10.20396/kant.v17i3.8673612


# KANT E O MÉTODO MATEMÁTICO

## Kant, on mathematical method

Luciana Martínez

Universidade Federal do Paraná – Curitiba, Brasil
luciana.mtnz@gmail.com

**Resumo**: Na "Disciplina da razão pura no uso dogmático" da *Crítica da razão pura*, Kant defende a tese segundo a qual as virtudes da matemática são o efeito de uma série de procedimentos que, no entanto eficazes na esfera daquela ciência, são impraticáveis no âmbito da ciência cuja possibilidade está sendo examinada, ou seja, a metafísica. Estes procedimentos são: definição, uso de axiomas e demonstração. Para o filósofo, não é possível fazer definições ou demonstrações no domínio filosófico, nem ter axiomas. Contudo, esclarece que estas não são viáveis no sentido em que o matemático as compreende. Este artigo explica como o matemático concebe estes três termos, segundo Kant.
**Palavras-chave**: Kant; método matemático; definições; axiomas; demonstrações.

**Abstract**: In the "Discipline of pure reason in the dogmatic use" of the *Critique of pure reason*, Kant holds the thesis according to which the virtues of mathematics are the effect of a series of procedures which, however effective in the sphere of that science, are impracticable in the sphere of the science whose possibility is being examined, that is, metaphysics. These procedures are: definition, the use of axioms, and demonstration. For the philosopher, it is not possible to make definitions or demonstrations in the philosophical domain, nor to have axioms. However, he clarifies that these are not feasible in the sense that the mathematician understands them. This paper explains how the mathematician conceives these three terms, according to Kant.
**Keywords**: Kant; mathematical method; definitions; axioms; demonstrations.

### Introdução

Na "Disciplina da razão pura no uso dogmático" da *Crítica da razão pura* (= *KrV*),[1] Immanuel Kant defende a tese segundo a qual as virtudes da matemática são o efeito de uma série de procedimentos que, no entanto eficazes na esfera daquela ciência, são impraticáveis no âmbito da ciência cuja possibilidade está sendo examinada, ou seja, a metafísica. Estes procedimentos são: definição, uso de axiomas e demonstração. Para o filósofo, não é possível fazer definições ou demonstrações no domínio filosófico, nem ter axiomas. Contudo, esclarece que estas não são viáveis no sentido em que o matemático as compreende. Este artigo explica como o matemático concebe estes três termos, segundo Kant.

Assim, em primeiro lugar, analisa-se a natureza das definições com as quais se inicia a pesquisa na matemática. Em segundo lugar, é estudada a natureza dos axiomas da

[1] Os textos de Kant são citados de acordo com as convenções da sociedade Kantiana alemã, estabelecidas na *Kant-Studien*.

geometria. Estes são juízos sintéticos a priori que podem ser exibidos na intuição. Estes juízos, em particular, têm uma certeza imediata, o que os distingue das afirmações fundamentais de outras ciências. Neste caso, especificamos a diferença entre os axiomas e os postulados. Finalmente, abordamos a noção de demonstração matemática. Esta demonstração difere das demonstrações das ciências empíricas, tais como a do anatomista que exibe as propriedades de um órgão em um espécime dele. Além disso, a demonstração matemática difere de outros tipos de provas, como, por exemplo, as provas da filosofia.

## 1. As definições matemáticas

A abordagem de Kant em matéria de definições tem três momentos. No primeiro momento, o filósofo explica em que consiste uma definição, ou seja, quais são suas características. Em segundo lugar, ele explica por que, estritamente falando, só é possível definir conceitos matemáticos. A argumentação para esta tese consiste em passar pelos diferentes tipos de conceitos e analisar em cada caso se é possível fazer uma definição que atenda aos requisitos acima mencionados. Finalmente, ele extrai dois corolários de sua argumentação, que apresentam dois aspectos da diferença metodológica entre a matemática e a filosofia.

Com relação ao primeiro, a definição é apresentada no texto kantiano nos seguintes termos: definir significa "expor o conceito completo de uma coisa, originariamente, no interior de seus limites".[2] Em uma nota de rodapé, além disso, o filósofo explica cada um destes termos. O conceito exibido na definição é um conceito *completo*. Isto significa que suas notas são claras e suficientes. Um conceito cujas notas são claras é um conceito *distinto*. E, por último, um conceito distinto cujas notas são suficientes é, como declara a nota de rodapé da *KrV*, completo. Na definição, este conceito, além disso, é exibido dentro de seus limites. Isto significa que as notas apresentadas na definição pertencem ao próprio conceito e que não tomamos notas de outros lugares. O caráter original da definição é uma característica que não encontramos nos textos do corpus lógico. A explicação de Kant na *KrV* é, porém, de caráter estritamente negativo. A definição é original porque não é o caso de que a determinação dos limites do conceito seja deduzida de qualquer lugar. Além disso, não é, portanto, necessário que esta determinação seja comprovada. Por fim, note-se que a

[2] *KrV*, B755. Loparic alega que esta "definição da definição" (Heimsoeth, 1966, p. 676) se refere a definições analíticas. O autor estabelece uma distinção peculiar, que não recuperamos aqui, entre definições analíticas e definições sintéticas (cf. Loparic, 2000, p. 178).

importância desta característica se refere à função que as definições têm na pesquisa matemática. Na medida em que a exibição do conceito é original, ele pode estar no ápice dos juízos sobre o objeto.[3]

Com isso, através da explicação das características acima mencionadas, Kant apresenta, em primeiro lugar, sua noção de definição. Em segundo lugar, como já apontamos, Kant explica por que é possível definir conceitos matemáticos e não é possível definir outros tipos de conceitos. O ponto de partida desta linha de argumentação é uma classificação de nossos conceitos em quatro grupos, estabelecidos de acordo com dois critérios. O primeiro destes critérios é a origem do conteúdo dos conceitos. De acordo com esta origem, Kant distingue conceitos a priori e conceitos a posteriori. O conteúdo destes últimos é obtido a partir da experiência. O segundo critério, que o filósofo não desenvolve no texto crítico e que não é descrito em detalhes nos textos lógicos disponíveis (que consistem em anotações do filósofo e dos alunos que participaram de suas palestras), é um pouco mais difícil de especificar. Este segundo critério, que nos permite diferenciar entre conceitos dados e conceitos feitos, parece estar ligado à intervenção da arbitrariedade em sua gênese. A geração de conceitos *feitos*, seja a priori como conceitos matemáticos (por exemplo, triângulo) ou a posteriori como conceitos arbitrários (por exemplo, relógio de barco), envolve uma intervenção deliberada do sujeito que os emprega.[4]

De acordo com os dois critérios mencionados acima, então, Kant identifica quatro tipos diferentes de conceitos e estuda as condições da elucidação de cada um deles. Primeiro, o filósofo ocupa-se dos conceitos empíricos. A impossibilidade de definir, no sentido explicado, conceitos empíricos, como o do ouro, se deve precisamente à dificuldade de definir seus limites. As notas dos conceitos empíricos são aquelas que obtemos por meio dos sentidos. Assim, quando usamos uma palavra para designar um objeto, podemos saber mais ou menos notas sobre ele, dependendo de quanta informação sobre o objeto nos foi fornecida pelos sentidos. Kant ressalta que, em relação ao conceito de ouro, algumas pessoas podem não saber se o metal oxida, mesmo que usem a palavra da maneira comum e nomeiem com ela o metal que lhe corresponde. A partir deste exemplo, Kant conclui que o conceito empírico nunca está confinado dentro de limites determinados.

Por outro lado, Kant aponta que mesmo que fossem *possíveis*, as definições de conceitos empíricos não seriam *úteis*. Não se fica satisfeito em saber o que queremos dizer

[3] *KrV*, B755n
[4] Cf. Cote, 2017, p. 3.

com uma palavra. O que queremos fazer é experimentar a coisa a fim de obter novas informações sobre ela. O filósofo muda do exemplo do ouro para o da água. Ele ressalta que a palavra e algumas propriedades das coisas que a ela ligamos constituem apenas uma denominação. E o que dizemos sobre isso é apenas uma determinação da palavra. Assim, em vez de serem definidos, os conceitos empíricos são explicados.

Depois de demonstrar a impossibilidade e futilidade de definir conceitos empíricos, Kant aborda os conceitos dados a priori. Estes conceitos, aponta, também não podem ser definidos. O conceito dado é um conceito confuso. O que a definição, ou, para ser mais rigorosa, a abordagem, tenta fazer é tornar o conceito distinto. Ou seja, deixar todas as suas notas claras. Agora, como se pode saber que o procedimento é exaustivo, ou seja, que o conceito obtido é detalhado? Kant ressalta que para isso é necessário que a representação seja adequada ao objeto. Agora, o conceito do objeto pode conter notas obscuras, que estão envolvidas no uso mesmo que não estejamos cientes delas. Esta possibilidade torna duvidosa a completude da análise. Não temos nenhuma certeza apodíctica sobre isso e, consequentemente, sobre a distinção detalhada dos conceitos dados a priori.

Esta limitação na abordagem de conceitos a priori, tais como o conceito de substância, causa, direito ou equidade, refere-se apenas à exaustividade duvidosa da análise. Mas tal abordagem pode ser cuidadosa e útil. Portanto, o pesquisador não precisa descartá-la por completo. Kant chama a abordagem de conceitos deste tipo, que tem a característica de não garantir o detalhe apodícticamente, uma exposição.

Com estas observações, Kant considera ter examinado o campo dos conceitos dados. Os conceitos anteriores, os empíricos, foram dados a posteriori e só puderam ser *explicados*. Estes últimos conceitos são aqueles dados a priori e só podem ser *expostos*. Depois disso, o filósofo tem que lidar com os conceitos que não são dados, mas criados pela intervenção do arbitrário. Sobre estes conceitos, Kant diz que podemos fornecer suas definições. Estes conceitos não nos são dados, nem a priori, nem na experiência. Pelo contrário, eles são produzidos por nós mesmos. No entanto, há um aspecto adicional que precisa ser considerado ao analisar sua abordagem. O fato de criarmos arbitrariamente um conceito não garante que um objeto corresponda a ele. Em virtude desta advertência, Kant estabelece uma classificação. Os conceitos podem ser criados arbitrariamente, tomando elementos empíricos. Neste caso, o objeto do conceito não é dado com o conceito, mas sua possibilidade deve ser investigada na experiência. Aqui, o filósofo parece se referir à combinação arbitrária de características empíricas. Depois de compilar notas extraídas, isoladamente, da experiência, devemos decidir se a este conceito criado pela coleta arbitrária de notas corresponde algum objeto. A compilação, mesmo que tenha uma certa coerência e não inclua elementos contraditórios, não contém em si mesma a possibilidade real de que existam objetos correspondentes. Por esta razão, Kant assinala que neste caso, em vez de uma definição, foi feita uma *declaração* de um projeto.

Entretanto, existe outro tipo de conceito criado arbitrariamente. Estes são conceitos que "contêm uma síntese arbitrária e podem ser construídos a priori".[5] Estes conceitos são os da matemática e são os que podem ser definidos. Isto porque estes conceitos, quando pensados, também podem ser exibidos a priori na intuição. A possibilidade deles não é dada por elementos empíricos: seu objeto não deve ser procurado na experiência. O objeto, portanto, não pode conter outras características além daquelas exibidas no conceito. Na definição, o conceito é dado originariamente. Se voltarmos à apresentação inicial das definições, notamos que a abordagem dos conceitos matemáticos verifica todas as suas condições. A definição mostra claramente todas as notas que o conceito pode ter. Não há mais notas tácitas porque o conceito é dado com a definição. Nem, pela mesma razão, podem existir notas na definição que não pertençam ao conceito. A definição dos conceitos matemáticos é distinta e detalhada. Além disso, é original e não precisa de provas. A definição fornece o conceito e, portanto, estabelece os limites do conceito de forma indubitável.

Depois, como já mencionamos, Kant explica a diferença entre a abordagem dos conceitos filosóficos e os conceitos matemáticos. No caso do primeiro, há uma exposição de determinados conceitos. Esta exposição é de caráter analítico e não há certeza apodíctica de sua exaustividade. Neste caso, apenas uma elucidação é fornecida. A definição de conceitos matemáticos, por outro lado, consiste em uma construção de conceitos feitos originalmente. Isto implica que o conceito é feito e que a definição é, portanto, sintética e não analítica.

O último momento no tratamento das definições neste texto consiste, como já foi avançado, na apresentação de dois corolários do acima exposto. O primeiro corolário da diferença entre a forma de abordar conceitos filosóficos e conceitos matemáticos refere-se ao lugar que corresponde a suas definições na ordem de investigação de cada ciência. A matemática *começa* com as definições. Antes da definição, não há nenhum conceito em matemática. A definição fornece as indicações para construir o conceito e para dar o objeto na intuição. No caso dos conceitos filosóficos, por outro lado, a elucidação dos mesmos é

[5] *KrV*, B 757

precedida pelo próprio conceito, dado de forma confusa. É este conceito que se procura elucidar, por meio da análise e da exposição de suas notas. Além disso, a elucidação das notas é de caráter gradual. Por esta razão, além de um conceito confuso, podemos encontrar exposições incompletas, embora úteis, antes de conquistarmos aquela que nos satisfaz. De fato, o filósofo indica, em nota de rodapé, que se só pudéssemos obter conhecimento a partir de definições (no sentido estrito), a situação da filosofia seria ruim. As proposições que esta ciência contém não são definições, mas esboços delas. Eles são verdadeiros e úteis, embora incompletos. É por isso que Kant assinala que em filosofia "a definição, como distinção precisa, deve antes concluir o trabalho do que iniciá-lo".[6]

O segundo corolário tem a ver com o erro. Kant aponta que existem dois tipos de erros conceituais. O primeiro tipo de erro é dado pelo conteúdo. Uma definição errônea é aquela que contém notas que não pertencem a um conceito. O segundo tipo de erro é de natureza formal. Ela ocorre quando a definição contém notas que precisam ser explicadas e não as elucida. O erro de conteúdo é inconcebível no caso da matemática, porque na matemática a definição dá o conceito. Por este motivo, o conceito não pode ter outras notas além daquelas contidas na definição. Por outro lado, é possível que a definição matemática seja defeituosa em seu aspecto formal. Kant argumenta isso por meio de um exemplo. Este é o exemplo da definição habitual da circunferência, que contém uma nota que precisa ser definida por si mesma, ou seja, a noção de uma *curva*.

Assim, as definições matemáticas são apresentadas na filosofia Kantiana como exibições de conceitos que satisfazem determinadas condições. A abordagem de conceitos que são de interesse para outras ciências não é capaz disso. Em virtude de tais características, a definição matemática pode ser a origem de certos conhecimentos e pode estar livre de erros materiais.[7]

## 2. Os axiomas[8]

Em segundo lugar, as pesquisas matemáticas incluem os axiomas. No sentido em que entendemos este termo no campo da matemática, os axiomas, de acordo com Kant em sua crítica, são juízos sintéticos a priori caracterizados pela certeza imediata.

[6] *KrV*, B759
[7] Neste sentido, concordamos com a descrição das "definições reais" da matemática fornecida por Heis (2014). Uma análise completa das definições matemáticas, sua relação com o procedimento de construção e os esquemas matemáticos pode ser encontrada em Capozzi (2021).
[8] Examinei esta questão mais detalhadamente em Martínez (2022).

Nas lições lógicas do início da década de 1780, os axiomas são descritos como conhecimentos imediatamente certos que se supõem serem assim porque podem ser conhecidos a priori da natureza da coisa. Nas anotações de Lógica de Hechsel, datadas de 1782, a noção de "juízos que não podemos provar" é explicada. Em particular, lemos que deve haver alguns juízos não comprovados que são imediatamente verdadeiros. O exemplo é aquele que diz que entre dois pontos só se pode traçar uma linha reta. Entre os juízos que não são provados, encontramos alguns juízos baseados na identidade. Aqueles que afirmam uma identidade explicitamente, como o juízo que diz: "Os seres humanos são seres humanos", são juízos analíticos vazios, evidentes por si mesmos e não exigem provas. Outros juízos se baseiam no princípio de identidade de forma implícita, como por exemplo o juízo que diz: "Os seres humanos são animais racionais". Este juízo é analítico, mas explicativo. A análise do conceito do sujeito nos permite encontrar nele o conceito do predicado. Esta análise constitui uma prova do juízo, que não é, portanto, uma mera proposta vazia e óbvia.

Entre os juízos que não são provados, além dos juízos analíticos vazios, são mencionados alguns juízos sintéticos, como os da geometria. Os juízos que não são provados, sejam eles analíticos ou sintéticos, são chamados de "princípios", podem ser conhecidos a priori e não se baseiam em outros juízos, mas são eles mesmos o fundamento de outros. Entre os princípios, estas anotações diferenciam entre aqueles que são intuitivos e são chamados de axiomas, e os princípios discursivos da filosofia, para os quais ainda não há nome. Nessas notas, o nome "acroama" é proposto para este último. Finalmente, estes princípios se distinguem dos *postulados*, que ensinam o que deve ser feito.[9]

Podemos encontrar numerosas referências à noção de axiomas no texto da primeira *Crítica*. Primeiro de tudo, na "Estética Transcendental" Kant se refere aos axiomas do tempo, como o que indica que o tempo tem apenas uma dimensão. O filósofo aponta que estes são princípios apodícticos. Por esta razão, eles não podem ser fundamentados na experiência, já que a experiência não é uma fonte de certeza apodíctica, nem de estrita universalidade. Agora, como Kant ensina na Introdução à *KrV*, a certeza apodíctica e a estrita universalidade nos ensinam que um conhecimento tem princípios a priori. Assim, os axiomas do tempo têm uma origem a priori e são uma base de toda a experiência possível para nós.

Na *Methodenlehre*, particularmente na seção intitulada "Disciplina da razão pura no uso dogmático", a explicação do conceito inclui algumas determinações adicionais. Axiomas,

[9] Kant, 1998, 436ss.

aponta Kant, são juízos sintéticos a priori que são evidentes por si mesmos, ou seja, que envolvem certeza imediata. Esta última característica exclui os princípios da filosofia do conjunto de axiomas e implica que tais princípios filosóficos, ao contrário dos matemáticos, requerem dedução. Além da certeza imediata, esta explicação dos axiomas inclui uma propriedade relevante: eles são juízos sintéticos.

Assim, vemos que os axiomas, como apresentados na *KrV*, são juízos a priori, sintéticos e auto-evidentes. Excluídos deste conjunto estão, portanto, os juízos empíricos, os juízos analíticos e os juízos cuja certeza é mediada. Esta última característica é central para o argumento da *Methodenlehre*. O conjunto de axiomas exclui aqueles juízos que ligam um predicado já contido no conceito do sujeito, ou seja, juízos analíticos ou explicativos. Os juízos a priori sintéticos são os da matemática, como aquele que diz que três pontos compartilham um plano, e os da filosofia, como aquele que diz que o que acontece tem sua causa. Para Kant, apenas os primeiros são axiomas em virtude do fato de que, como já assinalamos, a conexão que tais juízos expressam é imediatamente evidente. A conexão surge na intuição, quando construímos os conceitos de matemática.

Estes juízos matemáticos constituem princípios para o conhecimento matemático. Isto porque eles não exigem provas, já que possuem evidência, e são o ponto de partida para a construção e demonstração de outros juízos. Na introdução à "Dialética Transcendental", Kant se refere novamente aos axiomas da matemática a fim de especificar o sentido no qual eles constituem princípios. Ele menciona neste caso seu exemplo mais usual, segundo o qual só podemos traçar uma linha reta entre dois pontos. Ele os caracteriza ainda como "conhecimento a priori universal" e examina o sentido no qual eles podem ser considerados como princípios. Kant está explicando o que significa que a razão é a faculdade de princípios. Neste contexto, ele assinala que, em matemática, não conhecemos a partir de princípios. Conhecer a partir dos princípios é conhecer o particular no universal através dos conceitos. Na matemática não conhecemos através de conceitos, mas pela construção na pura intuição. O matemático conhece construindo na intuição e prova a partir de juízos que são evidentes em virtude da natureza da forma pura de nossa intuição.

Agora, na "Analítica dos Princípios", Kant apresenta uma determinação adicional dos axiomas, o que nos permite diferenciar dois conceitos: axiomas no sentido amplo e axiomas no sentido estrito. No sentido amplo, os axiomas são juízos sintéticos a priori auto-evidentes. A evidência implica que estes juízos devem ser intuitivos, pois a certeza deles é imediata. Os princípios discursivos não são evidentes por si mesmos, eles requerem deduções. Como apontamos, somente na matemática encontramos tais princípios. Kant afirma mesmo que o conhecimento fornecido pela filosofia não pode ser tão evidente quanto a proposição que diz: "2+2=4".[10]

Na "Analítica dos Princípios" Kant também desenvolve uma forma de defini-los segundo a qual somente a geometria tem axiomas. Kant menciona dois exemplos, mais uma vez. Estes são o juízo de que só podemos traçar uma linha reta entre dois pontos e o juízo de que não podemos cercar um espaço com duas linhas retas. Estes juízos, de acordo com o filósofo, expressam condições de sensibilidade a priori que tornam possível a construção de figuras no espaço.[11]

A determinação adicional que deixa os juízos de aritmética fora do conjunto de axiomas é a de sua universalidade. Kant observa que a aritmética tem numerosas proposições sintéticas, imediatamente verdadeiras. Entretanto, estas proposições não têm alcance universal, mas são juízos singulares. Seu conteúdo é uma forma única de sintetizar o homogêneo. Kant se propõe a chamá-los de "fórmulas". A aritmética contém juízos analíticos, como o de que uma igualdade somada a outra resulta em uma (terceira) igualdade. As fórmulas não são tais juízos analíticos, mas, como os axiomas, contêm uma síntese. O exemplo que o filósofo menciona é o de qualquer soma, tal como "7+5=12". Kant explica que a síntese contida neste juízo só pode ser realizada de uma maneira e que se uma fórmula fosse um axioma, então teríamos infinitamente muitos axiomas.[12]

## 3. As demonstrações[13]

No seu comentário sobre a "Disciplina", Peter Rohs (1998) aponta que Kant não entende a demonstração como uma prova correta, mas como uma "*de-monstratio*", cujo exame não pertence à lógica ou teoria da prova, mas deve procurar elucidar a certeza intuitiva envolvida. Em virtude desta observação, que considero correta, penso que é apropriado diferenciar três noções que são geralmente confundidas na linguagem cotidiana atual e que, na estrutura do pensamento kantiano, podem ter significados diferentes. Estas noções são: provar (*beweisen*), demonstrar (*demonstrieren*), inferir (*schließen*).

Comecemos pelas inferências, que podem ser identificadas com o tipo de procedimento que Rohs (1998) distingue das demonstrações no sentido kantiano, na medida

[10] *KrV*, A733 / B761.
[11] *KrV*, A163 / B204.
[12] *KrV*, A165 / B205.
[13] Alguns dos aspectos desta seção são expostos mais detalhadamente em Martínez (2022b).

em que se referem a algo que hoje em dia é normalmente chamado de demonstração. No corpus kantiano, as inferências são apresentadas como procedimentos de nossas capacidades intelectuais que nos permitem obter um juízo a partir de outros. Em Lógica, são identificados diferentes tipos de inferências, que são produzidas por diferentes faculdades: o entendimento produz deduções, a razão produz raciocínios, e o juízo produz induções e analogias. A noção de inferência, em suma, envolve a intervenção de nossas faculdades intelectuais, que procedem de forma discursiva.[14]

Por outro lado, o conceito de prova é, dos três que nos preocupam, o mais utilizado no corpus kantiano.[15] Talvez possa ser considerado como um conceito mais amplo, que contempla ou inclui os outros dois. A prova é uma forma mediata de obter certeza sobre o conhecimento. É claro que é possível ter certeza imediata de um conhecimento, mas podemos ter certeza de um conhecimento que não tem essa qualidade através de provas. Uma maneira de provar uma tese é exibir seu conteúdo na intuição, como veremos que a matemática faz. Este tipo de prova, que chamaremos de *demonstração*, não é, no entanto, o *único* tipo de prova. Assim, em outra seção da "Disciplina", a seção que trata precisamente das provas, Kant menciona, sem explicá-las em grandes detalhes, dois tipos de provas: as provas apagógicas e as provas ostensivas. As provas apagógicas são indiretas e, embora forneçam certeza, não nos permitem conhecer as bases das quais nosso conhecimento é deduzido. As provas diretas, por outro lado, nos permitem estar convencidos da verdade de um conhecimento, enquanto nos ajudam a entender por que ele é verdadeiro. Neste caso, alcançamos a verdade do conhecimento a partir de suas causas. Esta classificação de provas nos permite perceber que a noção de prova é mais ampla do que a demonstração e que nem todas as provas são demonstrativas por natureza, embora as demonstrações matemáticas sejam provas. Neste sentido, na entrada correspondente do *Kant-Lexicon*, Rainer Stuhlmann-Laeisz (2015) argumenta que devemos distinguir entre provas matemáticas, provas empíricas e provas filosóficas. Para este comentarista, a chave para a diferença entre provas matemáticas e provas empíricas é dada pelo caráter apodíctico das primeiras, enquanto a diferença com as provas da filosofia está ligada ao caráter não-intuitivo do conhecimento em filosofia.[16]

---

[14] *Log*, 09: 114 (§§41)
[15] Para uma explicação histórica detalhada da diferença entre provar e demonstrar, ver: Basso, 2004, p. 191.
[16] Cf. Stuhlmann-Laeisz, 2015, p. 374.

Por outro lado, se na *KrV* a noção de demonstração é definida como um tipo de prova, na *Crítica da faculdade de julgar* (=*KU*) o mesmo termo denota um modo de apresentação de conceitos. Na terceira *Crítica* encontramos inúmeros tipos de representações. Por um lado, é mencionada a representação do suprassensível, que é um ponto de unificação de nossas faculdades. Por outro lado, existem ideias estéticas, que são um produto de nossa imaginação e que, de alguma forma, proporcionam algum tipo de acesso às ideias da razão. Finalmente, temos conceitos determinados, que são representações intelectuais que proporcionam conhecimento. Em sua explicação, o ponto de partida é a noção geral de ideias: (1) são representações referentes a algo mais, em conformidade com um princípio, e (2) não fornecem conhecimento. Em relação a ambos os aspectos, é possível diferenciar entre ideias estéticas e ideias de razão. Com relação a (1), ideias estéticas referem-se a uma intuição de acordo com um princípio subjetivo, enquanto ideias de razão referem-se a um conceito de acordo com um princípio objetivo. Kant afirma que as ideias estéticas não podem fornecer conhecimento porque são representações da imaginação à qual nenhum conceito corresponde. As ideias da razão, por outro lado, não fornecem conhecimento em virtude do fato de não haver intuições que lhes correspondam. A partir desta característica, podemos afirmar que (i) as ideias da razão, ao contrário dos conceitos do entendimento, não são demonstráveis e (ii) as ideias estéticas, ao contrário dos conceitos do entendimento, não são passíveis de exposição.[17]

Kant introduz assim, na *KU*, um significado da noção de demonstração, que ele associa com os procedimentos dos anatomistas. De acordo com este significado, demonstrar é "apresentar, exibir" (*darstellen*) um conceito. Em outras palavras, significa fornecer, por intuição, o objeto que lhe corresponde. Que seja demonstrável neste sentido é uma condição para que o conceito seja capaz de fornecer conhecimento. Um conceito do qual não podemos indicar nenhum objeto na intuição é um conceito vazio. Assim, é necessário que possamos apontar um exemplo do conceito, ou seja, demonstrá-lo, para que o conceito seja capaz de fornecer conhecimento.

Kant especifica que esta demonstração pode ocorrer na intuição pura ou na intuição empírica. A demonstração na intuição empírica é a mera exibição do objeto, o que garante a realidade objetiva do conceito demonstrado. A demonstração na intuição pura parece não ser outra coisa senão a construção do conceito. Recordemos que, para Kant, construir um

[17] *KU*, 05: 320.

conceito em matemática é justamente exibir a intuição a priori que lhe corresponde.[18] Neste sentido, parece que a noção de demonstração desenvolvida na *KU* está mais ligada à construção do que à demonstração matemática, como descrito na *KrV*.

De fato, após este primeiro significado, que ele incorpora, Kant examina um segundo significado, que ele rejeita. Este é o uso do termo "demonstração" na lógica. Neste campo, "demonstração" é usado como uma espécie de sinônimo para o termo "prova". Neste sentido, diz-se que uma proposição, não mais um conceito, é demonstrável ou indemonstrável. Kant indica uma maneira mais apropriada de dizer a mesma coisa. Quando apontamos que uma proposição é indemonstrável, pretendemos afirmar que ela é imediatamente verdadeira. Quando assinalamos que uma proposição é demonstrável, a consideramos como verdadeira de forma mediata. O que estamos tratando, no final, é a possibilidade de provar seu valor de verdade.

A noção de demonstração correspondente aos procedimentos matemáticos, que é a que interessa a Kant na *KrV*, não é identificada com esta noção que encontramos na *KU*. A primeira envolve uma espécie de prova, e não uma apresentação de conceitos. Vamos examinar as características das demonstrações matemáticas. Primeiro, elas são apodíticas. Para Kant, um conhecimento é apodíctico quando está associado a uma consciência de sua necessidade. Para Kant é inconcebível que a experiência, que só pode nos iluminar sobre como as coisas *são*, possa nos dizer qualquer coisa sobre como elas *devem ser*. Por mera experiência, não temos como saber que não poderiam ser de outra forma. Esta explicação, introduzida na Introdução B da *KrV*, reaparece com a definição de demonstrações. "A experiência nos ensina bem aquilo que existe, mas não que isso não poderia ser de outro modo. Demonstrações empíricas não podem, portanto, oferecer uma prova apodíctica".[19] Agora, com esta explicação, Kant parece estar descartando a possibilidade de demonstrações no reino do conhecimento empírico. Neste ponto, temos que voltar nosso olhar mais uma vez para a *KU*. Vimos que neste texto Kant indica que a noção de demonstração é retirada de um domínio peculiar do conhecimento: a anatomia. A exibição de conceitos nesta ciência empírica é a fonte que a noção de demonstração da terceira *Crítica* considera. Mas é este domínio do conhecimento, ou seja, o domínio do conhecimento empírico, que é descartado na noção matemática que Kant apresenta na *KrV*. Assim, se o caráter de prova das demonstrações matemáticas difere das demonstrações entendidas como exibição de

[18] *KrV*, B741; *ÜE*, 08: 191.
[19] *KrV*, B763.

conceitos, a natureza apodíctica das demonstrações matemáticas envolve uma virtude de conhecimento que é inconcebível quando é fundada na experiência. As ciências empíricas não são capazes de conter demonstrações matemáticas.

Assim, o fato de as demonstrações serem provas de caráter apodíctico cancela, na argumentação da primeira *Crítica*, a possibilidade de que as provas baseadas em dados fornecidos pela experiência possam ser consideradas demonstrativas. Agora, a questão que interessa particularmente a Kant neste texto é a da diferença metodológica entre dois tipos de conhecimento racional, ou seja, o conhecimento matemático e o conhecimento metafísico. Esta diferença, com respeito às demonstrações, é dada por seu caráter intuitivo. As provas utilizadas em matemática têm uma evidência imediata dada pelo fato de que o conhecimento matemático é exibido na intuição pura.

O caráter intuitivo das demonstrações está ligado na *KrV* com uma característica adicional do conhecimento matemático. Este tipo de conhecimento possui evidência, ou seja, certeza intuitiva. Para Kant, a certeza é o conhecimento que consideramos verdadeiro com fundamentos suficientes. É concebível que tenhamos certeza sobre como as coisas são. Podemos saber como eles são e ter certeza disso por experiência própria. Como já assinalamos anteriormente, isto não nos impede de conceber que um estado de coisas diferente é possível. A certeza que obtemos quando sabemos por experiência é meramente assertiva. A certeza apodíctica, por outro lado, é característica do conhecimento racional, que tem fundamentos a priori. Nela, a consciência da necessidade caminha de mãos dadas com o conhecimento. Esta diferença entre certeza assertiva e apodíctica é a que estava em jogo no aspecto da definição de demonstrações que contemplamos antes. Agora adicionamos uma determinação adicional, própria da estrutura do conhecimento racional. Quando o conhecimento racional é de caráter intuitivo, ele não é apenas apodíctico, mas também evidente por si mesmo.

A filosofia pura, ou seja, a metafísica, não tem tal referência à intuição. O conhecimento metafísico é conhecimento por meros conceitos. Os conceitos puros que lhe concernem são representações mediadas, que não contêm dados fornecidos pela sensibilidade. Por esse motivo, o tipo de certeza contida nesta ciência não é do mesmo tipo de certeza contida no conhecimento matemático. Na "Disciplina da razão pura no uso dogmático", Kant simplesmente aponta que as provas de filosofia não são demonstrações. Algumas páginas mais tarde, Kant desenvolve alguns avisos adicionais sobre as provas de metafísica, na seção intitulada precisamente "A disciplina da razão pura em relação às suas provas".

Aqui gostaria de destacar algo mais sobre as diferenças entre as teses da primeira e da terceira *Crítica*, às quais já nos referimos anteriormente. Já indicamos que na *KU* é apresentada a crítica do uso lógico do conceito de demonstração, e apontamos a necessidade de diferenciar este conceito do de prova, o que é mais conveniente para se referir aos procedimentos próprios da filosofia. Por outro lado, Kant usa exemplos de demonstração de termos que pertencem à filosofia. E em conexão com eles apresenta um conceito de demonstração que corresponde especificamente a este campo do nosso conhecimento. Em particular, o texto contém exemplos de conceitos do entendimento, ou seja, os conceitos de quantidade e causa. O primeiro dos exemplos poderia estar intimamente ligado às demonstrações matemáticas, em particular com o procedimento construtivo que elas envolvem. Kant ressalta que o conceito de quantidade pode ser dado na intuição a priori de espaço, por exemplo, através de uma linha reta. O conceito de causa, por outro lado, é exibido na colisão de dois corpos, na intuição empírica. Esta demonstração nos mostra que não se trata de um conceito vazio.

Mais tarde, na *Crítica do Juízo*, reaparece a noção de demonstração, relacionada a conceitos intelectuais. Esta noção é mencionada uma vez no §59, em uma nota de rodapé na qual Kant identifica a demonstração com uma espécie de conhecimento intuitivo que ele caracteriza como esquemático e a contrasta com outro tipo, referindo-se também à intuição, que ele chama de simbólica[20]. A linha de argumentação do filósofo tem como objetivo especificar sua noção de representação simbólica, que ele concebe como intuitiva, e não como discursiva. O símbolo, ele aponta, não é uma forma de designação, mas uma exibição de um conceito. Observamos que Kant identifica diferentes maneiras de apresentar conceitos por intuição. Todos eles se referem a conceitos originários de nossas faculdades de pensamento em seu uso puro, são conceitos do entendimento e da razão que não são construídos. Os conceitos matemáticos, além disso, nem sequer são mencionados nesta passagem.

Como no §57 da própria *KU*, a noção de demonstração surge quando Kant se refere ao problema de que a realidade objetiva dos conceitos envolve seu ser apresentado na intuição. Mais uma vez, aqui, emerge a indicação de que nem todos os conceitos podem ser

[20] Cf. *KU*, 5: 352

apresentados por intuição. Em particular, não há intuições adequadas aos conceitos de razão. Estes conceitos, ao contrário dos conceitos do entendimento, não podem ser apresentados. Entre os conceitos que podem ser apresentados na intuição, que são conceitos do entendimento, é possível distinguir conceitos empíricos de conceitos puros. Os conceitos empíricos são *exemplificados*. A intuição que corresponde a um conceito puro, por outro lado, não é um exemplo, mas um *esquema*.

A partir da desvantagem de que os conceitos de razão não podem ser apresentados por intuição, Kant sugere que a sensibilização (*Versinnlichung*) desses conceitos deve ser indireta, através de um símbolo. Assim, juntamente com a discussão sobre a apresentação da realidade empírica dos conceitos, a questão da sensibilização deles, que Kant também chama de *hipotipose*, é estabelecida. Ela constitui uma exibição de conceitos e se refere particularmente a conceitos a priori. Se a exibição intuitiva dos conceitos da razão é de natureza simbólica, a hipotipose dos conceitos puros do entendimento é esquemática e também é chamada de sua *demonstração*. A demonstração, portanto, é uma forma de tornar sensíveis os conceitos puros do entendimento, o que é feito de forma esquemática.

Assim, atendendo à última característica das demonstrações matemáticas, que são suas provas, e revendo as explicações da terceira *Crítica*, notamos que tanto na *KrV* como na *KU* a noção de demonstração se refere a um procedimento que não é utilizável em metafísica, precisamente em virtude de seu caráter intelectual não ligado à intuição. Para a primeira, o conhecimento da metafísica será de caráter discursivo e suas provas não possuirão provas. Para o outro texto, os conceitos de razão não podem ser demonstrados nem à maneira dos anatomistas (§57) nem por esquematização (§59).

## Considerações finais

Desta forma, vemos como é construída a linha de argumentação kantiana contra o monismo metodológico das ciências racionais. A fim de poder entender a posição de Kant, é importante notar a seguinte observação do filósofo: a filosofia não pode conter definições, axiomas e provas, *como o matemático os compreende*. E Kant explica em detalhes como o matemático entende cada um deles e por que motivos eles não são possíveis além desta ciência singular.

## Referências

Basso, P. (2004). *Il secolo geometrico. La questione del metodo matematico in filosofia da Spinoza a Kant.* Casa Editrice Le Lettere.

Capozzi, M. (2021). Kant sobre las definiciones matemáticas. *Con-Textos Kantianos. International Journal of Philosophy, 14*, 190–221.

Cote, S. (2017). *Making <cinnabar>: Kant on made a posteriori concepts*. ProQuest.

Heimsoeth, H. (1966). *Transzendentale Dialektik. Ein Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft* (Vol. 4). Walter de Gruyter & Co.

Heis, J. (2014). Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on real definitions in geometry. *Canadian Journal of Philosophy, 44*, 605–630.

Kant, I. (1900ss.). *Gesammelte Schriften.* Vol. 1–22 Preussische Akademie der Wissenschaften; vol. 23 Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin; desde vol. 24 Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.

Kant, I. (1998). *Logik-Vorlesung. Unveröffentlichte Nachschriften II: Logik Hechsel. Warschauer Logik* (Kant-Forschungen 9). Meiner Verlag.

Kant, I. (2012). *Crítica da razão pura* (F. C. Mattos, Trad.). Vozes.

Kant, I. (2016). *Crítica da faculdade de julgar* (F. C. Mattos, Trad.). Vozes.

Loparic, Z. (2000). *A semântica transcendental de Kant*. UNICAMP.

Martínez, L. (2022). Kant on Mathematical Axioms. *Estudos Kantianos, 10*(1), 213–224.

Martínez, L. (2022b). Algunas apreciaciones acerca del concepto crítico de demostración. *Anales del Seminario de Metafísica, 55*(1), 109–124.

Rohs, P. (1998). Die Disziplin der reinen Vernunft.1. Abschnitt. In G. Mohr & M. Willaschek (Ed.). *Kritik Der Reinen Vernunft* (Klassiker Auslegen, pp. 547–570). Akademie Verlag.

Stuhlmann-Laeisz, R. (2015). Demonstration. In M. Willaschek, J. Stolzenberg, G. Mohr, S. Bacin (Eds.), *Kant-Lexikon*. De Gruyter.

Recebido em: 6 de janeiro de 2023

Revisado em: 3 de abril de 2023

Aprovado em: 4 de abril de 2023