Estudio de Funciones algebraicas en la Escuela Secundaria.

Una propuesta para su enseñanza en los marcos geométrico, analítico, gráfico y funcional.

Viviana Carolina Llanos

María Rita Otero

María Paz Gazzola

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT).
Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

ISBN 978-950-658-398-9

2016

Llanos, Viviana Carolina
Estudio de funciones algebraicas en la escuela secundaria : una propuesta para su enseñanza en los marcos geométrico, analítico, gráfico y funcional / Viviana Carolina Llanos ; María Rita Otero ; María Paz Gazzola. - 1a ed . - Tandil : Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2016.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-658-398-9

1. Álgebra. 2. Escuela Secundaria. 3. Educación. I. Otero, María Rita II. Gazzola, María Paz III. Título
CDD 371.1

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT).
Facultad de Ciencias Exactas.
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Hecho el depósito que prevé la ley 11.723

e-mail: vcllanos@exa.unicen.edu.ar; rotero@exa.unicen.edu.ar; mpgazzola@exa.unicen.edu.ar
ISBN 978-950-658-398-9

Estudio de Funciones algebraicas en la Escuela Secundaria.

Una propuesta para su enseñanza en los marcos geométrico, analítico, gráfico y funcional.

Viviana Carolina Llanos

María Rita Otero

María Paz Gazzola

ÍNDICE

Introducción……………………………………..……………..….………. 1

Los REI en la Teoría Antropológica de lo Didáctico….……………..………. 3

Análisis a priori: el Modelo Praxeológico de Referencia.…………..……… 5

Desarrollo del REI:

Parte 1: El estudio de las funciones polinómicas de segundo grado en la escuela secundaria...……..……………….…………………………..… 15

Parte 2: El estudio de las funciones polinómicas en la escuela secundaria.…………………………………………..…………………….. 38

Parte 3: El estudio de las funciones racionales en la escuela secundaria ……………………………………………………..…………….. 49

Referencias…………………………………………………………………

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos un dispositivo didáctico para enseñar matemática en la escuela secundaria en conformidad con el llamado paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Se describen las características generales de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) monodisciplinar en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2004, 2009). La pregunta generatriz, y las preguntas derivadas de ella son específicamente matemáticas, es decir que se trata de un REI finalizado, porque las preguntas y las posibles respuestas se orientan al encuentro con los contenidos del programa de los últimos tres años de la escuela secundaria. El tiempo de desarrollo del REI podría tomar más de dos años con los mismos estudiantes, dependiendo de la cantidad de praxeologías del programa que se estudien.

El diseño del REI, la elección y análisis de la generatividad de la pregunta Q_0 y de las situaciones que conforman el dispositivo es intencional y forman parte del proceso de ingeniería didáctica que se detalla en los trabajos de Llanos y Otero (2013a, 2015). Este análisis requiere inicialmente de la elaboración y definición de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) para el investigador (Chevallard, 2012), que es quien inicialmente estudia la pregunta generatriz denominada Q_0, y las alternativas para un adecuado desarrollo de este dispositivo, en el contexto de las clases de matemática regulares en la escuela secundaria. El MPR es provisorio y potencialmente abierto, y además de considerar las Organizaciones Matemáticas del programa que podrían encontrarse o reencontrarse, involucra un análisis, desarrollo y adaptaciones de las técnicas matemáticas necesarias para estudiar Q_0.

El REI inicia con la pregunta generatriz Q_0: ¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes? El estudio de Q_0 puede originar diferentes recorridos, dependiendo de las funciones que se adopten y de la operación que se proponga realizar entre las mismas. En el marco de esta investigación se han diseñado, analizado, implementado y evaluado tres recorridos posibles derivados de Q_0, desarrollados en tres partes. La parte 1 inicia con la pregunta Q_1: ¿Cómo multiplicar dos funciones afín, si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?, a partir de la cual es posible estudiar las funciones polinómicas de segundo grado (Llanos, Otero, 2013a, 2015); la Parte 2, comienza con Q_2: ¿Cómo multiplicar más de dos rectas, o rectas y parábolas, o parábolas; si sólo se conoce su *representación gráfica y la unidad en los ejes?*, a partir de la cual sería posible estudiar las funciones polinómicas (Llanos, Otero, Colombo, 2015); y la Parte 3, que se desarrolla a partir de la pregunta Q_3: *¿Cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas, si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* que permitiría reconstruir las características de las funciones racionales, realizando adaptaciones en las técnicas desarrolladas antes (Gazzola, Llanos, Otero, 2013).

A continuación, definimos las características del REI, el análisis del MPR, de las técnicas matemáticas necesarias para estudiar funciones a partir de este dispositivo, y ponemos a disposición las situaciones diseñadas en el marco de la investigación, como partes del REI.

LOS REI EN LA TEORIA ANTROPOLOGICA DE LO DIDACTICO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999) considera a la actividad matemática como una actividad humana, entre otras actividades, que son producto de la cultura y de la necesidad humana de resolver y responder cuestiones vitales (Otero, 2013; Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Parra, 2013). Cuando la matemática se presenta como un conjunto de obras terminadas, incuestionables, de las que se desconocen sus orígenes, y el por qué y para qué de ese conocimiento, se produce un fenómeno que se denomina monumentalización del saber (Chevallard, 2004). En una enseñanza monumental, las Praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM) son "presentadas" como si estas fueran transparentes e incuestionables, dotadas de sentido por sí y para sí mismas. Relacionado con este, existe el fenómeno denominado de la pérdida de sentido de las OM de un programa, cuestiones matemáticas que se estudian o se proponen explícita o implícitamente en una institución. Estos fenómenos son parte de la cultura escolar dominante desde hace más de 150 años, particularmente, son fácilmente reconocibles en la escuela secundaria, que es el objeto de nuestro interés.

La TAD proporciona un conjunto de instrumentos teóricos para analizar la actividad matemática escolar y "hacer frente" al problema de la enseñanza monumental: las Actividades de Estudio y de Investigación (AEI) y los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) (Chevallard, 2009). Estos dispositivos son propuestos con el objetivo de enfrentar el fenómeno de la monumentalización, propio del paradigma tradicional. El paradigma tradicional se encuentra en crisis, y ha sido muy cuestionado, pero tarda en ser sustituido. La TAD propone un paradigma de enseñanza radicalmente diferente, llamado Paradigma de la Investigación y del Cuestionamiento del mundo (PICM) (Chevallard, 2012, 2013), en donde no habría lugar para la monumentalización del saber. En este paradigma, un programa escolar P se debería componer de un cierto número de preguntas Q: $P=(Q_i)_{1\le i\le n}$. El estudio de cada Q conduce a una respuesta R validada por la cultura, por la sociedad, por la Escuela, y P entonces debería escribirse bajo la forma $P=(Q_i;R_i)_{1\le i\le n}$.

La TAD coloca como punto de partida del saber a las preguntas, donde los REI emergen como dispositivos apropiados para desarrollar la enseñanza y el estudio, a la vez que representan una concepción epistemológica completamente diferente. El estudio de preguntas es clave para superar el paradigma clásico de "visitar los saberes", a la vez que permiten introducir al grupo de clase, en el nuevo paradigma de "interrogar al mundo". En un REI un conjunto de estudiantes X con ayuda de uno o más profesores Y, estudian una cuestión generatriz Q_0 en búsqueda de una respuesta $R^{\heartsuit}$. Dependiendo de la generatividad de Q_0 y de sus preguntas derivadas, los REI permiten estudiar distintas organizaciones, matemáticas o no, como parte del proceso de construcción de una respuesta válida a Q_0. En el REI, el estudio de Q_0 se concreta en un recorrido "general" que integra varias preguntas derivadas Q_i.

El sistema didáctico S(X,Y,Q) necesita generar un medio didáctico M, para producir $R^{\heartsuit}$ (Chevallard, 2009), que se sintetiza en el esquema $[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. El sistema S fabrica y organiza ($\rightarrow$) el medio M, con el cuál producirá ($\hookrightarrow$) una respuesta $R^{\heartsuit}$. El medio M contiene las preguntas generadas a partir de Q, las respuestas $R_i^{\diamond}$ (i=1,…,n) "hechas" –un libro, la Web, el curso de un profesor, etc.- También pertenecen a M las O_j (con j=n+1,…,m) las teorías, praxeologías, etc. útiles para elaborar $R^{\heartsuit}$. En la TAD, M se escribe: $M=\left\{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \ldots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\right\}$. y un REI se formaliza mediante un esquema, denominado por Chevallard (2012) *herbartiano* desarrollado: $\left[S(X, Y, Q) \rightarrow \left\{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, R_3^{\diamond}, \ldots, R_n^{\diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\right\}\right] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$.

Los REI pueden ser monodisciplinares o codisciplinares, dependiendo si para su estudio se requiere o no de la consideración de obras Matemáticas únicamente, o si es necesario estudiar conjuntamente matemática y otra u otras disciplinas. Aquí se trata de un REI monodisciplinar, y además finalizado, pues a partir de la pregunta Q_0 es posible estudiar determinadas OM todas pertenecientes al programa de estudio de la escuela secundaria.

Al comenzar un REI, el profesor propone una pregunta Q_0, con el objetivo de estudiar contenidos del programa. Las respuestas Q_0 dadas por los estudiantes y el profesor, son consideradas y puestas a discutir en igualdad de condiciones por la clase. El desarrollo de un REI cambia radicalmente, en comparación con la pedagogía Monumentalista, la relación del profesor y de los alumnos con el saber, el tiempo y la manera en que se organiza el estudio y el lugar que ocupan los actores del sistema didáctico en la clase. El principal cambio ocurre cuando el profesor se "corre" de su lugar habitual para que los estudiantes asuman una responsabilidad diferente, que consiste en involucrarse en el proceso de elaborar, desarrollar y difundir una respuesta posible como consecuencia del estudio realizado en un M apropiado.

ANÁLISIS A PRIORI: EL MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA

En el proceso de “ingeniería del REI” es necesario realizar un análisis, que se ve fortalecido por las características que proporciona el diseño del Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) (Chevallard, 1999, 2012), para analizar las OM que se proponen estudiar y las que efectivamente se enseñan en una determinada institución. Aquí se propone un MPR que corresponde a una reconstrucción de las posibles OM que el desarrollo del REI permitiría estudiar, así como las relaciones que pueden establecerse entre las mismas.

La pregunta generatriz propuesta Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes?* se desarrolla sobre un problema que amplía el propuesto por Régine Douady (1984, 1999), que consiste en realizar operaciones entre curvas cuando sólo es conocida la unidad en los ejes. Las preguntas derivadas Q_i de Q_0, pueden ser tantas como curvas y operaciones entre las mismas se elijan, a partir de las cuales es posible reconstruir varias Organizaciones Matemáticas (OM) relativas a las funciones algebraicas del programa de estudio de los últimos tres años de la escuela secundaria. Una vez establecidas cuáles son esas curvas y las operaciones correspondientes entre las mismas, es necesario recorrer el camino que permita encontrar una solución al problema. El MPR no es final ni definitivo, ya que es parte de un proceso extendido en el tiempo, y el análisis a priori permite:

- Describir los posibles recorridos que pueden originarse con Q_0 y analizar en qué medida los mismos pueden ser introducidos en los cursos de la escuela secundaria.
- Justificar por qué, en este caso, se propone empezar por el problema de la multiplicación de las rectas como una respuesta posible al problema de operar con curvas.
- Realizar un análisis didáctico de las preguntas que orientan el recorrido, que parte de la multiplicación de las rectas y las decisiones consideradas con relación al mismo, no sólo para reconstruir una respuesta posible a esta parte del recorrido, sino para continuar con el estudio en otros casos.
- Realizar un análisis de la generalidad de las técnicas construidas para la multiplicación de las rectas, en otros casos.

Como ya se mencionó, Q_0 admite una variedad de operaciones y de curvas posibles a partir de las cuales sería posible reconstruir las características de las funciones algebraicas. Las trascendentes no se obtienen por adaptación de las técnicas obtenidas para las funciones algebraicas, aunque existen otras técnicas geométricas que permiten construir puntos de las curvas correspondientes a dichas funciones (Ferrari y Farfán, 2008). A diferencia de estas últimas técnicas geométricas, las que se propone desarrollar en esta investigación, tienen la particularidad de que pueden ser adaptadas, para construir cualquier curva cuando cambian las operaciones y representaciones de las gráficas inicialmente dadas. Por ejemplo, la suma y resta de rectas conduce al encuentro de la función afín, la multiplicación de estas, al de funciones polinómicas de grado dos, la multiplicación entre una parábola y una recta o tres rectas a las funciones polinómicas de grado tres y el cociente entre funciones polinómicas permite estudiar funciones racionales. Todas estas funciones se pueden reconstruir por adaptación de las técnicas generadas en alguna parte del estudio. Además, las técnicas geométricas y un uso adecuado de la unidad, permiten reconstruir no sólo todas las funciones algebraicas, sino cualquier curva, aunque no necesariamente estas se correspondan con una función conocida.

El esquema de la Figura 1, es sólo una manera de sintetizar el MPR, no es el MPR. Aquí se resumen las posibles OM que sería posible encontrar. Para arribar a dicha síntesis, ha sido necesario analizar las posibles respuestas a la pregunta Q_0, las técnicas matemáticas necesarias para dar respuesta a cada pregunta, el alcance de las mismas, las posibles alternativas para su estudio, así como las posibles OM que potencialmente podrían estudiarse a partir de la pregunta generatriz. Todo este trabajo se corresponde con el desarrollo del MPR y que conduce a un análisis praxeológico y didáctico, ya que se piensa en el funcionamiento del REI en las clases de Matemática de la Escuela Secundaria.

Como se muestra en el esquema, gran parte de las OM indicadas, corresponden al programa de estudio de la escuela secundaria. Es decir que a partir de un diseño como el que se propone, es posible por un lado “cubrir” todo el bloque de Funciones, y a la vez vincular este con los bloques de Números y Geometría. Esto justifica además la *razón de ser* de las OM que se estudian, pues todas las funciones algebraicas pueden generarse a partir de operaciones con curvas antes conocidas por los estudiantes, realizando operaciones con las mismas.

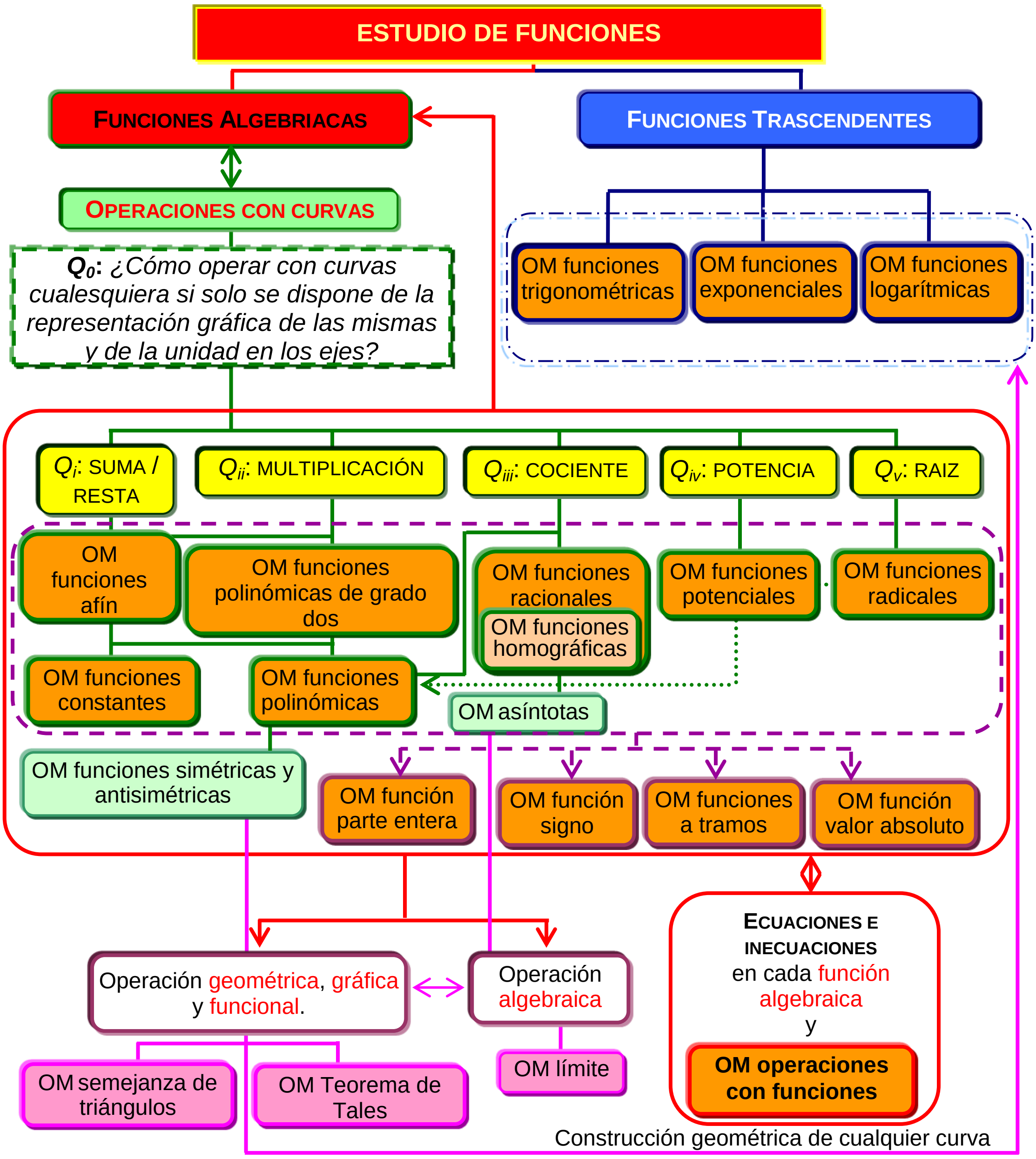


Figura 1: Descripción de las posibles OM a reconstruir a partir de la pregunta generatriz propuesta en el REI.

En el esquema están representadas todas las funciones algebraicas que sería posible estudiar a partir de Q_0, dependiendo de la operación que se proponga realizar entre las curvas que se eligen, así como las demás OM de los bloques de Números y Geometría que igualmente podrían estudiarse como parte del REI.

Se observan posibles recorridos de estudio como respuesta a Q_0, por ejemplo:

- Q_i: ¿Cómo sumar y restar curvas si solamente se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?

- Si se suman y restan rectas es posible reconstruir la OM de las funciones polinómicas de primer grado.
- Por ejemplo, la resta de dos rectas paralelas permite también ingresar en el estudio de la OM de las funciones constantes.

- Q_{ii}: ¿Cómo multiplicar curvas, cuando solamente se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?
  - Si las curvas son dos funciones afín, es posible reconstruir la OM de las funciones polinómicas de segundo grado.
  - La multiplicación de más de dos rectas, o rectas y parábolas, o parábolas permite estudiar la OM de las funciones polinómicas.
- Q_{iii}: ¿Cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas cuando sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes? permite estudiar la OM de las funciones racionales, y como consecuencia, la OM de las asíntotas y la OM del límite.
- Para el caso particular del cociente entre dos funciones afín es posible reconstruir la OM de las funciones homográficas.
- Q_{iv}: ¿Cómo obtener la potencia o raíz de una curva cuando solamente se conoce la representación gráfica y la unidad en los ejes? A partir de esta pregunta derivada es posible reconstruir la OM de las funciones potenciales y las radicales.
- … pueden generarse otras cuestiones derivadas, tantas como curvas y operaciones se propongan aunque la curva no sea una función conocida por ellos.

Además de las OM relativas a cada tipo de función pueden agregarse otras que incluyen por ejemplo, a las ecuaciones respectivas, a las operaciones algebraicas entre las funciones y a un tratamiento que podría comprender un nivel de algebrización que distingue variables de parámetros. También puede reencontrase la OM de las funciones trascendentes; que si bien no se constituye como resultado de efectuar operaciones con curvas; en el marco del REI las mismas pueden ser objeto de construcción a partir de una adaptación de las técnicas generadas como consecuencia de estudiar las distintas OM de las funciones algebraicas a otros casos.

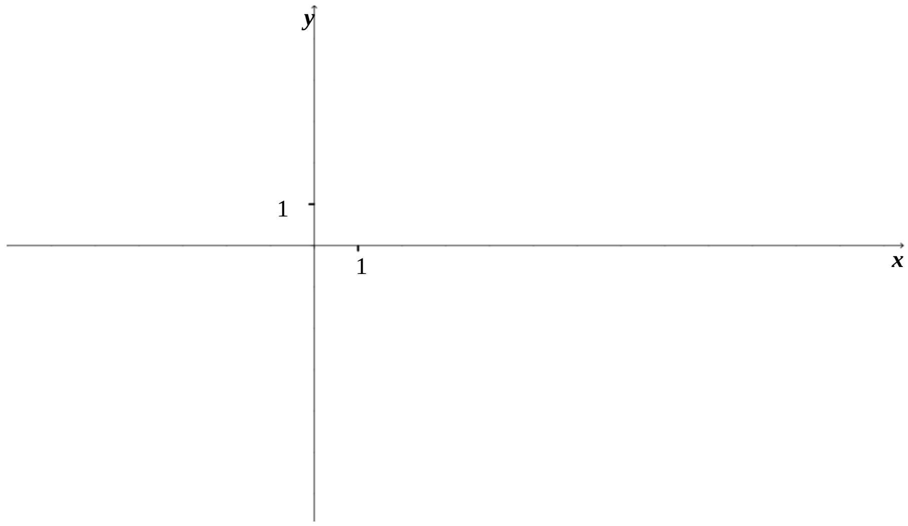
El MPR inicial, no necesariamente coincide con el que efectivamente los estudiantes pueden desarrollar en el aula. Igualmente consideramos que es necesario concebir previamente el conjunto de respuestas posibles a la pregunta generatriz, aunque además de estas surjan otras, tal vez ni siquiera consideradas antes y que se incorporan luego al modelo.

Para conocer el funcionamiento del REI, es necesario que el profesor lleve la pregunta Q_0 al aula y en este caso, en función de las operaciones que proponen los estudiantes y curvas, se decide el recorrido a seguir.

EL REI

El REI se introduce en el aula a partir de la pregunta generatriz que es proporcionada por el profesor. Los estudiantes conocen ahí la pregunta generatriz, y en función de ello pueden inicialmente proponer curvas que conocen o quisieran conocer y operaciones posibles entre las mismas:

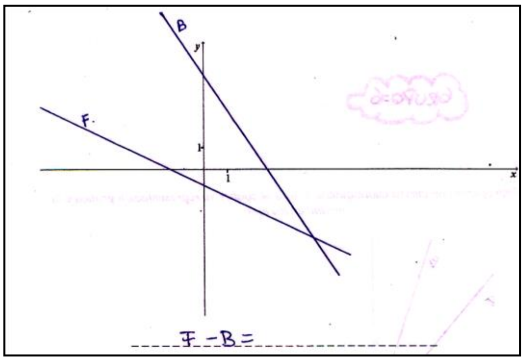
¿Cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?

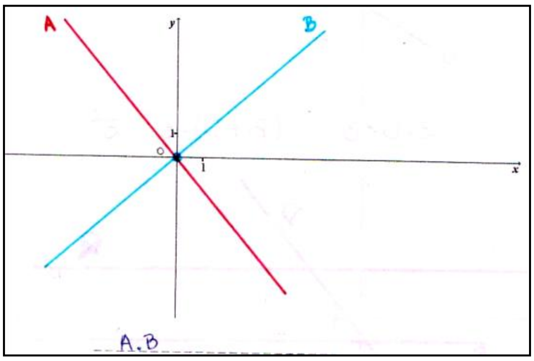


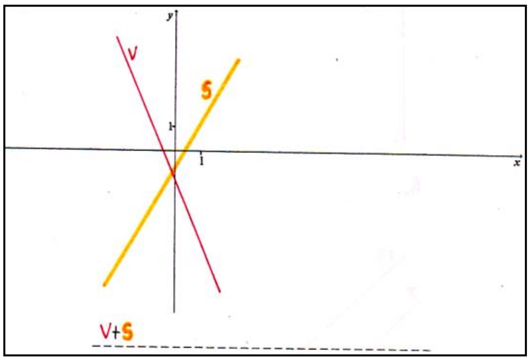
_ _

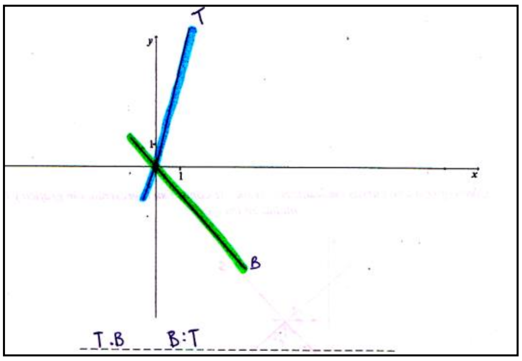
¿Por qué eligen dichas curvas? Justificar

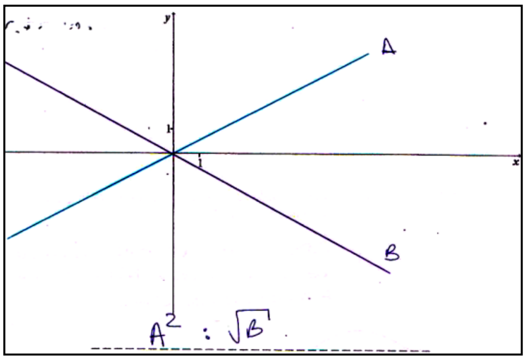
En las implementaciones realizadas, cada estudiante dispone inicialmente de una representación como la anterior, y deben indicar qué curvas y operaciones proponen para desarrollar el estudio. Como era de esperar, los estudiantes responden realizando operaciones entre dos o más rectas (Llanos, Otero, 2013b). La elección de las curvas y las operaciones están relacionadas principalmente con conocimientos anteriores, a partir de los cuales pueden comenzar a reconstruir respuestas a la pregunta generatriz. Proponen sumar, restar, multiplicar o dividir rectas, y también operaciones combinadas entre las mismas. Aparece el problema de elevar al cuadrado o la raíz cuadrada de una recta sólo en algunos casos.

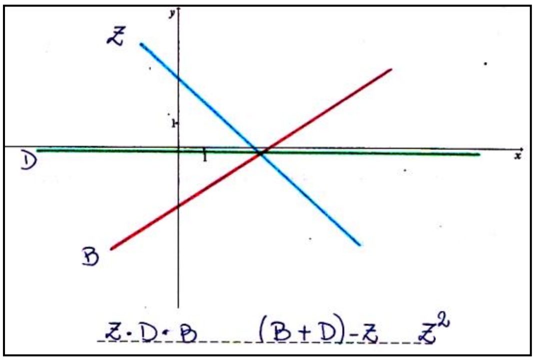




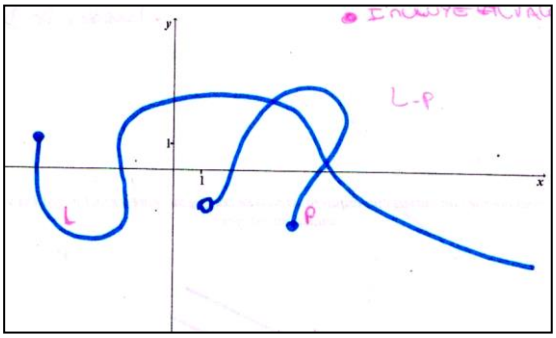


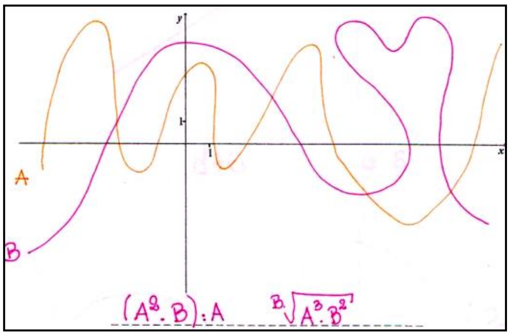


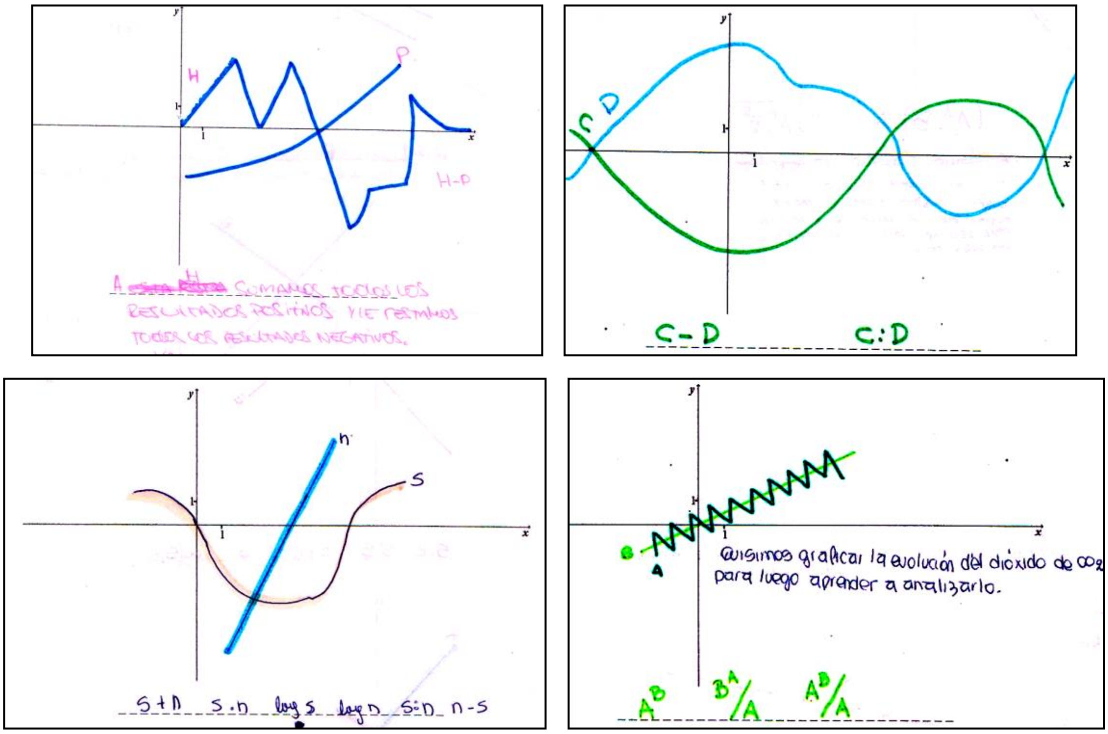




Sólo algunos, además de las rectas proponen otras curvas que no se corresponden con funciones del programa, ni curvas conocidas por ellos, como se muestra en las figuras:







Justifican la elección de estas curvas, por necesidad de estudiar cosas que no son rectas (Ibíd.), o como en la última representación que proponen curvas que les permiten interpretar el comportamiento del dióxido de carbono que están estudiando en otra asignatura. Si efectivamente en un REI hay que seguir todos los recorridos que surgen a partir de las respuestas que dan los estudiantes, habría que proponer en este caso, además de todas las operaciones con las rectas y las demás curvas, un REI bidisciplinar que permita no sólo construir al interior de la matemática la curva que resulta de realizar las operaciones que indican los estudiantes entre las mismas, sino también estudiar otra disciplina que permita analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica resultante, construida al interior de la matemática. Pero como es imposible seguir todas las respuestas posibles, el recorrido de estudio estará determinado por la mayoría de las respuestas, y por las adaptaciones necesarias que sufren estos dispositivos para que puedan ser implementados en cursos de la Escuela Secundaria. Como puede interpretarse, las curvas disponibles son las rectas, y las operaciones principalmente suma, resta, multiplicación y división, y sólo en algunos casos, potencia y raíz cuadrada de una curva.

De acuerdo con las respuestas iniciales a la pregunta generatriz, si se quisieran abordar todos los caminos posibles sería necesario reconstruir:

- la OM de las funciones constantes, para los alumnos que proponen la resta de rectas paralelas;

- la OM de las funciones lineales o polinómicas de primer grado, para los casos de sumas y restas entre las rectas;
- la OM de las funciones cuadráticas o polinómicas de segundo grado, para los casos de los estudiantes que proponen multiplicar dos rectas;
- la OM de las funciones polinómicas de grado mayor a dos, para la multiplicación de más de dos rectas;
- la OM de las funciones racionales, para los casos que proponen el cociente entre las rectas (y también entre otras funciones polinómicas);
- la OM de las funciones potenciales y las radicales, como resultado del problema de elevar a una potencia o realizar la raíz cuadrada de una curva;
- las operaciones entre cualquier curva, independientemente si se trata de una función conocida por ellos o una representación cualquiera que se les ocurre proponer.

Las respuestas posibles consideradas en un análisis a priori para el caso de la multiplicación de dos rectas; la multiplicación de más de dos rectas o rectas y parábolas o entre parábolas; y el cociente entre las funciones polinómicas están contempladas entre las posibles curvas y operaciones proporcionadas por los estudiantes. El profesor-investigador toma la decisión del recorrido a seguir; atendiendo principalmente a la inicialización más disponible de los estudiantes que son las rectas; y también a la “compatibilidad” entre el recorrido que es posible realizar y las OM que corresponden reconstruir en la institución donde se decide insertar el REI. Introducir un REI en la escuela secundaria, implica aceptar que inevitablemente hay restricciones que acaban definiendo “la vida” de los conocimientos posibles de construir.

En este caso, para analizar el funcionamiento de los REI en la escuela secundaria, se realizaron implementaciones de los diseños que se presentan aquí, y los cursos seleccionados corresponden a 4^{to} y 5^{to} año de la escuela secundaria. Las curvas que los estudiantes proponen, que principalmente son rectas, se corresponden con los conocimientos que ellos disponen. Por ello se comienza por las operaciones entre rectas. En particular, se comienza por la multiplicación de dos rectas, cuyo estudio permite reconstruir la OM de las funciones polinómicas de segundo grado, aspecto central del programa de 4^{to} Año de la Escuela Secundaria. Las demás posibilidades, la multiplicación de más de dos rectas o el cociente entre las mismas que también es propuesto por los estudiantes como respuesta a Q_0 pueden estudiarse más adelante, y se propone hacerlo en 5^{to} como parte del estudio longitudinal.

Por lo tanto, los recorridos propuestos por el grupo de estudio, acotaron el problema de las operaciones con curvas a:

- *Q_1: ¿Cómo multiplicar dos funciones afín, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*
- *Q_2: ¿Cómo multiplicar más de dos rectas o rectas y parábolas o parábolas, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* y
- *Q_3: ¿Cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas, si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*

Dichas generalizaciones sólo se han presentado para las características de la representación gráfica de la multiplicación o cociente entre distintas curvas y lo mismo ocurre para las representaciones analíticas. Las OM que es posible reconstruir forman parte de la propuesta de los programas de estudio. Los recorridos posibles mencionados antes como emergentes del REI, pueden sintetizarse en el esquema de la Figura 2, partiendo siempre del "germen" de la investigación que en este caso ha sido la pregunta generatriz Q_0 y las preguntas derivadas $(Q_i)_{1 \leq i \leq n}$, algunas de las cuales ya han sido objeto de diseño y análisis de este trabajo, como ocurre con Q_1, Q_2 y Q_3 que son diseñadas, implementadas, analizadas y evaluadas en el marco de un estudio longitudinal que dura dos años con los mismos estudiantes.

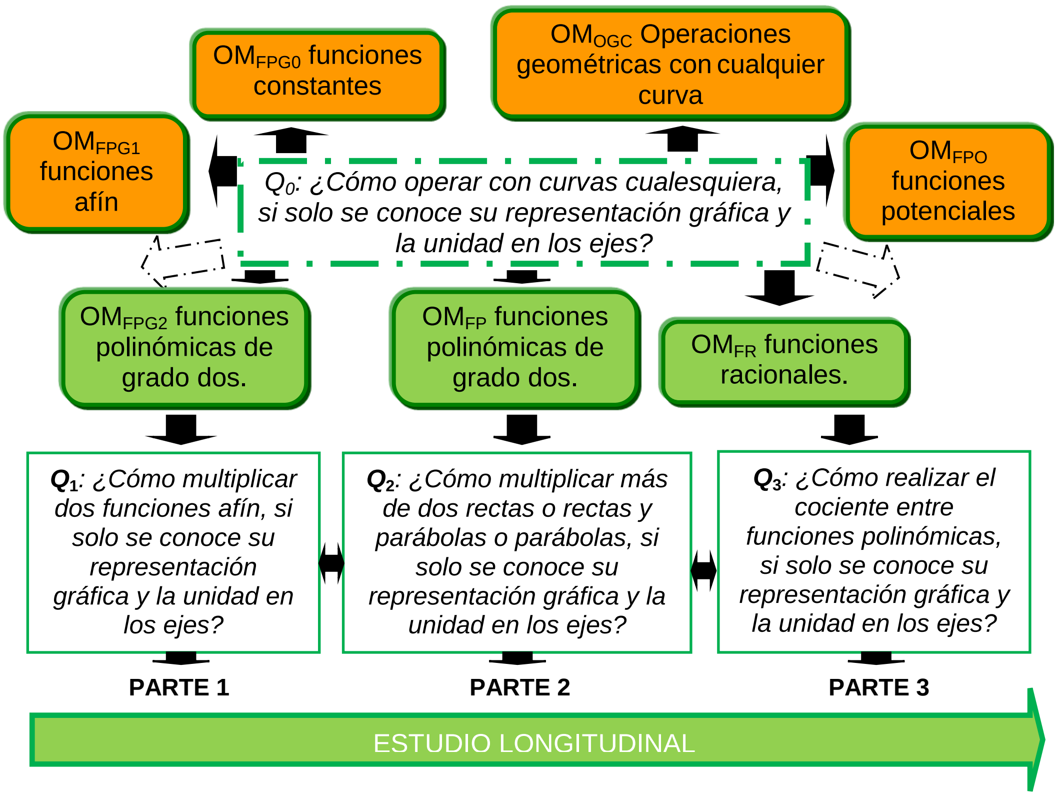


Figura 2: Posibles recorridos de investigación, desarrollados en el marco del REI.

La OM de las funciones polinómicas de grado dos, la OM de las funciones polinómicas y la OM de las funciones racionales, son reencontradas en ese orden en tres grandes partes (Parte 1 (P_1), Parte 2 (P_2) y Parte 3 (P_3)) del REI. Esta es una entre varias posibilidades del recorrido propuesto. En las secciones que siguen se describe cada Parte del recorrido, así como los diseños desarrollados por los investigadores considerando el alcance de cada parte del estudio longitudinal con los mismos estudiantes.

PARTE 1

EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO EN LA ESCUELA SECUNDARIA

En la primera parte del REI, el problema se reduce al estudio de Q_1: ¿Cómo multiplicar dos funciones afín, si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes? Las variantes en este problema se dan en las diferentes rectas que se multiplican y el estudio permite reconstruir diferentes características de las funciones polinómicas de grado dos, en diferentes marcos de resolución (Douady, 1984). Inicialmente esta pregunta tiene solución en los marcos geométrico, gráfico y funcional; y esto ocurre porque solamente se conoce la representación gráfica de las rectas y la unidad en los ejes. Para ello, es necesario identificar los signos y algunos puntos que pueden ser obtenidos por la información que se proporciona desde la situación, y también, justificar la simetría de esta curva y la ubicación del mínimo o máximo en el punto medio del segmento que une los ceros. También se pueden analizar en el marco geométrico los casos de raíces de orden par e impar.

Luego se introduce un problema en apariencia similar, pero dado en otro marco (Ibíd.), lo que produce el estudio de las representaciones analíticas de las funciones polinómicas de segundo grado, comenzando por una expresión factorizada. Se pueden reinterpretar los ceros, sus propiedades, la multiplicidad de las raíces, el máximo o mínimo y los signos de las funciones polinómicas. En el marco analítico se considera el caso de las raíces imaginarias reingresando en el marco geométrico, cuando se analiza cómo la traslación de vector $\vec{v}$ de una cierta gráfica puede generar otras. Este método es generalizable a otras funciones polinómicas de grado mayor a dos.

El esquema de la Figura 3, sintetiza el recorrido que parte de la multiplicación de las rectas. Puede analizarse aquí cómo se retoman las cuestiones y los conceptos construidos, al mismo tiempo que permite interpretar cómo se relacionan los conceptos que se van construyendo en el trayecto que se origina a partir de la pregunta Q_1 y las que de esta se derivan. Todo el recorrido se desarrolla a partir de un conjunto de situaciones que involucran posibles cuestiones que derivan de Q_1, y que son las que permiten la razón de ser de todo el proceso de estudio.

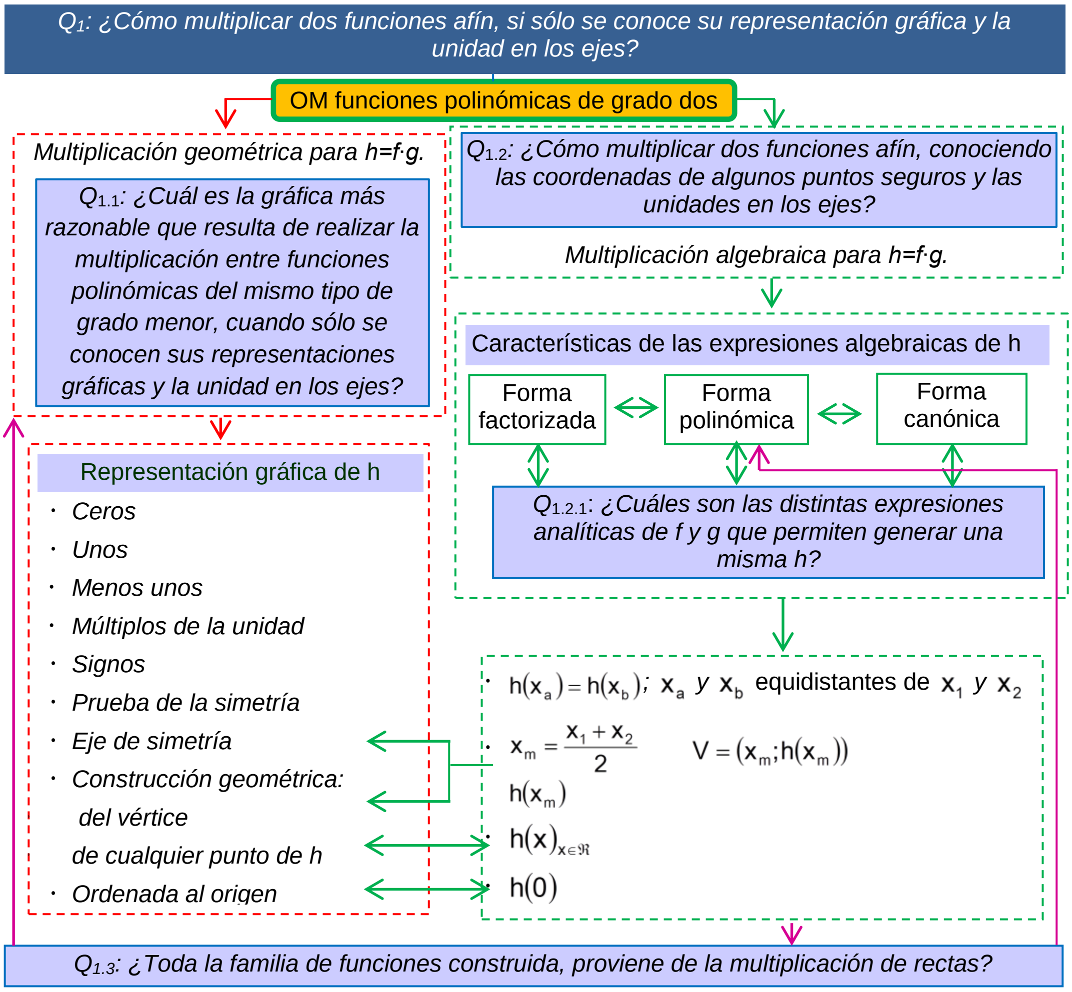


Figura 3: Descripción del estudio de Q_1.

En el diseño propuesto por Llanos y Otero (2012, 2013a) el REI contiene diez situaciones, actividades de síntesis (algunas a cargo de los alumnos, otras del profesor), tres instancias de familiarización correspondientes a las tareas, y la evaluación escolares que corresponde a una "exigencia" por parte de la institución. A partir de las tres primeras situaciones, los estudiantes pueden construir todas las características de la representación gráfica de la multiplicación de dos rectas y las demás, a partir de la situación 4, permiten construir las diferentes representaciones analíticas para las funciones polinómicas de segundo grado, siempre retomando al marco geométrico y analizando las características de la representación gráfica de la función desde otro marco.

Las **situaciones 1 a 3** se basan en una ingeniería propuesta por Régine Douady (1999) para estudiar los signos de las funciones polinómicas. La adaptación de dicha ingeniería realizada por Llanos y Otero (2013a) permite ir más lejos, pues los signos corresponden a una información más entre las características que hay que construir.

Desde las primeras situaciones se obtiene por construcción la curva *h*, una parábola, que resulta de la multiplicación geométrica de las rectas *f* y *g*, y el análisis de los signos es una información más entre las características de *h*. A partir de estas situaciones los estudiantes pueden construir los puntos notables y características de la representación gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado.

Las diferencias entre las situaciones 1 a 3, se dan en los distintos pares de rectas que se multiplican. En la situación 1 se trata de la multiplicación de dos rectas con ceros reales distintos, y con pendientes opuestas. En la situación 2, las rectas tienen también ceros distintos, pero las pendientes tienen igual signo. Con la situación 3, se introduce el problema de la multiplicidad de los ceros, porque las rectas intersecan al eje *x* en un mismo punto. Las diferencias entre las mismas permiten construir las características de la representación gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado con dos ceros reales distintos, donde la función alcanza un máximo (situación 1) o un mínimo (situación 2), y los casos de las funciones polinómicas de segundo grado con un cero de multiplicidad dos, en la situación 3. Las situaciones que se proponen a los alumnos, con las respectivas preguntas derivadas de Q_1, se detallan a continuación.

SITUACIONES 1, 2 Y 3

Las funciones f y g están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C//D, son perpendiculares al eje x. La función h=f·g.

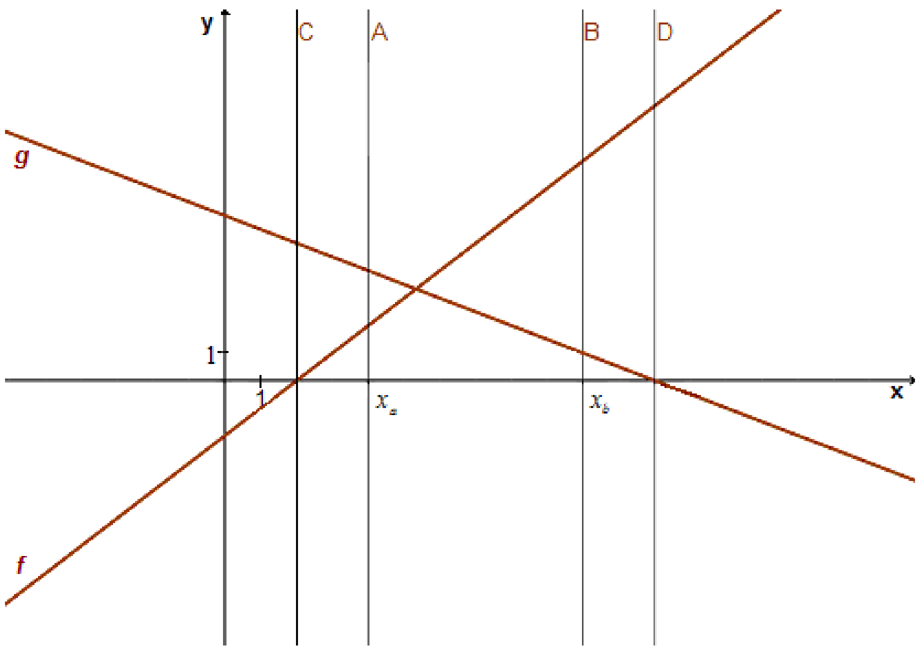


Figura 4: Gráficas correspondientes a las funciones *f y g* (Situación 1)

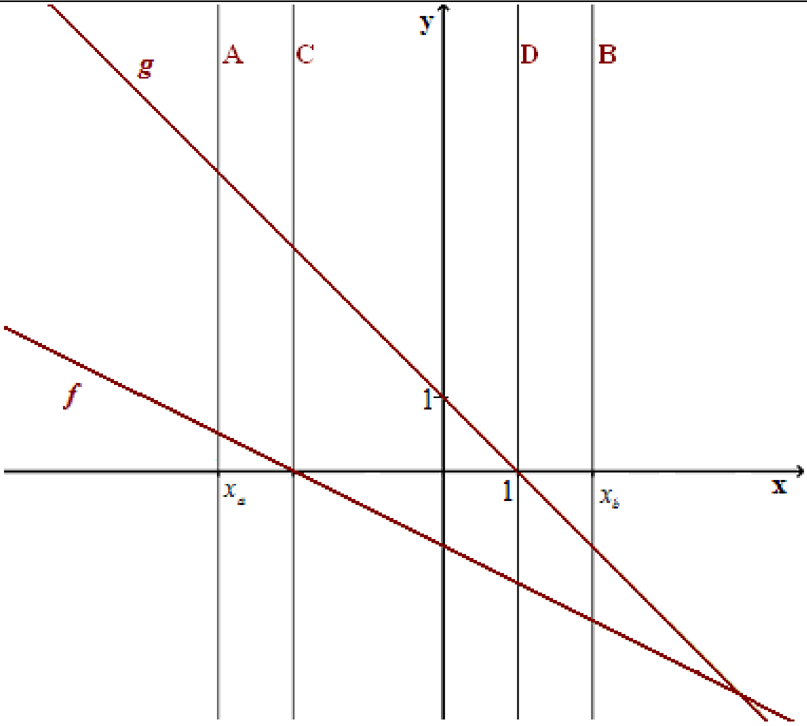


Figura 5: Gráficas correspondientes a las funciones *f y g* (Situación 2)

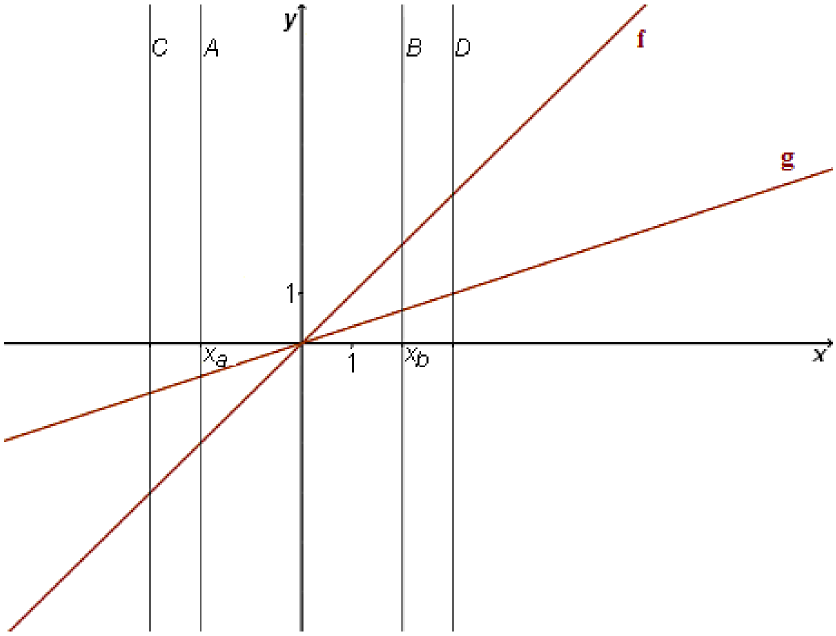


Figura 6: Gráficas correspondientes a las funciones *f y g* (Situación 3)

(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?

(b) Para todo x_a *y* x_b *equidistantes de los ceros de cada función,* $\overline{CA}=\overline{BD}$ *¿Es verdad que* $h(x_a)=h(x_b)$*? ¿Podrías justificar?*

(c) ¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?

Los resultados que se construyen en estas situaciones, son exclusivos de los marcos geométrico, gráfico y funcional, es decir, las principales características de la representación gráfica de *h* se obtienen por reconstrucción de técnicas de geometría sintética. En el diseño se proponen los pares de rectas dados en las Figuras, pero podrían considerarse igualmente otros. Como se indicó antes, esta selección obedece a una necesidad de “cubrir” los casos posibles, dados según las rectas que se elijan, pero podrían ser infinitas las posibilidades para su estudio. A partir del problema propuesto, es posible explicitar las técnicas que permiten construir los puntos notables y la respectiva representación gráfica. Consideramos que es muy importante antes de avanzar con las demás situaciones, describir y definir las características de las técnicas geométricas necesarias y análisis de los puntos notables, para comprender el potencial de este problema para comenzar a reconstruir las características de las funciones polinómicas de grado dos. En este caso se realizan para la situación 1, y se presenta la generalización para los demás casos.

La información dada en las situaciones (la representación gráfica de *f* y *g* y la unidad en los ejes) permite obtener en principio algunos puntos “seguros” y el análisis de los signos de *h*, a partir de los signos de *f* y *g*. Partiendo de que *h*=*f*·*g*, es posible identificar cuatro puntos (×): “los ceros y los unos”; y son seguros porque:

$$f(x_c) = 0 \Rightarrow h(x_c) = 0 \cdot g(x_c) = 0$$

$$g(x_d) = 0 \Rightarrow h(x_d) = f(x_d) \cdot 0 = 0$$

$$f(x_i) = 1 \Rightarrow h(x_i) = 1 \cdot g(x_i) = g(x_i)$$

$$g(x_j) = 1 \Rightarrow h(x_j) = f(x_j) \cdot 1 = f(x_j).$$

Además los signos de las funciones *f* y *g*, determinan los signos de *h*.

$$\forall x \in (-\infty; x_c) \;\; f < 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow h < 0$$

$$\forall x \in (x_c\,; x_d) \;\; f > 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow h > 0$$

$$\forall x \in (x_d; +\infty) \;\; f > 0 \text{ y } g < 0 \Rightarrow h < 0$$

En la Figura 7 se identifican los signos, ceros y unos. Es posible obtener otros puntos, pero resulta de fundamental importancia probar primero que $h(x_a) = h(x_b)$ siempre y cuando los puntos sobre el eje *x*, x_a y x_b equidistan de los ceros de *f* y *g* respectivamente; para obtener también por construcción los puntos simétricos a los antes mencionados.

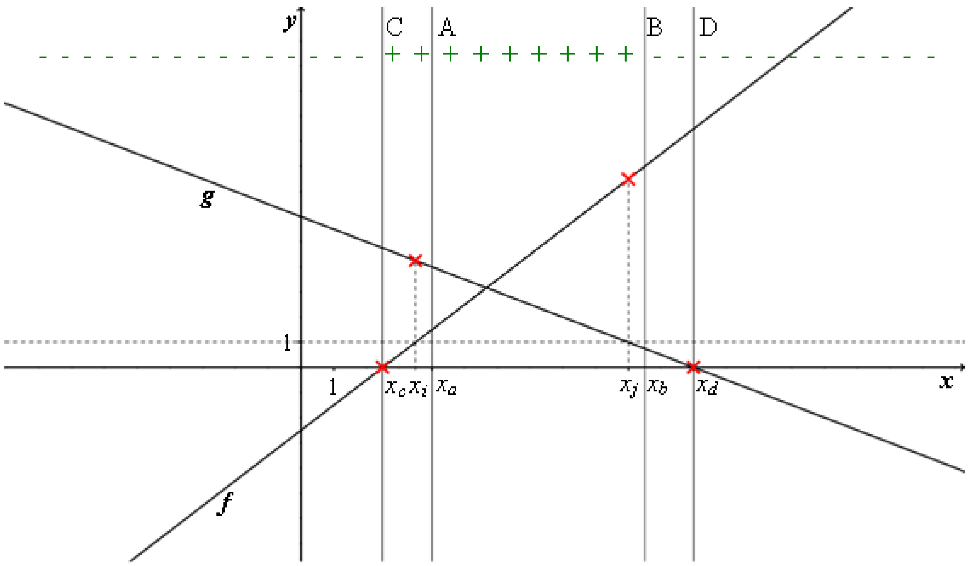


Figura 7: Identificación de cuatro puntos seguros y de los signos de *h.*

Para realizar la prueba por la simetría de la curva, es necesario construir triángulos semejantes utilizando a x_a y x_b, que son puntos que equidistan de los ceros de *h*, indicando en el enunciado que la prueba es válida para cualquier par de puntos equidistantes de x_c y x_d. Se nota: $f(x_a) = y_a$, $f(x_b) = y_b$, $g(x_a) = y'_a$, $g(x_b) = y'_b$; y se construyen dos pares de triángulos semejantes determinados por estos segmentos. En la Figura 8 se identifican los triángulos. Además como el enunciado indica $\overline{CA} = \overline{BD}$ y en este caso se nombra a esta longitud como *z* y la que es común a ambos triángulos *w*.

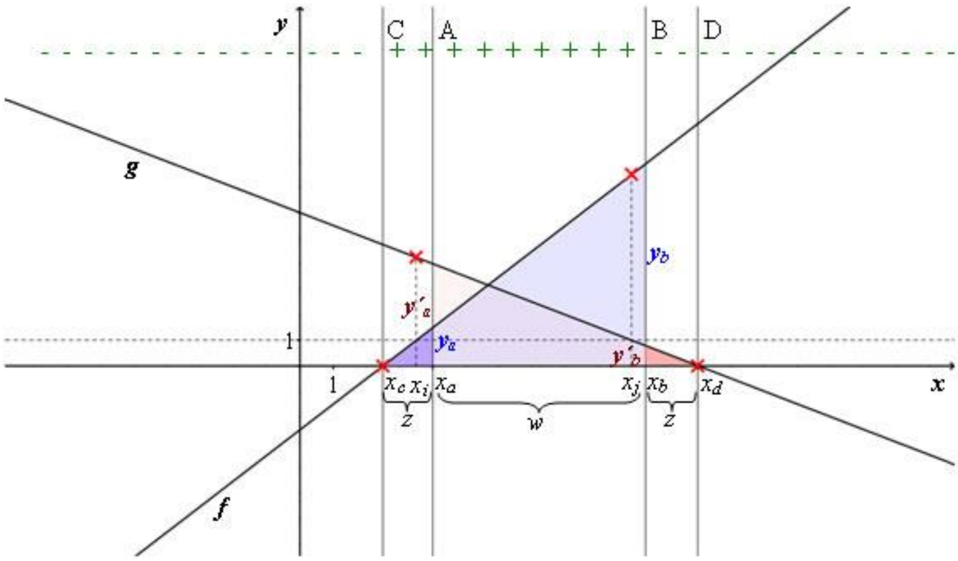


Figura 8: Identificación y ubicación de los triángulos semejantes sobre x_a y x_b

Por el teorema de Tales es posible plantear la proporción entre los lados de los triángulos semejantes:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Marrones}: \dfrac{y'_a}{y'_b} = \dfrac{w+z}{z} \\ \text{Azules}: \dfrac{y_b}{y_a} = \dfrac{w+z}{z}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y'_a}{y'_b} = \frac{y_b}{y_a} \Rightarrow y'_a \cdot y_a = y'_b \cdot y_b \Rightarrow g(x_a)\cdot f(x_a) = g(x_b)\cdot f(x_b)$$

$$\Rightarrow h(x_a) = h(x_b) \quad \forall x_a \text{ y } \forall x_b \text{ equidistantes de los ceros de } h.$$

h es simétrica, con respecto a un eje vertical que se encuentra en la mediatriz de los ceros de x_c y x_d respectivamente y se denomina “eje de simetría”. La prueba de la simetría de la curva permite además obtener otros puntos, los simétricos de $h(x_i)$ y $h(x_j)$ que ya se han identificado como puntos seguros. En la Figura 9 se agrega la construcción del eje de simetría y los puntos simétricos (**o**).

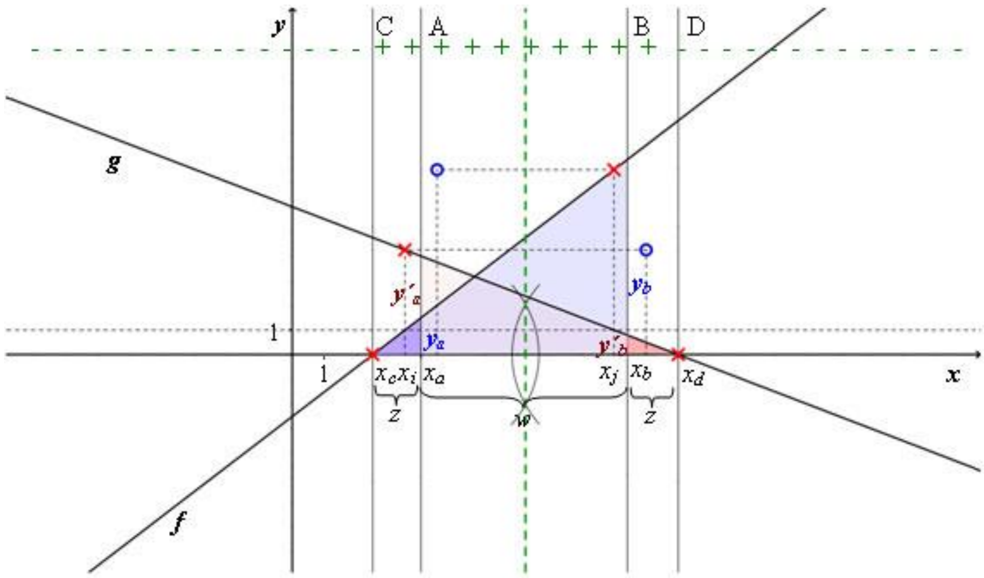


Figura 9*:* Representación del eje de simetría y de los puntos simétricos de x_i y x_j.

El razonamiento utilizado para la identificación de “los ceros y los unos”, descritos en la Figura 8, puede ser generalizado para determinar otros, a partir de los múltiplos de la unidad: “los menos unos, los dos”, etc.; y se identifican (♦) en la Figura 10. Por ejemplo, los menos unos y los dos quedan así justificados:

$$f(x_k) = -1 \Rightarrow h(x_k) = f(x_k)\cdot g(x_k) \Rightarrow h(x_k) = -1\cdot g(x_k) \Rightarrow h(x_k) = -g(x_k)$$

$$f(x_l) = 2 \Rightarrow h(x_l) = f(x_l)\cdot g(x_l) \Rightarrow h(x_l) = 2\cdot g(x_l)$$

Se agregan también los simétricos de estos puntos y lo mismo ocurre para la recta *g* en el punto x_p. Podrían marcarse otros: “los tres, los menos dos”, etc.

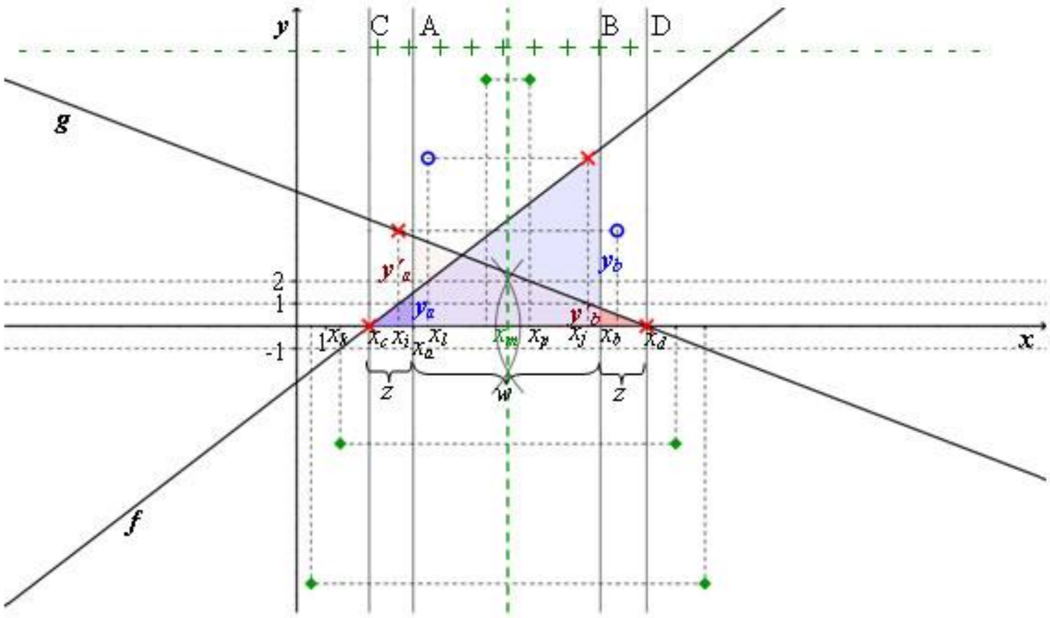


Figura 10: Representación de los múltiplos de la unidad.

El incremento de puntos seguros permite "mejorar" las características de la gráfica de *h*, pero esta técnica tiene algunas limitaciones importantes: solamente permite conocer los puntos que son múltiplos de la unidad, y no cualquier punto de *h*; tampoco permite conocer la intersección de *h* en el eje de simetría. Por más que se busquen puntos cada vez más próximos al eje de simetría con los múltiplos de la unidad, no es posible obtener por construcción el vértice de *h*. Este problema queda justificado por la construcción de triángulos semejantes en el eje de simetría, utilizando como datos la unidad en el eje *x*, problema que se propone resolver en el ítem c).

Para construir el vértice, se nombra: x_m al punto medio del segmento cuyos extremos son los ceros de las funciones *f* y *g*; $a = f(x_m)$ y $b = g(x_m)$, en consecuencia $h(x_m) = f(x_m) \cdot g(x_m) = a \cdot b$. En la Figura 11 se identifican los segmentos *a* y *b* respectivamente, y se presenta la construcción de los triángulos a partir de dichos segmentos y la unidad. Con los segmentos de longitud *a* y 1 se construye un triángulo, y para obtener otro semejante utilizando el segmento *b*, se traslada la longitud de dicho segmento al eje de abscisas, como se indica en la gráfica representada.

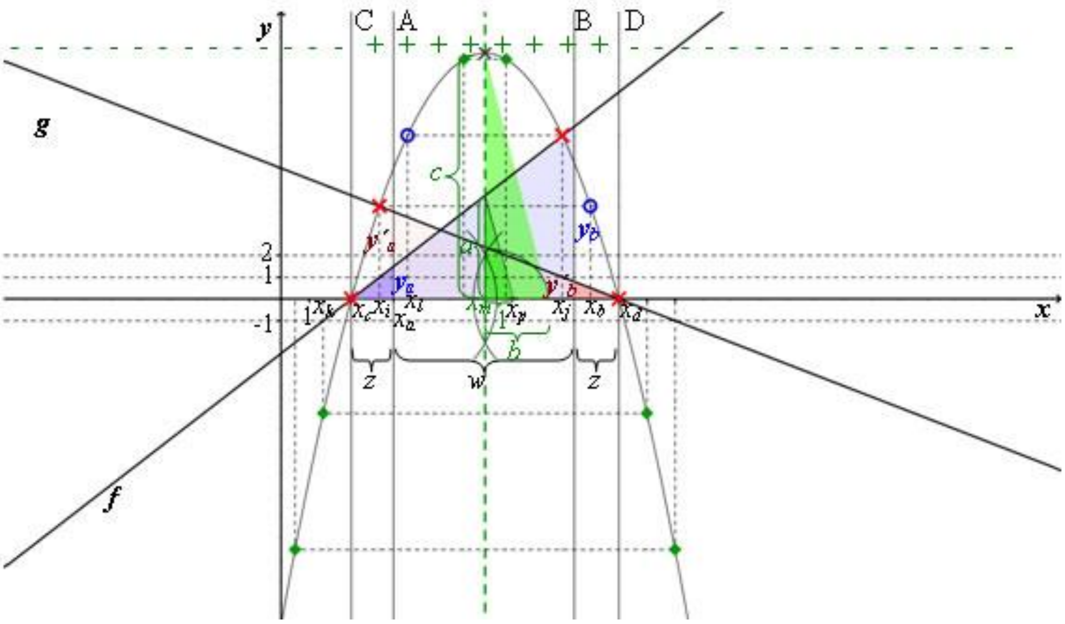


Figura 11: Construcción geométrica del vértice y representación gráfica de *h*.

Por construcción, los triángulos que se forman con *a*, *b* y la unidad son semejantes, y por lo tanto sus lados proporcionales: $\frac{c}{a} = \frac{b}{1} \Rightarrow c \cdot 1 = a \cdot b$. Así, *c* es el resultado de realizar la multiplicación entre los segmentos de *f* y *g* en el eje de simetría, punto que corresponde al vértice de la parábola

El problema de la multiplicación geométrica de las rectas requiere y permite validar cada punto notable de la parábola. Los ceros, la prueba por la simetría, el eje de simetría y el vértice son objeto de construcción. En la situación 1 detallada antes, se trata la multiplicación de rectas que tienen ceros distintos y pendientes con signos opuestos. La técnica para construir el vértice no es exclusiva de dicho punto. En este caso, la variedad de puntos notables considerada, hizo que no fuera necesario analizar otros casos, pero igualmente podría reproducirse en cualquier punto que se quiera obtener.

En la situación 2, correspondiente a la Figura 12, las rectas también tienen ceros distintos pero las pendientes no son opuestas. Si bien se trata de un problema similar, como cambian las rectas, también se modifican las características de la parábola. En la Figura está representado el análisis de los signos (representados con los signos en cada tramo de la curva), los ceros y unos (×); y algunos múltiplos de la unidad (♦). De manera análoga a la prueba realizada para la situación 1, la simetría es analizada, y se obtiene por una utilización adecuada de técnicas de geometría sintética, basada en la semejanza de triángulos y en el Teorema de Thales. Los puntos simétricos son construidos(**o**), así como el desarrollo para obtener el vértice de la parábola que sólo puede identificarse por construcción de triángulos semejantes, utilizando la unidad como referencia.

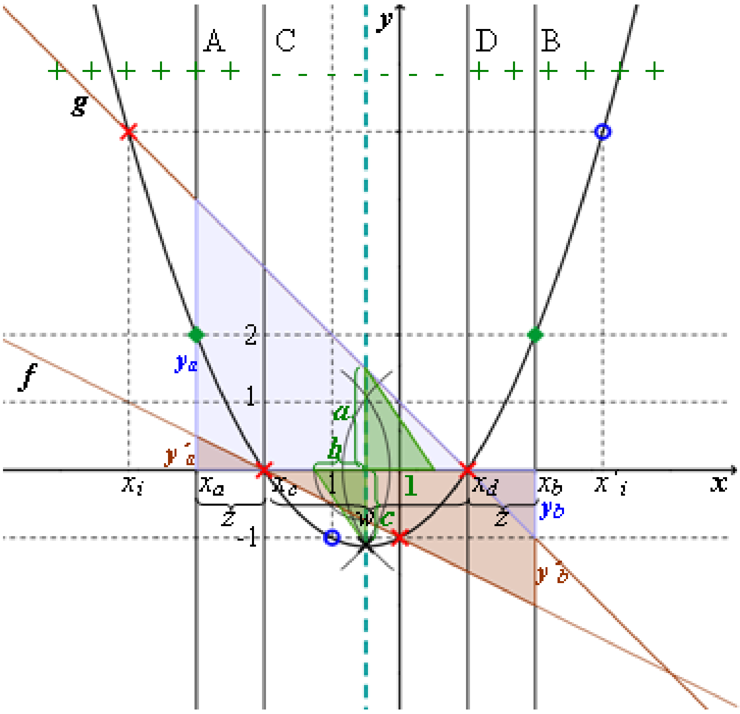


Figura 12: Representación cartesiana para *h* correspondiente a la situación 2.

Con la situación 3 de la Figura 13 se introduce el problema de la multiplicidad de los ceros. En esta situación *f* y *g* intersecan al eje *x* en el mismo punto y ambas pendientes son positivas. El análisis de los signos (representados con los signos en cada tramo de la curva) se realiza de manera similar; y se introduce aquí el problema de los ceros de multiplicidad 2. En la figura se idéntica el cero, los denominados por los estudiantes “unos” (**×**). De manera análoga se realiza la prueba por la simetría, y se obtiene por una utilización adecuada de técnicas de geometría sintética, basada en la semejanza de triángulos y en el Teorema de Thales.

En esta situación la técnica para construir el vértice no tiene sentido, pero si es muy importante analizar el potencial de la misma para construir cualquier punto de la curva, dado que los puntos notables no parecieran proporcionar información suficiente para construir una representación gráfica bien aproximada. En la Figura 13 están indicados los puntos que se obtienen de reproducir la técnica generada para el vértice, ahora en cualquier caso (**x**), así como los puntos simétricos (**o**).

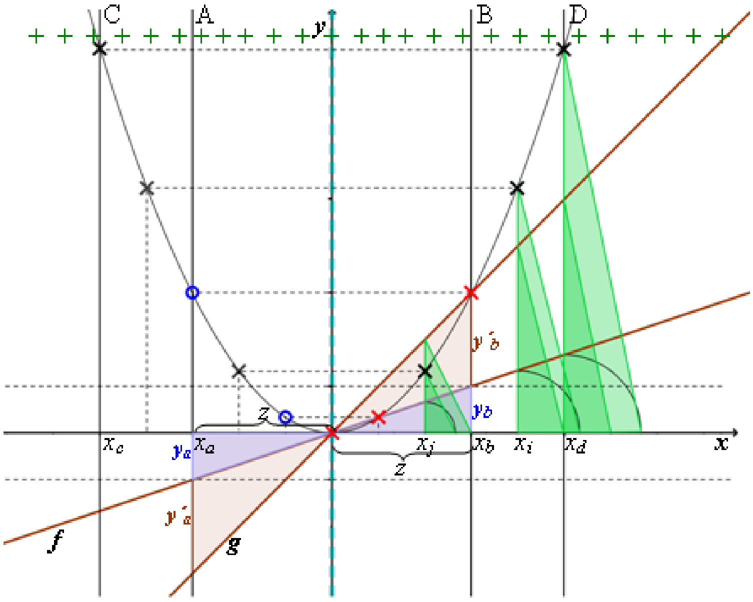


Figura 13: Representación cartesiana para *h* correspondiente a la situación 3.

Las representaciones correspondientes a las situaciones 2 y 3 permiten analizar las diferencias entre las distintas representaciones para *h* a las que se ha hecho referencia. La técnica construida para obtener el vértice de *h* en la situación 1, puede generalizarse y dicha generalización se presenta en la Figura 13. Los puntos x_j, x_i y x_d se obtienen por construcción, y también se pueden obtener otros pues en todos los casos se trata de la multiplicación de segmentos. La técnica construida permite no sólo mejorar las características para *h*, sino también construir cualquier otra curva. Se retoma en los casos donde se multiplican más de dos rectas, o rectas y parábolas o entre parábolas; como así también para el cociente entre polinomios, realizando una adaptación a la misma.

El análisis de las técnicas involucradas en las situaciones 1 a 3, permite dar cuenta de la importancia de las nociones de geometría sintética para construir las características destacadas de la representación gráfica de las funciones polinómicas de grado dos, así como el potencial para continuar generando curvas por adaptación de las mismas. Las **situaciones 4 y 5**, permitirían construir o reconstruir ahora las características de las representaciones analíticas equivalentes de las funciones polinómicas de grado dos. A partir de la **situación 4** se introduce un cambio a los marcos analítico, gráfico y funcional. Dicho cambio se realiza a partir de una situación en apariencia similar, dada en otro marco, el analítico, gráfico y funcional. Las respuestas a estas situaciones podrían estar relacionadas con la inicialización más disponible de los estudiantes, dado que estos inicialmente se resisten a utilizar técnicas de geometría sintética, e intentan agregar las unidades a los ejes para construir las características de las representaciones analíticas. En esta situación, los estudiantes podrán utilizar la información dada por las coordenadas de los puntos que corresponden a la intersección con el eje de las abscisas de f y g y también el punto de intersección entre las rectas. Por medio de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, o desde la representación gráfica, obtienen las expresiones de $f(x)=a_1x+a_0$ y $g(x)=a_1^{'}x+a_0^{'}$, y por lo tanto de $h(x)=(a_1x+a_0)\cdot(a_1x+a_0)$.

Las preguntas que se introducen con la situación 4, se detallan a continuación:

SITUACIÓN 4

Las gráficas de las funciones f y g se cortan en (3;2)*. La función f interseca al eje x en* (-1;0) *y g en* (5;0)*. Sea* $h=f\cdot g \ \ \forall x\in\Re$

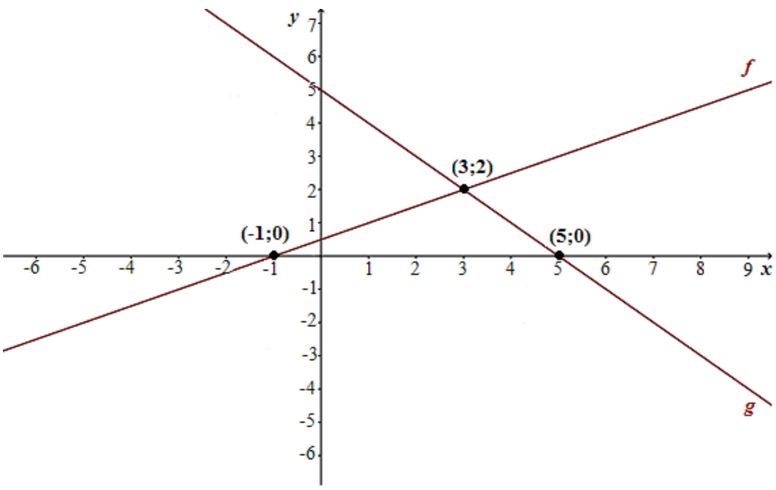


Figura 14: *Representación gráfica de las funciones f y g.*

a) *Obtengan todas las representaciones cartesianas y fórmulas posibles para h.*

b) *Si* x_a *y* x_b *son dos abscisas cualesquiera ubicadas a igual distancia respecto de cada cero de h, es* $h(x_a)=h(x_b)$ *como hemos demostrado en las situaciones anteriores. Verifiquen con la fórmula que han obtenido para h, al menos 3 casos y representen los valores gráficamente. Ejemplo: h(*1.9*)=h(*2.1*).*

c) *¿Cuál es el valor de h para la abscisa de la mediatriz?*

d) $f(3)=g(3)=2$ *¿Cuál es el valor de* $h(3)$*? ¿Cuál es su simétrico? Justificar.*

Por tratarse de la multiplicación de dos rectas, primero se obtiene la forma factorizada y luego la polinómica. Con relación al diseño, las rectas f y g que se proponen coinciden con las de la situación 1, con el objetivo de analizar como los conceptos que se pueden construir en un marco, son recuperados en otro (Douady, 1984). Con esta situación se "rompería" además con la creencia de los estudiantes acerca de que *"toda representación gráfica tiene asociada una única fórmula".*

Con la **situación 5** se espera que los estudiantes comprendan que una misma función *h* puede provenir de la multiplicación de diferentes pares de rectas. Sería posible analizar aquí las características de la expresión general de la forma factorizada de las funciones polinómicas de grado dos, dada por h_3; y el "paso" de una expresión dada en la forma factorizada a la forma polinómica. En esta situación se proponen tres expresiones algebraicas equivalentes para *h* (h_1, h_2 y h_3). Se espera que identifiquen que se trata de la misma expresión algebraica en la forma polinómica, y que la representación gráfica también es la misma en todos los casos, es decir, es la misma función que tiene asociadas diferentes formas para su representación analítica, todas equivalentes. A partir de las expresiones algebraicas dadas y la forma polinómica que podrían obtener, se solicita verificar los puntos seguros y las características de la gráfica de *h*.

SITUACIÓN 5

Las funciones h_1, h_2 *y* h_3*; de dominio* $\Re$ *están dadas por:*

$$h_1(x) = (2x+4)\cdot(x-4) \qquad h_2(x) = (x+2)(2x-8) \qquad h_3(x) = 2\cdot(x+2)\cdot(x-4)$$

a) ¿Cuáles son los ceros de h_1, h_2 *y* h_3 *respectivamente?*

b) ¿Cuánto vale la imagen de la abscisa del eje de simetría $h(x_m)$ *para cada h?*

c) Representar gráficamente las funciones h_1, h_2 *y* h_3.

d) ¿Cuáles son las expresiones algebraicas de las rectas que dieron origen a la curva de h(x), en cada uno de los casos propuestos?

En esta situación los estudiantes podrían construir la representación en la forma polinómica de dichas funciones que es la misma: $h(x)=2x^2-4x-16$, o bien podrían representar las rectas y obtener la gráfica de *h*, como se muestra en la Figura 15. También podrían utilizar las rectas para obtener algunos "puntos seguros", así como las representaciones analíticas equivalentes de *h*. De esta forma, sería posible definir de manera relativamente natural la expresión en la forma factorizada y polinómica de las funciones polinómicas de grado dos.

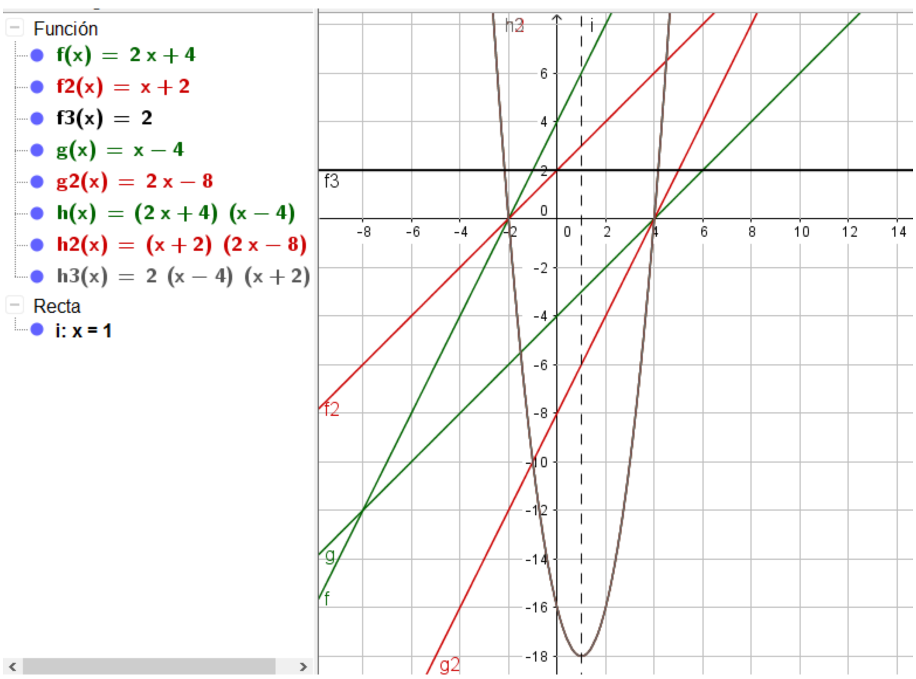


Figura 15: Representación gráfica de *h* y de las posibles rectas dadas en las fórmulas.

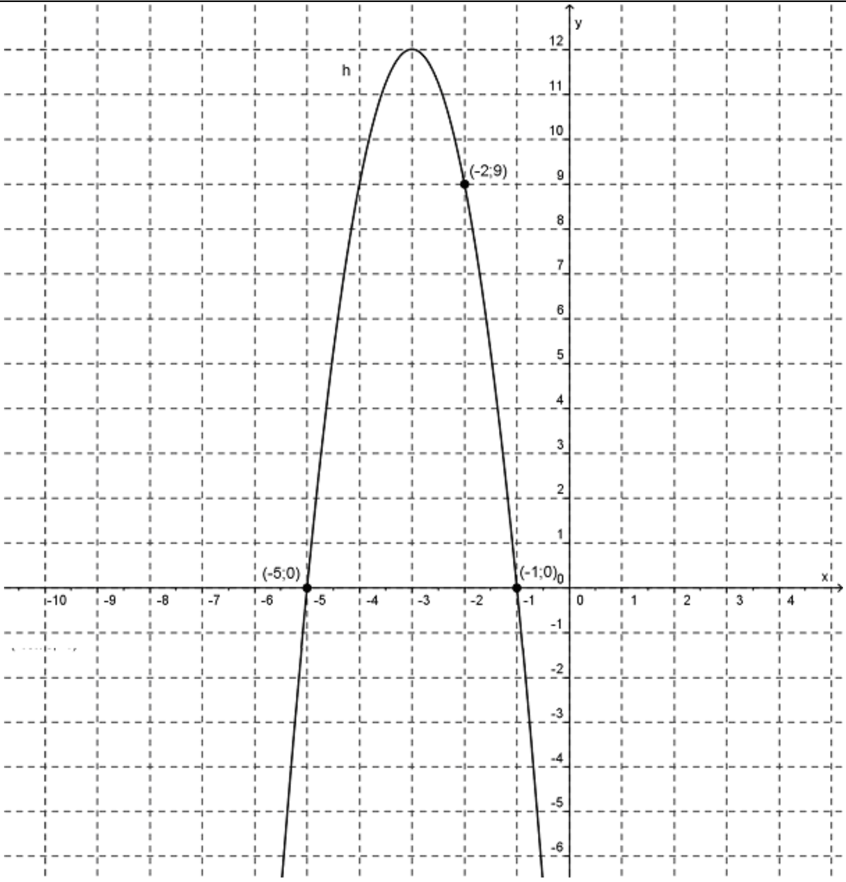
Lo mismo ocurre con la **situación 6**, en la que se espera que los estudiantes identifiquen los parámetros de las funciones polinómicas en su forma factorizada, y se enfatiza en el pasaje de la forma factorizada a la polinómica, que es uno de los objetivos de estas situaciones. Aquí se introduce una tarea inversa a las anteriores, dado que ahora se conoce la representación gráfica de la parábola y se buscan identificar las rectas que dieron origen a la misma.

Situación 6

1. *La función h, definida h:* $\Re \rightarrow \left(-\infty;12\right]$*; tiene dos ceros en* $x=-1$ *y* $x=-5$ *respectivamente y h*(-2)=9

   a) Obtengan las fórmulas posibles para h.

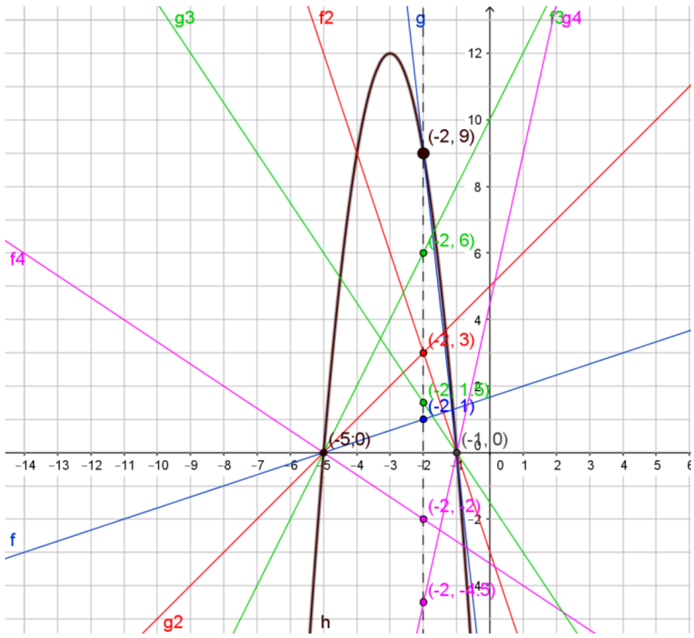
   b) ¿Cuáles son las distintas expresiones algebraicas de las rectas f y g, que podrían dar origen a la curva de h(x)? Representarlas cartesianamente.



2. *Utilizando el software GeoGebra y a partir de los archivos que se encuentran en la carpeta "Matemática 4" ubicada en el escritorio de cada netbook, analizar otras posibles rectas que podrían dar origen a h y los resultados que desde el software pueden obtener.*

Con esta situación sería posible construir dos ideas: por un lado, la idea de que infinitos pares de rectas pueden generar una misma representación gráfica de *h*; y por otro, la idea de que toda parábola proviene de la multiplicación de rectas (aunque esta idea es desestimada más delante). En esta situación se decide introducir la identificación de un punto correspondiente a la función polinómica de segundo grado representada gráficamente, y los ceros de la misma. A partir de esa información, los estudiantes tienen que construir todas las representaciones analíticas posibles para la gráfica de *h* dada. Estas representaciones pueden obtenerlas a partir de la expresión analítica de *h* en la forma factorizada, polinómica o a partir de la generación de rectas posibles que multiplicadas permitan construir la misma *h*.

El camino más simple, o bien la inicialización más disponible para los estudiantes por el dominio de las técnicas algebraicas que tienen, sería obtener la representación analítica de *h* en la forma factorizada, a partir de la información dada. Esto es: $h(x)=a_2\cdot(x+1)\cdot(x+5)$. Como $h(-2)=9$ se obtiene: $9=a_2\cdot(-2+1)\cdot(-2+5)$, es decir que $a_2=-3$. Por lo tanto $h(x)=-3\cdot(x+1)\cdot(x+5)$. Sería posible que retomen el problema de las rectas, y analicen tomando como información el punto dado $h(-2)=9$ y los ceros, para obtener representaciones equivalentes de *h*, como se muestra en la Figura 16.



$h(-2)=9$
$h(-2)=f(-2)\cdot g(-2)$

Entonces:
Si $f(-2)=1$ y $g(-2)=9$
$h(-2)=f(-2)\cdot g(-2)=1\cdot 9=9$

Si $f_2(-2)=3$ y $g_2(-2)=3$
$h(-2)=f_2(-2)\cdot g_2(-2)=3\cdot 3=9$

Si $f_3(-2)=6$ y $g_3(-2)=1{,}5$
$h(-2)=f_3(-2)\cdot g_3(-2)=6\cdot 1{,}5=9$

Si $f_4(-2)=-2$ y $g_4(-2)=-4{,}5$
$h(-2)=f_4(-2)\cdot g_4(-2)=-2\cdot(-4{,}5)=9$

Figura 16: Representación gráfica de *h* y de las posibles rectas que originan la curva.

Una vez obtenidas las representaciones analíticas equivalentes, y rectas posibles para *h*, se propone introducir el software GeoGebra como una herramienta “ágil” que permite construir una variedad de rectas posibles para la función representada gráficamente, como se ha hecho para ejemplificar en la gráfica anterior. El uso del GeoGebra no sólo permitiría obtener una cantidad de rectas posibles, de manera relativamente sencilla, sino también reconstruir la conjetura: *“infinitos pares de rectas pueden generar una misma representación gráfica de h e infinitas representaciones analíticas posibles*”, aunque más adelante sea refutada.

Con las situaciones 4 a 6 es posible recuperar las características de *h* construidas en el marco geométrico, ahora en el analítico; y retomar el problema inicial que justifica la génesis de las parábolas que provienen de la multiplicación de rectas, es decir, que son el resultado de realizar la multiplicación gráfica o analítica entre dos funciones del mismo tipo de grado menor. Hasta aquí las situaciones permitirían reconstruir las características de las representaciones analíticas de las funciones polinómicas de segundo grado en las formas factorizada y polinómica, además de los puntos notables y características de la parábola, siempre retomando el problema de la multiplicación de las rectas.

Con las **situaciones 7 y 8** se introduce el problema de reconstruir una regla general para resolver cualquier cuadrado de un binomio y del producto de dos binomios conjugados. Una vez obtenida esta regla, se espera ingresar en el problema de obtener la forma factorizada de una función polinómica de grado dos, dada en la forma polinómica. Con la **situación 7** Se decide introducir inicialmente los casos donde $a_2 = 1$; y los trinomios son cuadrados perfectos y se enuncia como sigue:

SITUACIÓN 7

1. ¿Cuál es la forma polinómica de las siguientes funciones cuadráticas de dominio real?

$h_1(x) = (x+7)^2$ $\quad$ $h_2(x) = (x-6)^2$ $\quad$ $h_3(x) = (x+4)\cdot(x-4)$

a) Indicar cuál es el vértice de cada función.

b) Generar una regla que te permita obtener la forma polinómica de las funciones anteriores, sin aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación. Generalizar esa regla.

2. Utilizando la regla que encontraste: ¿cuál es la forma factorizada de las siguientes funciones cuadráticas de dominio real?

$h_4(x) = x^2 - 10x + 25$ $\quad$ $h_5(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $h_6(x) = x^2 - 4$

¿Cuál es el vértice de cada función?

Representarlas gráficamente.

Con la **situación 8** se proponen trinomios que no son cuadrados perfectos, y se solicita obtener su forma factorizada, para lo que es necesario desarrollar la técnica de completar cuadrados. En este situación, el paso a la forma factorizada permite recuperar el problema de las rectas posibles que dan origen a cada representación gráfica y analítica de *h.* Esta situación permitiría a los estudiantes "ampliar" y mejorar la técnica construida en la situación anterior, con el objetivo de pasar de la forma polinómica a la factorizada en cualquier caso en que las funciones tengan ceros reales. La situación propuesta se presenta a continuación:

SITUACIÓN 8

¿Cuál es la forma factorizada de las siguientes funciones cuadráticas de dominio real?

$h_1(x) = x^2 + 8x + 7$ $\qquad\qquad$ $h_2(x) = x^2 - 2x - 1$

¿Cuál es el vértice de h_1 *y* h_2*?*

Representar gráficamente las funciones h_1 *y* h_2.

La técnica de completar cuadrados que se espera obtener como consecuencia del estudio en esta situación, requiere del análisis de otros casos posibles, no sólo por el funcionamiento de la técnica en sí, sino porque es esencial para continuar con el estudio en las situaciones que siguen. Con las **situaciones 9 y 10** se "rompe" con la idea construida desde el inicio, de que *"todas las parábolas provienen de la multiplicación de dos rectas*". La **situación 9** introduce el problema de que no siempre es posible obtener la representación analítica en la forma factorizada, dada la forma polinómica. De este modo la necesidad de los estudiantes por encontrar siempre las rectas que originan *h*, determina la *razón de ser* de la forma canónica para los casos donde no es posible expresar a la función como multiplicación de rectas. Este resultado, es una consecuencia del desarrollo de la técnica de completar cuadrados de las situaciones 7 y 8. Es por ello que se le pone tanto énfasis a la misma, aunque se reconoce que tal vez en términos de "ecología" no es lo mejor, pero es funcional a esta propuesta.

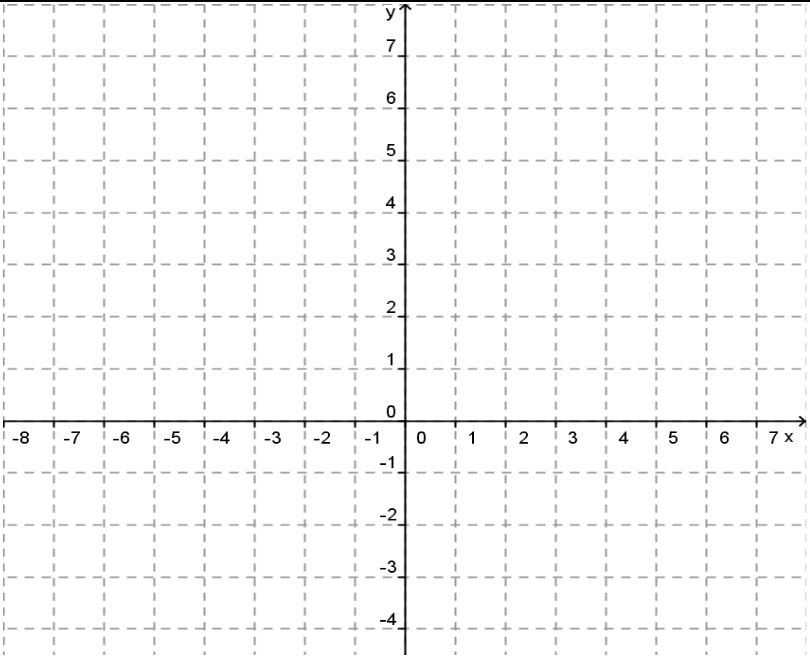
La expresión analítica que se propone en la forma polinómica de la **situación 9**, no tiene expresión equivalente en la forma factorizada. Por lo tanto h no tiene ceros reales, y por primera vez en el recorrido por Q_1, tampoco proviene de la multiplicación de rectas. El resultado que pueden obtener los estudiantes es relativo a la vinculación entre la representación analítica y la representación gráfica de dicha función, sobre todo, con relación al vértice; cuestión que podría analizarse desde las situaciones 7 y 8. Para construir la parábola es necesario que obtengan algunos puntos que permitan representarla y analizar las características de la "nueva" curva obtenida. El problema de construir la forma canónica es consecuencia de la situación que se enuncia a continuación:

SITUACIÓN 9

Sea h una función cuadrática de dominio real: $h(x) = x^2 + 2x + 5$

a) Obtener la forma factorizada de h.

b) Representar h gráficamente utilizando sus puntos notables



Como puede interpretarse tampoco aquí cambian las preguntas, pero si se trata de un nuevo problema. La representación analítica en la forma canónica surge como consecuencia del paso de la forma polinómica a la factorizada, que no existe, y por lo tanto se trata de una parábola que no tiene ceros reales. Por la técnica de completar cuadrados se obtiene:

$$h(x) = x^2 + 2x + 5$$
$$h(x) = (x^2 - 2(-1)\cdot x + 1^2) - 1^2 + 5$$
$$h(x) = (x+1)^2 + 4$$

pero como no es diferencia de cuadrados, no se puede obtener la forma factorizada. Este resultado permite identificar la expresión analítica de la función polinómica de grado dos en la forma canónica.

El razonamiento colocado antes es el que se pensó que seguirían los estudiantes. Pero la base empírica obtenida de las implementaciones permitió a los investigadores analizar el potencial de las rectas para construir las características de estas funciones. Como gráficamente se trata de una parábola que no tiene ceros reales, los estudiantes deciden “trasladar” la misma verticalmente por ejemplo 5 unidades, hasta que dicha parábola congruente a la dada tenga ceros reales distintos. Esto les permite poner las rectas que multiplicadas podrían generarla y luego vuelve a realizar movimientos hasta obtener la dada en el problema. Gráfica y analíticamente, el razonamiento que habrían seguido para analizar las características de esta función polinómica de grado dos que no tiene ceros reales es el que se muestra a continuación:

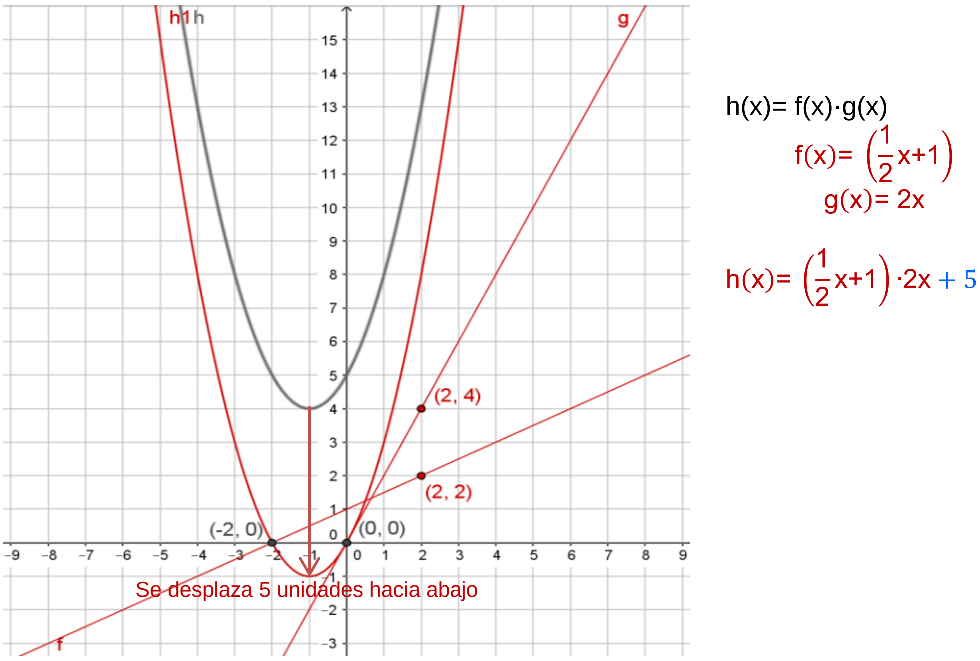


Figura 17: Representación de las gráficas congruentes h y h_1.

La situación 9 se propone con un doble objetivo: por un lado, el de obtener la forma canónica de las funciones polinómicas de segundo grado, y por otro, construir las características de la representación gráfica de una función polinómica de grado dos que no tiene ceros reales, es decir, no proviene de la multiplicación de rectas.

El “camino” que se reconstruye a partir de Q_1 hasta aquí, permite analizar las modificaciones que se producen con relación a la gráfica y las representaciones analíticas para los casos de funciones con dos ceros reales distintos, dos ceros reales iguales, y para los casos de las parábolas que no tienen ceros reales. El problema de “buscar” las rectas y de construir una respuesta a la multiplicación entre las mismas tanto dentro del marco gráfico, geométrico y funcional como en el analítico; pareciera guiar todo el recorrido de estudio y eso es lo que se busca pues siempre se reconstruyen respuestas parciales a Q_1.

Con la **situación 10**, se aborda el problema de construir parábolas congruentes a una dada, realizando movimientos en el plano. En esta situación se decide dar lugar a la discusión sobre la conjetura sostenida de que todas las parábolas provienen de la multiplicación de rectas pues esta conjetura ha dado “vida” a todo un recorrido, y ha resultado ser falsa. Las discusiones que se pueden generar a partir de esta cuestión, permitirán no sólo justificar el *sentido* de las rectas como constitutivas de las funciones polinómicas de grado dos, sino también analizar la importancia que las rectas tienen con relación a los ceros y a las representaciones analíticas que de estas curvas se pueden obtener. A partir de esta situación se introduce la idea de que realizando movimientos en el plano, es posible conservar algunas características de la curva de *h* mientras que otras se modifican. Las preguntas que se introducen como “finalización” del recorrido, se introducen a continuación:

SITUACIÓN 10

1. Las situaciones 1 a 8 parecían sostener la conjetura: “toda función cuadrática h puede expresarse como el producto de dos funciones afín f y g de dominio real” ¿Es V o F que todas las parábolas son el producto de dos rectas? Justificar.

2. Las funciones representadas en los ejes cartesianos son cuadráticas de dominio real. Sea $h(x) = x^2$*, Dom*$(h) = \Re$ **(1)**. *Si todas las gráficas son congruentes entre sí, es posible obtener cualquiera de ellas a partir de una cualquiera de las otras realizando movimientos en el plano.*

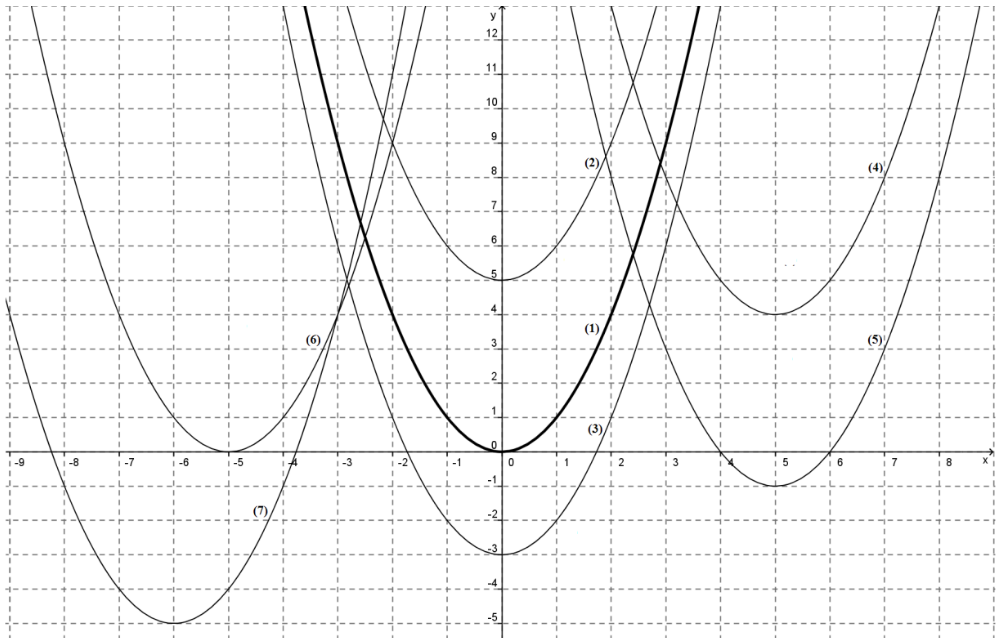


Figura 18*: Representación gráfica de las curvas congruentes a* $h(x) = x^2$.

a) Indicar el menor número de movimientos posibles y paralelos a los ejes, que deberás realizar a la gráfica de h para obtener las demás.

b) Obtener la expresión algebraica de cada una de las funciones representadas.

Los movimientos en el plano que deben realizar los estudiantes para responder al problema, son abordados por ellos correctamente. En general esta situación les permite afirmar que la conjetura es falsa pero algunos estudiantes insisten en la necesidad de pensar a las funciones polinómicas de segundo grado como multiplicación de otras curvas del mismo tipo de grado menor.

Si bien se han detallado las 10 situaciones que se diseñaron para el estudio de Q_1, el diseño incluye además cuatro actividades de síntesis con el objetivo de institucionalizar los conocimientos que se reconstruyen en esta parte del REI, además de las instancias para familiarizar lo reconstruido en el estudio, que se materializan en tareas tendientes a practicar y mejorar las técnicas desarrolladas en Q_1.

Según el diseño propuesto, y los resultados recabados de la base empírica obtenida de las implementaciones con los 163 estudiantes de la escuela secundaria (Llanos, Otero, 2012, 2013b, 2015), el recorrido generado por la multiplicación de dos rectas permitiría:

- Construir una representación gráfica de la parábola, justificando cada punto notable, y también analizando las diferencias entre las distintas representaciones que se obtienen.

- Un resultado interesante, es relativo al papel que adquieren los puntos notables cuando sólo se dispone de la unidad en los ejes y lo mismo ocurre con el análisis de signos, tarea que los estudiantes realizan en acto desde el inicio, pues necesitan hipotetizar una curva, y en este análisis, se destaca la relación entre los ceros y el cambio o no de signo. Esta cuestión también es fundamental en los recorridos que continúan.

- Otro aspecto muy importante es relativo a la justificación del vértice y la simetría de la curva. En el marco de una pedagogía de la investigación, la obtención de dichos puntos notables no pueden reducirse a una imposición ostensiva, como ocurre en la enseñanza tradicional. El retorno a la geometría hace posible obtener por construcción el eje de simetría y el vértice de una parábola.

- La construcción geométrica del vértice no sólo resulta imprescindible por la relevancia que dicho punto notable adquiere en la representación de una parábola, sino también por la generalidad y la generatividad que dicha construcción tiene. Esta técnica permite multiplicar o dividir cualquier segmento de cualquier representación gráfica, y por lo tanto en el marco de esta investigación ha permitido construir cualquier punto para mejorar las características de las representaciones gráficas estudiadas.

- El hecho de partir de la multiplicación de diferentes pares de rectas permitió analizar las características de la representación gráfica cuando esta alcanza un máximo o mínimo, y también introducir desde el inicio el problema de la multiplicidad de los ceros.

- Al partir siempre de la multiplicación de las rectas, se enfatiza desde el inicio la forma factorizada la de las funciones polinómicas de segundo grado.

- La llamada forma polinómica surge en este contexto, de realizar la multiplicación entre las rectas. El pasaje de la forma factorizada a la polinómica no presenta dificultades; mientras que a la inversa si lo hace y se resuelve en este diseño por la obtención de la técnica de completar cuadrados.

- Al considerar el problema de la multiplicación de las rectas, analizando cómo multiplicando infinitas rectas se puede obtener la misma parábola, se evidencia que una función no es reducible su expresión analítica y que existen muchas representaciones analíticas de la misma función. Esto permite un mejor dominio de las técnicas por los estudiantes así como recuperar el problema original que en este caso ha sido la *razón de ser* de las funciones polinómicas de grado dos.

- También se amplía el problema, considerando a las funciones que no pueden provenir del producto de dos rectas, porque no tienen ceros. Se amplía la OM para dar cabida a esta cuestión que se origina como consecuencia del paso de la forma polinómica a la factorizada que no puede alcanzarse, lo que da lugar a la expresión canónica. Como consecuencia, otro resultado de gran interés, es relativo a la vinculación que se establece entre las distintas formas polinómica, factorizada y canónica y la representación gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado.

El análisis del MPR realizado muestra que se propone una manera muy diferente de enseñar las funciones polinómicas de segundo grado en la escuela secundaria. La generatividad de la pregunta inicial, planteada en el dominio geométrico, otorga sentido no sólo a la representación analítica de la función polinómica de segundo grado, sino también a la posterior construcción de las curvas de todas las funciones polinómicas.

Las técnicas construidas como respuesta al problema de la multiplicación de dos rectas en la primera parte del REI pueden generalizarse y adaptarse para los casos de la multiplicación de más de dos rectas y también rectas y parábolas o entre parábolas. Esto, origina y da sentido a la segunda parte del recorrido relativa a la OM de las funciones polinómicas, que en el marco de esta investigación, además de formar parte del proceso de ingeniería, se implementa como parte del estudio longitudinal con los mismos estudiantes, al año siguiente.

PARTE 2

EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Esta parte del recorrido se genera a partir de la pregunta Q_2: *¿Cómo multiplicar más de dos rectas, o rectas y parábolas, o parábolas; si solamente se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* Las curvas que sería posible construir son tantas como rectas y parábolas se propongan. Al igual que en la Parte 1, inicialmente esta pregunta tiene solución en los marcos geométrico, gráfico y funcional, y esto ocurre porque solamente se conoce la representación gráfica de las rectas, o rectas y parábolas y la unidad en los ejes; con el objetivo ahora de representar gráficamente a $p=f \cdot g \cdot j$ (f, g y j rectas) o a $p=f \cdot h$ (h una parábola). Para ello, es necesario identificar los signos y algunos puntos que pueden ser obtenidos por la información que se proporciona desde la situación. También se pueden analizar en el marco geométrico los casos de raíces de orden par e impar.

Luego se introduce un problema en apariencia similar, pero dado en otro marco, el analítico, gráfico y funcional; lo que produce el estudio de las representaciones analíticas de las funciones polinómicas, comenzando por una expresión factorizada.

El esquema de la Figura 19, sintetiza el recorrido que parte de la multiplicación de más de dos rectas, o rectas y parábolas. Todo el recorrido se desarrolla a partir de ocho situaciones que involucran posibles cuestiones que derivan de Q_2, y que son las que permiten la razón de ser de todo el proceso de estudio. Además, como en la primer parte del REI, se proponen actividades de síntesis (a cargo de los alumnos, y del profesor), instancias de familiarización correspondientes a las tareas, y la evaluación escolar.

En primer lugar, se propone realizar la multiplicación de curvas cuando sólo se conocen las gráficas y la unidad (situaciones 1 a 3) con el objetivo de que los estudiantes puedan construir las características de la representación gráfica de la multiplicación de más de dos rectas o entre rectas y parábolas. Con las situaciones 4 y 5 es posible construir las características de las representaciones analíticas de las funciones polinómicas; siempre retomando al marco geométrico y analizando las características de la representación gráfica de la función desde otro marco. La situación 6 se propone con el objetivo de analizar las propiedades de los ceros y su multiplicidad, para las funciones de grado par e impar. Con las situaciones 7 y 8 se espera elaborar, explicar y justificar una técnica para realizar las operaciones con polinomios, no sólo de forma algebraica sino también gráfica. Esta parte del recorrido corresponde a una generalización de las técnicas desarrolladas en la Parte1, y se completa el estudio con las operaciones con funciones polinómicas.

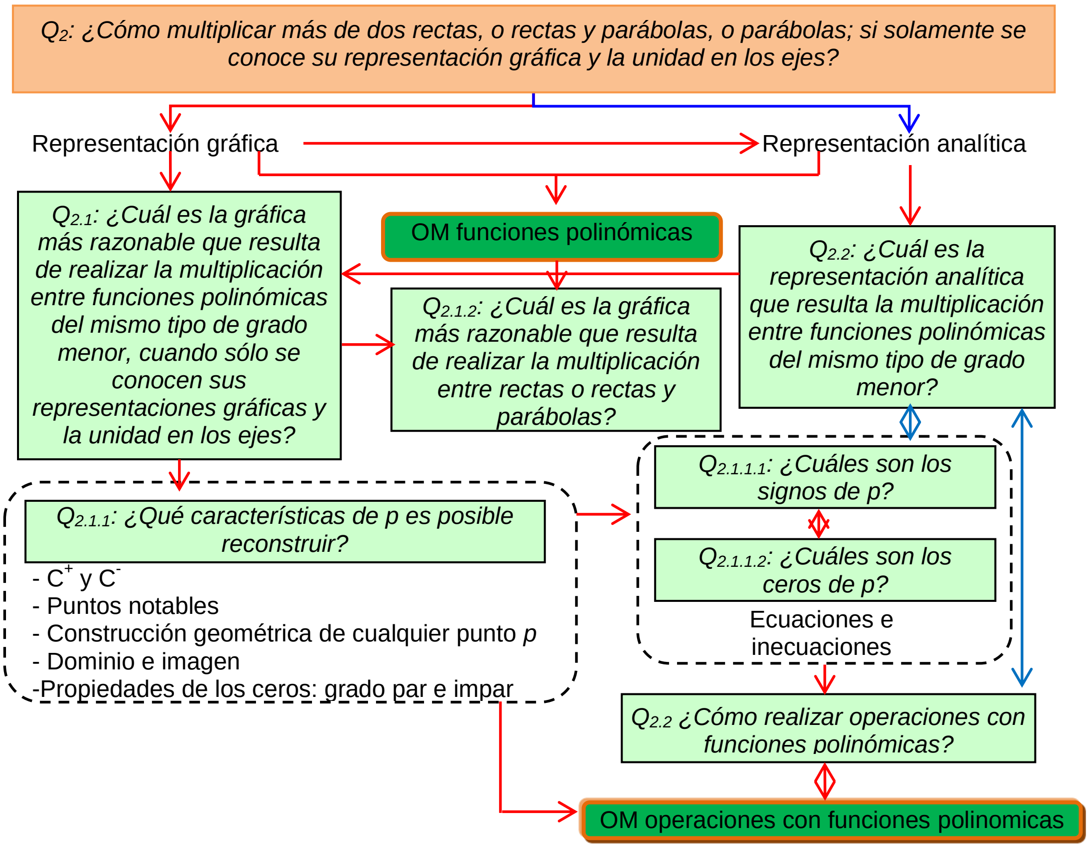


Figura 19: Descripción de las posibles OM vinculadas a Q_2.

De acuerdo con la cuestión generatriz Q_0 que orienta todo el estudio, Q_2 inicia también en el marco geométrico. Se parte del cálculo del producto de otras funciones del mismo tipo de grado menor, cuando sólo se conoce la unidad en los ejes y la gráfica de las curvas que se eligen. Las **situaciones 1 a 3** son variantes del problema de construir una gráfica razonable para p. En la **situación 1** *p* es el resultado de multiplicar tres rectas, mientras que en las **situaciones 2 y 3** una parábola y una recta, diferenciadas estas por la cantidad de ceros que tiene la parábola que se multiplica. Las situaciones que se proponen a los alumnos, con las respectivas preguntas derivadas de Q_2, se detallan a continuación:

SITUACIONES 1 A 3

Las funciones f, g ,j y h respectivamente están dadas por el gráfico de las Figuras. La función p=f·g·j o p=f·h según corresponde.

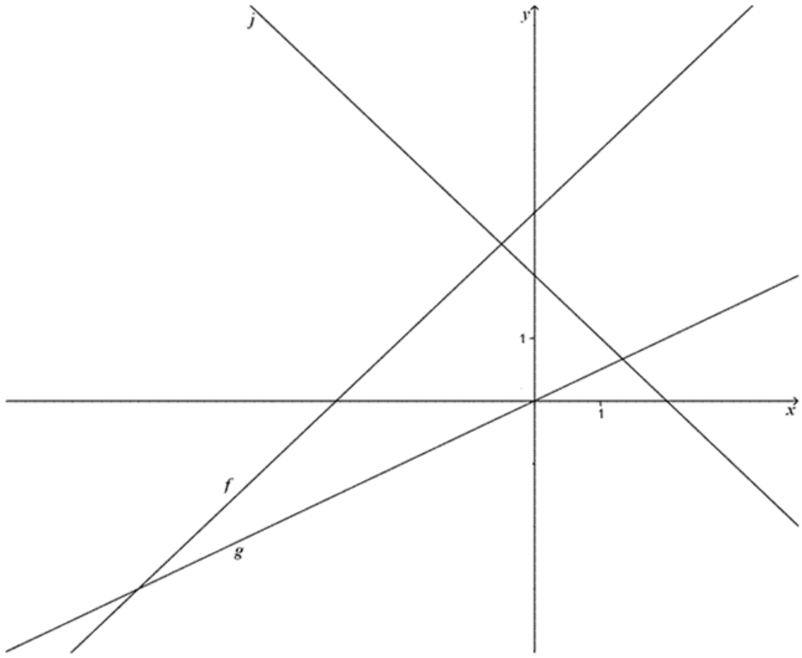


Figura 20*:* Gráficas correspondientes a las funciones *f*, *g* y *j* (Situación 1)

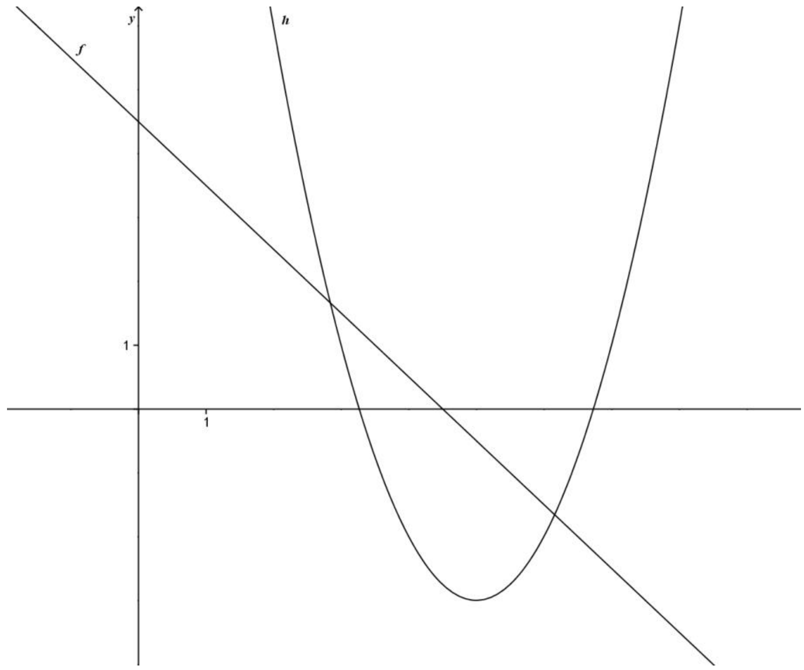


Figura 21*:* Gráficas correspondientes a las funciones *f* y *h* (Situación 2)

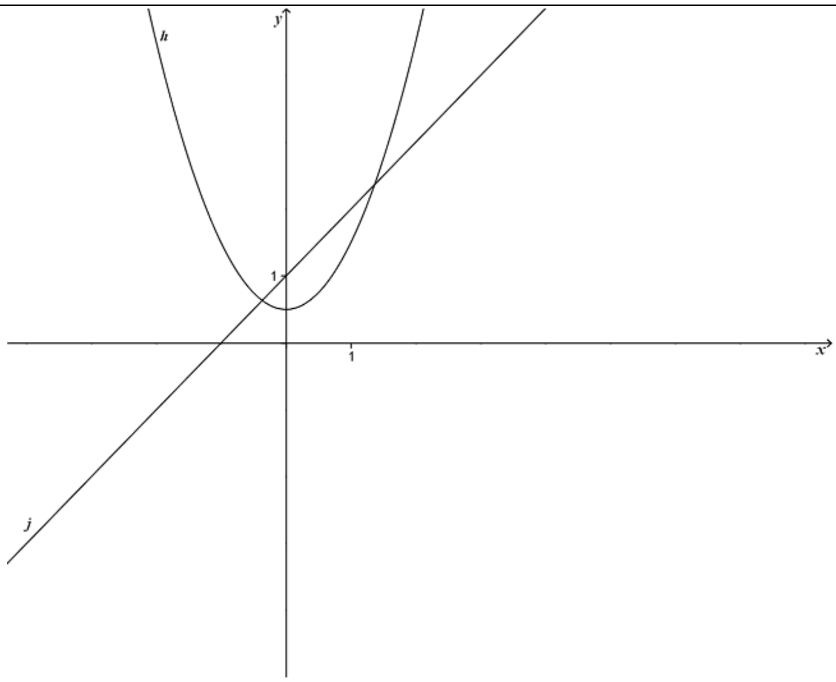


Figura 22: Gráficas correspondientes a las funciones *j* y *h* (Situación 3)

a) ¿Cuáles son los puntos seguros y los signos de *p*?

b) ¿Cuál podría ser representación gráfica más razonable para *p*?

c) ¿Qué características de la gráfica de *p* podrías justificar?

Como ocurre con la multiplicación geométrica de dos rectas, la obtención de la curva de *p* resulta también de la identificación de los *puntos seguros* (ceros, unos y en algunos casos también el menos uno) y el análisis de los signos (C^+ y C^-). La multiplicación y la construcción de triángulos semejantes utilizando como información la unidad, fueron ya generadas como técnica en la Parte 1 del REI, soportada por la tecnología del Teorema de Thales y la proporcionalidad de segmentos, y aquí se podrían reutilizar y adaptar sin grandes inconvenientes. Las estrategias de cálculo geométrico entonces pueden recuperarse según se interpreta en las Figuras que siguen, y es a partir de ellas que se realiza el siguiente recorrido que permite construir las características de la representación gráfica de las funciones polinómicas.

En la situación 1, correspondiente a la Figura 23, *p* tiene tres ceros reales distintos (×). Se identifican los signos, los unos (×); y algunos múltiplos de la unidad (♦). La generalización de la técnica desarrollada para construir cualquier punto de una curva, permite obtener varias ordenadas de p (×) y como consecuencia una gráfica razonable de una función polinómica de grado tres con tres ceros reales distintos. De manera similar, y a su vez más sencilla, la situación 2 resuelve el problema de la multiplicación de una parábola por una recta, dada en los marcos geométrico, gráfico y funcional. Se indica que correspondería a una actividad más sencilla porque a diferencia de la situación 1 donde primero hay que multiplicar dos rectas (generando una parábola) y luego se la multiplica por la otra recta, en este caso, la parábola está dada. La decisión de comenzar por las tres rectas y no por la parábola por una recta, se corresponde también con la inicialización disponible de los estudiantes, que siempre recurren a las rectas.

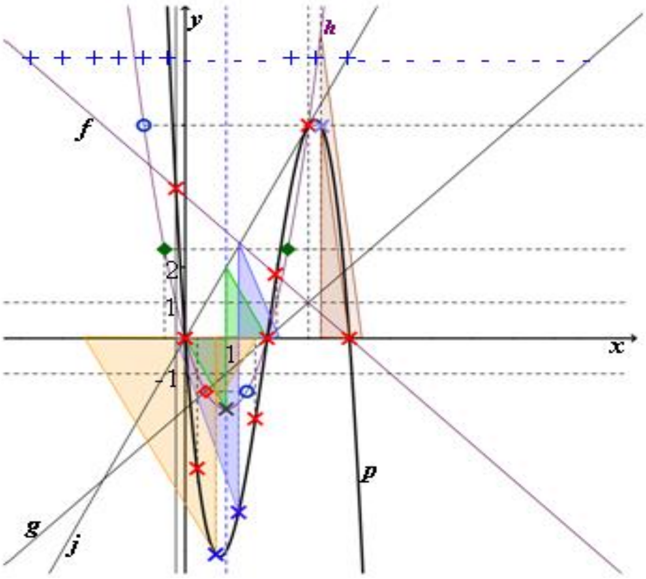


Figura 23: Representación cartesiana para *p* correspondiente a la situación 1.

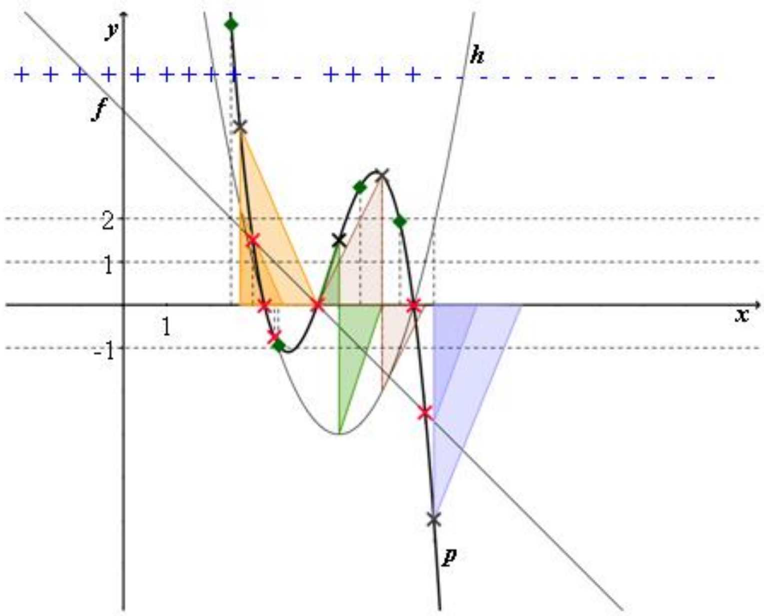


Figura 24: Representación cartesiana para *p* correspondiente a la situación 2.

La situación 3, cuya respuesta está representada en la Figura 25, introduce el problema de construir una representación gráfica de la función polinómica de grado tres, con un único cero real. El análisis de los ceros y de su multiplicidad aparece desde el inicio. Se construye la idea de que en las funciones de grado impar al menos hay un cero, por el hecho de que al menos hay una recta que permite generar el grado impar de la curva.

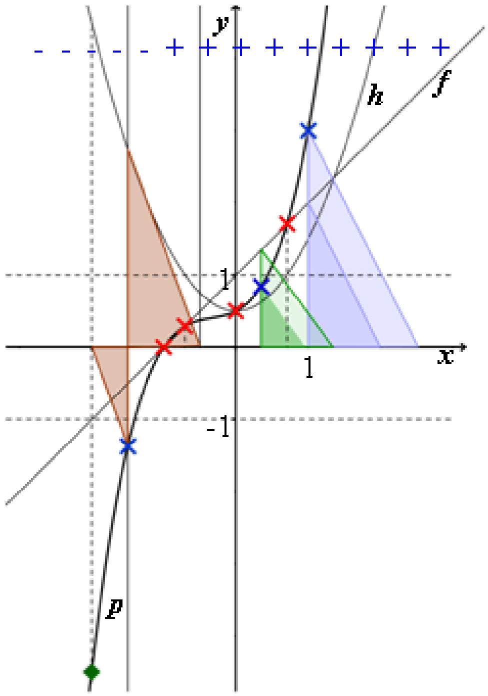


Figura 25: Representación cartesiana para *p* correspondiente a la situación 3.

De manera análoga al estudio desarrollado en Q_1, y Q_2, también se produce un cambio a los marcos analítico, gráfico y funcional, a partir de una situación en apariencia similar, pero que permite obtener resultados distintos. Las **situaciones 4 y 5** permiten obtener las expresiones algebraicas enteras de las funciones polinómicas, realizando la multiplicación de las funciones representadas gráficamente. La expresión algebraica de *p* se obtiene a partir de las representaciones gráficas de las curvas y de las coordenadas de ciertos puntos, que permiten obtener las expresiones algebraicas de las funciones que se multiplican. Las situaciones se diseñan con el objetivo de construir las características de las representaciones analíticas de las funciones polinómicas y son presentadas a los estudiantes como sigue:

SITUACIÓN 4

Las gráficas de las funciones f y j se cortan en (3;1) *y las funciones j y g se cortan en* (-2;-4)*. La función f interseca al eje x en* (4;0), *g en* (0;0) *y j en* (2;0)*. Sea p=f·g·j* $\forall x \in \Re$.

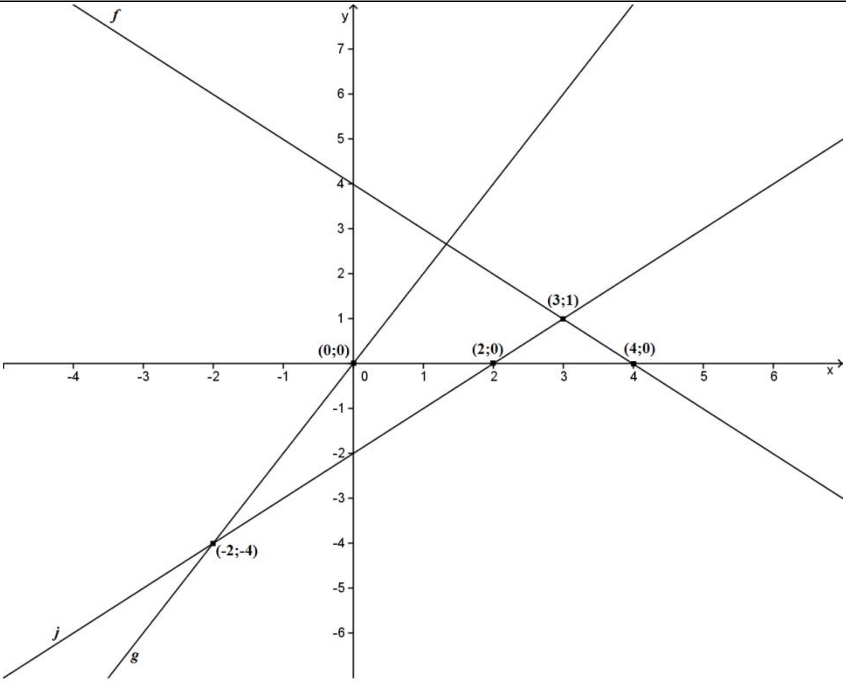


Figura 26: Representación gráfica de las funciones *f, g* y *j* y de los puntos seguros.

a) *Obtener las fórmulas para p en forma factorizada y polinómica.*

b) Graficar p e indicar características de la gráfica que podes justificar

SITUACIÓN 5

Las gráficas de la función h tiene el vértice en el punto (1;-4) *y los ceros en x=-1 y x=3 respectivamente. La función k tiene el vértice en el punto* (-2;2) *y los ceros en x=-4 y x=0 respectivamente. Sea p = h .k* $\forall x \in \Re$.

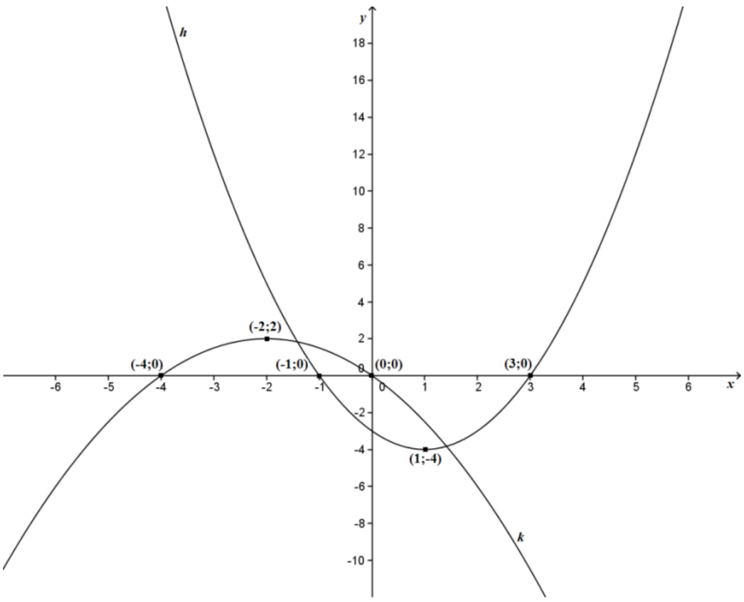


Figura 27: Representación gráfica de las funciones *h,* y *k* y de los puntos seguros.

a) Obtener las fórmulas para p en forma factorizada y polinómica.

b) Graficar p e indicar características de la gráfica que podes justificar

En las dos situaciones se solicita: obtener las fórmulas para *p* en forma factorizada y polinómica. Graficar *p* e indicar las características de la gráfica que se pueden justificar. A partir de los puntos que se indican en las representaciones gráficas, los estudiantes podrían obtener las expresiones algebraicas de las funciones representadas gráficamente, y realizando la multiplicación, la expresión de la forma polinómica de p, de grados 3 y 4 respectivamente. Primero, por partir de la multiplicación de funciones del mismo tipo de grado menor, podrían expresar al producto de esas funciones en la forma factorizada y por último, la expresión general de la función.

Un vez analizadas las características de las representaciones analíticas en las formas factorizada y polinómica, se propone la **situación 6** que permitiría construir las propiedades de los ceros, analizar la multiplicidad y sus características relativas a las funciones polinómicas de grado par e impar, a partir de los ejemplos que se solicitó proponer a los estudiantes. La situación marca una diferencia notable con la manera de introducir este problema en la enseñanza tradicional, dado que aquí sólo se pide proponer ejemplos y arribar a conclusiones, actividad que es realizable gracias a la importancia atribuida a las rectas, y a la necesidad de realizar operaciones con las mismas, tanto gráfica como analíticamente. Este problema se propone como sigue:

SITUACIÓN 6

Propongan ejemplos de funciones que cumplan con las siguientes condiciones y luego grafiquen cada una:

a) Una función de grado uno que no tenga ceros reales y una que tenga sólo un cero real.

b) Una función de grado dos que no tenga ceros reales, una que tenga sólo un cero real y otra que tenga los dos ceros reales.

c) Una función de grado tres que no tenga ceros reales, una que tenga sólo uno, otra que tenga sólo dos y otra que tenga los tres ceros reales.

d) Una función de grado cuatro que no tenga ceros reales, una que tenga sólo un cero real, una que tenga sólo dos ceros reales, otra que tenga sólo tres ceros reales y otra que tenga los cuatro ceros reales.

Los estudiantes propondrían los ejemplos, a partir de los cuales sería posible analizar las propiedades de los ceros y las diferencias entre las funciones de grado par e impar, discusión que derivaría en las cuestiones ¿pueden las funciones de grado par no tener ceros? ¿y las de grado impar?

Las **situaciones 7 y 8**, se dirigen a elaborar, explicar y justificar una técnica para realizar las operaciones con polinomios, no sólo de forma algebraica sino también gráfica. En la **situación 7** los estudiantes tienen que resolver el problema de obtener una técnica para sumar, restar y multiplicar polinomios y tienen por objetivo concluir acerca de los siguientes problemas: ¿Cómo se realizan las operaciones suma, resta y multiplicación de polinomios? ¿Qué técnicas proponen para hacerlo?; teniendo en cuenta que esta no es única, y que por otro lado, no necesariamente debería ser una técnica analítica.

SITUACIÓN 7

Las actividades 1-5 nos han permitido encontrar funciones polinómicas. Ellas son polinomios con $\mathrm{Dom} = \Re$*.*

Con ellos se pueden realizar las cuatro operaciones básicas que conocemos para los números (suma, resta, multiplicación y división).

Elaboren una técnica para realizar la suma, la resta y la multiplicación de polinomios. Propongan ejemplos e indiquen cuál es el procedimiento como si tuvieran que comunicárselo a otro. (Puede haber distintas maneras de hacerlo).

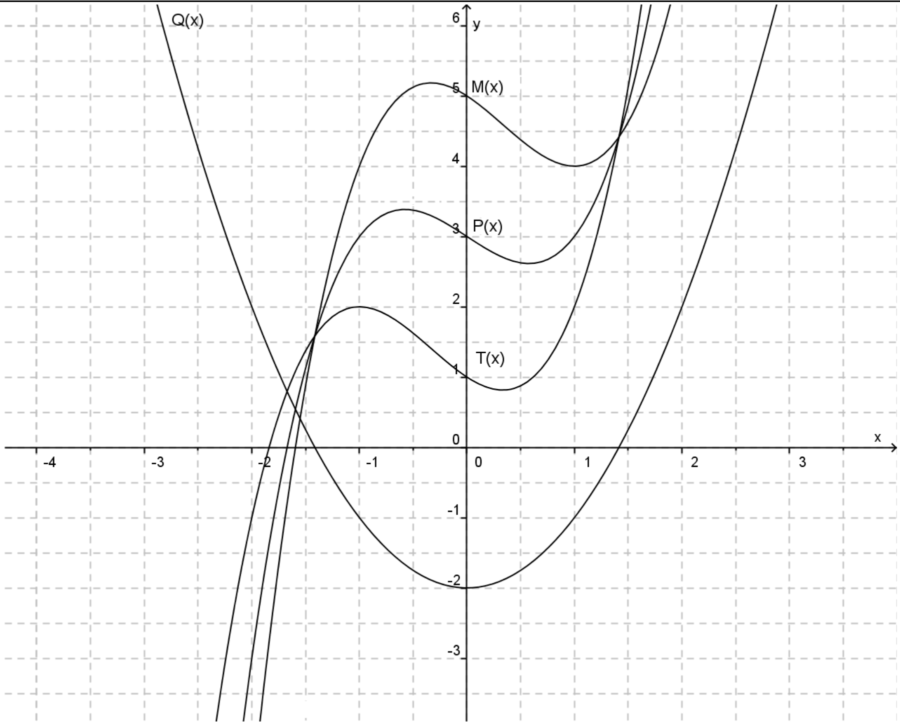
La **situación 8** se propone con el objetivo de recuperar el problema de la suma y resta entre funciones gráficamente, y fue uno de los problemas introducidos por los estudiantes. Esta situación permite analizar gráficamente las modificaciones que producen las operaciones, que antes obtienen analíticamente.

SITUACIÓN 8

Dados la expresión y la gráfica de los polinomios P(x), Q(x), T(x) y M(x) tal que:

$P(x) = x^3 - x + 3$; $Q(x) = x^2 - 2$; $T(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ *y* $M(x) = x^3 - x^2 - x + 5$

¿Cuál es la relación entre los polinomios P(x), Q(x) y T(x)? ¿Y entre P(x), Q(x) y M(x)?



Puedes utilizar la siguiente tabla para comprobar algunos puntos:

x	$P(x)=x^3-x+3$	$Q(x)=x^2-2$	$T(x)=x^3+x^2-x+1$	$M(x)=x^3-x^2-x+5$

Además de las situaciones, se propone una síntesis, a la que se agregan ejercicios y problemas. La síntesis involucra las nociones matemáticas: función polinómica, polinomios, polinomios iguales, polinomio nulo, ceros de la función polinómica, operaciones con polinomios (suma, resta y multiplicación de polinomios). División de polinomios. Técnicas para factorizar polinomios. Divisibilidad de polinomios, la técnica de Gauss, los casos de raíces múltiples, conjuntos de positividad y negatividad. Además, se analiza la operación cociente.

El estudio de las funciones polinómicas propuesto a partir de Q_2 permitió realizar un análisis relativamente completo de las mismas, y recabar resultados significativos. Desde las primeras situaciones donde se obtiene la gráfica de *p* por cálculo geométrico, se introduce el problema del análisis de la paridad de los ceros, analizando los casos de las funciones polinómicas de grado tres con un cero real y tres ceros reales y su relación con el cambio de signo de la función, desde la primera situación.

Con relación al dominio analítico-funcional, la obtención de expresiones algebraicas para *p* no presenta problemas a los estudiantes. Obtienen de manera relativamente “natural” la expresión polinómica a partir de la multiplicación entre las expresiones analíticas de las funciones representadas gráficamente. El hecho de que los alumnos puedan comenzar con el estudio de la función polinómica a través de la multiplicación de otras funciones del mismo tipo de grado menor, permite por un lado, obtener primero la expresión de la función en la forma factorizada y luego la forma polinómica.

Por otro lado la construcción de las técnicas para realizar operaciones con polinomios, recupera el sentido de estas operaciones y de todo el estudio a partir de Q_0, pues en el fondo todo se reduce a las operaciones con curvas o expresiones algebraicas. Lo que en la enseñanza tradicional es una imposición porque el profesor se ve obligado a definir las operaciones y ofrecer “formas de operar” con funciones polinómicas, aquí es una consecuencia del estudio longitudinal que tiene su génesis y razón de ser en las operaciones.

PARTE 3

EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES RACIONALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

El recorrido que aquí presentamos parte del estudio de Q_3: ¿cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas si sólo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes? Se comienza en el marco geométrico, gráfico y funcional; al igual que los recorridos de estudio que lo preceden, pero a diferencia de ellos, este recorrido parte del cociente de funciones polinómicas. Las dos primeras situaciones son variantes del problema de dividir dos curvas, cuando sólo se conoce la representación gráfica de las mismas y la unidad en los ejes, y se busca en estos casos construir la gráfica más razonable de la función racional. Con el cambio a los marcos analítico, gráfico y funcional se buscan reconstruir las características de las representaciones algebraicas de las funciones racionales *q*. Además se analizan los casos de simplificación de estas funciones, se retoman las propiedades de los ceros, se construyen las características de las asíntotas horizontales y verticales y los puntos de discontinuidad. El desarrollo de las técnicas para realizar operaciones entre funciones racionales, se realiza al final del recorrido, y al igual que en la parte 2, estas técnicas podrían obtenerse en este caso, por adaptación para las desarrolladas para realizar operaciones con números racionales.

El esquema de la Figura 28 sintetiza el estudio que podría realizarse a partir de Q_3. En dicho esquema se describen las preguntas que llevarían a la construcción de la OM relativa a las funciones raciones y las nociones involucradas para dar respuesta a dichas preguntas.

El diseño de Q_3 se desarrolla a partir de 8 situaciones. Se proponen actividades de síntesis, algunas a cargo de los estudiantes y otras del profesor, además de actividades para practicar las técnicas que se podrían reconstruir en este estudio. Aquí sólo presentamos las 8 situaciones, y los resultados que desde estas se podrían esperar.

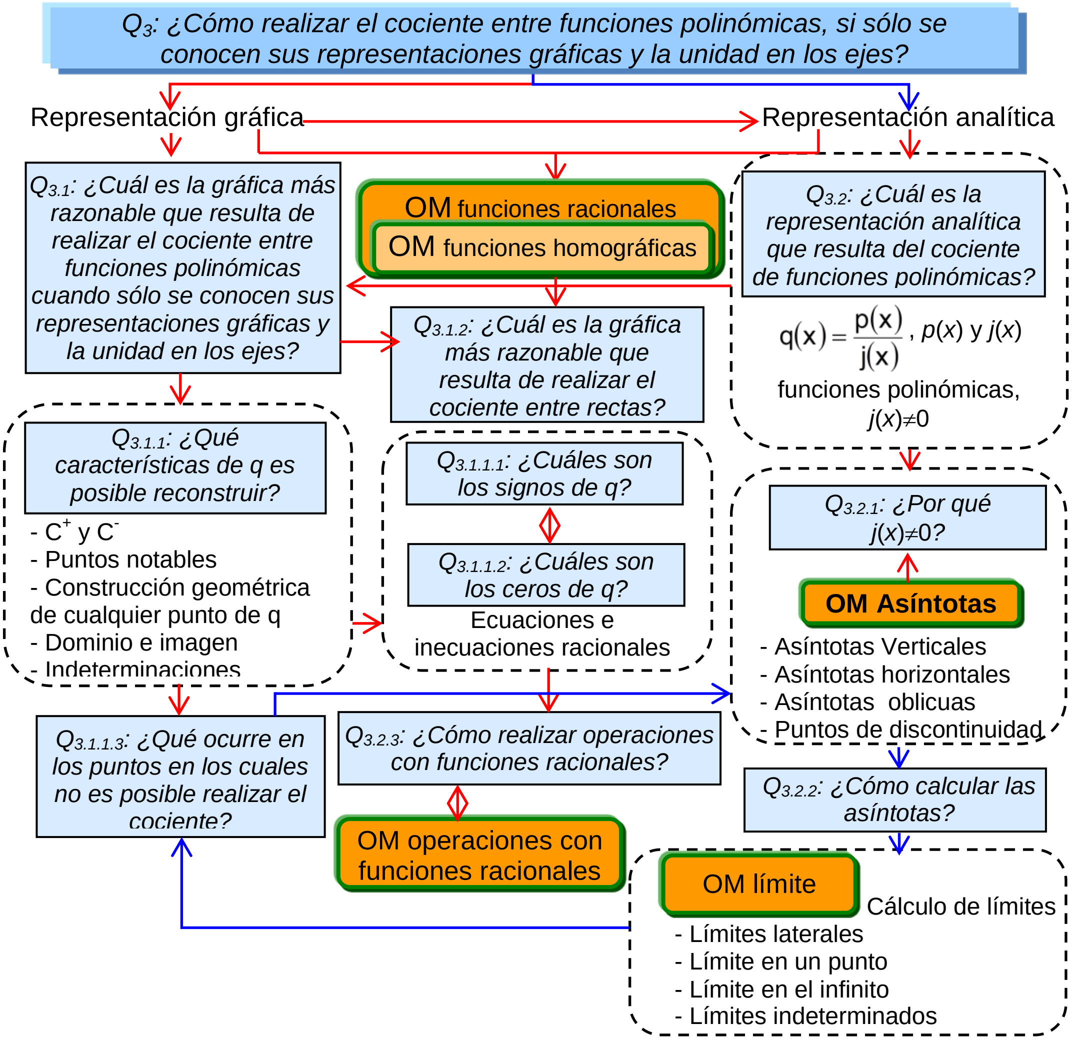


Figura 28: Descripción de las posibles OM a reconstruir con Q3.

Con las **situaciones 1** y **2** se reconstruyen las características de la representación gráfica de las funciones racionales (*q*), a partir del cociente de funciones polinómicas cuando solamente se conoce la representación gráfica de las mismas y la unidad en los ejes. Las dos primeras situaciones son variantes del problema de dividir geométricamente dos curvas. En la situación 1 la gráfica de *q* es el resultado de realizar la división geométrica de dos rectas, mientras que en la situación 2 entre una recta y una parábola. A partir del problema propuesto, es posible explicitar las técnicas que permiten construir los puntos notables y la respectiva representación gráfica. Las técnicas desarrolladas para la multiplicación, deben ser adaptadas ahora para el cociente entre funciones polinómicas.

Las situaciones que se proponen, se enuncian como sigue:

SITUACIONES 1 Y 2

Las funciones f, g y h están dadas por los gráficos de las Figuras 29 y 30 respectivamente*. La función* q=$\frac{f}{g}$ *o* q=$\frac{f}{h}$ *en los distintos casos.*

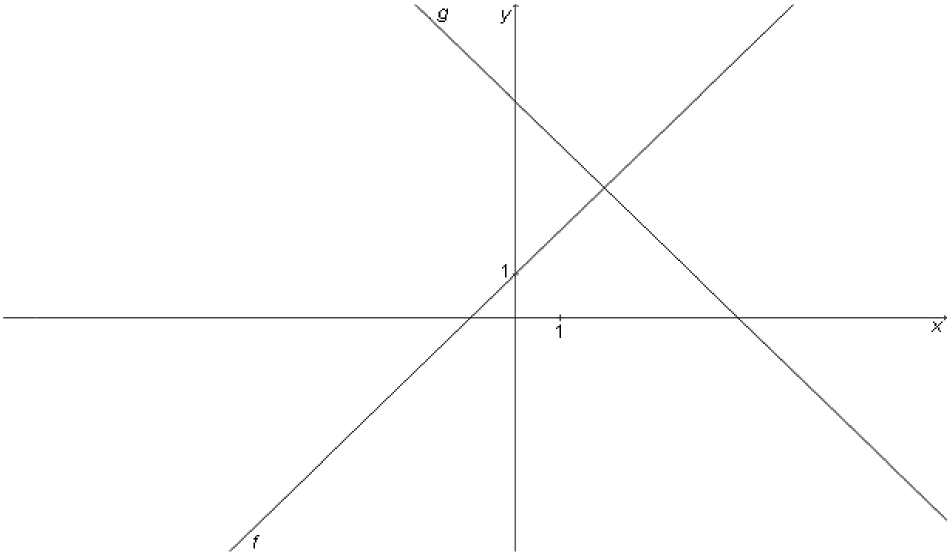


Figura 29: Representación gráfica de las funciones *f* y *g.* Situación 1

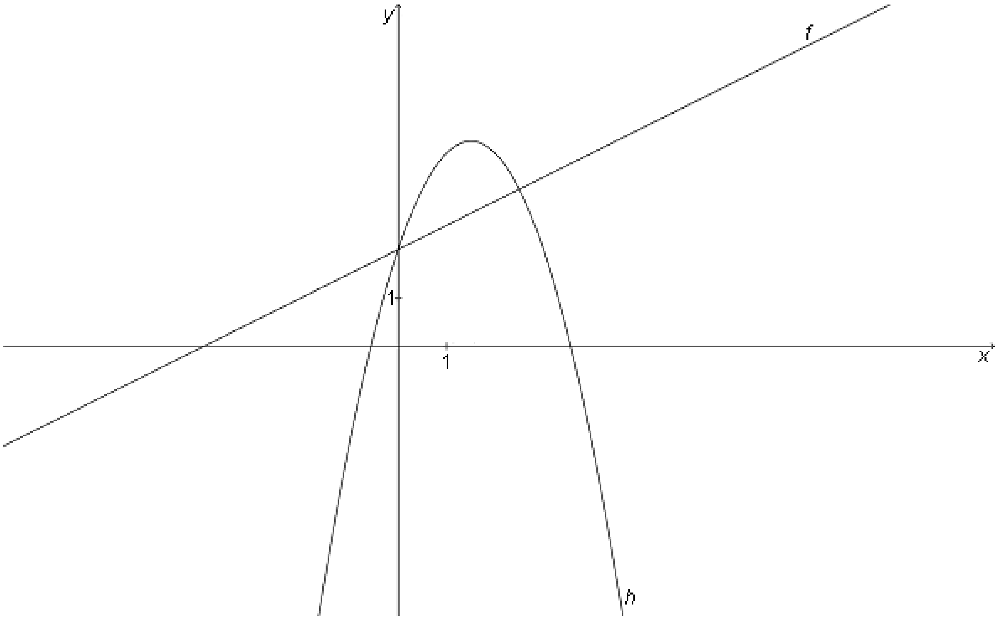


Figura 30: Representación gráfica de las funciones *f* y *h.* Situación 2

a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q? ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?

b) ¿Es q la representación gráfica de una función?

c) Obtener la gráfica más razonable para $r = \frac{g}{f}$*.*

La obtención de la curva más razonable para la función racional *q* se logra a partir de la identificación de los signos (C^+ y C^-) y los puntos seguros (ceros, unos, menos unos, múltiplos de la unidad) como en los recorridos anteriores. Una diferencia con las características desarrolladas en Q_1 y Q_2, es que aquí por tratarse de un cociente, la intersección entre las curvas es uno. También es posible obtener otros puntos seguros a través de la construcción geométrica que se retoma de los recorridos anteriores, a partir de los triángulos semejantes utilizando como información la unidad en los ejes, y teniendo en cuenta que dicha técnica requiere ser adaptada, porque se trata ahora del cociente y no de la multiplicación de segmentos. Las técnicas para construir la gráfica que resulta del cociente entre las curvas, se presentan a partir de la situación 1.

De la Figura 29 es posible identificar inicialmente los signos y algunos puntos "seguros". Los signos de q están determinados por los de *f* y *g*. Si x_a y x_b son los ceros de f y g respectivamente, se obtiene:

$$\forall x \in (-\infty; x_a) \quad f > 0 \text{ y } g < 0 \Rightarrow q < 0$$

$$\forall x \in (x_a; x_b) \quad f > 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow q > 0$$

$$\forall x \in (x_a; +\infty) \quad f < 0 \text{ y } g > 0 \Rightarrow q < 0$$

Este análisis permite identificar que q es negativa hasta el cero de la recta f, luego positiva y en la intersección con el eje x de g, vuelve a ser negativa. Teniendo en cuenta que q=$\frac{f}{g}$, es posible identificar también los puntos denominados "seguros", es decir, "los ceros y los unos" (**x**):

$$\text{si } f(x_b) = 0 \Rightarrow q(x_b) = \frac{0}{g(x_b)} = 0$$

$$\text{si } g(x_c) = 1 \Rightarrow q(x_c) = \frac{f(x_c)}{1} = f(x_c)$$

$$\text{si } g(x_d) = -1 \Rightarrow q(x_d) = \frac{f(x_c)}{-1} = -f(x_d)$$

$$\text{si } g(x_e) = f(x_e) \Rightarrow q(x_e) = \frac{f(x_e)}{g(x_e)} = \frac{f(x_e)}{f(x_e)} = 1$$

Además, cuando $g(x_a) = 0 \Rightarrow q(x_a) = \frac{f(x_a)}{0}$ NO está definido (indeterminado), por lo tanto, *q* no puede admitir ninguna ordenada en $x = x_a$. En el gráfico de la Figura 31 y se representa por la línea vertical en color celeste.

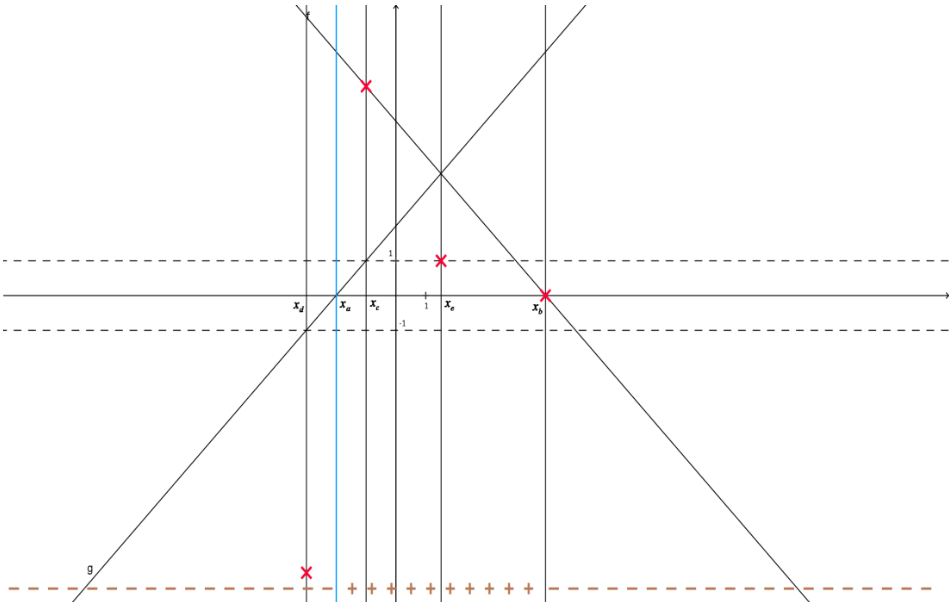


Figura 31: identificación de los signos de q, los puntos seguros y la recta $x = x_a$.

Por otro lado, para determinar cómo es el comportamiento de la gráfica de *q* es necesario construir triángulos semejantes, teniendo en cuenta que $f(x_h) = a$ y $g(x_h) = b$, para obtener un nuevo punto que pertenezca a la gráfica de *q*, como se muestra en la figura:

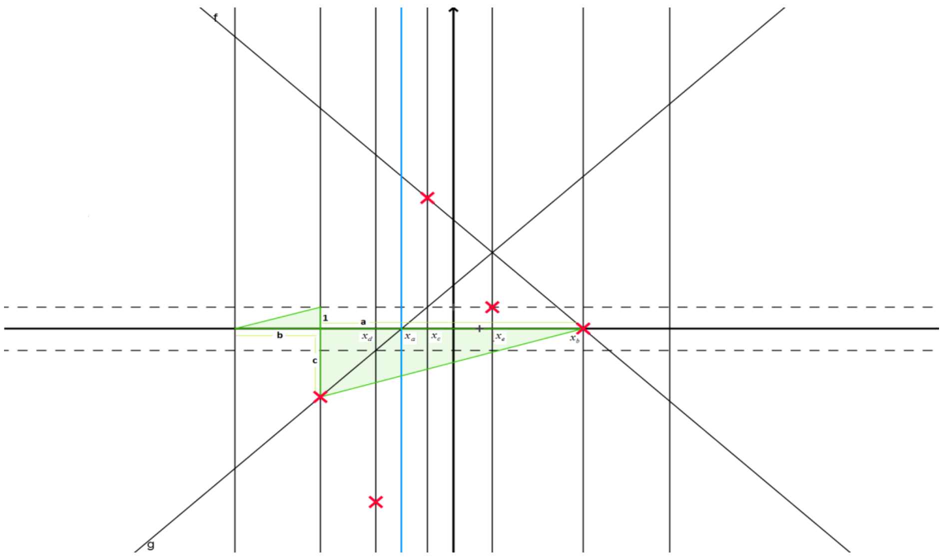


Figura 32: triángulos semejantes y determinación de un nuevo punto de q

Así, $q(x_h) = \frac{f(x_h)}{g(x_h)} = \frac{a}{b}$. Por el Teorema de Tales: $\frac{b}{1} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{b}$

Esta técnica permite reconstruir varios puntos para q (×). A diferencia de los triángulos analizados para el caso de la multiplicación, en el cociente la unidad corresponde a uno de los lados de los triángulos que se construyen, pero en otra posición, al igual que los segmentos determinados por las rectas en el punto. De esta forma se pueden obtener tantos puntos para *q*, como veces se reproduzca la técnica. Esto permite obtener una gráfica bien aproximada de *q*:

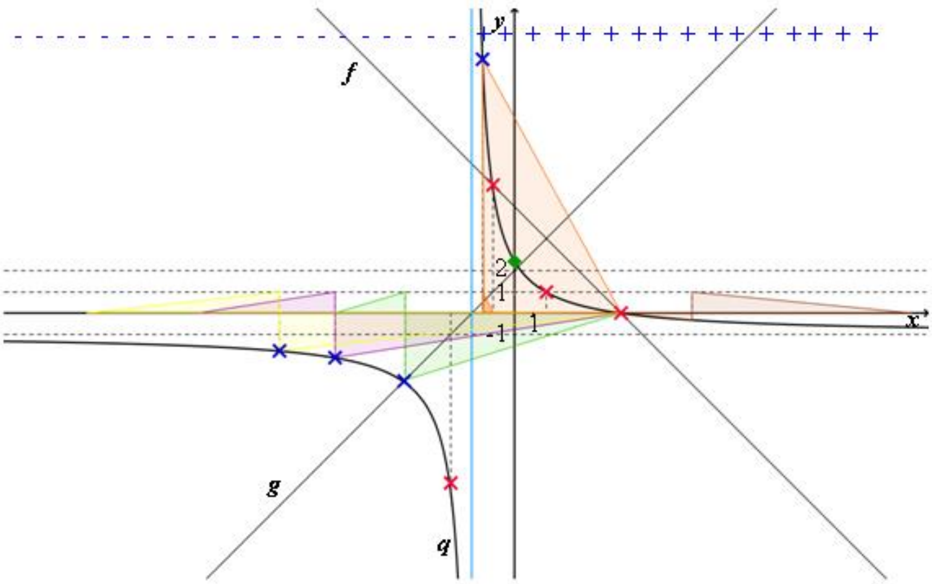


Figura 32: Representación gráfica de q. Situación 1.

Para que *q* sea una función es necesario excluir del dominio los valores donde no está definida. Por lo tanto, es función en $-\infty; x_a) \cup (x_a; +\infty)$. La representación gráfica de $r=\frac{g}{f}$ se obtiene de forma análoga a *q*.

Con la situación 2 de la Figura 33 se introduce el problema de la división de una recta por una parábola. El análisis de los signos (representados en el gráfico con los respectivos signos en cada tramo de la curva) se realiza de manera similar; y se introduce aquí el problema de las asíntotas, no sólo verticales, sino la asíntota horizontal. En la figura se identifican los puntos seguros y múltiplos de la unidad (×). Proponen como puntos destacados la abscisa para *h*=2 o *h*=-2, pues *q* es la mitad de *f* (♦). De manera análoga, es posible reproducir la técnica para construir cualquier punto de la curva (×). Puede interpretarse en la gráfica que se obtiene una representación $x = x_a$.

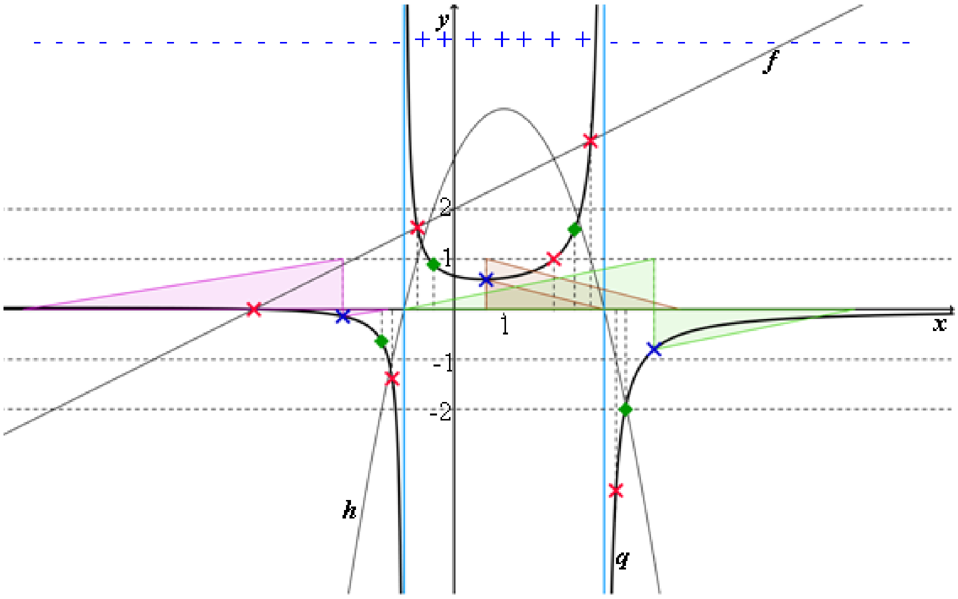


Figura 33: Representación gráfica de q. Situación 2.

Entre las características de la gráfica de *q*, resulta interesante analizar el caso de la división por cero, dado que en los recorridos que preceden, este aspecto no ha sido considerado porque tratan de la multiplicación de curvas y no del cociente como en estos casos. Es interesante analizar también el comportamiento de la gráfica razonable para *q* en los puntos próximos al "cero del denominador", debido a que en este punto hay una asíntota vertical.

Con las **situaciones 3 y 4** se obtienen algunos casos de representaciones algebraicas de las funciones racionales *q*. En estas situaciones se retoman las representaciones gráficas de las situaciones 1 y 2, pero se proporciona la escala de los ejes y se proponen algunos puntos que pertenecen a las funciones representadas gráficamente. El cambio a los marcos analítico, gráfico y funcional, permite analizar las asíntotas que son esenciales en el estudio de las funciones racionales. Las preguntas que se introducen al aula con las situaciones 3 y 4 son:

SITUACIÓN 3

Las funciones f y g están dadas por el gráfico de la Figura 34. La función f interseca al eje x en (5;0) y al eje y en (0;5). La función g interseca al eje x en (-2;0) y al eje y en (0;2). La función $q = \frac{f}{g}$.

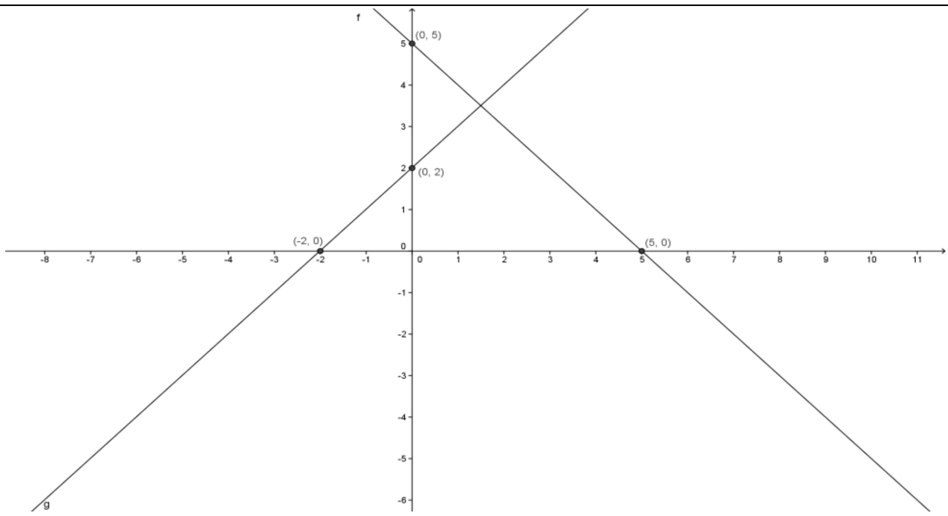


Figura 34: Representación gráfica de las funciones f y g.

a) Obtener las fórmulas posibles para q.

b) Graficar q e indicar las características de la gráfica que podes justificar

SITUACIÓN 4

Las funciones f y h están dadas por el gráfico de la figura 35. La función h tiene el vértice en (1;4) y los ceros en x=-1 y x=3. La función f interseca al eje x en (-4;0) y al eje y en (0;2). La función $q = \frac{f}{h}$

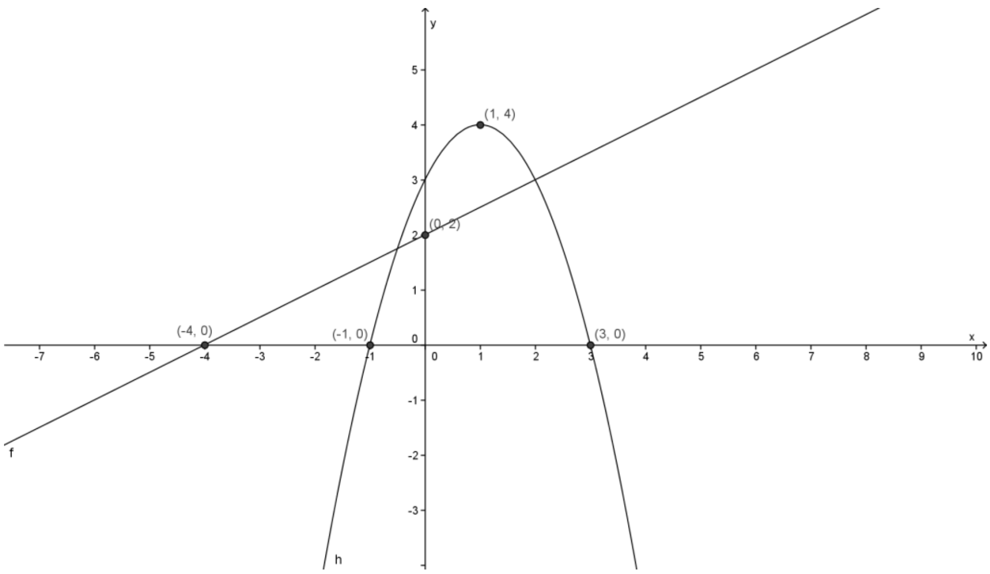


Figura 35: Representación gráfica de las funciones f y h

a) Obtener las fórmulas posibles para q.

b) Graficar q e indicar las características de la gráfica que podes justificar *c) ¿Es q una función?*

Las características de las representaciones analíticas de *q* se obtienen a partir de las representaciones de las rectas y la parábola en cada caso; y luego se define *q* como el cociente entre las mismas. Para la situación 3 la expresión algebraica de *q* queda determinada por $q(x)=\frac{-x+5}{x+2}$, y en la situación 4 por $q(x)=\frac{\frac{1}{2}x+2}{-x^2+2x+3}$ o su expresión equivalente $q(x)=\frac{\frac{1}{2}x+2}{-(x+1)(x-3)}$. A partir de la representación analítica es posible obtener cualquier ordenada para *q* y las ecuaciones de las asíntotas verticales (analizando los casos donde el denominador es cero) y horizontales (utilizando el algoritmo de la división y evaluando a la función *q* en valores de las abscisas muy grandes). Esto permite comprender y precisar el comportamiento de las ramas de la curva y obtener una gráfica bien aproximada de *q*.

En el caso del cociente entre una parábola y una recta (situación 4), es posible a partir del algoritmo de la división identificar la asíntota oblicua, que se corresponde con el cociente de la misma. La dificultad que podría presentarse aquí es relativa a los ceros, a la identificación de los diferentes tipos de asíntotas, y a los casos de puntos de discontinuidad. Para analizar en profundidad estos casos, se propone la **situación 5** que permite estudiar los casos de simplificación de las funciones racionales y retomar también las propiedades de los ceros asociadas a estas funciones. Con esta situación se introduce el problema de la conjetura *"los ceros de la función del numerador, son los ceros de la función racional"*, que hasta esta situación parecía sostenerse, pero que es falsa.

SITUACIÓN 5

Las funciones f y h están dadas por el gráfico de la figura 36. La función h tiene el vértice en (*0;-4*) *y los ceros en x=-2 y x=2. La función f interseca al eje x en (-2;0) y al eje y en (0;2). La función* $q=\frac{h}{f}$

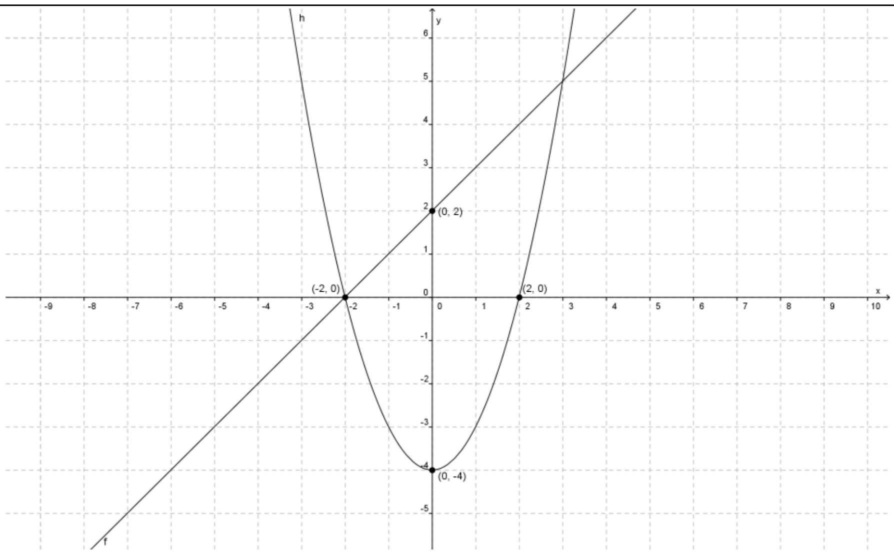


Figura 36: *Representación gráfica de las funciones f y h.*

a) Obtener la expresión algebraica y la representación gráfica de q.

b) Las situaciones 1 a 4 parecían sostener la conjetura: "los ceros de la función del numerador son los ceros de la función racional" ¿Es V o F que los ceros de h son también los ceros de q?

Aquí, $q=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=x-2$. La función *q* parecía ser una recta, pero tiene la particularidad de tener un punto de discontinuidad. Esta situación retoma el problema de los ceros de una función racional y permite estudiar el caso donde la función numerador y la función denominador comparten un cero, es decir, el caso en que una función racional tiene un punto de discontinuidad. También sirve de introducción para estudiar los casos de simplificación de funciones racionales.

Con la **situación 6** se analizan las diferentes representaciones gráficas y analíticas para *q* estudiadas a partir de las situaciones 3, 4 y 5; con el objetivo de profundizar la discusión acerca de los casos donde corresponde identificar asíntotas (verticales y horizontales) y cuándo puntos de discontinuidad. Se analizan también las características de la representación gráfica de las funciones racionales en cada caso. Para el desarrollo de esta situación se utiliza el software GeoGebra, lo que resulta un instrumento esencial para estudiar las asíntotas, no sólo por su simplicidad, sino porque proporciona información dada en diferentes marcos a la vez: numérico, gráfico, algebraico, funcional.

SITUACIÓN 6

Dadas las funciones racionales:

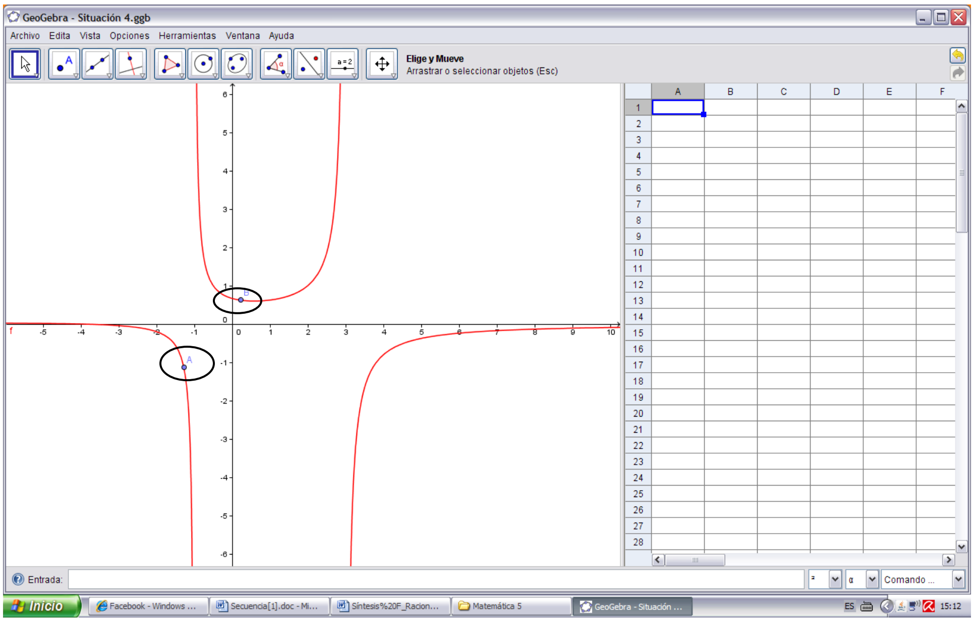
$$q_1(x) = \frac{-x+5}{x+2}, \quad Dom(q_1) = \Re - \{-2\}$$

$$q_2(x) = \frac{-\frac{1}{2}x+2}{-(x+1)(x-3)}, \quad Dom(q_2) = \Re - \{3,-1\}$$

$$q_3(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2}, \quad Dom(q_3) = \Re - \{-2\}$$

obtenidas en las situaciones 3, 4 y 5 respectivamente.

Utilizando el software GeoGebra, analizar las características de cada gráfica de q. El software está programado para que al realizar movimientos con el Mouse sobre cada punto (A , B o C) que se indica, puedan obtener en la tabla de la derecha los valores que toma la función q .



a) Analizar el comportamiento de q considerando valores de x muy próximos a aquellos que anulan el denominador.

b) Analizar el comportamiento de q considerando valores de x cuyo valor absoluto sea cada vez mayor.

Utilizando el software es posible analizar el comportamiento de la gráfica de cada función, y los datos numéricos aportarían información suficiente para analizar los valores próximos a los excluidos del dominio en las situaciones 3, 4 y 5. A partir de la utilización del software, pueden comprobar que definitivamente las funciones nunca cortan la “indeterminada”. En el caso de las funciones que tienen una asíntota horizontal, a medida que toman valores de x suficientemente grandes en valor absoluto, la función se acerca al valor de la asíntota, pero nunca es el mismo valor.

Por ejemplo, en la primer visualización correspondiente a q_1 es posible observar cómo al acercarse con el punto móvil suficientemente al valor *-2* la función crece rápidamente y toman valores positivos muy grandes. En la tabla de la Figura 37, los valores de la izquierda corresponden a la variable independiente y los de la derecha a *q*. Las últimas filas de esta tabla ejemplifican cómo es posible analizar el comportamiento de la asíntota vertical de la función, y por otro lado la idea de que las ramas de la gráfica de las funciones racionales son infinitas.

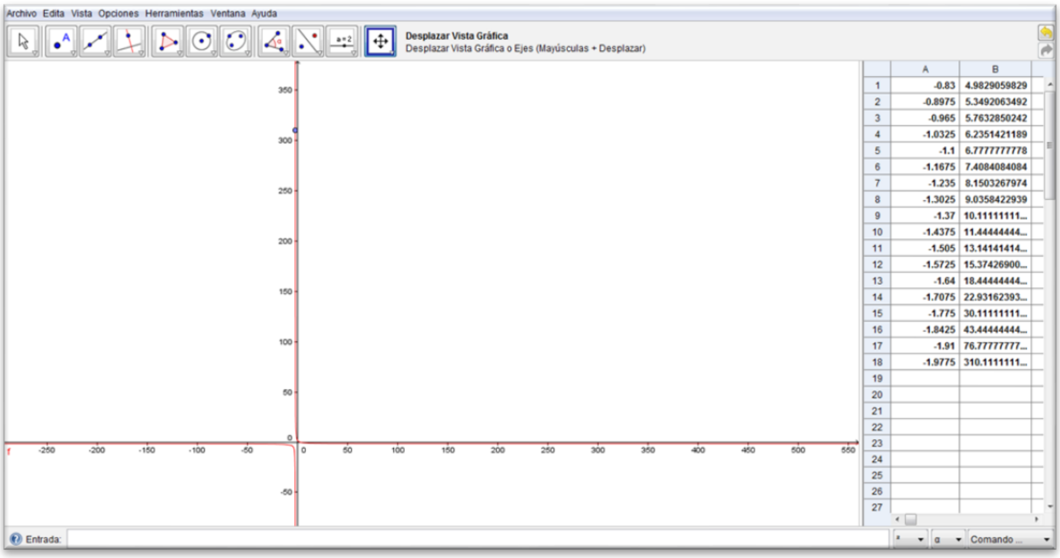


Figura 37: Representación gráfica de q_1 y análisis de la asíntota vertical.

Por otro lado, si se toman valores de x suficientemente grandes, se puede observar que la función tiene un decrecimiento muy lento y se acerca al valor -1, aunque nunca toma este valor. Corresponde a la asíntota horizontal, que en este caso se encuentra en y=-1. En la tabla de la Figura 38 puede interpretarse esta característica de la gráfica de q_1, de manera sencilla. De manera análoga se obtienen las características de las asíntotas para q_2, que es la situación dada en el enunciado.

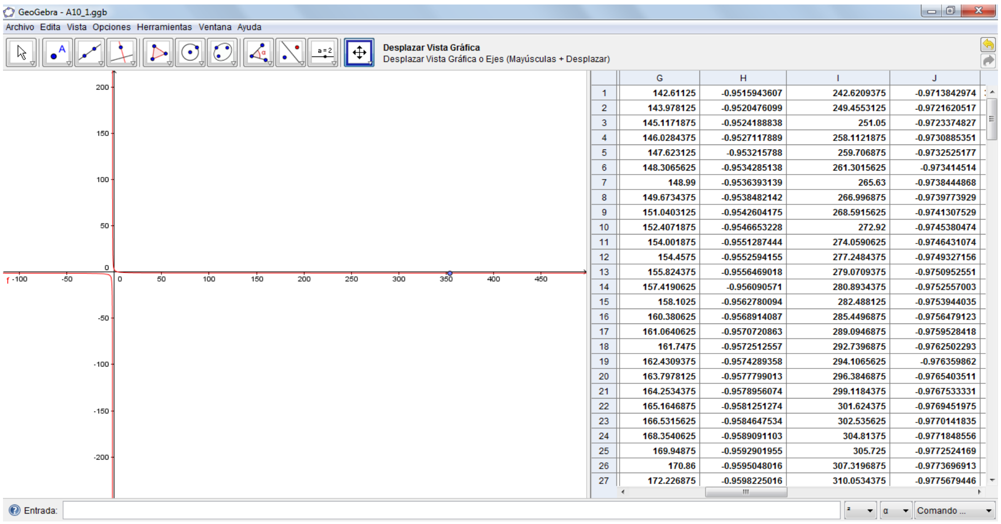


Figura 38: Representación gráfica de q_1 y análisis de la asíntota horizontal.

Para el caso de la función q_3, interesa analizar valores próximos a x=-2, que corresponde al punto de discontinuidad de la función. En este caso, el software "devuelve" valores para cualquier caso, excepto en ese punto. Esto permitiría por otro lado, entender la diferencia entre una asíntota y en este caso el punto de discontinuidad. En la Figura 39 se representa la gráfica de q_3, con la identificación del punto de discontinuidad y los valores analizados en el software.

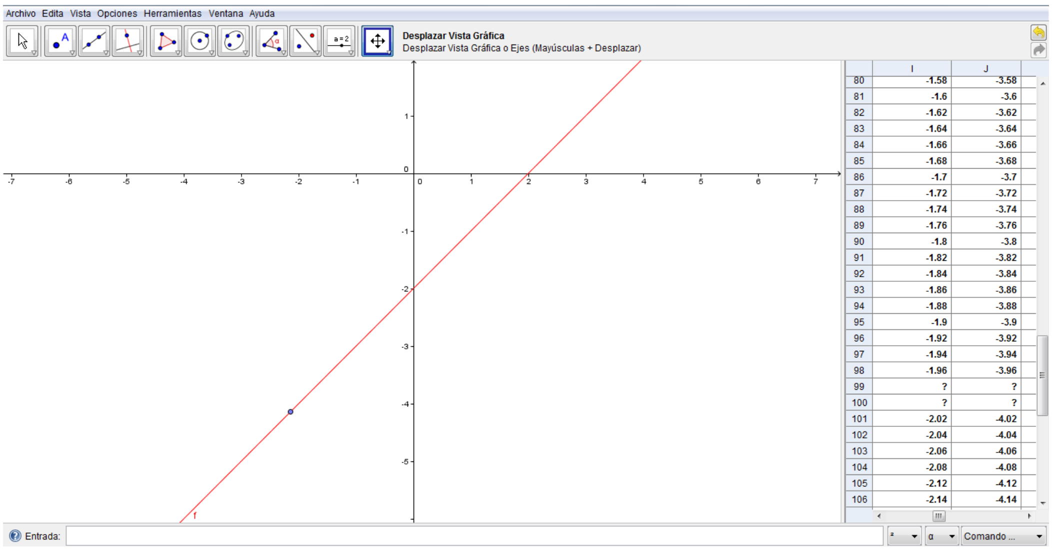


Figura 39: Representación gráfica de q_3 y análisis del punto de discontinuidad.

Una vez analizadas gráfica y analíticamente las características de las funciones racionales, se propone la **situación 7** con el objetivo de elaborar, explicar y justificar una técnica para realizar las operaciones con polinomios:

SITUACION 7

Las actividades 1-6 nos han permitido encontrar y analizar funciones racionales de la forma $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$*, donde f(x) y g(x) son polinomios, con g(x)* $\neq 0$.

Con ellas se pueden realizar las cuatro operaciones básicas que conocemos para los números (suma, resta, multiplicación y división).

Elaboren una técnica para realizar la suma, resta, multiplicación y división de funciones racionales. Propongan ejemplos e indiquen cuál es el procedimiento como si tuvieran que comunicárselo a otro. (Puede haber distintas maneras de hacerlo).

Utilizar el software GeoGebra para analizar las gráficas de los ejemplos que se proponen en cada caso.

Para resolver esta situación es posible generar una técnica por comparación con las fracciones. A partir de esta comparación, las técnicas para realizar estas operaciones podrían surgir sin mayores dificultades.

Además de las situaciones 1 a 8, en esta parte también se propone una síntesis, a la que se agregan ejercicios y problemas. La síntesis involucra las nociones matemáticas: funciones racionales, asíntotas, podría permitir ingresar en el estudio del límite, y también operaciones con funciones racionales (suma, resta, multiplicación y división de funciones racionales). Entre los alcances del diseño es posible mencionar que:

- Con las situaciones 1 y 2 es posible obtener una representación gráfica aproximada de *q* utilizando las técnicas de cálculo geométrico, que han sido readaptadas y modificadas para ajustarse a la situación propuesta. Una pregunta importante en este recorrido, es relativa al análisis de los ceros del denominador, dado que estos no pertenecen al dominio de la función *q*. En este marco se ha logrado analizar lo que ocurre en los puntos próximos a las asíntotas verticales, aunque un estudio más completo de las mismas pudo realizarse desde el marco algebraico.
- En el marco algebraico-cartesiano-funcional, al que se ingresó a partir de la situación 3, es posible obtener varias representaciones algebraicas para *q*, calculando algebraicamente el cociente de polinomios. Es posible efectuando el cociente de los polinomios, ingresar en el análisis de las asíntotas, de las

propiedades de los ceros, los casos de simplificación y análisis de puntos de discontinuidad.

- El uso de la herramienta informática GeoGebra, es muy importante en este diseño, no sólo porque permite analizar las ecuaciones de las asíntotas, sino además porque permite considerar los diferentes casos de simplificación e identificar los puntos de discontinuidad analizados.
- Otro resultado de interés que podría obtenerse en el marco analítico, es relativo a las técnicas para realizar las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división con funciones racionales.

REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2012) Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. *12th International Congress on Mathematical Education*. 8 – 15 July, 2012, Seoul, Korea. http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 161-182. doi: 10.447/redimat.2013.26.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet Dans l´enseignement des mathématiques: une réalisation dans tout le cursus primaire.* Thèse de doctorat d´état. Spécialité : Didactique des Mathématiques. Soutenue le 10 Octobre 1984.

Douady, R. (1999) Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16). *European Research in Mathematics Education I*: Group 1. pp. 113-124. Forschugsinstitut für Matematikdidactiktik, Osnabrück.

Ferrari, M.; Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME)*, 11 (3), pp. 309-354.

Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013). Research and Study Paths in the Teaching of Mathematics at Secondary school relative to the Rational Functions. *Journal of Arts & Humanities*, 2 (3), pp. 109-115.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013a) Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*, 73, pp. 17-24. Valencia, España

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013b) La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde: une étude longitudinale dans l'école secondaire argentine. *Review of Science, Mathematics and ICT Education. Re SM TICE*, 7 (1), pp. 27-46. Universidad de Patras, Grecia.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 18 (2), pp. 245-275.

Llanos, V. C.; Otero, M. R.; Colombo, E. (2015). The polynomial functions as result of multiplying curves in the framework of a Research and Study Paths. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*; 4 (1), pp. 80-98.

Otero, M. R. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico. En M. R. Otero; M. Fanaro; A. R. Corica; V. C. Llanos; P. Sureda; V. Parra (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática* (pp. 15-28). Editorial Dunken, Buenos Aires, Argentina.

Otero, M. R.; Fanaro, M.; Llanos, V. C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el *Inquiry*: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC)*, 8 (1), pp. 77-89.