otra disciplina, *matemática financiera*, en particular, Capitalización (CMF1), Tasas (CMF2) y Renta Financiera (CMF3). El siguiente cuadro (Tabla 2) muestra las nociones de matemática financiera que podrían tener lugar en el REI.

Contenidos de matemática financiera	Nociones	
CMF1 Capitalización	CMF1,1	Plazo fijo
	CMF1,2	Capitalización Simple
	CMF1,3	Capitalización Compuesta
	CMF1,4	Capitalización fraccionada
	CMF1,5	Capitalización Continua
CMF2 Tasas	CMF2,1	Tasas Nominales (TN)
	CMF2,2	Tasas efectivas (TE)
	CMF2,3	Tasas equivalentes,
	CMF2,4	Cambio de tasa, de TN a TE
	CMF2,5	Cambio de tasa entre Tasas efectivas
CMF3 Rentas	CMF3,1	Tipos de Rentas
	CMF3,2	Cálculo del valor final de una renta

Tabla 2: Contenidos de matemática financiera

¿Cómo se relaciona el REI con el diseño curricular de ES?

En Buenos Aires, a través de la Dirección General de Cultura y Educación, se confeccionan los diseños curriculares, particularmente el de la ES. En ellos, el sistema de educación afirma que generalmente la enseñanza de matemática se basa en definiciones abstractas, procedimientos mecánicos y demostraciones formales. En contraposición a ello, llama a los docentes a considerar al estudiante como hacedor de la matemática y a cambiar el quehacer en el aula, para la construcción de conocimientos con sentido para el alumno.

El diseño curricular expone qué contenidos deben estudiarse en cada año. En la figura 1, se presenta la lista de contenidos propuestos, para quinto año de ES, que es el de nuestro interés. Este cuadro segmenta los contenidos en cuatro ejes: Geometría y Álgebra, Números y Operaciones, Algebra y Funciones, Probabilidad y estadística, aclarando que no necesariamente se debe seguir el orden y que pueden surgir nodos entre ejes.

MAPA CURRICULAR

Materia	Matemática-Ciclo Superior	
Año	5°	
Ejes y núcleos sintéticos de contenidos	Geometría y Álgebra	Semejanza Razón entre áreas y volúmenes de cuerpos semejantes Lugar Geométrico Hipérbola. Elipse
	Números y Operaciones	Números reales Intervalos en R Operatoria Logaritmo Sucesiones Sucesiones dadas por término general y por recurrencia *Uso de calculadoras*
	Álgebra y Funciones	Funciones polinómicas Ceros. Gráficos Composición e inversas de funciones Funciones homográficas Funciones exponencial y logarítmica *Uso de software para el estudio de funciones*
	Probabilidad y Estadística	Estadística. Muestra y población Parámetros de posición Parámetros de dispersión Uso de calculadoras

Figura 1: Mapa curricular de quinto año de ES.
Fuente: Diseño curricular de quinto año de ES

Para que nuestro dispositivo sea viable en el ámbito escolar, deben considerarse las pautas del sistema de educación, especialmente el diseño curricular. El tiempo de implementación debe ser acorde a los contenidos matemáticos ubicados en quinto año de secundaria. También se debe promover la mayor articulación de contenidos del año en cuestión, y, de ser posible, en relación con los del año anterior y los del siguiente. En el siguiente esquema (Figura 2) se encuentran los contenidos ordenados verticalmente por año y horizontalmente por eje. Aquí se muestra qué contenidos del diseño curricular de quinto año se estudian con el dispositivo: números reales, logaritmo, operatoria, sucesiones por término general y recurrencia, uso de calculadora, función exponencial, ecuación exponencial y uso de software para estudiar funciones; los contenidos de años anteriores que se necesitan recuperar: operaciones en R, sucesiones, funciones y función lineal; y qué contenidos de sexto año podrían introducirse: series y concepto de límite

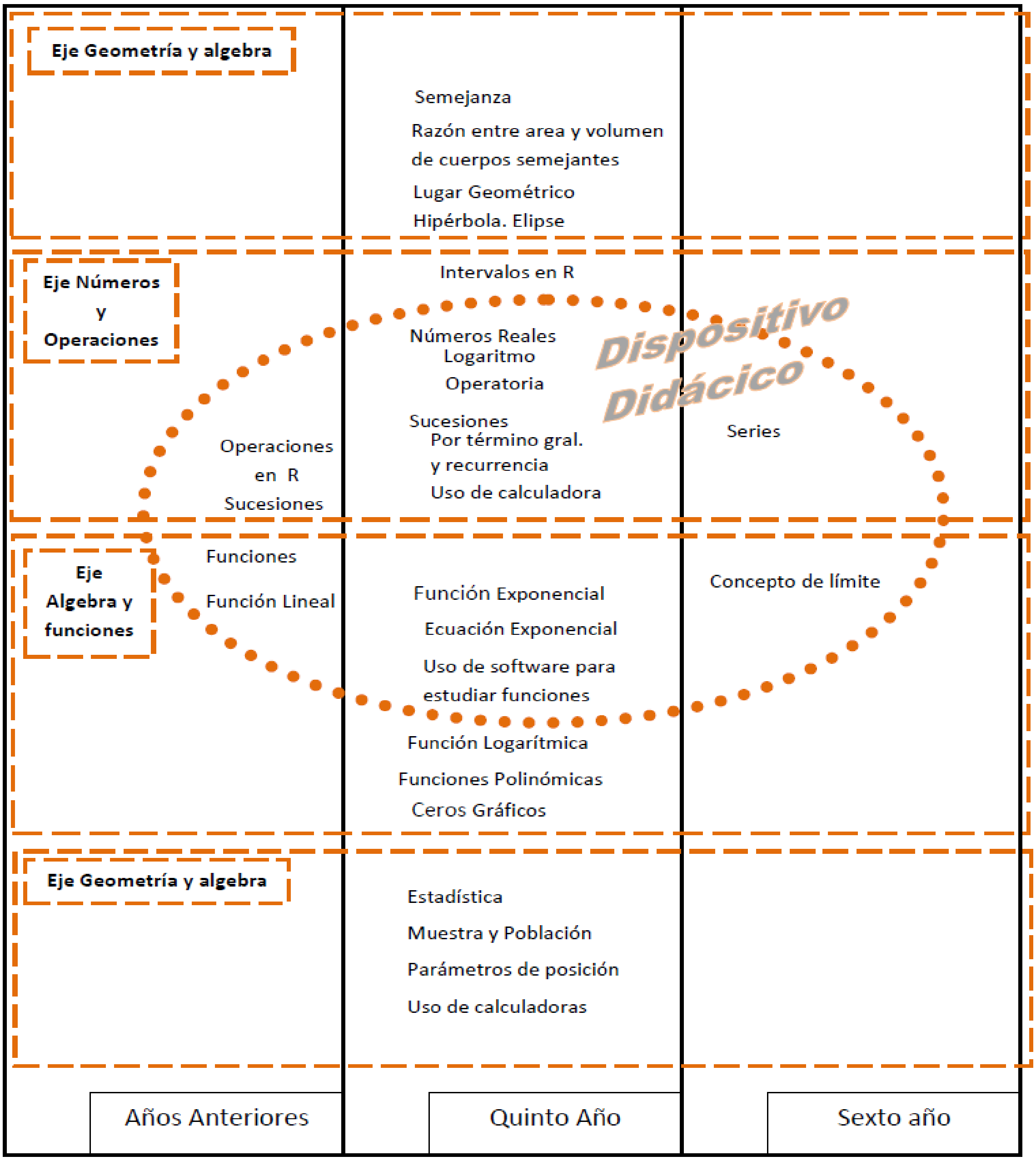


Figura 2: Los contenidos del REI y del diseño curricular

Capítulo III

¿Cómo usar el dispositivo didáctico

Las preguntas que surjan y las decisiones que se tomen sobre ellas, podrían conducir al REI por diversos caminos. Por lo tanto, es necesario que el profesor esté preparado. Es decir que realice un análisis de la cuestión inicial, y de la matemática que involucraría responder en un nivel o en otro, realizando la mayor cantidad de anticipaciones posibles.

Para facilitar esta tarea, ponemos a disposición una posible solución matemática al problema. Luego, como no podemos enunciar una serie de pasos a seguir, presentamos un ejemplo de cómo utilizar el dispositivo didáctico, basándonos en los resultados de una de nuestras implementaciones.

¿Cómo se resuelve el problema estudiado?

Q_0: ¿Cuál es el mejor plan de ahorros para generar la mayor cantidad de ingresos, con un depósito bancario que paga intereses?

Esta pregunta no puede ser respondida de manera inmediata. Para poder hacerlo, es necesario aprender primero sobre el funcionamiento de los bancos, de los plazos fijos y de las tasas. A su vez, es necesario apropiarse de cierto equipamiento matemático que permita describir y predecir cómo crece el dinero puesto a interés en un plazo fijo. De esta manera, deberán estudiarse antes de abordar Q_0 un conjunto de subcuestiones como las que se desarrollan a continuación.

Q_1: ¿Qué es un Plazo fijo y cómo se calcula?

Un plazo fijo es una operación bancaria, en el cual una persona proporciona al banco un capital durante un periodo de tiempo prefijado, y el banco se compromete a pagar un interés luego de cumplido el plazo.

El Capital final que se obtiene al finalizar el contrato es la suma del Capital depositado y los intereses generados. En términos generales, si llamamos Ci al capital inicial; Cf al capital final; e I interés:

$$Cf = Ci + I$$

El interés I se calcula $I = Ci.r$; siendo r la razón fijada por el banco. Entonces la expresión para calcular el capital final de un plazo fijo es:

$$\boxed{Cf = Ci + Ci.r}$$

Extrayendo factor común Ci, se obtiene la expresión mayormente presentada en los libros de texto:

$$\boxed{Cf = Ci(1 + r)}$$

Q_2: ¿Cómo crece el dinero puesto a interés por más de un periodo de capitalización?

Al finalizar el periodo de capitalización el cliente puede optar por retirar todo el dinero o por volver a capitalizar otro periodo. En el caso de la recapitalización, es posible retirar los intereses generados y capitalizar solamente el monto que inicialmente se tenía, o, por recapitalizar todo el dinero, incluyendo dicho interés. De esta decisión se desprende el modelo matemático que permite estudiar el crecimiento del capital y el tipo de interés: simple o compuesto.

$Q_{2,1}$: ¿Cómo funciona un plazo fijo con Capitalización Simple? ¿Qué modelo matemático describe este crecimiento?

La capitalización simple consiste en recapitalizar solamente el monto inicial, retirando al final de cada periodo los intereses generados. Este modelo es el más sencillo de calcular, ya que tanto el capital inicial como el interés son los mismos en cada periodo. Es decir, si se coloca a interés simple un capital Ci a una tasa r durante t periodos, se obtiene al final, el capital inicial sumado a los intereses de cada mes: en el primer mes$I_1 = Ci.r$; en el segundo mes $I_2 = Ci.r$; …; en el mes t $I_t = Ci.r$.

$$Cf = Ci + \sum_{j=1}^{t} I_j = Ci + Ci.r.t =$$

$$\boxed{Ci.(1 + r.t)}$$

Ejemplo:

Se tienen $25.000 que se colocan a interés simple durante 12 periodos, a una tasa efectiva mensual (TEM) del 1,3%.

Mes	Ci	Tasa de interés	Interés	Cf
1	25.000	1,3	$325	$2.5325
2	25.000	1,3	$325	$2.5325
3	25.000	1,3	$325	$2.5325
….	…	…	…	…
12	25.000	1,3	$325	$2.5325

Aquí el interés I, para cualquier mes, se calcula:

$$I = 25000.\frac{1{,}3}{100}$$

$$I = 325$$

Así, al final de los 12 periodos se obtiene el dinero depositado ($25.000) más 12 veces $325.

$$Cf = 25.000 + 12 * 325 = \$28.900$$

La expresión de capitalización de un interés simple puede estudiarse como un caso particular de una función lineal de dominio discreto.

Sea una Función Lineal (FL) de la forma $F(t) = a.t + b$ con $Dom(F) \coloneqq \{R\}$. La expresión del interés simple $Cf = Ci + Ci.r.t$ se corresponde con una familia de funciones de la FL donde $a = Ci.r \quad ; \quad b = Ci \quad ; \quad t \in N$.

$Q_{2,2}$: ¿Cómo funciona un plazo fijo con Capitalización Compuesta? ¿Qué modelo matemático describe este crecimiento?

La capitalización compuesta consiste en recapitalizar, además del capital inicial, los intereses generados. Este modelo es un poco más complejo que el anterior, ya que en cada capitalización el dinero depositado aumenta, generando intereses que depende el capital inicial y de los intereses acumulados.

Ejemplo:

Se tienen $25.000 que se colocan a interés compuesto durante 12 periodos, a una tasa efectiva mensual (TEM) del 1,3%.

Mes	Ci	Tasa de interés	Interés	Cf
1	$25.000	1,3	$325	$25.325
2	$25.325	1,3	$329,22	$25.654,22
3	$25.654,22	1,3	$333,51	$25.987,73
….	…	…	…	…
12	$28.816,67	1,3	$374,62	$29.191,29

Al final de los 12 periodos se obtiene el dinero depositado ($25.000), más los intereses generados en cada periodo.

Esto es:

Primer mes:

$$I = 25000.\frac{1,3}{100}$$

$$I = 325$$

Segundo mes:

$$I = 25325.\frac{1,3}{100}$$

$$I = 329,22$$

Tercer mes:

$$I = 25654{,}22.\frac{1{,}3}{100}$$

$$I = 333{,}51$$

Así al final de la capitalización se tiene:

$$Cf = 25.000 + 325 + 329{,}22 + \cdots + 374{,}62 = \$29.191{,}29$$

La variación del capital depositado en cada periodo presenta, hasta aquí, la necesidad de conocer el resultado del periodo anterior. Pero este cálculo recursivo, se vuelve engorroso a medida que aumentan la cantidad de periodos. Por ejemplo, calcular una capitalización mensual durante dos años requerirá hacer 24 cálculos. Surge así la necesidad de encontrar una expresión que no dependa de la capitalización anterior:

Se coloca a interés compuesto un capital Ci a una tasa r durante t periodos, entonces:

En el 1er. mes: $Cf(1) = Ci + Ci.r = Ci(1 + r)$

En el 2do. mes: $Cf(2) = Cf(1).(1 + r) = Ci(1 + r)^2$

En el 3er. mes $Cf(3) = Cf(2).(1 + r) = Ci(1 + r)^3$

En el mes t: $Cf(t) = Cf(t - 1).(1 + r)$

$$Cf(t) = Ci(1 + r)^{t-1}(1 + r)$$

$$\boxed{Cf(t) = Ci(1 + r)^t}$$

La expresión $Cf(t) = Ci(1 + r)^t$ que permite calcular la capitalización de un interés compuesto puede estudiarse como un caso particular de una función exponencial de dominio discreto.

Sea una Función Exponencial (FE) de la forma $F(t) = k.a^t$ con $Dom(F) \coloneqq \{R\}$. La expresión del interés compuesto $Cf = Ci(1 + r)^t$ se corresponde con una familia de funciones de la FE donde $k = Ci$; $a = (1 + r)$; $t \in N$.

Q_3: ¿Cómo determinar el tiempo que se necesita para obtener cierto capital en un plazo fijo?

Dado cierto capital inicial y una tasa de interés, es posible calcular el tiempo que se necesita para obtener determinado monto final. Este procedimiento se realiza con una ecuación lineal en el caso del interés simple, y ecuación exponencial, en el caso del interés compuesto.

Interés simple

$$Cf = Ci(1 + r.t)$$

$$\frac{Cf}{Ci}=(1 + r.t)$$

$$\frac{Cf}{Ci} - 1 = r.t$$

$$\boxed{\frac{\frac{Cf}{Ci} - 1}{r} = t}$$

Interés compuesto

$$Cf = Ci.(1 + r)^t$$

Por propiedad de logaritmo: $\ln(Cf) = t.\ln((Ci.(1 + r))$

$$\boxed{\frac{\ln(Cf)}{ln((Ci.(1 + r))} = t}$$

¿Cómo funciona un Plazo fijo real? ¿Qué tasas existen y cómo funcionan?

Al consultar las tasas que ofrecen los bancos, generalmente se encuentran las tasas nominales anuales (TNA). Sin embargo, no son estas las tasas que se utilizan para realizar cálculos, sino las tasas efectivas, sean anuales (TEA), mensuales (TEM), bimestrales, etc. Por esta razón, para poder realizar las comparaciones y elegir la mejor tasa para un plazo fijo es necesario realizar cambios de tasas. Pues, aunque para elegir la mejor opción en cierto periodo de tiempo entre distintos bancos basta con optar por la de mayor TNA; para saber qué tasa es más alta en distintos periodos de capitalización es necesario realizar cambios de tasas: de TNA a tasas efectivas y entre tasas efectivas.

-Cambio de tasa: de TNA a tasa efectiva

Se divide la TNA por la cantidad de capitalizaciones anuales. Si n es el periodo de capitalización y $12/n$ es la cantidad de periodos que hay en un año, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{TNA}{(12/n)} = r_n}$$

-Cambio de tasa: entre tasas efectivas

Para cambiar de una tasa efectiva (r_n) a otra tasa equivalente (r_m) con distinto periodo de capitalización, es necesario compararlas en un mismo lapso de tiempo, por ejemplo 12 meses: Si n y m son distintos periodos de capitalización, $12/n$, $12/m$ son la cantidad de capitalizaciones de cada una en un año, y r_n y r_m son las tasas efectivas correspondientes a cada periodo, entonces:

$$Ci.(1+r_n)^{12/n} = Ci.(1+r_m)^{12/m}$$

De esta expresión es posible expresar r_n en función de r_m o viceversa:

$$r_n = \sqrt[12/n]{(1+r_m)^{12/m}}$$

Q₆: ¿Se ganaría más dinero si los periodos de capitalización fueran más pequeños para una misma TNA? ¿Cuánto?

En los plazos fijos a interés compuesto, la noción del crecimiento exponencial y de la recapitalización de los intereses, conduce a pensar que mientras más periodos de capitalización se utilicen, más aumentará el capital final. Es decir, si para la misma TNA se pudiera elegir la cantidad de periodos, convendría optar por el periodo más pequeño que exista (trimestre, bimestre, mes, etc.). Supongamos $r = 1$:

Periodo	**# de periodos**	**Expresión**	**Valor final**
Anual	1	$Ci.\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}$	$2.Ci$
Semestral	2	$Ci.\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}$	$2{,}25.Ci$
Trimestral	4	$Ci.\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4}$	$\cong 2{,}44.Ci$
Bimestral	6	$Ci.\left(1+\frac{1}{6}\right)^{6}$	$\cong 2{,}52.Ci$
Mensual	12	$Ci.\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	$\cong 2{,}61.Ci$

Es fácil pensar que si existiera una capitalización instantánea produciríamos más dinero, ya que la cantidad de capitalizaciones tendería a infinito. Pero, qué sucedería efectivamente con la cantidad de dinero, ¿aumentarían indefinidamente o encontrarían un valor de convergencia? Supongamos que existen periodos más pequeños para una capitalización, con la misma TNA:

Periodo	# de periodos	Expresión	Valor final
Diario	365	$Ci.\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	$\cong 2.714Ci$
Por hora	8760	$Ci.\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	$2{,}7181.Ci$
Por minuto	525600	$Ci.\left(1+\frac{1}{4525600}\right)^{525600}$	$\cong 2{,}718289.Ci$

De esta manera podríamos probar con una capitalización por segundos, centésimos, milésimas etc. Cada uno de estos produciría más dinero que el anterior, pero nunca superarían el valor del número irracional $e \cong 2.71828182845904523536 0$. Este número surge de la capitalización continua, cuando la cantidad de periodos a capitalizar tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \boldsymbol{e}$$

Nótese que e es el mayor factor que podríamos encontrar para nuestro capital inicial, ya que parte de considerar $r = 1$. Para un valor cualquiera de $r < 1$, es posible utilizar la igualdad anterior.

$$Cf = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$$

$$Cf = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{n}$$

Supongamos un valor $m = n/r$, entonces $n = m.r$

$$Cf = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m.r}$$

$$Cf = \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{r}$$

$$Cf = e^{r}$$

Q7: ¿Cómo se calcula un Plazo fijo que tiene una incorporación de capital periódica y constante?

Supongamos que a un plazo fijo se le agrega una cuota Q en cada capitalización compuesta, con razón r, y t cantidad de periodos. En cada periodo se tiene lo siguiente:

$Cf(1) = Q(1+r)$

$Cf(2) = (Cf(1) + Q).(1+r)$
$Cf(2) = Q(1+r)^2 + Q(1+r)$

$Cf(3) = (Cf(2) + Q).(1+r)$
$Cf(3) = Q(1+r)^3 + Q(1+r)^2 + Q(1+r)$

….

$$Cf(t-1) = (Cf(t-2)+Q).(1+r)$$
$$Cf(t-1) = Q(1+r)^{t-2} + Q(1+r)^{t-3} + \cdots + Q(1+r)^2 + Q(1+r)$$

$$Cf(t) = Q(1+r)^{t-2} + Q(1+r)^{t-3} + \cdots + Q(1+r)^2 + Q(1+r) + Q$$

(Notar que en el tiempo t, la cuota no se capitaliza)

A este tipo de operación en matemática financiera se la denomina **Renta**.

En busca de un modelo matemático para una Renta financiera recordemos lo siguiente:

Definición: Una sucesión $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$ es una ***sucesión geométrica*** si $a_1 \neq 0$ y existe un número real $r \neq 0$ tal que para todo n natural: $a_n = a_1 . k^{n-1}$ El número $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se denomina ***razón común*** de la sucesión.

Podemos decir que, en el tiempo t, una **renta** se obtiene de la suma de los elementos de una sucesión geométrica con razón común $k = (1+r)$ y término inicial $a_1 = Q$.

$$\boxed{Cf(t) = \sum_{i=0}^{t-1} Q.(1+k)^i}$$

Reconocer que un plazo fijo al que se le agrega una cuota mensual se comporta como la suma de términos de una sucesión geométrica es importante, debido a que podemos conocer su resultado a partir de la siguiente definición:

Definición:

A la suma de los n elementos de una sucesión geométrica a_1, a_2, a_3, …, a_n se la denomina ***serie geométrica parcial***. Y se expresa de la siguiente forma:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ó $S_n = a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + ... + a_1 k^{n-1}$ $n \in N$, ya que $a_n = a_1 k^{n-1}$ $n \in N$

La suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica S_n en función del término inicial y la razón es $S_n = a_1 . \frac{k^n - 1}{k - 1}$ con $k \neq 1$, $a_1 \neq 0$.

Por lo tanto, si la suma de los n términos de una sucesión geométrica se calcula:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 . k^i$$

$$S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

Entonces una Renta financiera, donde $k = (1 + r)$ y el término inicial $a_1 = Q$, es:

$$Cf(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Q . (1 + k)^i$$

$$Cf(t) = Q \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1}$$

$$Cf(t) = Q . \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Q$_{7,1}$: ¿Qué tipo de rentas hay? ¿Cómo se calculan?

El caso presentado anteriormente con los plazos fijos, se corresponde a una **Renta financiera** donde las cuotas son **constantes**, el interés es **compuesto** y donde las cuotas son **vencidas**. Otros tipos de Rentas podrían ser: con cuotas

variables (las cuotas toman distintos valores Q_i), a interés **simple**, y con cuotas **anticipadas** (cada cuota se capitaliza un periodo más).

En el caso de una **Renta compuesta, constante, y anticipada**, el cálculo del valor final es parecido al modelo anterior, una serie geométrica, pero con la diferencia de que $a_1 = \; Q.(1+r)$ en lugar de Q.

$$\boxed{Cf(t) = Q(1+r).\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$$

En el caso de una **Renta simple, constante, anticipada**, el interés no se recapitaliza por lo que cada cuota producirá n veces el interés.

$$Cf(1) = Q.(1+r)$$

$$Cf(2) = Q(1+r) + Q(1+2r)$$
$$Cf(3) = Q(1+r) + Q(1+2r) + Q(1+3r)$$

$$Cf(t) = Q(1+r) + Q(1+2r) + \cdots + Q(1+t.r)$$

Entonces, el valor final en el tiempo t, se comporta según la siguiente sumatoria:

$$Cf(t) = \sum_{k=1}^{t} \big(Q(1+rk)\big)$$

$$Cf(t) = \sum_{k=1}^{t} Q + Qr.\sum_{k=1}^{t} k$$

De las sumatorias resultantes, la primera equivale a sumar t veces la cuota Q y la segunda equivale a la suma de los primeros t números enteros positivos, cuya solución es un caso particular de una serie aritmética:

$$Cf(t) = \sum_{k=1}^{t} Q + Qr.\sum_{k=1}^{t} k$$

$$Cf(t) = Q.t + \frac{t.(t+1)}{2}$$

El caso de una **Renta simple, constante, vencida,** es análogo al anterior, con la diferencia que en el tiempo cero no se paga una cuota y que si se paga en el tiempo t:

$$Cf(t) = \sum_{k=0}^{t-1} \big(Q(1+rk)\big)$$

$$Cf(t) = \sum_{k=0}^{t-1} Q + Qr.\sum_{k=0}^{t-1} k$$

$$\boxed{Cf(t) = Q.t + Qr\frac{(t-1).t}{2}}$$

¿Cómo utilizamos nosotros el dispositivo didáctico?

Una vez analizado el problema como si estuviéramos resolviéndolo nosotros, en primera persona, y construido un modelo matemático de referencia como el que acabamos de presentar, estamos en condiciones de utilizarlo. El desarrollo del mismo dispositivo en diferentes cursos, podría tomar distintos caminos dependiendo de las características de la institución y de los estudiantes.

En este caso, presentamos la manera en que utilizamos el dispositivo didáctico en una escuela secundaria que permitía el acceso a computadoras en las clases, pero no a internet. Estos estudiantes reunían dinero para su agrupación y sus ahorros eran colocados en un plazo fijo por el papá de un alumno.

Para comenzar, se dio a los estudiantes la cuestión inicial, pidiéndoles que formulen las preguntas que consideren pertinentes para poder investigarla en profundidad. Las preguntas propuestas por ellos, no todas relevantes, constituyeron una vía para comenzar la investigación, mientras otras preguntas de mayor peso, iban surgiendo durante el proceso. En la figura 3 se muestran algunas de las preguntas propuestas.

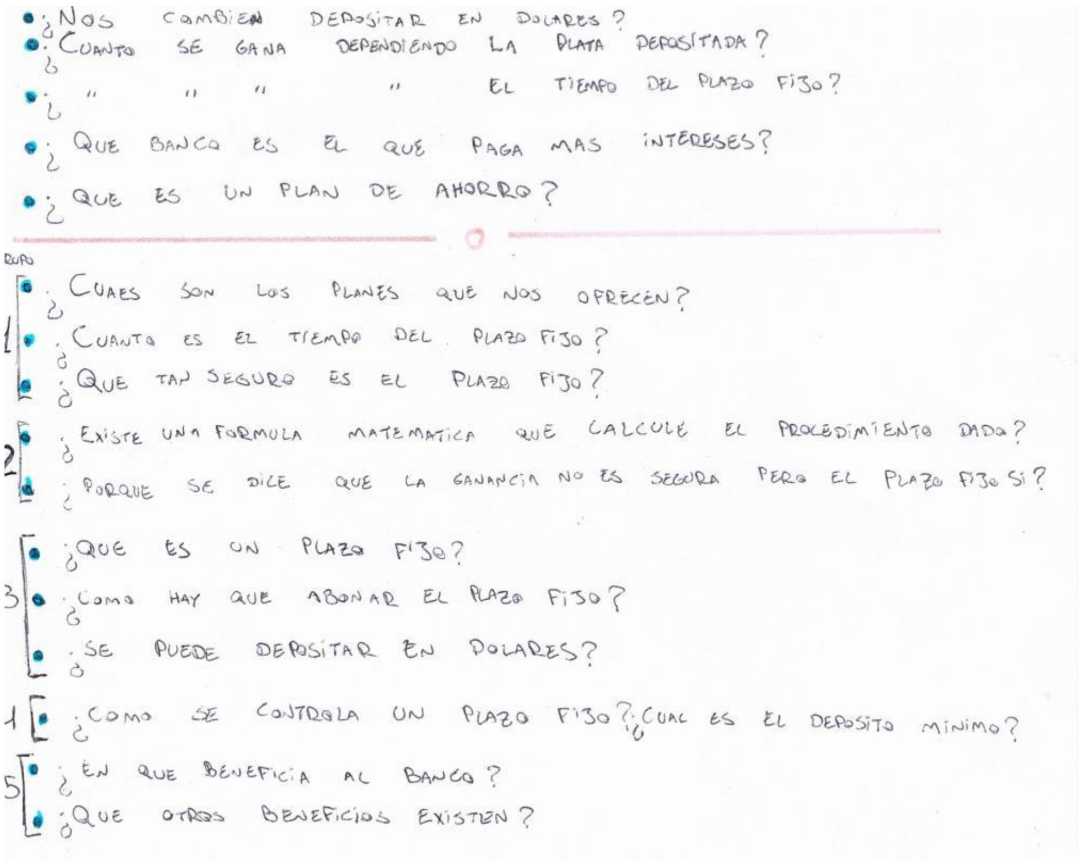


Figura 3: Preguntas escritas por un alumno

En este caso, se propusieron 22 preguntas (sin contar repetidas o equivalentes) que se clasificaron en cuestiones bancarias y matemáticas (Tabla 3).

P_1: Cuestiones Bancarias:
$P_{1.1}$-¿Qué es un plazo fijo? ¿Se puede considerar como una inversión? ¿En qué beneficia al banco?
$P_{1.2}$-¿Cómo hay que abonar el plazo fijo? ¿Se puede depositar en dólares? ¿Conviene depositar en moneda extranjera?
$P_{1.3}$-¿Cuál es la seguridad de un plazo fijo? ¿Cómo se controla un plazo fijo?
$P_{1.4}$-¿Cuál es el mínimo capital a depositar? ¿Cuál es el mínimo periodo de tiempo?
$P_{1.5}$-¿Qué es un plan de ahorro? ¿Cuáles son los que nos ofrecen? ¿Cuál es el más beneficioso y por qué? ¿Aumenta mi dinero?
$P_{1.6}$-¿Qué banco conviene? ¿Qué banco ofrece más interés?
P_2: Cuestiones Matemáticas:
$P_{2.1}$-¿Cuál es la ganancia que te produce un plazo fijo?
$P_{2.2}$-¿Existe una fórmula matemática que calcule el procedimiento del plazo fijo? ¿Cuál sería?
$P_{2.3}$-¿Cuánto ganas dependiendo del tiempo que pongas el dinero?
$P_{2.4}$-¿Cuánto ganas dependiendo de la cantidad de dinero a invertir?

Tabla 3: cuestiones bancarias y matemáticas

Debido a la falta de conexión a internet en el aula, los alumnos acordaron estudiar y responder las cuestiones bancarias en sus casas y se fijó una fecha para defenderlas en clase. Por otra parte, los estudiantes comentaron que la agrupación contaba con un plazo fijo mensual, y que si bien no sabían cómo se calculaba, aseguraban debía ser con alguna expresión que aumente un porcentaje fijo por periodo de tiempo, "por ejemplo 10% mensual".

En la búsqueda de un modelo matemático que cumpla con la condición solicitada, el profesor aportó al medio las primeras páginas de un apunte de referencia sobre funciones y ecuaciones exponenciales[2]. Aquí, los estudiantes encontraron la definición de Función Exponencial y problemas vinculados a este modelo. Luego de resolverlos, lograron vincular este contenido matemático al crecimiento del capital en su plazo fijo. Así, se propuso profundizar en el apunte antes de retomar el estudio del plazo fijo.

[2] *El apunte utilizado, se basó en el libro "Secuencia Didáctica para enseñar las funciones exponenciales en la Escuela Secundaria" (Sureda, Otero, Donvito, 2017).*

Los estudiantes trabajaron la totalidad del apunte de referencia durante varias clases, estudiando las nociones de FE: Variación Exponencial; Función Exponencial con desplazamiento vertical; Análisis de Parámetros; Ecuación Exponencial (aquí no fue necesario estudiar logaritmos, pues ya lo habían hecho); ceros de la FE; Análisis de la FE.

La finalización del estudio de Función exponencial coincidió con la puesta en común de las cuestiones bancarias. Aquí los estudiantes intercambiaron sus respuestas, que en su totalidad se investigaron por internet. Durante la puesta en común no se encontraron diferencias significativas entre respuestas ni tampoco nuevas preguntas, así que los estudiantes coincidieron en que se encontraban en condiciones de comprender el funcionamiento de su plazo fijo.

El plazo fijo de la agrupación, que se capitalizaba mensualmente, era gestionado por el padre de un alumno y “controlado” por una estudiante, quien guardaba los documentos correspondientes a cada operación. Esto le permitió al profesor repartir una copia del último documento de la operación financiera a cada grupo, y solicitarles que confirmen si era correcta la cantidad de dinero a percibir que brindaba dicho documento. Los estudiantes se sintieron desconcertados al encontrar más de una tasa de interés como se ve en la figura 4.

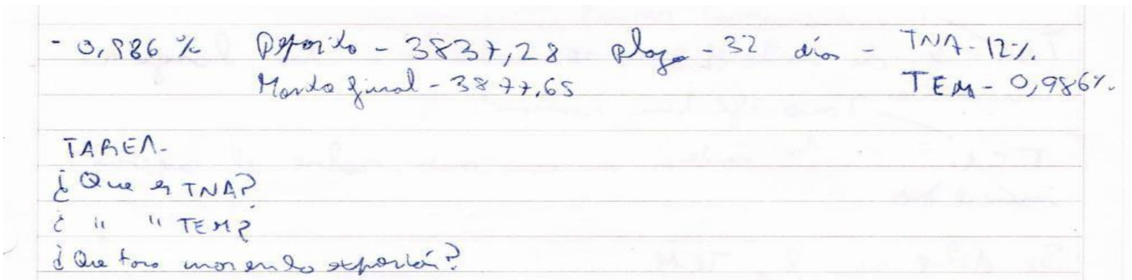
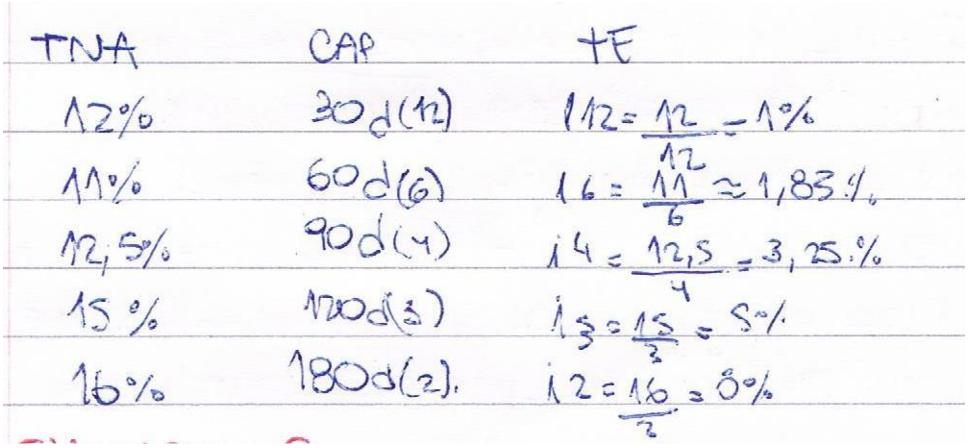


Figura 4: hallan en el plazo fijo conceptos desconocidos: TNA y TEM

El hecho de que ninguno de los estudiantes supiera qué significaban estas siglas, puso en evidencia la necesidad de profundizar el estudio sobre plazo fijo. Así, se agregaron al estudio tres preguntas: ¿qué es TNA? ¿Qué es TEM? Y ¿cuál es la tasa que se utiliza en la expresión? Se acordó que responder estas preguntas quedaría de tarea y que se retomarían al comenzar la siguiente clase. Durante la puesta en común algunos estudiantes manifestaron no comprender bien el uso de las dos tasas y su relación, así que con participación colectiva se planteó en el pizarrón el cambio de tasa de TNA (Tasa Nominal Anual) a TE (Tasa Efectiva), como muestra la *figura 5*.



TNA	CAP	TE
12%	30d(12)	$i_{12} = \frac{12}{12} = 1\%$
11%	60d(6)	$i_6 = \frac{11}{6} \approx 1{,}83\%$
12,5%	90d(4)	$i_4 = \frac{12{,}5}{4} = 3{,}25\%$
15%	120d(3)	$i_3 = \frac{15}{3} = 5\%$
16%	180d(2)	$i_2 = \frac{16}{2} = 8\%$

Figura 5: cambio de tasa, de TNA a TE

En ésta tabla, a partir de las TNA que proporciona un banco para distintos periodos, se hallan las tasas efectivas (TE) correspondientes. Por ejemplo, en el segundo renglón la TNA para capitalización bimestral es 11%, por lo tanto, para hallar la tasa efectiva bimestral i_6 (que es la que se utiliza en el cálculo de interés compuesto), se divide a once por seis, ya que capitaliza 6 veces en el año.

Habiendo respondido las preguntas acerca de TN y TE se retoma la revisión del plazo fijo de la agrupación. La figura 6 muestra como lo hizo uno de los grupos.

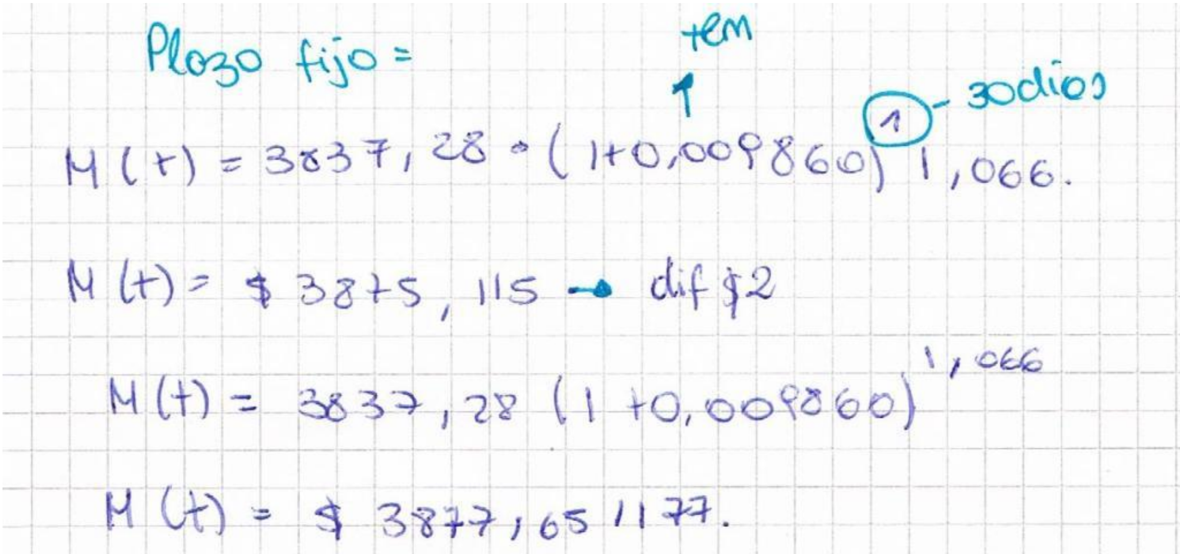


Figura 6: verificación del plazo fijo de la agrupación

En el primer renglón de esta figura el grupo utiliza la expresión de capitalización compuesta con la TEM y en lugar de elevarlo a t=1 (30 días) lo hacen a t=1,066 (32 días), mientras que en el segundo renglón copian el monto final que figura en el plazo fijo. Aquí observan una diferencia de $2 con respecto al cálculo (renglones tres y cuatro). Esta diferencia a favor del banco llamó la atención de todo el grupo de clase, quien concluyó que es mejor hacer las cuentas, ya que, si el monto depositado hubiese sido mayor, el error a favor del banco, también lo sería.

Una vez comprendido el funcionamiento de su plazo fijo y sabiendo hallar las tasas efectivas a partir de las TNA, los estudiantes se sintieron en condiciones de retomar nuevamente la cuestión generatriz. Así, y con el propósito de que puedan diseñar el mejor plan de ahorros, el profesor repartió una tabla comparativa de TNA de distintos periodos y bancos que había sido aportada al medio por un alumno. Los estudiantes debían presentar por grupos distintos planes de ahorro, a fin de compararlos y elegir la mejor opción. Algunos al comparar distintos periodos de capitalización, descubrieron que, a mayor periodo, mayor es el interés y propusieron juntar todo el dinero disponible para invertirlo en un plazo fijo anual; otros propusieron capitalizaciones mensuales, o bimestrales, a las cuales inyectar una cuota, que habían decidido colectivamente ($5 semanales cada uno), en cada nuevo periodo. Finalmente hubo dos grupos que realizaron propuestas un poco más interesantes, y señalaron un nuevo camino por donde continuar el estudio. Estas últimas se presentan a continuación exponiendo cuál fue su aporte en la investigación.

Plan de ahorros 1

Un grupo, basándose en la idea de que, a mayor período de capitalización, mayor era la tasa de interés, diseñó un plan de ahorros compuesto por doce sub-planes. Estos utilizaban, mes a mes, la mejor combinación de plazos fijos (figura 7).

Mes	plazos fijos-tipo de capitalización	montos finales
0	plazo fijo a un año con el capital inicial $3877,65	$4.449,60
1	$660 puestos 9 meses a capitalización trimestral y luego 1 vez bimestral	$741,90
2	$660 puestos 9 meses a capitalización trimestral y luego 1 vez mensual	$734,03
3	$660 puestos 9 meses a capitalización trimestral	$726,46
4	$660 puestos 6 meses a capitalización trimestral y luego 1 vez bimestral	$718,55
5	$660 puestos 6 meses a capitalización trimestral y luego 1 vez mensual	$710,93
6	$660 puestos 6 meses a capitalización trimestral	$703,60
7	$660 puestos 1 vez a capitalización trimestral y luego 1 vez bimestral	$695,93
8	$660 puestos 1 vez a capitalización trimestral y luego 1 vez mensual	$688,55
9	$660 puestos 1 vez a capitalización trimestral	$681,45
10	$660 puestos 1 vez a capitalización bimestral	$674,03
11	$660 puestos 1 vez a capitalización mensual	$666,88
12	la última cuota aportada por el grupo	$660,00
	TOTAL	$12.851,90

Figura 7: Plan de ahorros compuesto por 12 plazos fijos

En la tabla se muestra que para el mes cero, invirtieron todo el capital en un plazo fijo anual; para el mes uno, iniciaron uno nuevo con la recaudación acumulada semanalmente ($660 en total cada mes) con capitalización trimestral durante tres periodos y luego capitalizaron ese dinero en un plazo fijo bimestral; y así sucesivamente, tres trimestres y luego un mes, tres trimestres, dos trimestres y un bimestre, etc. Este plan de ahorros llevo a los estudiantes a reflexionar sobre lo importante que es estudiar profundamente una cuestión y analizar matemáticamente las opciones, ya que esta propuesta de ahorro aventajaba en $200 anuales, el plan que poseía la agrupación.

Plan de ahorro 2

Como muestra la Figura 8, un grupo propone realizar un depósito a plazo fijo, con capitalización mensual, al que agregan cada mes una cuota de $660 ($5 semanales cada uno).

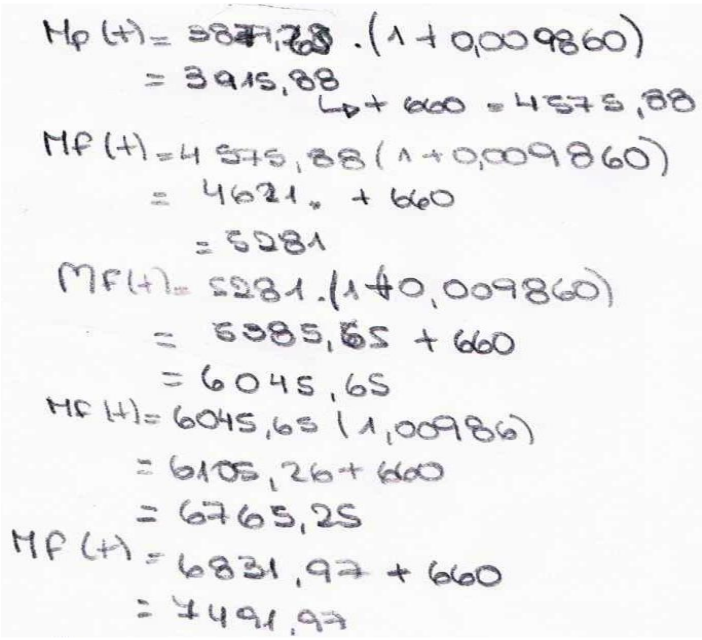


Figura 8: Plazo fijo recursivo

Los estudiantes no se encontraban satisfechos con el procedimiento de cálculo recursivo, y por su propia voluntad, decidieron buscar una expresión matemática que les simplificara las cuentas. Para esto, modificaron la expresión de capitalización compuesta $M_f = (M_i).(1+i)^t$ transformándola en $M_f = (M_i + 660.t).(1+i)^t$ como muestra la Figura *9.*

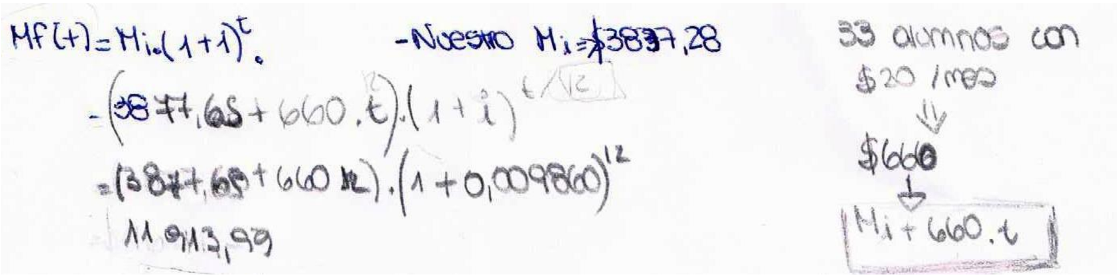


Figura 9: Intento de un estudiante por evitar la recursividad

Pero, a pesar del esfuerzo de los estudiantes por formularla, la nueva expresión no representaba el sistema de ahorro que proponían (ya que no consideraba los intereses acumulados de los meses anteriores). Fue precisamente la toma de conciencia de su inadecuación, lo que introdujo al medio la nueva cuestión “¿Cómo se calcula un plazo fijo que tiene un aporte constante y periódico de capital?”. Esta actitud de generar nuevas preguntas que requieren ir a buscar nuevos conocimientos es justamente la que mantiene viva la idea de una enseñanza por investigación.

Durante la puesta en común, el grupo compartió su inquietud por encontrar una solución al problema de la recursividad. Ante esto, se intentó desde el pizarrón y con participación colectiva, encontrar una expresión que solucione el problema de la recursividad. Uno de los grupos planteó remplazar en el monto inicial de un mes, el monto final del anterior como se ve en el tercer renglón de la figura 10. Una vez remplazado el monto inicial, utilizó la propiedad distributiva (renglones cuatro y seis). Luego, algunos estudiantes identificaron en la expresión resultante, la forma de una sucesión ya estudiada y afirmaron que se estaban sumando los términos de la misma.

$$Mf = (Mi + 920 \cdot t) \cdot (1+i)^t$$
$$Mf(1) = Mi \cdot (1+i)$$
$$Mf(2) = [Mi \cdot (1+i) \;\; + 920](1+i)$$
$$Mf(2) = Mi\,(1+i)^2 + 920\,(1+i)$$
$$Mf(3) = [Mi\,(1+i)^2 + 920(1+i) + 920](1+i)$$
$$Mf(3) = Mi\,(1+i)^3 + 920\,(1+i)^2 + 920\,(1+i)$$

Figura 10: buscando simplificar el cálculo recursivo

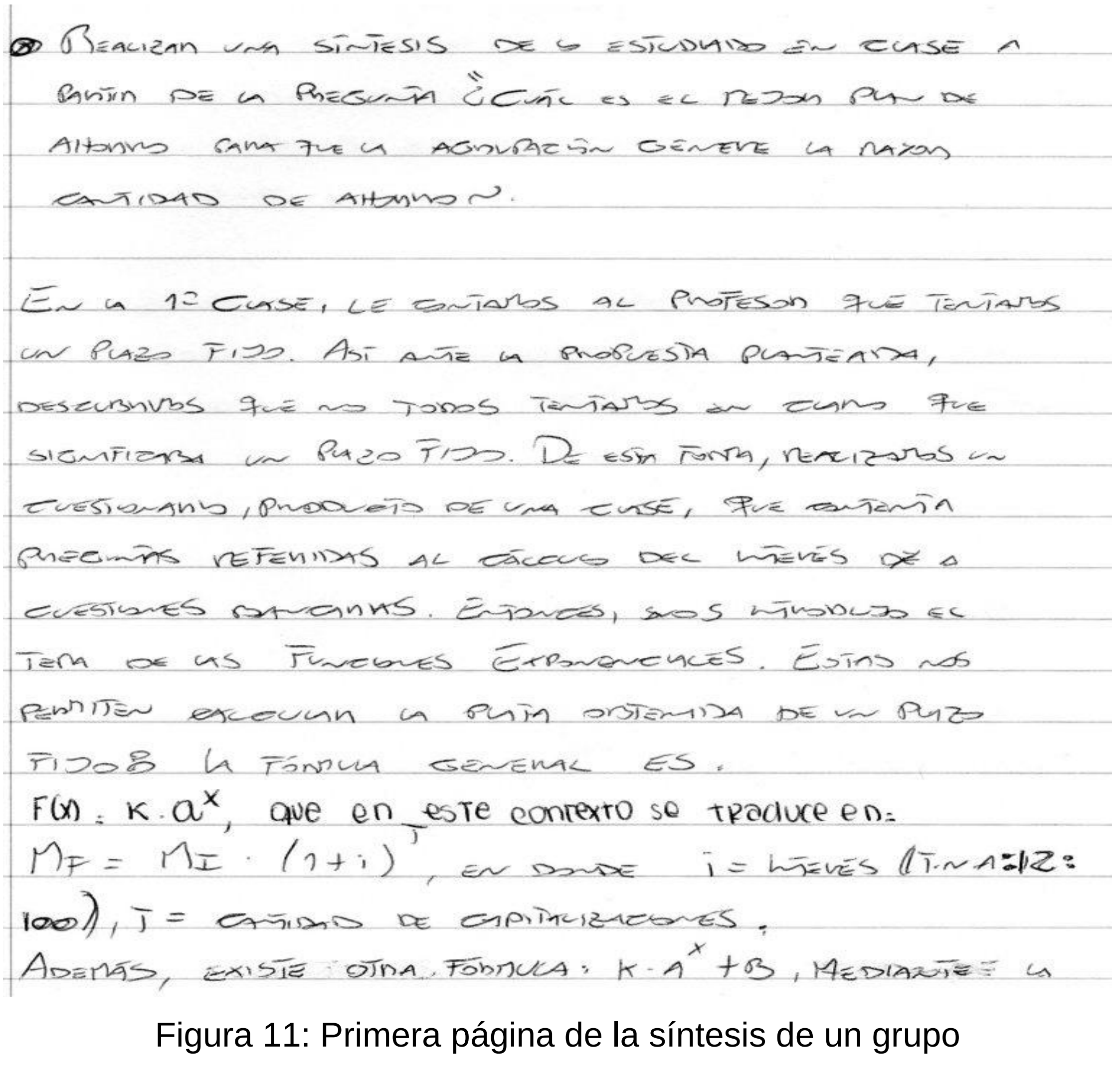
Reconocer que se trata de la suma de los elementos de una sucesión introdujo al medio una nueva cuestión: “¿existe una expresión que sume los elementos de una sucesión? ¿Cuál es?” Para responder a esta pregunta el profesor agregó al medio un breve apunte de sucesiones y series (C6) (Ver anexo). Los estudiantes, dejaron a un lado el estudio del plazo fijo, para estudiar durante un breve lapso de tiempo, sucesiones. Aquí, distinguieron en particular la sucesión geométrica, reconocieron la razón común y definieron la serie geométrica parcial como la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica. Una vez finalizado el estudio de sucesiones y series geométricas (C6) los estudiantes verificaron sin problemas el cálculo recursivo que habían hecho anteriormente.

Para finalizar el estudio con el dispositivo, se solicitó a los estudiantes que presenten una síntesis de lo estudiado durante la búsqueda del mejor plan de ahorros. Las figuras 11 y 12 muestran una de las síntesis, que se transcribe a continuación:

En la 1ra. Clase, le contamos al profesor que teníamos un plazo fijo. Así ante la propuesta planteada, descubrimos que no todos teníamos en claro que significaba un plazo fijo. De esta forma, realizamos un cuestionario, propuesta de una clase, que contenía preguntas referidas al cálculo del interés y a cuestiones bancarias. Entonces, nos condujo al tema de las Funciones Exponenciales. Estas nos permiten calcular la plata *obtenida de un plazo fijo: la fórmula general es $F(x) = k.a^x$ que en este contexto se traduce en $Mf = Mi(1+i)^t$, en donde i es el interés (TNA: 12/100), t la cantidad de capitalizaciones.*

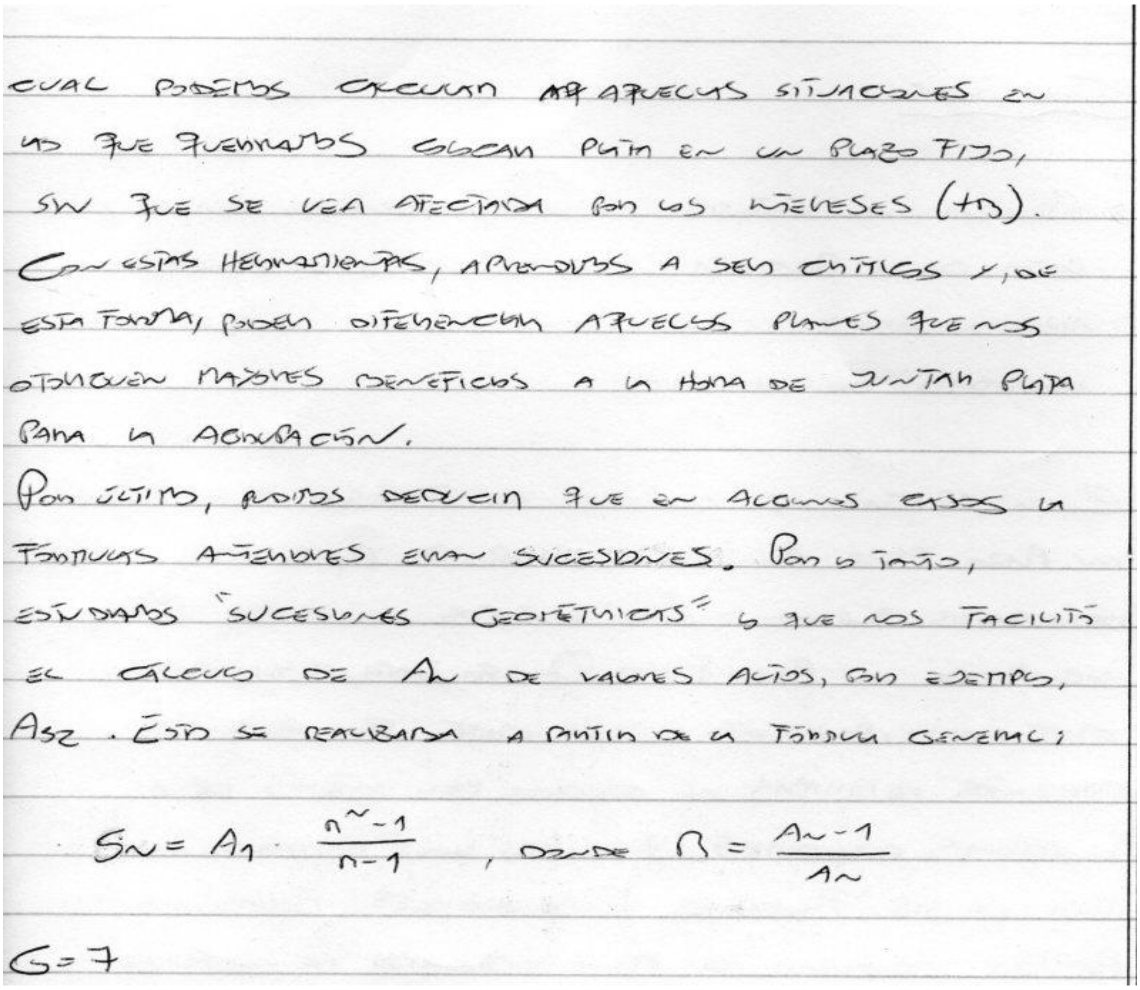
Además, existe otra fórmula $F(x) = k.a^x + b$ mediante la cual podemos calcular aquellas situaciones en las que queramos colocar plata en un plazo fijo, sin que sea afectada por los intereses ("$+b$"). Con estas herramientas, aprendimos a ser críticos, y de esta forma, poder diferenciar aquellos planes que nos ofrecen mayores beneficios a la hora de juntar plata para la agrupación.

Por último, podemos decir que, en algunos casos, las fórmulas anteriores eran sucesiones. Por lo tanto, estudiamos "sucesiones geométricas" lo que nos facilita el cálculo de A_n para valores altos, por ejemplo, A_{52}. Esto se realizaba a partir de la fórmula general: $S_n = A_{1.}\frac{r^n-1}{r-1}$, donde $r = \frac{A_{n.}-1}{A_{n.}}$


a) Realizar una síntesis de lo estudiado en clase a
partir de la pregunta "¿Cuál es el mejor plan de
ahorro para que la agrupación genere la mayor
cantidad de ahorro?".

En la 1° clase, le contamos al profesor que teníamos
un plazo fijo. Así ante la propuesta planteada,
descubrimos que no todos teníamos en claro que
significaba un plazo fijo. De esta forma, realizamos un
cuestionario, producto de una clase, que contenía
preguntas referidas al cálculo del interés de 4
cuestiones [illegible]. Entonces, nos metimos en el
tema de las funciones exponenciales. Estas nos
permiten calcular la plata obtenida de un plazo
fijo: la fórmula general es:
$F(x) = K.a^x$, que en este contexto se traduce en:
$M_F = M_I \cdot (1+i)^t$, en donde i = interés (T.N.A: 12:
100), t = cantidad de capitalizaciones.
Además, existe otra fórmula: $K.A^x + B$, mediante la

Figura 11: Primera página de la síntesis de un grupo



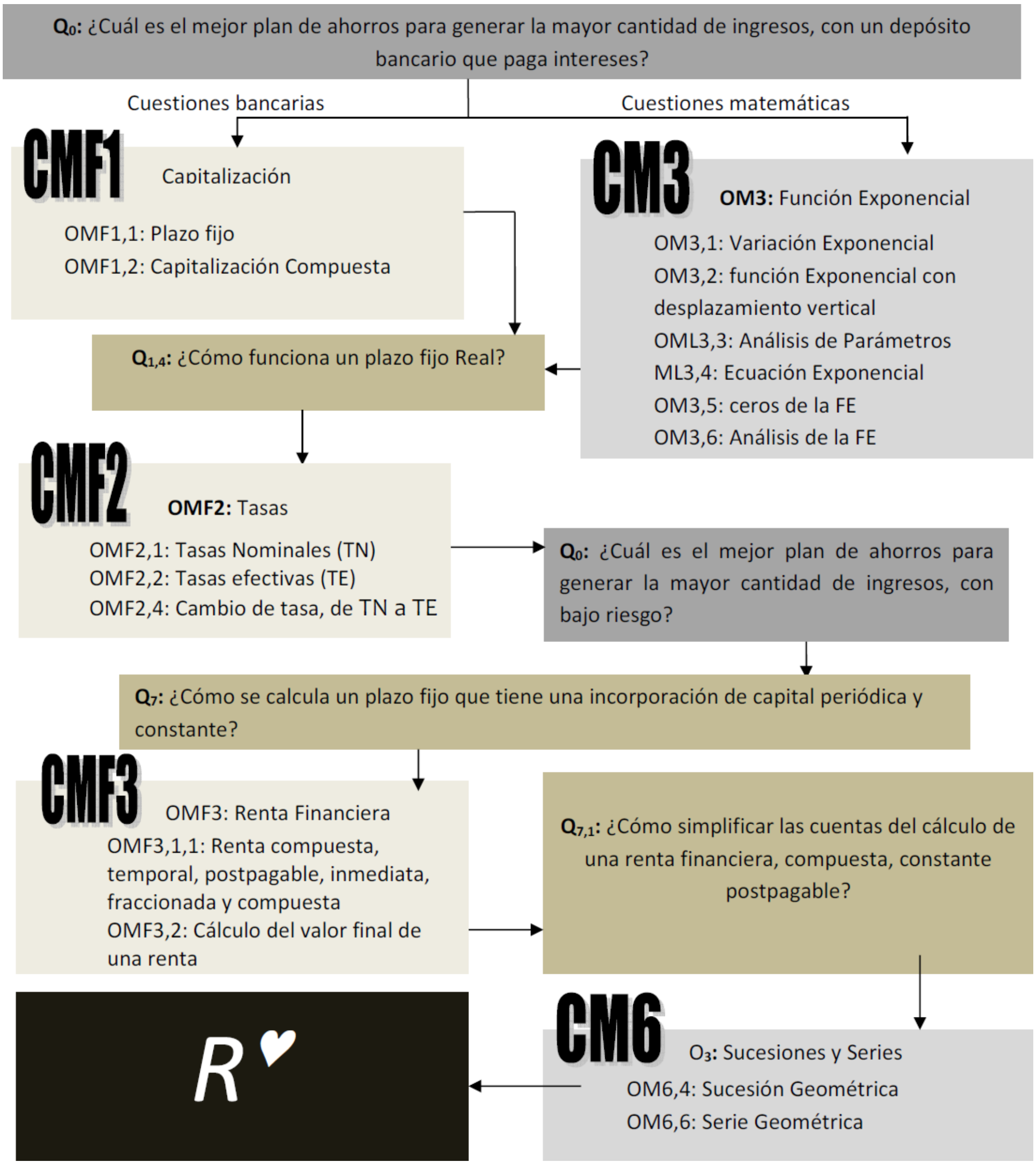
CUAL PODEMOS CALCULAR AQUELLAS SITUACIONES EN LAS QUE QUERRAMOS COLOCAR PLATA EN UN PLAZO FIJO, SIN QUE SE VEA AFECTADA POR LOS INTERESES (+TS).
CON ESTAS HERRAMIENTAS, APRENDIMOS A SER CRÍTICOS Y, DE ESTA FORMA, PODER DIFERENCIAR AQUELLOS PLANES QUE NOS OTORGUEN MAYORES BENEFICIOS A LA HORA DE JUNTAR PLATA PARA LA AGRUPACIÓN.
POR ÚLTIMO, PODEMOS DECIR QUE EN ALGUNOS CASOS LA FÓRMULAS ANTERIORES ERAN SUCESIONES. POR LO TANTO, ESTUDIAMOS "SUCESIONES GEOMÉTRICAS" LO QUE NOS FACILITÓ EL CÁLCULO DE A_n DE VALORES ALTOS, POR EJEMPLO, A_{52}. ESTO SE REALIZABA A PARTIR DE LA FÓRMULA GENERAL:

$$S_n = A_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad \text{DONDE } r = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

G=7

Figura 12: Segunda página de la síntesis de un grupo

A fin de sintetizar el recorrido que se llevó a cabo en esta implementación y de visualizar los contenidos estudiados se presenta el esquema 2. Aquí, se puede notar que el modelo matemático efectivamente construido es diferente al que usamos de referencia en el esquema 1. Esto se debe a que, en este caso, los estudiantes decidieron no dedicar tiempo al estudio de la capitalización simple y a que tampoco se estudió límite, pues no surgió, la pregunta que conducía a ello



Esquema 2: preguntas y contenidos de esta implementación

Reflexiones finales

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2013) propone un cambio de paradigma en la enseñanza de la matemática, en pos de reestablecer su papel en la sociedad y su utilidad para vivir en el mundo. En el REI presentado aquí, los contenidos matemáticos de quinto año de ES sirvieron para abordar cuestiones referidas a finanzas personales.

Estudiantes de 16 y 17 años de edad, analizaron matemáticamente cómo mejorar el rendimiento del plan de ahorros que tenía su agrupación, optimizándolo y obteniendo una ganancia significativamente mayor. Así, los contenidos matemáticos estudiados, resultaron ser de interés para ellos.

Por otro lado, esta forma de enseñanza, basada en la elaboración de posibles respuestas a una cuestión fecunda, llamada enseñanza por investigación, contribuye a la formación de ciudadanos, en sintonía con la teleología del curriculum. Los estudiantes, han mostrado actitudes que serían útiles para desarrollar una ciudadanía crítica y para transitar en un ámbito laboral competitivo y cambiante. Han enfrentado cuestiones nuevas y saberes totalmente desconocidos para ellos, se han preguntado por la matemática del proceso de ahorro, y hasta incluso, fueron más allá del problema inicial intentando por sus propios medios simplificar las cuentas de un cálculo recursivo

Los beneficios de enseñar matemática de esta manera han alcanzado tanto a alumnos como a profesores, quienes manifestaron *“los chicos no se aburren”*, *“los chicos se enganchan enseguida”*.

Consideramos que nuestro trabajo es solo el comienzo una actividad profesional que consiste en seleccionar, adaptar y proponer dispositivos didácticos que permitan desarrollar una enseñanza por investigación en el aula, o al menos actitudes que vayan en esa dirección, tanto como sea posible. Existen diversas cuestiones que podrían estudiarse con este enfoque. A continuación, presentamos algunas de ellas, y alentamos a nuestros colegas a explorar las posibilidades de usar la matemática escolar en situaciones cotidianas, a estudiarlas, e intentar introducirlas en sus clases.

Otras cuestiones que pueden estudiarse con este enfoque

Además de la pregunta en la que se basa el REI presentado en este libro, proponemos otras cuestiones que pueden estudiarse en la escuela con el mismo enfoque.

Hemos observado que las personas tienden a evitar el uso la matemática para analizar las situaciones cotidianas, incluso a la hora de tomar decisiones financieras. Muchas veces se basan en “mitos populares” para adoptar decisiones, evitando hacer cuentas que son relativamente sencillas. Enfrentar estos mitos populares con la matemática escolar resulta un camino interesante para estudiar matemática y a la vez, para tomar decisiones económicas de manera racional, frente a la cultura del consumo desmedido e inmediato, que conduce a veces a situaciones financieras insostenibles, que podrían evitarse.

Por ejemplo, para discutir la idea de si es mejor comprar una vivienda o alquilarla –*“Hoy conviene invertir en ladrillos, hay que edificar” o “Alquilar es tirar el dinero”*– se propuso la situación de comparar las siguientes opciones.

Se utilizó una publicación “vendo o alquilo” de una inmobiliaria local, donde comprar la casa costaba \$1.100.000 y alquilarla \$6.000. La propuesta se basó en decidir si comprar la casa, o, alquilarla y capitalizar el dinero en un plazo fijo, que a la fecha (junio del 2015), tenía tasas de hasta un 25% anual. La figura 13 muestra la respuesta final de un estudiante. Allí afirma que si alquilara durante un año gastaría $72.000 y que si capitalizara todo el dinero en un plazo fijo durante ese año obtendría $275.000. Descontando el alquiler, tendría una ganancia anual de $203.000.

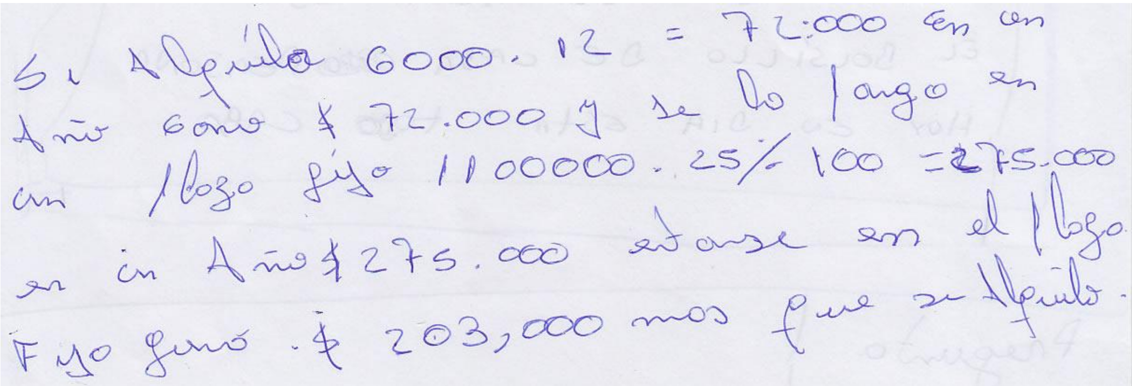

Si Alquilo 6000 . 12 = 72.000 en un
Año gano $ 72.000 y se lo largo en
un plazo fijo 1100000 . 25% 100 = 275.000
en un Año $ 275.000 ... en el plazo
y yo gano . $ 203,000 mas que si Alquilo.

Figura 13: análisis de un estudiante: comprar o alquilar

Contra el mito popular de que las tarjetas de crédito ofrecen los mejores beneficios, se diseñó la siguiente situación:

Se quiere comprar un electrodoméstico que cuesta $1.000 y para el cual se dispone del dinero en efectivo. Al momento de pagar, el cajero comenta que determinada tarjeta de crédito, cuenta con el 20% de descuento y 12 cuotas sin interés. Supongamos el cliente tiene esta tarjeta y nunca la ha usado ¿Qué decisión tiene mejor rendimiento, aceptar la promoción o pagar en efectivo?

En este caso, es necesario conversar en clase sobre la política comercial de ciertas entidades bancarias que envían tarjetas de crédito a personas que no las solicitan, argumentando que, si no las usan, no se le cobrarán gastos administrativos.

Si suponemos que la tarjeta cobra, al menos, $30 mensuales en concepto de anualidad, gastos administrativos y/o seguro de vida ¿Conviene esta opción?

De contado se hubiese pagado $1000. Con tarjeta de crédito y el descuento $800, sin embargo, el mantenimiento durante los 12 meses costaría $360. Es decir, comprar con tarjeta costaría al final del año $1.160, $160 más caro que la opción original.

Alguien podría plantearse que si se comprara en 6 cuotas se podría disminuir el mantenimiento a $180. Pero, la promoción solo es válida para 12 cuotas, al comprar en 6 se paga interés. El banco, nunca pierde.

Así, es posible plantear otras preguntas para estudiar en la escuela. Las compras en cuotas con tarjetas de créditos, siempre son muy sobre estimadas, y generalmente las personas no analizan el rendimiento de ahorrar en un plazo fijo, para comprar, por ejemplo, un led TV, o pagar un viaje comprar un auto o una casa, o montar un negocio. Tampoco se analiza en la escuela, como crece una deuda en una tarjeta de crédito cuando el cliente paga el mínimo.

En fin, son muchas las opciones que permiten explorar la relación entre la matemática y las finanzas personales en la escuela secundaria. Consideramos que cualquier aporte en esta dirección será tan beneficioso para los alumnos como para los profesores. El clima que se genera en las clases cuando se desarrolla este tipo de enseñanza, es muy reconfortante para el profesor, quien se siente animado al ver el potencial y las capacidades de sus alumnos, cuando se les da oportunidad de asumir las responsabilidades que les caben. En consecuencia, alentamos a nuestros colegas, a utilizar este tipo de dispositivos.

ANEXO

Anexo: Apunte de series y sucesiones

SUCESIÓN Y SERIE GEOMÉTRICA

Una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales (o un subconjunto de ellos), y es por tanto una función discreta. El n-ésimo elemento de la sucesión se escribe a_n, en lugar de f(n).

Ejemplo:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};\ a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{1}{4} \ldots$$

Tareas

1- Dada las siguientes sucesiones, encontrar la expresión del n-ésimo elemento, si es posible:

a) $a_1 = 2; a_2 = 4;\ a_3 = 6; a_4 = 8; \ldots$

b) $a_1 = 2; a_2 = 4;\ a_3 = 8; a_4 = 16; \ldots$

c) $a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};\ a_3 = \frac{1}{4}; a_4 = \frac{1}{8}; \ldots$

d) $a_1 = -3; a_2 = -6;\ a_3 = -12; a_4 = -24; \ldots$

c) $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 1;\ a_3 = \frac{3}{4}; a_4 = 2; \ldots$

2- Sumar los 10 primeros elementos de cada una de las sucesiones anteriores.

Definición: Una sucesión $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$ es una ***sucesión geométrica*** si $a_1 \neq 0$ y existe un número real $r \neq 0$ tal que para todo *n* natural: $a_n = a_1 . r^{n-1}$

El número $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ se denomina ***razón común*** de la sucesión.

3- ¿Cuáles de las sucesiones anteriores son geométricas? Justificar e indicar la razón común.

Definición:

A la suma de los *n* elementos de una sucesión geométrica se la denomina ***serie geométrica parcial***. Y se expresa de la siguiente forma:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ Siendo a_1, a_2, a_3,..., a_n una sucesión geométrica.

Ó $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1} \quad n \in N$, ya que $a_n = a_1 r^{n-1} \quad n \in N$

La suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica S_n en función del término inicial y la razón es $S_n = a_1 . \frac{r^n - 1}{r - 1}$ con $r \neq 1,\ a_1 \neq 0$.

4- Hallar S_{10} y S_n para las sucesiones geométricas anteriores utilizando la expresión dada. Verificar los resultados con los obtenidos en el inciso 2.

5- Un hombre, deja un testamento que dice que al morir sus herederos donarán a entidades de bien público la suma de mil millones de pesos, al año siguiente la mitad de esa suma, y así consecutivamente, cada año donarán la mitad de lo donado el año anterior. ¿Cuánto dinero necesitan para poder cumplir con el testamento?

Bibliografía

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 2 (2), 161-182. doi: 10.447/redimat.2013.26.

Donvito, A.; Sureda, P.; Otero, M. R. (2013a). Description of attitudes belonging to the Research Pedagogy and the World Questioning in high school. International Journal of Education and Research (IJER) Vol. 1 No.10.

Donvito A.; Sureda, P; Otero M. R, (2013b). REI Bidisciplinar en Tres Escuelas Secundarias. En LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO en el aula de matemática. Otero, M. R.; Fanaro, M. A.; Córica, A. R.; Llanos, V. C.; Sureda, P.; Parra, V. (2013). Buenos Aires: Editorial Dunken.

Donvito, A.; Otero, M. R.; Sureda P. (2014). Actitudes de la Pedagogía de la Investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. Ikastorratza, e-Revista de Didáctica. Vol. 12.

Donvito, A.; Sureda, P. (2016). Taller de Enseñanza por Investigación en la Escuela Secundaria: El caso de un REI relativo a los planes de ahorro.2CIECyM- 3ENEM. Tandil, Buenos Aires, Argentina.

Otero, M. R.; Fanaro, M. A.; Córica, A. R.; Llanos, V. C.; Sureda, P.; Parra, V. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática. Buenos Aires: Editorial Dunken.

Sureda, P.; Otero, M. R.; Donvito, A. (2013). Mise en œuvre d'un PER dans trois écoles secondaires: étude des difficultés. Toluose: IV Congreso Internacional de la Teoría Antropológico de lo Didáctico (CITAD). Trabajo presentado en formato de póster.

Sureda, P.; Otero, M. R.; Donvito, A. (2017). Secuencia Didáctica para enseñar las funciones exponenciales en la Escuela Secundaria. Una propuesta diseñada en el Marco de la Teoría de los Campos Conceptuales. Tandil, Buenos Aires. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Angel Donvito, es Profesor en Matemática. Es Licenciado en Educación Matemática y estudiante del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática. Es Becario Doctoral del CONICET. Es Docente de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, a nivel de grado e Integra el Núcleo de la Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Ha sido profesor de Matemática en el nivel secundario.

María Rita Otero, es Profesora en Matemática y Física y Magister en Psicología de la Educación graduada en la UNICEN y Doctora en Enseñanza de las Ciencias, por la Universidad de Burgos. Realizó formación posdoctoral en la Université de Paris V. Es Investigadora Principal del CONICET en el área de Psicología y Educación y Profesora Titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, a nivel de grado y posgrado. Dirige el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN y es Directora del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Ha sido profesora de Matemática y de Física en el nivel secundario.

Patricia Sureda, es Profesora en Matemática y Licenciada en Educación Matemática por la UNICEN. Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática e Investigadora Asistente del CONICET en el área de Psicología y Educación. Es Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, a nivel de grado y posgrado. Integra el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN y es Coordinadora de la Licenciatura en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Ha sido profesora de matemática en el nivel secundario.