Crossfit cerebral N.° 17

Ilusiones y juegos matemáticos

La herencia de Messi

(Adaptación del problema 'La herencia de los 35 camellos')

La otra noche, entre tanto festejo prolongado mezclado con los problemas matemáticos propios del trabajo, tuve un sueño algo extraño: que Leo me llamaba para que lo ayude con unas cuentas. Resulta que él quería repartir las camisetas que tiene en su museo entre los miembros de su familia. Ya le había dado una parte a sus padres y hermanos, y quería repartir las restantes entre sus tres hijos, de una forma muy precisa: a Thiago, el mayor, quería darle la mitad de las camisetas que le quedaban; a Mateo, el del medio, le dejaría la tercera parte y, finalmente, a Ciro le tocaría la novena parte.

¿Para qué me llamaba a mí en el sueño? Porque a Leo le quedaba un total de 35 camisetas en su museo. Según la forma de repartirlas que indicó, y redondeando los resultados, a cada uno de sus hijos le tocarían:

- Thiago: 17,5 camisetas.
- Mateo: 11,67 camisetas.
- Ciro: 3,89 camisetas.

Pero, ¡ni siquiera en un sueño alguien se atrevería a cortar una de esas camisetas para hacer el reparto! Leo quería mantener estas proporciones sin dañar ninguna de sus camisetas.

Entonces, en el sueño, yo le propuse lo siguiente: le pedimos a la mamá de Leo que nos 'preste' una de las camisetas que ya se había llevado, y la agregamos a las que hay para repartir entre sus hijos. Ella lo hizo con gusto para poder resolver este problema entre sus nietos, ya que así Leo tendría 36 camisetas en total, y esta cantidad se puede dividir por 2, por 3 y por 9. Así, en el reparto quedaría:

- Thiago: 18 camisetas.
- Mateo: 12 camisetas.
- Ciro: 4 camisetas.

Como podemos ver, a cada uno le toca ahora más de lo que le correspondía originalmente con la división 'con coma', así que todos quedaron felices.

Listo, problema resuelto, ya que todos tienen lo que Leo quería (y más): 18, 12 y 4, respectivamente. La única que perdió algo, por ahora, es la mamá de Leo, ya que donó una de sus camisetas. Y digo 'por ahora' porque, si sumamos la cantidad de camisetas que tienen los hijos de Leo, obtenemos 18 + 12 + 4 = 34. Teníamos 36 camisetas para repartir, así que sobran 2 aún. De ahí sacamos una para devolverle a la madre de Leo y, la restante, ¡me la llevé yo por haber solucionado el problema!

Lamentablemente, me desperté y no tenía esa camiseta. Pero, aunque en los sueños solemos razonar de forma incorrecta, la conclusión no tiene errores. Entonces, ¿dónde está la 'trampa'? ¿Cómo pueden recibir más de lo que les tocaba originalmente y, aún así, sobrar dos camisetas?

Ajedrez y grafos II

0. Comentarios previos

En lo que sigue, vamos a mencionar grafos. No hace falta complicarnos la vida con definiciones precisas, simplemente pensemos en algunos puntos (los vértices) y ejes que conectan pares de puntos de este conjunto (las llamaremos aristas).

También hace falta recordar cómo se mueve un caballo sobre un tablero de ajedrez: dos casillas en dirección vertical (respectivamente, horizontal) y luego una casilla en dirección horizontal (respectivamente, vertical). El dibujo forma una *L*, que puede estar reflejada, rotada, acostada y/o cabeza abajo.

Para indicar las casillas de un tablero tenemos la notación cartesiana letra-número, por ejemplo a1 es la esquina inferior izquierda. Y un caballo en c4 puede ir a a3, a5, e3, 35, b2, d2, b6 o d6. Matemáticamente, el movimiento del caballo suma o resta 1 en un eje, y suma o resta 2 en el otro.

1. Caballos y tableros de ajedrez

A mediados del siglo XVIII Leonhard Euler introdujo un problema divertido: ¿puede un caballo de ajedrez recorrer todas las casillas del tablero sin pasar dos veces por la misma? El resultado, afirmativo, es largo de describir aquí, y se ha generalizado a muchos tipos de tableros. Pero dejemos algunos problemas divertidos:

A. No se puede hacer el recorrido del caballo en un tablero de 3 × 3. ¿Por qué?

B. Sí se puede en uno de 3 × 4. ¿Empezando en qué casillas?

C. También se puede en uno de 3 × 5. *¿Se puede empezar, y terminar en una casilla que permita volver a la original?*

Las soluciones, como siempre, al final.

2. Caminos eulerianos y hamiltonianos

El problema de los puentes de Königsberg que mencionamos en el número anterior, y que planteó y resolvió Euler, busca encontrar un camino euleriano: recorrer todas las aristas del grafo (sin pasar dos veces por la misma).

Los problemas A, B, y C se refieren a caminos hamiltonianos: recorrer todos los vértices del grafo sin repetirlos. Encontrar caminos hamiltonianos en un grafo dado es un problema NP completo. O sea, difícil de resolver por fuerza bruta, demasiadas posibilidades para revisar.

Más allá de los cinco sentidos (clásicos). Parte 1: propiocepción

Desde que somos chicos, muchas veces nos han enseñado que contamos con cinco sentidos específicos para percibir el mundo: la vista, el tacto, el oído, el olfato y el gusto. Sin embargo, ¿alguna vez se preguntaron si estos sentidos son los únicos? ¿Podemos percibir cosas que vayan más allá de estos sentidos 'clásicos'? En otras palabras, ¿tenemos receptores que midan otras variables, aparte de las ondas electromagnéticas en el espectro 'visible', la presión en nuestra superficie corporal, las ondas sonoras, las moléculas de sustancias volátiles en el aire, y las moléculas de sustancias que ingresan en nuestras bocas, respectivamente?

La respuesta a este interrogante es *sí* y, de hecho, no se trata tan solo de uno o dos sentidos adicionales, sino que contamos con –al menos– otros cinco sentidos, que son menos conocidos por la población general, pero que son igual (o incluso más) importantes. Este constituye el primer capítulo de una saga que abarcará las próximas cuatro entregas del 'Crossfit cerebral', en las que nos centraremos en cada uno de esos sentidos 'olvidados', e ilustraremos su relevancia por medio de ilusiones que nos permitirán engañarlos a todos. Hoy les damos la bienvenida al mundo de la propiocepción.

La propiocepción es un sentido encargado de dos funciones concretas:

1. Medir la posición de las partes de nuestro cuerpo relativas unas a otras. Es por esto que somos capaces de, con los ojos cerrados, tocar nuestra nariz con nuestra mano sin 'pifiarle': sabemos dónde está nuestra nariz en relación con nuestra mano.
2. Estimar cuánta fuerza estamos haciendo o vamos a hacer al manipular algún objeto en nuestro entorno. Es por esto que, por ejemplo, si alguien está cargando una mochila pesada pero de una forma que la hace parecer liviana, al recibir esa mochila de parte de esa persona nuestros músculos no se encontrarán 'calibrados' para sostener ese peso, y tenderemos a tambalearnos o a dejarla caer (al menos unos centímetros).

Este sentido es muy importante para poder movernos y manejarnos de forma eficiente en nuestra vida cotidiana (y nos permite adoptar posturas particulares, como las del yoga, que nos serían imposibles si no contáramos con una buena propiocepción). Ahora, lo divertido: vamos a engañar nuestra propiocepción. Para eso, te proponemos que hagas dos ejercicios, uno por cada una de sus funciones:

1. Tomando una canica, bolita de tamaño similar, o incluso cualquier objeto parecido (como un maní), deben colocarla en la palma de una mano, y con la otra, cruzar los dedos índice y medio (si esto les resulta dificultoso, ayúdense con la otra mano, hasta lograr un buen cruce de dedos). Luego, como se observa en la primera foto, apoyen los dedos cruzados sobre la canica, de tal modo que ambos estén en contacto con ella. A continuación, deben mover *muy despacito* la canica alrededor del centro de la palma, tratando de que ninguno de los dos se despegue de ella; por último, cierren los ojos, o miren hacia arriba. Puede que les tome un rato en percibir la ilusión, pero es muy raro que falle, por lo que sigan intentando, hasta que la pregunta '¿cuántas canicas hay?' cobre un nuevo sentido.

¿Cómo es posible que se sienta más de una? La explicación está en nuestra propiocepción: en un principio, notamos cómo los dedos están cruzados, porque percibimos cada uno con relación al otro; no obstante, después de un rato, la propiocepción deja de medir esto correctamente, 'se olvida', y cree que están descruzados (como uno suele tenerlos). Como los puntos en los que estamos en contacto con la canica son la cara izquierda del dedo índice, y la cara derecha del dedo medio, si estos estuvieran descruzados, tendría que haber necesariamente dos canicas. No mirar la canica nos hace perder la información visual, que ayuda a preservar la sensación de que solo hay una, y así se produce el efecto. Una vez que ya le tomaron la mano a la ilusión, podrán incluso sentir 'el espacio entre las *dos* canicas', que es algo completamente ficticio. Los expertos pueden probar repetir este procedimiento con la propia nariz: algunos podrán percibir con bastante claridad que tienen ahora dos narices en lugar de una.
2. El siguiente ejercicio consiste en agarrar dos marcadores o resaltadores que tengan al menos un extremo

plano (cada uno). Deben sostenerlos como se observa en la foto, y hacer fuerza uno contra otro (con cuidado, para que no deslicen, lo que podría lastimarlos). Se debe sostener la fuerza (intensa), uno contra otro, durante alrededor de 30 segundos. Al finalizar este tiempo, *muy despacio, muy de a poco*, se debe ir aflojando la fuerza, hasta dejar de hacerla por completo, y separar levemente los marcadores. Si la fuerza y el tiempo fueron suficientes, el efecto será inconfundible: se sentirá como si los marcadores estuvieran imantados, requiriéndose un leve esfuerzo para poder separarlos. Si a la primera no consiguen sentir esto, intenten de nuevo. Cuantas más veces se repita el ejercicio, más fuerte será el efecto. ¿Cómo puede ser que se sienta una 'imantación', cuando los materiales no son magnéticos, y solo se los presionó uno contra el otro? La clave no está en los marcadores, sino en nuestra propiocepción: al hacer mucha fuerza, hay células que miden exactamente cuánta fuerza estamos haciendo. Sin embargo, al sostenerla durante varios segundos, se empiezan a cansar, y comienzan a medir mal, *subestimándola*: creemos que estamos haciendo menos fuerza de la que realmente estamos haciendo. De esta manera, supongamos que creemos estar haciendo una fuerza de '10' (en alguna unidad inventada), pero en realidad estamos haciendo una fuerza de '15'. Al bajar la fuerza que hacemos de forma lenta, bajamos de 10 a 9, a 8…, hasta llegar a 2, 1, y finalmente 0. Sin embargo, como en realidad estábamos haciendo '15', ese 0 no es el 0 real, sino que es '5'… ¡seguimos haciendo fuerza sin darnos cuenta! En otras palabras, la fuerza que nos impide separar los marcadores es nuestra propia fuerza que, aunque sintamos que no, seguimos aplicando sobre ellos.

De esta forma, pusimos de manifiesto un nuevo sentido, distinto de los cinco que aprendimos en primaria: la propiocepción, que mide posiciones relativas entre las partes de nuestro cuerpo, y la fuerza ejercida por nuestros músculos. Y como ocurre con todos los sentidos, puede ser engañada. Nos vemos la próxima, para conocer otro de estos 'nuevo sentidos', y por supuesto, ¡cómo burlarlo con nuevas ilusiones perceptuales!

Soluciones:

La herencia de Messi

La solución es bastante sencilla y radica en saber sumar fracciones, ya que . Estas son las fracciones de herencia que le tocaba a cada hermano, y su suma da como resultado una cantidad menor que 1. Es decir, no se estaba repartiendo la herencia completa. Esto se ve mucho más claro cuando uno suma los números 'con coma' que se obtienen al dividir las 35 camisetas: 17,5 + 11,67 + 3,89 = 33,06, por lo que se estaban repartiendo algo más que 33 camisetas. Al agregar una más, se reparten por eso cada uno recibe más y, aún así, sobran 2.

Ajedrez y grafos II

A

B

C

Equipo de la sección 'Ilusiones y juegos matemáticos'

Federico Barrera Lemarchand
Físico, UTDT, UBA-Conicet.
fedex192@hotmail.com

Marilina Carena
Matemática, UNL-Conicet.
marilcarena@gmail.com

Giulia Solange Clas
Bióloga, INEU, FLENI-Conicet.
clas.giulia.s@gmail.com

Nicolás Fernández Larrosa
Biólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet.
fernandezlarrosanicolas@gmail.com

Pablo Groisman
Matemático, UBA-Conicet.
pgroisma@dm.uba.ar

Matías López-Rosenfeld
Computador, UBA-Conicet.
mlopez@dc.uba.ar

Mariano I Martínez (coordinador)
Biólogo, MACN-Conicet.
mmartinez@macn.gov.ar

Juan Pablo Pinasco
Matemático, UBA-Conicet.
jpinasco@gmail.com

Alfredo Sanzo
Ingeniero, UTN, UBA-Conicet.
alfredo.sanzo@gmail.com

Preguntas, comentarios y sugerencias: ***contacto@cienciahoy.org.ar***