Benders Decomposition Applied to Security Constrained Unit Commitment

J. Alemany, D. Moitre, *Senior Member,* IEEE *and* F. Magnago, *Senior Member,* IEEE

***Abstract*— Security Constrained Unit Commitment is a large scale optimization problem of fundamental application in modern power system operation control centers. Benders decomposition is one of the most applied methodologies on the Security Constrained Unit Commitment Problem. One of the related drawbacks with this methodology is its oscilating behaivior wich in turns affects the convergence of the algorithm. In this work several options to improve the convergence of the Benders algorithm are presented.**

***Keywords*— Benders Decomposition, Security Constrained Unit Commitment, Short Term Thermal Scheduling.**

I. INTRODUCCION

EL PREDESPACHO térmico de corto plazo es una herramienta de amplia utilización en la planificación de la operación de los sistemas eléctricos de potencia. El problema consiste en determinar el estado de operación y el nivel de potencia horaria de las unidades de generación de un sistema interconectado logrando el menor costo operativo, respetando todas las restricciones técnicas y operativas de los generadores y de la red de transmisión. Este problema se ha estudiado ampliamente aplicando distintos métodos de resolución. Desde el punto de vista de los operadores, es una herramienta fundamental para definir el despacho diario de las unidades de generación de un sistema interconectado, pudiendo prever el estado de la red a un día vista, permitiendo seguir un patrón preestablecido de operación, minimizando las correcciones en la operación real del sistema.

El problema de predespacho al que se le incluyen restricciones de red, puede considerarse matemáticamente como una composición de dos problemas de naturaleza diferente. Este hecho naturalmente conlleva a la aplicación de metodologías de descomposición para resolver ambos problemas por separado de manera iterativa, siendo uno la realimentación del otro hasta alcanzar un criterio de convergencia. La descomposición de Benders [1] es una de las técnicas más comunes utilizadas para separar problemas de gran escala, como en el caso de sistemas eléctricos de potencia. En general, la descomposición de Benders puede considerarse como una metodología de planos cortantes [2]. En ciertos casos, los algoritmos de planos cortantes pueden presentar inestabilidades que afectan la convergencia del algoritmo [3]. Este fenómeno de oscilación de la convergencia del algoritmo de Benders se agrava con el alto costo computacional del problema maestro. No obstante, en la actualidad, la descomposición de Benders sigue siendo una de las opciones más viables de implementar para sistemas de gran escala.

El objetivo de este trabajo es el de revisar y explorar las diferentes opciones existentes de la descomposición de Benders aplicada al problema de predespacho con restricciones de red. El presente trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: La Sección II introduce los conceptos básicos de la metodología de Benders, la Sección III describe el problema del predespacho restringido con la red en el contexto de Benders, en la Sección IV se identifican los aspectos a tener en cuenta para mejorar la aplicación del mismo y finalmente en la Sección V se resumen las conclusiones más importantes del trabajo.

II. DESCOMPOSICIÓN DE BENDERS

Un problema de optimización mezcla entero complejo puede representarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} \min\limits_{x_1,x_2} c_1^{\,T} x_1 + c_2^T x_2 & & & \\ A_1 x_1 & & = & b_1 \\ B_1 x_1 & + \quad A_2 x_2 & = & b_2 \\ x_1 & , \quad x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{1}$$

Donde x_1 es el vector entero de dimensión n_1 correspondiente a las variables de la primera etapa y el vector real x_2 de dimensión n_2 a las variables de la segunda etapa, A_1 es una matriz real de dimensión $m_1 \times n_1$, A_2 es una matriz real de dimensión $m_2 \times n_2$, B_1 es una matriz real de dimensión $m_2 \times n_1$, c_1 es un vector real de dimensión n_1 (el supra índice T denota transposición), c_2 es un vector real de dimensión n_2, b_1 es un vector real de dimensión m_1 y b_2 es un vector real de dimensión m_2. La dimensión de la matriz de restricciones del problema es $(m_1+m_2) \times (n_1+n_2)$.

El método de descomposición de Benders descompone los problemas de optimización de diferente naturaleza en un problema maestro y en uno o varios subproblemas. El maestro representa a la primera etapa y a las condiciones necesarias, denominadas cortes, derivadas de la segunda etapa. El subproblema representa la segunda etapa cuando las decisiones de la primera etapa son conocidas. El algoritmo es

J. Alemany, Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC), Río Cuarto, Córdoba, Argentina, jalmeany@ ing.unrc.edu.ar.

F. Magnago, Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC), Río Cuarto, Córdoba, Argentina, fmagnago@ ing.unrc.edu.ar.

D. Moitre Universidad Nacional de Río Cuarto (UNRC), Río Cuarto, Córdoba, Argentina, dmoitre@ ing.unrc.edu.ar

iterativo alternando la solución entre el maestro y el subproblema. Este método de descomposición se utiliza cuando las variables x_1 de la primera etapa complican la solución del problema descripto por la Ec. (1). Adicionalmente, se supone que $n_1 << n_2$, o sea que el número de variables de la primera etapa es mucho menor que el número de variables de la segunda etapa. También tiene sentido su utilización cuando el maestro es un problema de origen diferente al del subproblema [4].

El problema de optimización de la Ec. (1) se puede rescribir como:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,\theta_2(x_1)} c_1^T x_1 + \theta_2(x_1) \\ &A_1 x_1 = b_1 \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Donde la función de recursos $\theta_2(x_1)$ es una función poligonal convexa a valores reales, que representa la función objetivo de la segunda etapa en función de las decisiones de la primera etapa y se expresa como:

$$\begin{aligned} &\theta_2(x_1) = \min_{x_2} c_2^T x_2 \\ &A_2 x_2 = b_2 - B_1 x_1 \quad : \pi_2 \\ &x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Siendo π_2 las variables duales (o precios sombra) de las restricciones.

En la descomposición de Benders, al problema (2) se lo denomina maestro y al (3) subproblema. Por ser función $\theta_2(x_1)$ una función poligonal convexa de la variable x_1 el problema original (1) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} &\min_{x_1,\theta_2} c_1^T x_1 + \theta_2 \\ &A_1 x_1 = b_1 \\ &\theta_2 \geq (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2^1 \\ &\vdots \\ &\theta_2 \geq (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2^\nu \\ &x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Donde ν es el máximo número de cortes. Las restricciones de desigualdad se denominan planos de corte (o hiperplanos soporte o tangentes) a la función objetivo para cada valor del vector x_1.

La formulación (4) también se denomina problema maestro completo pues contiene todos los posibles cortes. Desde un punto de vista algorítmico, la resolución de (4) implica disponer de todos los cortes. En lugar de ello, en los problemas de gran tamaño, se introducen los cortes de forma iterativa.

Si el subproblema (3) es factible para un valor de x_1, los precios sombra de sus restricciones son los obtenidos para su solución óptima y los cortes formados en el maestro se denominan cortes de óptimo. Si el subproblema (3) es factible pero no acotado para un valor de x_1, el problema (1) es no acotado. Si el subproblema (3) no es factible para un valor de x_1, los precios sombra de sus restricciones son los derivados de la Fase I del Simplex [5] y los cortes se denominan cortes de infactibilidad.

III. Descomposición de Benders en problemas SCUC

El problema de predespacho económico con restricciones de seguridad es un problema de optimización de gran escala con algunas variables de decisión lineales y otras no lineales, sujeto a restricciones de unidades de generación, de sistema y de red eléctrica. Estas últimas son las que se representan en la segunda etapa. En el caso de problemas SCUC donde la descomposición se puede aplicar a las restricciones, entonces la descomposición de Benders es la más apropiada.

El esquema general de la descomposición de Benders aplicada a problemas SCUC se ilustra en la Fig. 1 [6]. Primero, el problema de predespacho económico sin considerar las restricciones de la red es calculada en el primer nivel A (Problema Maestro), el que corresponde al nivel de decisión. Luego, el valor de potencia activa generada (P^*) se transfiere al nivel B (subproblema – nivel de factibilidad) de manera de chequear que las restricciones de red sean factibles. Si la decisión realizada en el nivel A hace que sea inviable la resolución del nivel B, entonces se generan cortes de Benders y se incorporan al nivel de decisión. Este es un proceso iterativo que converge cuando el despacho de los generadores satisface todas las restricciones de red.

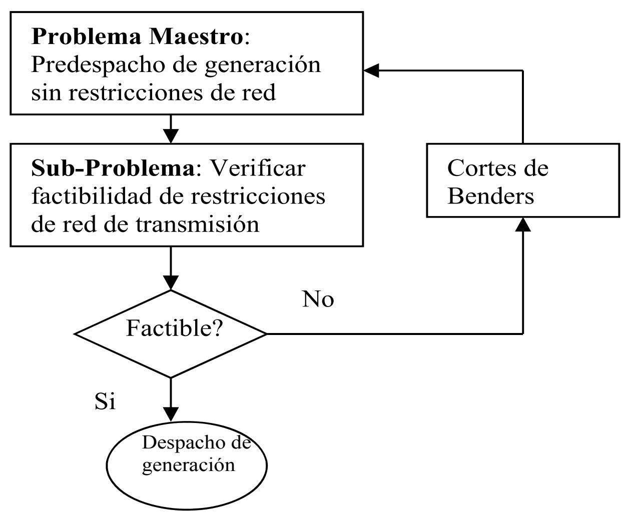

Figura 1. Esquema general de descomposición en dos niveles.

A. Formulación del problema

$$\min \sum_{t=1}^{T} c(\mathbf{P}_t) \tag{5}$$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}^0\boldsymbol{\theta}^0 = \mathbf{P}^0 - \mathbf{D}\\ -\bar{\mathbf{f}}^0 \le \mathbf{f}^0 \le \bar{\mathbf{f}}^0\\ \mathbf{P}^0_{\min} \le \mathbf{P}^0 \le \mathbf{P}^0_{\max}\\ \left|\ \mathbf{P}^0 - \mathbf{P}\ \right| \le \boldsymbol{\Delta}^0\end{array}\right\}\ \text{Caso base por cada período } t \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}^i\boldsymbol{\theta}^i = \mathbf{P}^i - \mathbf{D}\\ -\bar{\mathbf{f}}^i \le \mathbf{f}^i \le \bar{\mathbf{f}}^i\\ \mathbf{P}^i_{\min} \le \mathbf{P}^i \le \mathbf{P}^i_{\max}\\ \left|\ \mathbf{P}^i - \mathbf{P}\ \right| \le \boldsymbol{\Delta}^i\end{array}\right\}\ \text{Contingencia } i \tag{7}$$

B. Etapa de decisión

La etapa de decisión se puede formular como un problema de predespacho económico sin restricciones de red:

$$\min \sum_{t=1}^{T} c(\mathbf{P}_t) \tag{8}$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{l}\mathrm{P_t} - \mathrm{D_t} = 0,\ \mathrm{t} \in [1, \mathrm{T}]\\ \text{Restricciones de rampa}\\ \text{Restricciones Emision}\\ \text{Restricciones de combustible}\\ \text{Cortes de Benders}\\ \text{etc...}\end{array} \tag{9}$$

C. Etapa de factibilidad

El acoplamiento entre el problema maestro y el sub problema es realizado a través de la variable $\mathbf{P}^*$, calculada en el problema de predespacho económico y que es la solución del problema descripto por (6)-(9). El subproblema puede ser formulado de la siguiente manera:

$$w^* = \min \quad \mathbf{c}_s \cdot \mathbf{s}^i + \mathbf{c}_r \cdot \mathbf{r}^i \tag{10}$$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{B^i}\theta^{\mathrm{i}} = \mathrm{P^i} - \mathrm{D} & \pi_{\mathrm{D}}\\ -\bar{\mathrm{f}}^{\mathrm{i}} \le \mathrm{f^i} + \mathrm{s^i} \le \bar{\mathrm{f}}^{\mathrm{i}} & \pi_{\mathrm{f}}\\ \mathrm{P^i_{min}} \le \mathrm{P^i} \le \mathrm{P^i_{max}} & \pi_{\mathrm{P}}\\ \left|\ \mathrm{P^i} - \mathrm{P^0}\ \right| + \mathrm{r^i} \le \Delta^{\mathrm{i}} & \pi_{\Delta}\end{array}\right\}\ \text{Restricción de red } i \tag{11}$$

Donde **s** y **r** son las variables de penalización utilizadas para relajar el problema, los costos asociados $\mathbf{c}_\mathrm{s}$ and $\mathbf{c}_\mathrm{r}$ son usualmente fijados como uno.

El problema representado por (10)-(11) se puede resolver de dos maneras diferentes:

- Relajando las restricciones de flujo (**s**).
- Relajando el despacho de generación (**r**).

1) Relajación de las restricciones de flujo

$$w^* = \min \quad \mathbf{c}_s \cdot \mathbf{s}^i \tag{12}$$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{B^i}\theta^{\mathrm{i}} = \mathrm{P^i} - \mathrm{D} & \pi_{\mathrm{D}}\\ -\bar{\mathrm{f}}^{\mathrm{i}} \le \mathrm{f^i} + \mathrm{s^i} \le \bar{\mathrm{f}}^{\mathrm{i}} & \pi_{\mathrm{f}}\\ \mathrm{P^i_{min}} \le \mathrm{P^i} \le \mathrm{P^i_{max}} & \pi_{\mathrm{P}}\\ \left|\ \mathrm{P^i} - \mathrm{P^*}\ \right| \le \Delta^{\mathrm{i}} & \pi_{\Delta}\end{array}\right\} \tag{13}$$

2) Relajación de despacho de generación

$$w^* = \min \quad \mathbf{c}_r \cdot \mathbf{r}^i \tag{14}$$

Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathrm{B^i}\theta^{\mathrm{i}} = \mathrm{P^i} - \mathrm{D} & \pi_{\mathrm{D}}\\ -\bar{\mathrm{f}}^{\mathrm{i}} \le \mathrm{f^i} \le \bar{\mathrm{f}}^{\mathrm{i}} & \pi_{\mathrm{f}}\\ \mathrm{P^i_{min}} \le \mathrm{P^i} \le \mathrm{P^i_{max}} & \pi_{\mathrm{P}}\\ \left|\ \mathrm{P^i} - \mathrm{P^*}\ \right| + \mathrm{r^i} \le \Delta^{\mathrm{i}} & \pi_{\Delta}\end{array}\right\} \tag{15}$$

En este caso, un corte de Benders es creado para cada escenario de la red:

$$w^* + \pi_\Delta \cdot \left(\mathbf{P} - \mathbf{P}^*\right) \le 0 \tag{16}$$

IV. Mejoras en la solución de la descomposición de Benders

Como se ha presentado en la sección anterior, la descomposición de Benders es uno de los métodos más utilizados para resolver el problema SCUC. La descomposición de Benders puede considerarse como una técnica de planos cortantes. Las metodologías de planos cortantes por lo general pueden presentar inestabilidades que ciertas veces pueden retardar la convergencia de los algoritmos. Además de los problemas de convergencia del algoritmo de Benders se debe sumar el alto costo computacional del problema maestro. En consecuencia, existe gran interés en mejorar distintos aspectos del método que permitan mayor calidad en la solución y en el menor tiempo posible. Una exhaustiva revisión bibliográfica relacionada a la aplicación de Benders ha permitido identificar los siguientes aspectos a tener en cuenta en la aplicación del mismo:

- La inicialización del problema maestro.
- La solución del problema maestro.
- La solución del subproblema.
- La eficiencia del modelo.

En las siguientes subsecciones se discutirán los aspectos más relevantes de cada uno de estos temas.

A. Inicialización del problema Maestro

La forma en que se inicializa el problema podría tener luego un fuerte impacto en la performance del mismo.

Una forma de mejorar la convergencia es la de seleccionar apropiadamente los cortes iniciales [7]. El inconveniente en esta selección radica en que si en el subproblema no se encuentra una primera solución factible en forma rápida, entonces esta selección no siempre tiene sentido. Por lo tanto una alternativa es la de seleccionar como corte inicial una solución trivial basada solamente en los límites inferiores o superiores de las variables [8].

Como ejemplo de esta metodología, en [9] el problema Maestro se inicializa utilizando una serie de desigualdades –cortes- que permiten mejorar la convergencia del algoritmo.

Otra forma es la de desarrollar una lógica que permita identificar las restricciones de seguridad que están inactivas [10]. Este procedimiento permite realizar cortes de Benders considerando solamente un conjunto reducido de restricciones comparado al problema original con la consiguiente mejora en la velocidad de cálculo.

B. Solución del problema Maestro

La gran carga computacional del algoritmo de Benders está conformada por el problema Maestro -MILP- el cual debería resolverse hasta una solución óptima de forma iterativa. Esto hace que la resolución de problemas de gran escala utilizando esta metodología implique una enorme cantidad de tiempo de cálculo que haga casi impracticable la utilización del método de no contar con estrategias alternativas.

Una alternativa es utilizar la primera solución factible sub-optima encontrada en lugar de la óptima global en cada iteración de Benders [8], [11]. En este caso, es necesario incorporar una restricción adicional basada en los criterios de convergencia del algoritmo de Benders, que garantice la convergencia del método con menor cantidad de iteraciones.

Otra alternativa es utilizar las soluciones relajadas del problema Maestro [12]. Para ello existen dos estrategias; la primera consiste en modificar la solución redondeando las soluciones reales de manera de obtener soluciones enteras factibles y la segunda consiste en encontrar la dirección o pendiente que refleje el costo de las variables enteras y continuas en una forma lineal.

En general, la principal motivación de estas propuestas se basa en la pobre información inicial que el problema maestro cuenta sobre el subproblema.

C. Solución del Subproblema

Otra alternativa que no ha sido muy investigada en aplicaciones de SCUC es la de mejorar la convergencia modificando la solución del subproblema en lugar del problema maestro. La solución del subproblema consiste básicamente en generar los cortes de Benders de la manera más eficiente posible. Por lo tanto, se puede mejorar el método general desarrollando distintas lógicas de formación de cortes de Benders. Algunas metodologías se inclinan a favor de la producción de cortes más profundos y otras a favor de la generación de cortes computacionalmente más económicos. La pretendida consecuencia directa de estas estrategias es obtener una convergencia del algoritmo en el menor tiempo.

Una propuesta en esta dirección es realizada en [13], en este trabajo se desarrolla una metodología basada en generar cortes múltiples mejorando la densidad de los mismos. Este método obtiene mejoras de hasta un 5% de costo computacional para sistemas de gran tamaño.

Una propuesta distinta es presentada en [14], donde se propone la formación de cortes inexactos pero de menor costo computacional. Estos cortes son calculados utilizando un tercer sub-nivel donde se generan estos cortes utilizando el método de punto interior.

Si bien estas ideas son promisorias, se deben realizar más simulaciones aplicadas a SCUC.

D. Eficiencia del modelo

Por último, el modelado de las restricciones afecta sustancialmente la performance del algoritmo de Benders. Las diferentes formas de formular las restricciones en el problema maestro pueden resultar en similares soluciones factibles y valor objetivo pero pueden ser diferentes en otros sentidos ya que pueden presentar distintos valores de relajación lineal y por lo tanto aumentar la carga computacional del algoritmo de Benders. Con lo cual, una estrategia alternativa de mejora es contar con un abanico de distintas opciones de modelado para una misma restricción [15]. Acorde a esto, sería necesario evaluar las diferentes formulaciones del modelo de forma tal de obtener información objetiva que permita establecer la preferencia de unas sobre otras en relación al comportamiento del algoritmo de Benders. En resumen, la reformulación del problema puede producir un profundo efecto en la eficiencia del algoritmo de Benders.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un resumen de diferentes estrategias propuestas para acelerar el algoritmo de Benders clásico, haciendo énfasis en su aplicación al problema SCUC.

Tomando en cuenta que el predespacho involucra la resolución del complejo problema maestro -MILP- es muy valioso contar con un estudio exhaustivo en el cual se comparen las diferentes opciones de formulaciones para el modelo MILP. Este estudio permite seleccionar la opción más apropiada para utilizar en el problema SCUC basado en la descomposición de Benders.

A partir de los problemas expuestos y las distintas estrategias descritas para la aceleración de la convergencia del algoritmo de Benders, como trabajo futuro se pretende evaluar la aplicación simultánea de las mismas, de manera de compensar las desventajas y potenciar los beneficios de cada una de ellas.

REFERENCIAS

[1] J. F. Benders "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems", *Numerische Mathematik,* vol. 4, pp. 238–252, 1962.

[2] J. Bonnans, J. Gilbert, C. Lemarechal, and C. Sagastizabal, "Numerical Optimization - Theoretical and Practical Aspects", pp. 147-148, Springer, 2006.

[3] H. Pinto, F. Magnago, and P. Worhach, "Dual maximization methods for lagrangian relaxation-based scuc,", in Bulk Power System Dynamics and Control ,VIII IREP Symposium, Aug. 2010, pp. 17.

[4] A. M. Geoffrion, "Generalized Benders Decomposition", *Journal of Optimization Theory and Applications,* vol. 10, no. 4, pp. 237–260, Oct. 1962.

[5] D.G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming.* Second Edition. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, USA, 2003.

[6] H.Pinto, F.Magnago, S.Brignone, O.Alsac, and B.Stott, "Security constrained unit commitment: Network modeling and solution issues", *Power Systems Conference and Exposition, 2006. PSCE '06. 2006 IEEE PES, 29*, Nov. 2006, pp. 1759 --1766.

[7] A. M. Geoffrion, and G. W. Graves, "Multicommodity distribution system design by benders decomposition", *Management Science - Theory Series, Mathematical Programming*, 1974, vol. 20, no.5, pp. 822--844.

[8] T. Magnanti, R. Wong, and P. Mireault, *Tailoring benders decomposition for uncapacitated network design*, MIT Press, MA, 1984.

[9] G. K.D. Saharidis, M. Minoux, and M. G. Ierapetritou, "Accelerating benders method using covering cut bundle generation", *International Transactions in Operational Research*, vol. 17, no. 2, pp. 221-237, 2010.

[10] Q. Zhai, X. Guan, J. Cheng, and H. Wu, "Fast identification of inactive security constraints in scuc problems", *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 25, no. 4, pp. 1946 -1954, nov. 2010.

[11] G. Côté and M. A. Laughton, "Large-scale mixed integer programming: Benders-type heuristics", *European Journal of Operational Research*, vol. 16, no. 3, pp. 327 - 333, 1984.

[12] A. M. Costa, J. F. Cordeau, B. Gendron, and G. Laporte, "Accelerating Benders decomposition with heuristic master problem solutions", *Pesquisa Operacional,* pp 1-15, 2011.

[13] L. Wu and M. Shahidehpour, "Accelerating the benders decomposition for network-constrained unit commitment problems", *Energy Systems*, vol. 1, pp. 339-376, 2010

[14] G. Zakeri, A. Philpott, and D. Ryan, "Inexact cuts in benders decomposition", SIAM Journal on Optimization, Vol. 10, 2000.

[15] J. Alemany, F. Magnago, D. Moitre, "Análisis de modelos de predespacho basados en métodos de bifurcación y corte", XIV ERIAC - Encuentro Regional Iberoamericano de Cigre. Ciudad del Este, Paraguay, 2011.

J. Alemany, es graduado como magister de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Actualmente está realizando su Ph.D. en la UNRC. Previamente ha trabajado en EDEMSA y en la Secretaría de Energía de la Nación, Argentina. Adicionalmente es profesor asistente en la UNRC. Sus áreas de interés son la optimimzación y operación economica de los sistemas eléctricos de potencia.

D. Moitre, es graduado como magister de la Pontificia Universidad Catolica, Chile. Actualmente se desempeña como profesor titular en la Universidad Nacional de Río Cuarto. Sus áreas de interés son la confiabilidad y operación economica de los sistemas eléctricos de potencia.

F. Magnago (SM' 2003) es graduado como magister y Doctor en la Universidad de Texas A&M. Fernando trabaja en Nexant Inc desde el año 2000 donde se desempeña como desarrollador de software. Adicionalmente se desempeña como profesor titular en la Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina. Sus áreas de interés incluyen el modelado, analisis económico, operación y planificación de los sistemas eléctricos de potencia.