
MODELO DE CRECIMIENTO POBLACIONAL DE MORSA DEL PACÍFICO (*ODOBENUS ROSMARUS*) TRAS LA DISMINUCIÓN DEL HIELO ESTIVAL EN EL MAR DE CHUKCHI POR EL CAMBIO CLIMÁTICO

Barzola Elizagaray, Pehuén; Alberto, Marcelo Eduardo; Bageta, Carlos Rubén;
Bevaqua, Alicia; Ceconato, Adrián; Garriga, Marcela; Tirador, Marta; Nodaro,
Verónica; Enrique, Melisa; Gayá Tosoni, María Victoria

RESUMEN. El presente artículo muestra un ejemplo de trabajo interdisciplinario entre la matemática aplicada, la ecología y la docencia. En el mismo se detalla el proceso de construcción de un modelo poblacional para las morsas del Pacífico (*Odobenus rosmarus*), a partir de su información biológica y etológica, con el agregado de los efectos del cambio climático sobre su ambiente. Describimos paso a paso el razonamiento en cada etapa del modelado, realizamos una simulación del mismo con el *software* RStudio e interpretamos los resultados. Consideramos que este trabajo puede servir para ejemplificar las herramientas pedagógicas que se requieren para la enseñanza de la matemática aplicada en relación a las problemáticas ambientales del presente, permitiendo dar un sentido concreto a los resultados teóricos de la matemática.

ABSTRACT. This article provides an example of interdisciplinary work involving applied mathematics, ecology, and education. It describes the process of developing a population model for Pacific walruses (*Odobenus rosmarus*) based on biological and ethological data, as well as the effects of climate change on their environment. We describe the reasoning at each stage of the modeling step by step, then simulate it with the RStudio software and interpret the results. We believe that this work can serve as an example of the pedagogical tools required for the teaching of applied mathematics in relation to current environmental problems, allowing theoretical mathematical results to be given concrete meaning.

Palabras clave: Biomatemática, sistema de ecuaciones en diferencias, matemática aplicada, simulación.

Keywords: Biomathematics, difference equation system, applied mathematics, simulation.

§1. Introducción

En la actualidad la solución de problemas complejos exige el abordaje interdisciplinario de los mismos, el cual cobra especial relevancia cuando se trata de cuestiones ambientales. No basta con que se trabajen los problemas desde diversas disciplinas como compartimentos, sino que éstas deben dialogar entre sí y construir las soluciones en forma conjunta.

Una de las temáticas que aborda la Matemática Aplicada, en interacción con la Ecología de Poblaciones, es el crecimiento poblacional de especies que se ven afectadas por el cambio climático, a fin de predecir estadios futuros, encontrar posibles equilibrios dinámicos y aportar herramientas para el manejo de los recursos naturales y el ambiente.

En este trabajo mostramos, a partir de un caso particular, cómo se puede llevar adelante este proceso de diálogo e interacción entre estas disciplinas para dar por resultado un modelo matemático; finalmente justificamos las distintas decisiones que se toman a la hora de su construcción y evaluamos los resultados de la simulación en términos del problema original.

La idea disparadora surgió de los doctores Fernando Córdova-Lepe, Ricardo Castro-Santis y Nelson Velázquez-Soto y de lo trabajado en clase durante el curso-taller que dictaron en mayo de 2019 en la Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional de Cuyo denominado: “*Elementos de Ecología y Matemática para el modelamiento de sistemas biológicos*”. En el mismo, nos instaron a construir un modelo que explicara el crecimiento poblacional de una especie de morsas del estrecho de Bering, teniendo en cuenta sus ciclos migratorios y los efectos del cambio climático en dicho ecosistema.

Para ello, partimos de un video documental de diez minutos, seleccionado por los docentes, realizamos una revisión bibliográfica de la especie y un estudio del ciclo de vida, comportamiento alimenticio, reproductivo y migratorio de la población. Decidimos generar un modelo discreto que permitiera una interpretación y predicción más razonable de acuerdo a los modos de vida de esta especie. Nuestro modelo refleja, por tanto, la influencia particular de cada fase del ciclo anual de migración de la especie sobre el tamaño poblacional al año siguiente (año $k + 1$ en función del año k). A continuación, mostramos el camino que seguimos para construirlo.

§2. Información sobre la especie

La Morsa del Pacífico (*Odobenus rosmarus*) es una especie crítica del ecosistema beringio, tanto por su rol trófico como por la dependencia que tienen de ella las comunidades de Siberia, Alaska, el mar de Chukchi y el de Bering. Entender los cambios en su distribución, abundancia y ciclo de vida resulta urgente para

entender las consecuencias que se empiezan a manifestar en la región debido al cambio climático (Krupnik y Ray, 2007).

Se trata de una especie migratoria que habita típicamente la interfaz hielo-agua del océano Ártico. Junto con los avances y retrocesos de los hielos, las morsas alternan estacionalmente entre el mar de Bering en invierno, al Sur del estrecho del mismo nombre, y el mar de Chukchi en el verano, al Norte (Figura 1). Se alimenta de la fauna bentónica de las plataformas continentales. Los individuos viven entre 30-40 años, poseen un ciclo migratorio anual y su periodo de gestación dura aproximadamente 15 meses (Fay, 1982).

2.1. Situación histórica

En invierno (de diciembre a marzo) la población se encuentra en los bordes helados del mar de Bering, la isla St. Lawrence, la bahía de Bristol (al suroeste de Alaska) y las costas continentales del golfo de Anadyr (Fay, 1982). En esta estación se produce el apareamiento de forma panmíctica, comportándose como una única población (Garlich-Miller y cols., 2011; MacCracken, 2012).

Durante la primavera (de abril a junio), los hielos del mar se van derritiendo y comienza la migración hacia el Norte por el estrecho de Bering. Durante la misma, tiene lugar el nacimiento de las nuevas crías, las cuales se mantienen junto a sus madres durante al menos dos años (Fay, 1982).

Las morsas se separan para pasar el verano (de junio a noviembre) en hordas que pueden ir de cerca de una centena de individuos a varios miles. Mientras que las hembras y juveniles viajan al Norte a través del estrecho de Bering utilizando las plataformas de hielo que se van resquebrajando, los machos migran hacia las costas continentales al Norte del estrecho: la península de Chukotka (al oeste del estrecho), Alaska o la isla de Wrangel; o bien permanecen en las costas al Sur del mismo (Fay, 1982; Fay y cols., 1984). Las hembras y juveniles habitan preferentemente los témpanos y hielos marinos de la plataforma continental, que utilizan para descansar y salir a buscar alimento. Esta separación durante el verano asegura la máxima disponibilidad de alimento y el resguardo de las crías que se ven afectadas por los amontonamientos en las playas (Fay, 1982; Krupnik y Ray, 2007).

Finalmente, hacia fines del verano y principios de otoño, mientras el mar se va cubriendo de hielo nuevamente, comienzan las migraciones hacia el Sur de todos los individuos. Debido a que no hay pariciones, esta migración es mucho más rápida que la de primavera.

2.2. Situación actual

En las últimas décadas se han registrado modificaciones en las dinámicas de los hielos del Ártico debido al cambio climático (Jay y cols., 2012). La cobertura de hielo flotante durante el verano ha disminuido más de un 20 % (Figura 2) y las

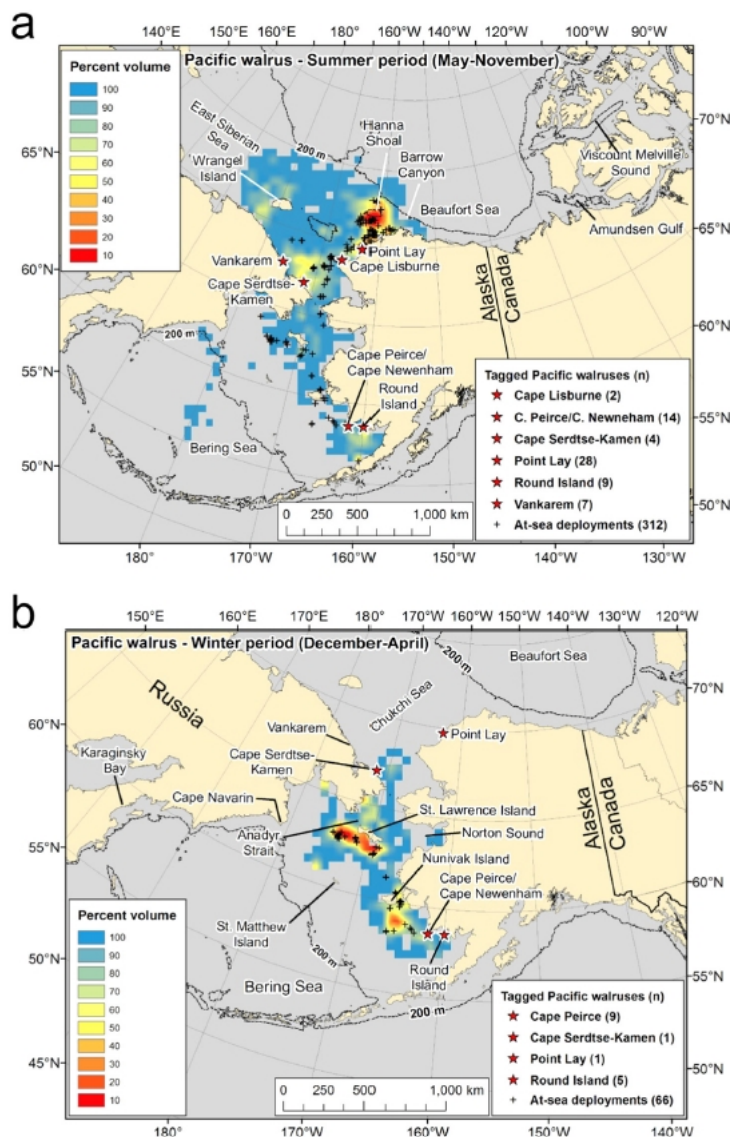


FIGURA 1. Distribución de Morsa del Pacífico con marcadores satelitales durante (a) periodo mayo-noviembre y (b) periodo diciembre-abril. Se indican las locaciones donde se marcaron las morsas p(estrellas) y cuántas brindaron datos de presencia en cada estación. Fuente: (Citta y cols., 2018)

proyecciones muestran que continuará disminuyendo en más de un 50 % hacia fines de este siglo (ACIA, 2004).

Con la disminución del hielo flotante los patrones migratorios de las morsas y el hábitat disponible han cambiado. Es probable que juveniles y hembras empiecen a ocupar cada vez más las costas continentales junto con los machos para descansar y alimentarse durante el verano (Jay y cols., 2012). Esto lleva a un aumento de la mortandad intraespecífica de todos los individuos; por un lado, por el incremento de la competencia por alimentos y por otro, de juveniles especialmente, ya que son

más propensos a morir aplastados en los amontonamientos que se producen en las costas. Estas hordas pueden llegar a tener entre algunos miles hasta varias decenas de miles de individuos, muchas veces encimados unos a otros (MacCracken, 2012).

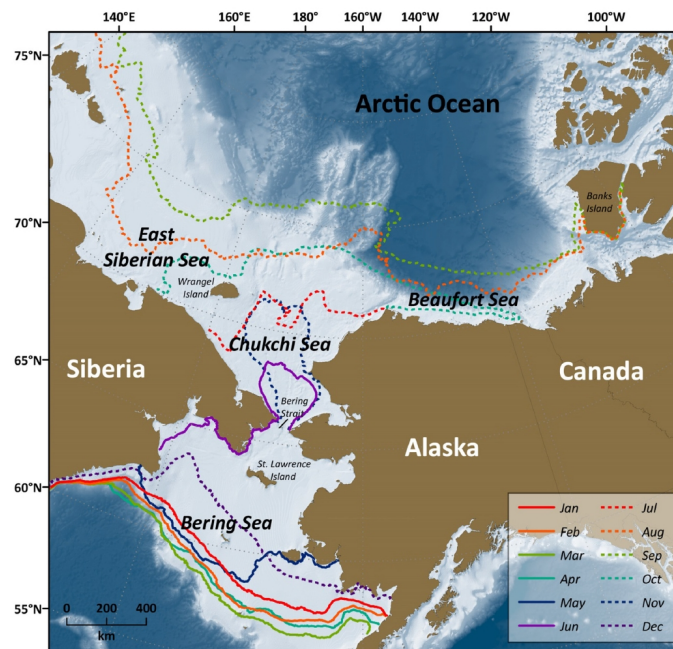


FIGURA 2. Hábitat de la Morsa del Pacífico. Las líneas indican el borde del hielo marino (promedio con límite de concentración de 15 %, satélite AMSR-E), de 2003 a 2011 (ene-sep) y de 2003 a 2010 (oct-dic). Fuente: (Frey y cols., 2015).

§3. Consideraciones preliminares para el modelo

Asumimos un tiempo discreto, teniendo en cuenta el carácter anual del ciclo migratorio, y consideramos cuatro etapas durante las cuales la población de morsas se mueve, en términos generales, como una unidad. Es decir, asumimos que toda la población de morsas se encuentra en una sola de las cuatro posiciones, según la estación del año. En invierno: la estadía en el Sur, en primavera: la migración al Norte, en verano: la estadía en el Norte y en otoño, la migración al Sur. Si bien la duración de cada etapa no coincide exactamente con la de las estaciones, simplificamos el modelo en este sentido.

Para simbolizar el ciclo y la etapa consideramos un tiempo donde k marca el ciclo (año). En invierno, el k es entero, en primavera se considera $k + 0,25$, en verano, $k + 0,5$ y en otoño, $k + 0,75$ y en el invierno siguiente $k + 1$, etc. En cada $k + 1$ el modelo computa el recuento de la abundancia poblacional en el intervalo entre las etapas estacionales (Figura 3).

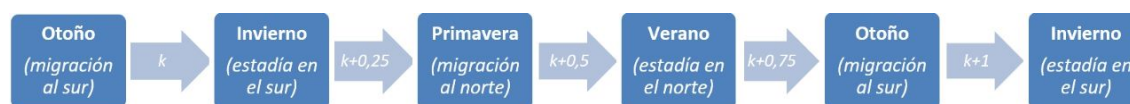


FIGURA 3. Esquema de cada etapa en la vida de la morsa. **Fuente:** Elaboración propia.

En la etapa reproductiva (invierno) se produce un cambio estructural en la población debido al reclutamiento, ya que una fracción del grupo juvenil se incorpora a los adultos reproductivos (hembras o machos). La tasa de reclutamiento se diferencia entre los sexos, teniendo en cuenta que los tiempos de madurez son diferentes para machos (15 años) y hembras (4-7 años) (Fay, 1982). Si p y q son las tasas a las que las crías recién nacidas alcanzan la madurez sexual para machos y hembras adultos, respectivamente, las consideramos inversamente proporcionales al número de años en que se demoran en hacerlo. Esta tasa también debiera ser afectada por la proporción de crías que nacen de uno y otro sexo. Según lo que sugiere la bibliografía, lo asumimos $\frac{1}{2}$ para cada uno (Udevitz y cols., 2013).

En la etapa de migración al Norte (primavera) se verifican los nacimientos de la población, por lo que el cambio en la población se verifica en la abundancia. Como las morsas tienen un periodo de gestación de aproximadamente un año, con tres meses de retraso (Fay, 1982), los nacimientos en el k -ésimo año dependen de la interacción entre los machos y hembras del año $k - 1$. Esta última característica le confiere a nuestro modelo un retardo.

Durante la estadía en el Norte (verano) toda la población sufre las consecuencias del hacinamiento, para esto se optó por una curva de mortandad Holling tipo III para los adultos. Como la mortandad en los juveniles es la más sensible, se le asigna una curva Holling tipo II, que refleja un aumento más pronunciado a bajas densidades poblacionales (Fernández-Arhex y Corley, 2004).

Finalmente, durante la migración al Sur (otoño) las hordas vuelven adelantándose al congelamiento de las aguas árticas y se dirigen a las plataformas continentales meridionales del estrecho. Esta migración es más rápida y menos accidentada debido a que no ocurren pariciones.

En cuanto al tamaño poblacional que soporta el ecosistema beringio, los estudios sugieren que, en condiciones históricas y sin el impacto de la pesca, los mares de Chukchi y Bering soportan alrededor de 250000 – 300000 morsas, a pesar de que no se conoce que estos datos históricos correspondan con una capacidad de carga real del sitio. No obstante, este número ha disminuido desde 1980 y en 2006 se registraron un total de 129000 morsas (Speckman y cols., 2011; MacCracken, 2012). Con ello suponemos que, salvo por las restricciones ambientales debidas al descongelamiento de los casquetes flotantes, la población podría crecer mucho más por encontrarse a la mitad de valor históricos registrados. La mayor competencia

por el alimento, no se debe a la disminución de éste en el mar, sino al solapamiento de nichos de machos y hembras durante la temporada estival, lo cual afecta su tasa de supervivencia.

§4. Construcción del modelo

La población total de morsas (N) es igual a la suma de las poblaciones de machos adultos (M), hembras adultas (H) e individuos juveniles sin distinción de sexo (J), lo que nos da la primera ecuación:

$$(4.1) \quad N = M + H + J.$$

Cada año y cada comienzo de etapa (Figura 3) se colocan como subíndice a los valores poblacionales N , M , H y J . Propusimos ecuaciones para el modelo discreto en que la población de M , H y J , para cada k de la Figura 3 depende de la fase anterior. De atrás hacia adelante, son las siguientes: Para el instante $k + 1$ (instante en que se vuelve de la migración al Sur), al no producirse aumentos poblacionales durante este periodo, consideramos que la población de esta etapa es simplemente una proporción de los individuos que comenzaron la migración en el instante $k + 0,75$, de manera que

$$(4.2) \quad M_{k+1} = s_o M_{k+0,75},$$

$$(4.3) \quad H_{k+1} = s_o H_{k+0,75},$$

$$(4.4) \quad J_{k+1} = s_o J_{k+0,75},$$

donde s_o es la tasa de supervivencia durante el otoño y toma valores entre 0 y 1. Para simplificar y ante la falta de información al respecto, consideramos esta tasa de supervivencia igual para las tres subpoblaciones.

Para el instante $k + 0,75$ (previo al inicio de la migración al Sur, pero posterior a la estadía estival), consideramos que los individuos presentes en este momento son aquellos que sobreviven al momento de alimentación en otoño, durante el cual existe una competencia intraespecífica importante, sobre todo considerando el hacinamiento provocado por la ausencia de hielo flotante. Como bajo estas condiciones, toda la población veranea en el mismo hábitat en lugar de separarse machos por un lado y hembras y juveniles por otro, debe modelarse considerando todos los individuos de la población, por lo que incorporamos la variable N a la función correspondiente.

No usamos la misma función mortandad por hacinamiento durante el otoño para adultos y juveniles, ya que la bibliografía sugiere que éstos últimos se ven más afectados por el mismo. Para representar esto, utilizamos una curva Holling tipo III para los adultos $\left(\frac{N^2}{N^2+a^2}\right)$ y una Holling tipo II para los juveniles $\left(\frac{N}{N+a}\right)$ (Fernández-Arhex y Corley, 2004). La primera curva implica un aumento escaso

a valores pequeños de N , y sólo comienza a ser significativo cuando ésta es muy grande; en cambio, la segunda muestra un crecimiento significativo incluso a valores pequeños de N . Como en el modelo no representamos la mortandad sino la sobrevida, la Holling elegida se resta de 1:

$$(4.5) \quad M_{k+0,75} = \left(1 - \frac{N_{k+0,5}^2}{N_{k+0,5}^2 + a^2}\right) \cdot M_{k+0,5},$$

$$(4.6) \quad H_{k+0,75} = \left(1 - \frac{H_{k+0,5}^2}{H_{k+0,5}^2 + a^2}\right) \cdot H_{k+0,5},$$

$$(4.7) \quad J_{k+0,75} = \left(1 - \frac{N_{k+0,5}}{N_{k+0,5} + a}\right) \cdot J_{k+0,5}.$$

Cabe aclarar que estas ecuaciones modelan la situación actual, con cambio climático (sección 2.2). Al realizar las simulaciones del apartado 6, decidimos comparar la situación análoga, por lo que modificamos estas ecuaciones de manera que se represente la escisión de la población que se verifica en la situación histórica (sección 2.1). En ese caso, sustituimos N por M en la ecuación (4.5) y por $H + J$ en la ecuación (4.6) y (4.7).

Para el instante $k + 0,5$ (momento de llegada luego de la migración al Norte) ocurre algo similar que para $k + 1$, donde observamos una tasa de supervivencia de los individuos en el periodo de migración. Pero, además, este momento registra los nacimientos de nuevos individuos, que se incorporan a la subpoblación de juveniles. Estos se agregan en la ecuación (4.10) y se consideran como proporcionales a los encuentros entre machos y hembras adultos del año previo (durante el cual se produjeron los apareamientos). Este término que introducimos, le incorpora al modelo un retardo de grado 1.

$$(4.8) \quad M_{k+0,5} = s_P M_{k+0,25},$$

$$(4.9) \quad H_{k+0,5} = s_P H_{k+0,25},$$

$$(4.10) \quad J_{k+0,5} = s_P J_{k+0,25} + b M_{k-1} H_{k-1}.$$

Donde s_P es la tasa de supervivencia durante primavera y toma valores entre 0 y 1. Debido a las pariciones, esta migración es más lenta que la anterior, por lo que s_P se considera menor a s_0 . Por su parte, b es la tasa de encuentros exitosos entre M y H que producen descendencia viable.

Para el instante $k + 0,25$ (previo a la migración al Norte, pero luego de la estadía invernal en el Sur), consideramos nuevamente una tasa de supervivencia uniforme para las tres subpoblaciones. Además, se debe considerar el proceso de reclutamiento. Para ello, consideramos que cada subpoblación de adultos incrementa su número en proporción a los juveniles que llegaron al Sur vivos

teniendo en cuenta los distintos años de maduración para hembras y machos (en la sección 3 explicamos los parámetros p y q). Este traspaso es cerrado, por lo que los individuos que ingresan a M y H son los mismos que salen de J .

$$(4.11) \quad M_{k+0,25} = s_I M_k + p J_k,$$

$$(4.12) \quad H_{k+0,25} = s_I H_k + q J_k,$$

$$(4.13) \quad J_{k+0,25} = s_I J_k - (p + q) J_k.$$

Reemplazando sucesivamente las ecuaciones de (4.5) a (4.13) en (4.2), (4.3) y (4.4) obtenemos un modelo unificado como sigue.

Primero, reemplazamos (4.11) en (4.8), luego (4.12) en (4.9) y finalmente (4.13) en (4.10):

$$(4.14) \quad M_{k+0,5} = s_P s_I M_k + s_P p J_k,$$

$$(4.15) \quad H_{k+0,5} = s_P s_I H_k + s_P q J_k,$$

$$(4.16) \quad J_{k+0,5} = s_P s_I J_k - s_P (p + q) J_k + b M_{k-1} H_{k-1}.$$

Luego, reemplazamos (4.14) en (4.5), además (4.15) en (4.6) y por último, (4.16) en (4.7):

$$(4.17) \quad M_{k+0,75} = s_o \left(1 - \frac{N_{k+0,5}^2}{N_{k+0,5}^2 + a^2} \right) (s_P s_I M_k + s_P p J_k),$$

$$(4.18) \quad H_{k+0,75} = s_o \left(1 - \frac{N_{k+0,5}^2}{N_{k+0,5}^2 + a^2} \right) (s_P s_I H_k + s_P q J_k),$$

$$(4.19) \quad J_{k+0,75} = s_o \left(1 - \frac{N_{k+0,5}}{N_{k+0,5} + a} \right) (s_P s_I J_k + s_P (p + q) J_k + b M_{k-1}).$$

En estas ecuaciones encontramos la variable $N_{k+0,5}$, pero necesitamos que todo dependa de instantes donde k es entero, para unificar los modelos. Según la ecuación (4.1), podemos escribir que

$$(4.20) \quad N_{k+0,5} = M_{k+0,5} + H_{k+0,5} + J_{k+0,5}.$$

Por lo tanto, si reemplazamos (4.14), (4.15) y (4.16) en la ecuación (4.20) nos queda que:

$$N_{k+0,5} = s_P s_I M_k + s_P p J_k + s_P s_I H_k + s_P q J_k + s_P s_I J_k + b M_{k-1} H_{k-1} - s_P (p + q) J_k.$$

Operando, resulta:

$$(4.21) \quad N_{k+0,5} = s_P s_I (M_k + H_k + J_k) + b M_{k-1} H_{k-1} = X_k.$$

A esta variable le llamaremos X_k , para distinguirla del valor $N_k = M_k + H_k + J_k$. Por lo tanto, reemplazando finalmente (4.17) en (4.2), (4.18) en (4.3) y (4.19) en (4.4), y teniendo en cuenta (4.21); obtenemos el modelo final con un sistema de

ecuaciones en diferencias con retardo:

$$(4.22) \begin{cases} M_{k+1} &= \left(1 - \frac{X_k^2}{X_k^2 + a^2}\right) (s_o s_P s_I M_k + s_o s_P p J_k), \\ H_{k+1} &= \left(1 - \frac{X_k^2}{X_k^2 + a^2}\right) (s_o s_P s_I H_k + s_o s_P q J_k), \\ J_{k+1} &= \left(1 - \frac{X_k}{X_k + a}\right) (s_o s_P s_I J_k + s_o b M_{k-1} H_{k-1} - s_o s_P (p + q) J_k), \end{cases}$$

donde $X_k = s_P s_I (M_k + H_k + J_k) + b M_{k-1} H_{k-1}$.

§5. Simulación

A partir del modelo que obtuvimos dado por (4.22), realizamos una simulación en *RStudio* (*RStudio-Team, 2022*), interfaz gráfica que trabaja sobre *R* (*R-CoreTeam, 2022*). Asignamos valores estimados a los parámetros, según diversos criterios, siguiendo las características y comportamiento de la especie, ya que no disponemos de datos diacrónicos reales de población para ajustarlos. Se fijaron como sigue:

- La semilla del modelo (valores poblacionales iniciales para comenzar la iteración) se fijó en 55000 para M y H , y en 20000 para J , debido a que, según la bibliografía, la población en 2006 se encontraba en aproximadamente 130000 individuos.
- Los parámetros s_o , s_P y s_I se fijaron en valores muy cercanos a 1: $s_o = 0,98$, $s_P = 0,963$ y $s_I = 0,973$. El modelo resulta extremadamente sensible a estos parámetros.
- El parámetro a se fijó en 1500000 para la situación sin cambio climático y en 2000000. Estos valores se establecieron arbitrariamente para la simulación. No fue posible establecer relación entre este parámetro del modelo y alguno poblacional, como no sea un múltiplo de la capacidad de carga del ambiente.
- EL parámetro b es el más difícil de estimar, debido a que no se encontró información al respecto. Tras probar la dinámica del modelo ante variaciones del mismo se fijó en $\frac{8}{1000000}$.
- Los parámetros p y q son $\frac{1}{30}$ y $\frac{1}{8}$. La tasa p se construye con el producto entre $\frac{1}{15}$ (la inversa de los años que demora en madurar un juvenil macho) y 0,5 (ya que asumimos que la mitad de juveniles que nacen son machos). De manera análoga se construye q como el producto entre 0,25 y 0,5.
- Para comparar el modelo propuesto con la situación pre cambio climático, realizamos una modificación a las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.7) representando la separación de machos y hembras+juveniles, con lo cual los impactos de hacinamiento en la población se vieron reducidos considerablemente. Así, en la situación sin cambio climático el coeficiente

que afecta a la población en (4.5) depende sólo de $M_{k+0,5}$, y las de (4.6) y (4.7) de $H_{k+0,5}$ y $J_{k+0,5}$.

Simulamos dos situaciones con dos escalas temporales. Por un lado, el comportamiento de la población con y sin cambio climático a corto plazo (50 años) y, por el otro, las mismas poblaciones a largo plazo (500 años), a fin de entender el punto de estabilización que predice el modelo para un t lo suficientemente grande (Figura 4).

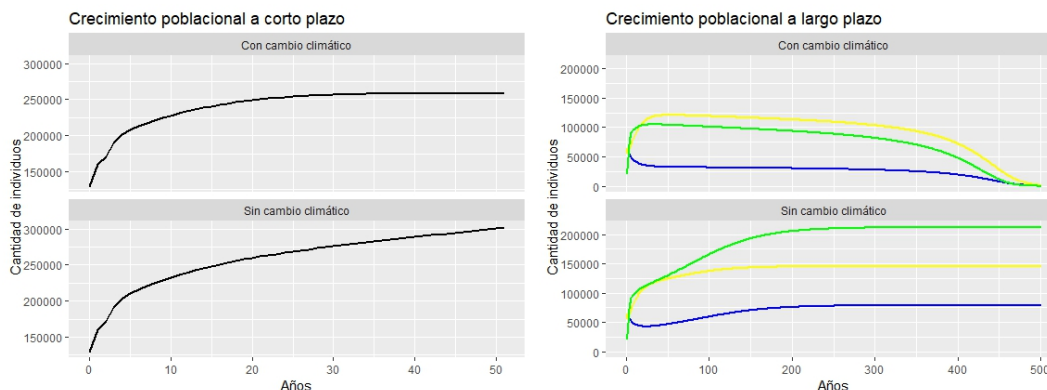


FIGURA 4. Simulación para los primeros 50 años de la población completa (a) y para los primeros 500 años de la población según clase etaria (b). Referencias: negro=total morsas, azul=machos adultos, amarillo=hembras adultas, verde=juveniles. **Fuente:** Elaboración propia en base a simulación.

Según los resultados de las simulaciones, observamos que el modelo predice un comportamiento parecido para ambas situaciones durante los primeros 50 años. Si consideramos que al año 2006 le corresponde un $k = 0$, entonces el año 2020 equivale a $k = 14$. Para ese año, el modelo con cambio climático predice unos 240000 individuos, lo que se condice con la última estimación realizada que reporta unos 283000 individuos (Beatty y cols., 2022). Sin embargo, a largo plazo el modelo predice que la población de morsas comenzará a disminuir hasta la extinción. En el escenario sin cambio climático, la población se estabilizaría en alrededor de 437000 individuos. Valor razonable, considerando los mayores valores estimados en la bibliografía. En la siguiente tabla se presentan los valores finales para 500 iteraciones del modelo.

Por otra parte, la estructura poblacional que el modelo muestra para la población también se condice con lo encontrado en la bibliografía (Beatty y cols., 2022). El modelo muestra que la población se compone de aproximadamente un 50% de juveniles y del doble de hembras que de machos.

Según estos resultados podemos decir que el modelo muestra resultados razonables respecto de lo que se encuentra en la bibliografía en cuanto a población actual, la población en capacidad de carga y la estructura etaria de la misma. Cabe

	Sin cambio climático	Con cambio climático
Machos	78934	350
Hembras	145626	1314
Juveniles	212053	56
Total	436613	1721

CUADRO 1. Tamaños poblacionales finales simulados para $k = 500$ años.

aclarar que el escenario con cambio climático solo modela la modificación en el comportamiento migratorio de la morsa durante el verano y cómo esto afecta a la competencia intraespecífica por espacio y alimento de esta especie. No considera otros factores como la pesca o las futuras modificaciones del clima que pudieran afectar a las poblaciones de las cuales se alimenta la morsa o a su propia capacidad reproductiva, por lo que es necesario suponerlas constantes para poder interpretar los resultados del mismo. Esta limitación forma parte de los recortes de la realidad de la especie, que es necesario hacer para modelar los aspectos considerados más relevantes.

§6. Conclusiones

Tras el ejercicio propuesto por los profesores, realizamos la construcción teórica de un modelo matemático para una población de morsas afectadas por el cambio climático. Al haber construido el modelo desde cero, el mismo es inédito. En este caso, se trata de un modelo discreto que predice la evolución de la población de un año para otro, teniendo en cuenta su estructura etaria y su ciclo migratorio estacional.

Las simulaciones muestran resultados coherentes, en tanto que representan los contrastes con y sin cambio climático y la tendencia actual que observan los investigadores. De continuar la situación actual, el modelo predice una disminución poblacional de morsas y su posterior extinción a largo plazo. El proceso de ajuste de parámetros teniendo en cuenta datos reales y el análisis de puntos de equilibrio y estabilidad del modelo exceden los objetivos de este trabajo, pero quedan pendientes para futuras investigaciones.

El modelo obtenido presenta gran complejidad ya que sería necesario realizar un seguimiento muy riguroso de la población durante cierto tiempo a fin de que la estimación de los parámetros presentes fuera exacta. Hecha esta salvedad, se trata de mediciones y estimaciones sencillas de realizar a campo.

Si bien se trata de un modelo teórico, sin contraste con datos reales, queríamos presentar los resultados para comunicar las líneas de trabajo en las que incursionamos. Asimismo, consideramos que constituye un ejemplo valioso para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática aplicada, que ilustra el

procedimiento que debe realizarse para la construcción interdisciplinaria de modelos matemáticos a partir de información biológica.

Bibliografía

- ACIA (Arctic Climate Impact Assessment). (2004). *Impacts of a warming arctic*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- Beatty, W. S., Lemons, P. R., Everett, J. P., Lewis, C. J., Taylor, R. L., Lynn, R. J., ... others (2022). Estimating pacific walrus abundance and survival with multievent mark-recapture models. *Marine Ecology Progress Series*, 697, 167–182. doi: 10.3354/meps14131
- Citta, J. J., Lowry, L. F., Quakenbush, L. T., Kelly, B. P., Fischbach, A. S., London, J. M., ... others (2018). A multi-species synthesis of satellite telemetry data in the pacific arctic (1987–2015): overlap of marine mammal distributions and core use areas. *Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography*, 152, 132–153. doi: 10.1016/j.dsr2.2018.02.006
- Fay, F. H. (1982). Ecology and biology of the pacific walrus, *odobenus rosmarus divergens illiger*. *North American Fauna*, 74, 1–279. doi: 10.3996/nafa.74.0001
- Fay, F. H., Kelly, B. P., Gehrich, P. H., Sease, J. L., y Hoover, A. A. (1984). *Modern populations, migrations, demography, trophics, and historical status of the pacific walrus*. University of Alaska and Fairbanks Institute of Marine Science.
- Fernández-Arhex, V., y Corley, J. C. (2004). La respuesta funcional: una revisión y guía experimental. *Ecología austral*, 14(1), 83–93.
- Frey, K. E., Moore, G., Cooper, L. W., y Grebmeier, J. M. (2015). Divergent patterns of recent sea ice cover across the bering, chukchi, and beaufort seas of the pacific arctic region. *Progress in Oceanography*, 136, 32–49. doi: 10.1016/j.pocean.2015.05.009
- Garlich-Miller, J., MacCracken, J. G., Snyder, J., Meehan, R., Myers, M., Wilder, J. M., ... Matz, A. (2011). Status review of the pacific walrus (*odobenus rosmarus divergens*). *US Fish and Wildlife Service*.
- Jay, C. V., Fischbach, A. S., y Kochnev, A. A. (2012). Walrus areas of use in the chukchi sea during sparse sea ice cover. *Marine Ecology Progress Series*, 468, 1–13. doi: 10.3354/meps10057
- Krupnik, I., y Ray, G. C. (2007). Pacific walruses, indigenous hunters, and climate change: bridging scientific and indigenous knowledge. *Deep sea research part II: topical studies in oceanography*, 54, 2946–2957. doi: 10.1016/j.dsr2.2007.08.011
- MacCracken, J. G. (2012). Pacific walrus and climate change: observations and predictions. *Ecology and evolution*, 2(8), 2072–2090. doi: 10.1002/ece3.317
- R-CoreTeam. (2022). *R: A language and environment for statistical computing*. Descargado de <https://www.R-project.org/>

- RStudio-Team. (2022). *RStudio: Integrated development for R, version 2022.7.1.554*.
Descargado de <http://www.rstudio.com/>
- Speckman, S. G., Chernook, V. I., Burn, D. M., Udevitz, M. S., Kochnev, A. A., Vasilev, A., ... Benter, R. B. (2011). Results and evaluation of a survey to estimate pacific walrus population size, 2006. *Marine Mammal Science*, 27(3), 514–553. doi: 10.1111/j.1748-7692.2010.00419.x
- Udevitz, M. S., Taylor, R. L., Garlich-Miller, J. L., Quakenbush, L. T., y Snyder, J. A. (2013). Potential population-level effects of increased haulout-related mortality of pacific walrus calves. *Polar Biology*, 36, 291–298. doi: 10.1007/s00300-012-1259-3

PEHUÉN BARZOLA ELIZAGARAY

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Instituto Interdisciplinario de Ciencias Básicas, CONICET/UNCUIYO

(✉) pehuen.be@gmail.com

MARCELO EDUARDO ALBERTO

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCUIYO

(✉) malberto@fca.uncu.edu.ar

CARLOS RUBÉN BAGETA

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) sichar@gmail.com

ALICIA BEVAQUA

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCUIYO

(✉) aliciabevaqua@gmail.com

ADRIAN CECCONATO

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNCUIYO

(✉) ajcecconato@gmail.com

MARCELA GARRIGA

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) marcegarriga@gmail.com

MARTA TIRADOR

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) marta.etirador@gmail.com

VERÓNICA NODARO

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO)

(✉) nodaro.vero@gmail.com

MELISA ENRIQUE

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUIYO); Estudiante

de Ingeniería en Recursos Naturales Renovables, FCA, UNCUYO

(✉) *melienrique24@gmail.com*

MARÍA VICTORIA GAYÁ TOSONI

Cátedra de Matemática, Facultad de Ciencias Agrarias (FCA), Universidad Nacional de Cuyo (UNCUYO); Estudiante de Ingeniería en Recursos Naturales Renovables, FCA, UNCUYO

(✉) *mvgayatosoni@gmail.com*

Recibido: 6 de junio de 2022.

Aceptado: 24 de noviembre de 2022.

Publicado en línea: 27 de abril de 2023.
