Crossfit cerebral N.° 20
Ilusiones y juegos matemáticos

Apuesto a que pierden…

Lo que voy a exponer a continuación tiene que ver con una experiencia personal dentro de los casinos. No tiene nada que ver con probabilidades sino más bien con el sentido común.

Algunas de las veces que visité un casino tuve la posibilidad de caminar alrededor de las ruletas y observar las pantallas individuales en las que se realizan las apuestas. Pude ver que varios jugadores repetían un patrón, el cual intentaré relatar a continuación.

Digamos que alguien, llamémoslo Juan, quiere apostar 'a color'. Para quien no sepa, esto simplemente consiste en apostar al color del número que se cree que será el ganador, rojo o negro, y para hacerlo se colocan una o más fichas en el marcador del color correspondiente en el tapete de apuestas. Se gana una ficha por cada una apostada al color que resultó ganador, y se pierden las colocadas en el color que no salió. Así, si Juan apuesta una ficha al rojo y la bola cae sobre un número de color rojo, entonces Juan obtiene dos fichas (la que apostó más una de premio por ella). Si la bola no cae en un número de color rojo, entonces Juan pierde la ficha que apostó. En la ruleta hay 18 números de color rojo y 18 de color negro. Pero también están el 0 y 00 que son de color verde.

¿Cuál es el patrón que pude observar muchas veces? Que si Juan quiere apostar al rojo, en lugar de simplemente colocar una ficha en el casillero rojo, coloca dos en el rojo y una en el negro. Es decir, 'refuerza' el color al que quiere apostar, pero coloca una en el negro 'por las dudas'. Por algún motivo, mucha gente cree que esto es mejor que apostar solo una ficha al rojo. Hagamos el ejercicio de imaginar las posibles opciones en cada caso:

Si apuesta dos fichas al rojo y una al negro:

- Si sale rojo: obtiene 4, pero había apostado 3, o sea que la ganancia real es de una ficha.
- Si sale negro: obtiene 2, pero había apostado 3, así que en realidad pierde una ficha.

Si apuesta solo una ficha al rojo y ninguna al negro:

- Si sale rojo: obtiene 2, pero había apostado 1, o sea que la ganancia real es de una ficha.
- Si sale negro: no gana nada, así que pierde una ficha.

Si comparamos las opciones anteriores, en ambas el resultado es el mismo: gana una ficha si sale rojo o pierde una si sale negro. Sin embargo, estamos dejando de lado la posibilidad de que salga el 0 o el 00. En dicho caso, ¡Juan pierde tres fichas en el primer caso, y solo una en el segundo!

Entonces, si la primera forma de apostar solamente incrementa la pérdida en caso de no ganar, y no aumenta las probabilidades de ganar, ¿por qué muchos la eligen? En realidad no tengo respuestas a eso, pero puedo imaginar dos posibilidades. La primera es que no comprenden el funcionamiento del juego. La segunda tiene que ver con un factor psicológico: al apostar 2 y 1, mientras no salgan el 0 o el 00, siempre se acreditan fichas (4 o 2, según lo que salga). Esto da la sensación de que algo se ganó, aunque ya vimos que si sale negro en realidad se perdió una ficha. En cambio, al apostar solo una ficha al color rojo, si sale negro no se acredita nada, y la pérdida es más evidente en nuestra mente.

La situación descripta no solamente la vi muchas veces, sino que también la pude observar en otras apuestas de la ruleta: en las docenas, los números, etcétera. Se apuesta a casi todo, y se 'refuerza' lo que en realidad se quería apostar inicialmente. Como vimos, esto solamente aumenta la posible pérdida y no incrementa la posible ganancia ni las probabilidades de tenerla.

Yo estaba primero

Tomémonos unos minutos de relax y de distensión entre tanta vorágine para pensar en una situación agradable, de pleno goce. Martes, final de mes, son las 10.05 de la mañana. Traspasamos la puerta de entrada con expectativa, una máquina nos da un papelito impreso, a paso firme atravesamos el corredor. Perplejos ante el escenario que se nos ofrece, una sonrisa triunfal se dibuja en nuestro rostro. Hoy estamos de suerte, la sala de espera del banco está vacía, seremos los próximos en ser atendidos. El trámite que fuimos a hacer no tomará más que tan solo unos pocos minutos.

Confiados, a la espera de que el tablero digital llame al M2, nuestro afortunado número, un señor muy paquete, de traje y mocasines, toma asiento a unos pocos lugares de donde estamos. Para nuestros adentros, como proponiendo una microcompetencia de lo cotidiano, pensamos 'cómo te gané'. En pleno regocijo silencioso, suena el llamado para que el próximo cliente se aproxime a la zona de cajas. Nos ponemos de pie, estamos casi para cantar el himno, damos un paso al frente y, no sin asombro, vemos cómo el señor pituco toma la delantera y desaparece tras los biombos. Alzamos la mirada y vemos en la pantalla 'L1' y no así nuestro número de la suerte.

Para darnos ánimo pensamos que un tropezón no es caída, pero la situación se vuelve a repetir con otra señora que llega mientras estamos volviendo a tomar asiento, y luego con una sucesión de personas que van llegando y colmando la sala de espera, todas las cuales pasan antes que nosotros. 'K1', 'K2', 'A3', 'B1', 'D2', 'K3'… Con la sonrisa ganadora transfigurada ya en la del Guasón, no logramos explicarnos cómo pasamos de ser los próximos en ser atendidos a estar tres horas sentados en el banco viendo un sinfín de personas pasar antes que nosotros.

Quizá haya lectores muy jóvenes que no lo saben, pero hubo un tiempo en donde uno iba al banco y le daban un número que representaba el orden de llegada. Es decir, si había 25 personas que habían llegado antes que uno, te atendían en el 26.º llamado, sin importar cuánta gente llegara después. Hoy en día, esa lógica fue modificada por la de las *colas con prioridad*. El caso más sencillo que podemos pensar es en el cual tenemos una cola VIP y otra no VIP. Mientras haya personas en la cola VIP, ellos tienen prioridad de atención en desmedro de los clientes no VIP, sin importar que estos hayan llegado mucho antes que los clientes preferenciales.

Este modelo no solo se aplica a los bancos, sino que hoy en día también se lo ve en otros ámbitos como las turneras de las farmacias y, desde hace mucho tiempo, en las salas de urgencias de los hospitales (en donde implementan un método conocido como triaje o *triage*). Si bien aplicar el modelo en bancos y farmacias es cuestionable, en absoluto lo es para las urgencias médicas: definitivamente, alguien que se accidentó jugando con una motosierra debería ser atendido con mayor prioridad que alguien que se torció el tobillo.

¿Y todo esto qué tiene que ver con la computación? Cuando utilizamos el celular o la computadora, el sistema operativo (Windows, Linux, Android, iOS, etcétera) ejecuta muchos programas, o procesos, de forma concurrente. En otras palabras, la cantidad de procesos que vamos a poder ejecutar al mismo tiempo es, a lo sumo, igual a la cantidad de procesadores que tenga nuestra computadora. Si solo tiene un procesador, puede ejecutar un proceso a la vez (ver apartado 'Robando rondas' de esta sección del vol. 30, N.º 175). Por ende, el sistema operativo debe ir decidiendo qué proceso es el próximo que va a hacer uso de la CPU. Como es de suponer, no todos los procesos son igual de prioritarios y por ende algunos deberían ejecutarse antes que otros. Por ejemplo, los procesos básicos que hacen que el sistema operativo funcione correctamente suelen tener mayor prioridad que un proceso asociado a una pestaña del navegador web. Para los más curiosos, pueden ir a su administrador de tareas/procesos amigo y verlo con sus propios ojos (también le pueden cambiar la prioridad a un proceso; pero, ojo, uno debería tener muy buenas razones para hacerlo).

Como aprendimos de la lección en el banco, este esquema de colas con prioridades, en donde primero se atiende a los procesos de mayor prioridad, puede generar que aquellos procesos de menor prioridad se queden esperando indefinidamente para poder usar la CPU. A este fenómeno se lo conoce como *inanición*, o *starvation* en inglés, y escenifica el caso extremo en donde un proceso con baja prioridad jamás puede acceder al procesador porque siempre llegan nuevos procesos de mayor prioridad a los cuales el sistema operativo prioriza. Cuenta la leyenda que, en 1973, al apagar una máquina muy importante que llevaba varios años prendida, detectaron que había un proceso que llevaba esperando para ser ejecutado ¡desde 1967!

Hoy en día, programadoras y programadores de sistemas operativos modernos están advertidos sobre esta problemática y diseñan algoritmos que evitan que un proceso sufra de inanición. De las siguientes estrategias, ¿cuál considerás que podría llegar a producir inanición y cuál la evita? Suponer que contamos con 10 niveles de prioridad donde 10 es la máxima y 1 la mínima, y que dentro de cada cola se atiende a los procesos por orden de llegada.

1. Si después de 5 segundos un proceso no obtuvo acceso a la CPU, su prioridad aumenta en 1.
2. La prioridad de cada proceso es asignada por el sistema operativo en función del tiempo de CPU que se supone que va a requerir. Así, un proceso que fuera a utilizar la CPU por muy poquito tiempo tendrá prioridad de 9 o 10 mientras que un proceso que vaya a tardar mucho tendrá menor prioridad. La idea detrás de esta estrategia es minimizar el tiempo promedio de espera para acceder al procesador.

¿Conocés el teorema de Arrow?

El teorema es realmente lindo:

Teorema. Sea *Sk* el conjunto de todas las formas de ordenar *k* objetos con *k* > *2*. Sea *f* una función de *Sk^N* (tiene *N* variables y cada una es un orden de los *k* objetos), cuya imagen pertenece a *Sk* (es decir, nos devuelve algún orden de los *k* objetos).

Supongamos dos cosas:

1. que $f(x,\ldots,x) = x$, esto es, si todas las variables toman el mismo orden, nos devuelve ese mismo orden, y
2. que si calculamos $f(x,y,\ldots,z)$, pero ahora cada votante mueve un cierto objeto en su orden (todos un mismo objeto o) y nos quedan nuevos órdenes x', y',..., z', el resultado de $f(x',y',\ldots, z')$ no modifica el orden relativo de los demás objetos, solo o cambia de posición.

Entonces hay solo N funciones f posibles: $f(x,y,\ldots, z) =x$, $f(x,y,\ldots,z) = y$,..., $f(x,y,\ldots,z) = z$.

* * *

La interpretación original de este teorema está relacionado con la elección social: si N votantes ordenan k candidatos y los ordenan según sus preferencias, no hay forma de elegir un orden social entre los candidatos que no sea preguntarle a uno de los votantes qué orden prefiere (ese votante es llamado el Dictador).

Existen muchas objeciones al teorema de Arrow, pero ninguna se sostiene. Muchas veces se argumenta que no votamos órdenes, sino por un solo candidato, pero eso no es una verdadera objeción: un candidato es un orden truncado, y hay versiones para ese caso también. La demostración que figura en Wikipedia está muy bien, se entiende, y se debe a Geanakoplos.

Cuando Arrow recibe el Nobel de economía a principios de los años 70, hubo una explosión de estos teoremas de imposibilidad. Muchos provienen de aplicaciones en computación, tales como ordenar tareas en un procesador dados los diferentes requerimientos de memoria o cómputo que cada una lleva y las aplicaciones que las solicitan. En nuestro ambiente, producir un orden de mérito para un concurso docente o de investigación plantea un problema similar.

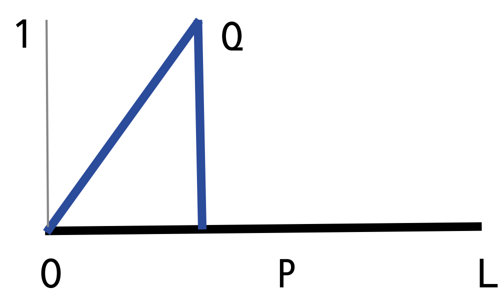
Y es interesante que el origen del teorema se remonta a Borda y Condorcet, matemáticos de la Academia de Ciencias de Francia, que durante la Revolución francesa discutían estos problemas y proponían distintos métodos para llevar a cabo una elección.

Ah, no, no es que estuvieran discutiendo sobre cómo implementar una democracia, gran problema de ese momento. El problema que se planteaba era cómo elegir los nuevos miembros de la Academia de Ciencias...

* * *

Como estuve pensando todo el mes un problema sobre esto pero no se me ocurrió ninguno, les dejo otro que no tiene nada que ver con lo anterior. Acá apenas elegiremos un punto P sobre un segmento de longitud L, al azar, cualquier punto tiene la misma probabilidad de ser elegido (distribución uniforme, que le dicen los que saben). Ahora, elegimos un punto Q a distancia 1 del anterior, sobre la recta perpendicular al segmento que pasa por P, y formamos un triángulo conectándolo al extremo izquierdo O del segmento.

¿Qué área esperan que tenga ese triángulo? Es decir, si repitieran este procedimiento un millón de veces y promedian las áreas, ¿qué resultado creen que dará?



Más allá de los cinco sentidos (parte 4): nocicepción

Existe un sentido del que poco se habla pero que desempeña un papel fundamental en nuestra vida cotidiana: la nocicepción. Este sentido es esencial para nuestra rutina diaria, ya que nos alerta cuando algo en nuestro entorno o en nuestro propio cuerpo podría causarnos daño. Gracias a este sentido es que retiramos la mano rápidamente si tocamos la hornalla prendida.

En el corazón de la nocicepción se encuentran los nociceptores, receptores de dolor especializados ubicados en todo nuestro cuerpo. Estos receptores están diseñados para detectar estímulos potencialmente dañinos, como el calor extremo, el frío intenso, la presión excesiva o las sustancias químicas irritantes. Cuando un nociceptor detecta un estímulo doloroso, envía señales eléctricas al cerebro para que lo percibamos como dolor.

Sin este sentido, correríamos el riesgo de perder extremidades por no darnos cuenta de que nos estamos quemando, por ejemplo. Estas situaciones que ocurren en la cotidianidad representan un gran riesgo para las personas con insensibilidad congénita al dolor, una condición presente al nacer en la que no se puede percibir el dolor físico, y que se da por mutaciones en genes puntuales.

Por otro lado, el síndrome de la pierna fantasma evidencia lo interesante y complejo que puede ser el sistema nociceptivo. Si bien este síndrome fue descripto por el cirujano militar francés Ambroise Paré en el siglo XVI, aún en la actualidad no tenemos una explicación clara de este fenómeno. En este síndrome, las personas que han perdido una extremidad, como una pierna, todavía sienten sensaciones y, a menudo, *dolor* en la extremidad que ya no está presente.

Se estima que alrededor del 60 % al 80 % de las personas amputadas experimentan este fenómeno, pero… ¿cómo se explica el hecho de sentir dolor en una extremidad que ya no está?

A pesar de que la extremidad física se ha amputado y los nociceptores que solían enviar señales desde esa área ya no están, en algunos casos el cerebro sigue interpretando señales como si esa parte del cuerpo aún estuviese ahí, lo que da lugar a sensaciones ilusorias en la extremidad fantasma. Si bien, como mencionamos, no se conoce exactamente qué es lo que origina este dolor, una de las explicaciones más aceptadas en el último tiempo tiene que ver con que, cuando una persona sufre una amputación, el cerebro reorganiza sus mapas de representación de las partes del cuerpo. Las áreas que solían representar la extremidad amputada comienzan a representar otras partes del cuerpo, como la zona adyacente a la extremidad amputada. Esta reorganización cortical puede explicar por qué la estimulación nociceptiva de los nervios en el muñón o en el área circundante puede producir la sensación de dolor en la extremidad que ya no está presente físicamente.

Como en todas las ediciones, te vamos a proponer un experimento para que puedas engañar tu sentido de la nocicepción. El experimento consiste en lo siguiente: colocá una de tus manos fuera de tu vista y, en su lugar, improvisá una réplica de ella con un guante relleno de algodón (más o menos como te mostramos en la foto). Luego, pedile a alguien que con dos pinceles toque *al mismo tiempo* y varias veces la mano que tenés fuera de tu vista y la mano falsa que creaste (ver las flechas). Es importante que la persona que te está ayudando toque siempre en simultáneo tu mano y la mano falsa. De repente, la persona clava un tenedor en la mano falsa… ¿Sentiste algo? Es probable que, por al menos un segundo, experimentes dolor, aun sabiendo que la mano no es real. Este fenómeno ilustra cómo la sugestión y la percepción están estrechamente relacionadas en la experiencia humana.

Esperamos que esta exploración de la nocicepción te haya resultado interesante. ¡Nos vemos en la próxima edición, donde analizaremos el último de estos sentidos poco conocidos!

Soluciones:

Yo estaba primero

A la primera estrategia se la conoce como *envejecimiento*, o *aging* en inglés, y no produce inanición. En el peor de los casos, un proceso que tenía asignada la menor prioridad tardará 50 segundos en entrar a la cola de mayor prioridad. Dentro de esa cola, los procesos se atienden por orden de llegada, así que solo tendrá que esperar a que se ejecuten los procesos que están delante suyo para poder acceder al procesador.

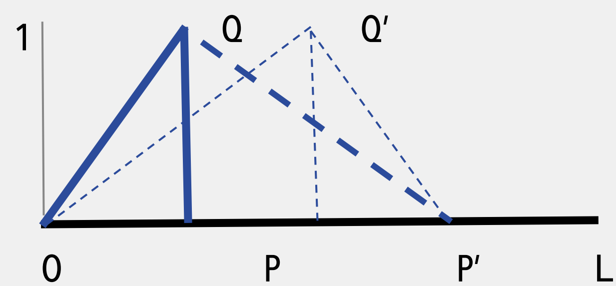
A la segunda estrategia se la conoce como SJF (*Shortest Job First*, o proceso más corto primero) y, si bien es óptima minimizando el tiempo promedio de espera, puede producir inanición, haciendo que un proceso que se supone que va a requerir mayor tiempo de CPU deba esperar indefinidamente porque constantemente llegan procesos más cortos que él a los cuales se les asigna mayor prioridad.

¿Conocés el teorema de Arrow?

El área esperada es L/4.

El triángulo OPQ y PQL tienen la misma probabilidad de ocurrir (para todo punto P tenemos otro punto P' y las áreas de PQL y OP'Q' son iguales). Es decir, para todo triángulo que se forme, hay otro con la misma probabilidad de ocurrir.

El área de OQL es L/2 (base L, altura 1), con lo cual el área esperada es la mitad de L/2



Equipo de la sección 'Ilusiones y juegos matemáticos'

Federico Barrera Lemarchand
Físico, UTDT, UBA-Conicet.
fedex192@hotmail.com

Marilina Carena
Matemática, UNL-Conicet.
marilcarena@gmail.com

Giulia Solange Clas
Bióloga, INEU, FLENI-Conicet.
clas.giulia.s@gmail.com

Nicolás Fernández Larrosa
Biólogo, IFIBYNE, UBA-Conicet.
fernandezlarrosanicolas@gmail.com

Pablo Groisman
Matemático, UBA-Conicet.
pgroisma@dm.uba.ar

Matías López-Rosenfeld
Computador, UBA-Conicet.
mlopez@dc.uba.ar

Mariano I Martínez (coordinador)
Biólogo, MACN-Conicet.
mmartinez@macn.gov.ar

Juan Pablo Pinasco
Matemático, UBA-Conicet.
jpinasco@gmail.com

Alfredo Sanzo
Ingeniero, UTN, UBA-Conicet.
alfredo.sanzo@gmail.com

Herman Schinca
Computador, UBA-Conicet.
hschinca@dc.uba.ar

Preguntas, comentarios y sugerencias:
contacto@cienciahoy.org.ar