IARTEM · e-journal

Vol. 15 no. 2
Peer-reviewed research article

DOI: https://doi.org/10.21344/iartem.v15i2.999
ISSN: 1837-2104

Recursos y enseñanza por indagación – el papel de los esquemas de los profesores de matemática en servicio

María Rita Otero[1,2], María Paz Gazzola[1,2]
[1]Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas,
[2] NIECyT, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.

Resumen

Esta investigación analiza la interacción de 62 profesores de matemáticas en servicio con un recurso denominado Recorrido de estudio e investigación (REI). Los REI son recursos desarrollados para realizar enseñanza por indagación en el marco de la Teoría Antropológica de lo didáctico. El objetivo del trabajo es describir los esquemas de los docentes en dos situaciones: estudiar y analizar el REI y luego organizar una propuesta de enseñanza. Los diferentes esquemas generados en cada situación se describen a partir de la Teoría de los campos conceptuales y el enfoque instrumental, analizando las respuestas escritas individuales de los profesores en ambas situaciones. El trabajo muestra la diversidad y riqueza de los instrumentos generados por los docentes y permite comprender sus dificultades para desarrollar enseñanza por indagación.

Palabras Clave: enseñanza por indagación, recursos, recorrido de estudio y de investigación, esquema, instrumentos, formación continua de profesores.

Resources and inquiry-based teaching – the role of in-service math teacher schemes

Summary

This research analyses the interaction of 62 in-service maths teachers with a resource called Study and Research Path (SRP). The SRP are resources developed to carry out inquiry-based teaching in the framework of Chevallard's anthropological theory of didactics. The aim of the work is to describe the teacher's schemes in two situations: study and analyse the SRP and then organise a teaching plan. The schemes generated in each situation are described from the theory of conceptual fields and the instrumental approach, analysing the individual written responses of teachers to both situations. The work shows the diversity and richness of the instruments generated by teachers and allows us to understand their difficulties in developing inquiry-based teaching.

Keywords: inquiry-based teaching, resources, study and research path, scheme, instruments, in-service teacher training

Introducción

La enseñanza de las ciencias y las matemáticas orientada hacia procesos de investigación o indagación fue propuesta ya en la segunda mitad del siglo pasado (Anderson, 2002, Artigue y Blomhøj, 2013). El Inquiry-based learning (IBL) o Inquiry-based science (IBS) (Schwab, 1962) surgió en USA alrededor de 1960 inspirado en las ideas de John Dewey (1916). Particularmente en matemáticas, la enseñanza/aprendizaje basada en la indagación involucra actividades tales como elaborar preguntas; resolver problemas; modelar y matematizar, explorar un problema, analizar documentos y datos; experimentar, proponer conjeturas; ensayar, explicar, razonar, argumentar y probar; definir y estructurar; conectar, representar y comunicar (Artigue y Blomhøj, 2013). Aunque a nivel mundial el curriculum y las orientaciones sobre la enseñanza de las ciencias y las matemáticas actualmente promueven la enseñanza por indagación en la escuela, eso no se refleja en la enseñanza habitual, ni en la formación de los docentes.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 2009, 2013, 2017) sustenta la enseñanza por indagación en la emergencia de un nuevo paradigma de enseñanza, basado en la investigación y el cuestionamiento del mundo, que debería sustituir al paradigma aún dominante, denominado monumental. Este cambio afecta radicalmente la manera de concebir la profesión de profesor y plantea numerosos desafíos e interrogantes sobre la formación y capacitación de los docentes. ¿Cómo formar a los profesores para enseñar a partir del cuestionamiento y de la indagación? Una aproximación de orden cero es hacerlo estudiando preguntas. La TAD propone un modelo para estudiar cualquier pregunta, que se materializa en los dispositivos didácticos llamados Recorridos de Estudio e Investigación (REI).

Desde hace más de diez años nuestro equipo ha investigado sobre la enseñanza por indagación y los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) en el marco de la TAD (Chevallard, 2009) en la educación secundaria argentina. En una primera etapa, diseñamos e implementamos numerosos REI (Otero, et al., 2012, 2013; Llanos y Otero, 2015; Gazzola & Otero, 2021; Salgado y Otero, 2020 Gazzola y Otero, 2021). Luego, nos preguntamos cómo los docentes podrían incorporar los REI en la enseñanza, ya que la distancia entre sus prácticas habituales y la enseñanza por indagación es muy grande (Otero, 2021). En uno de nuestros primeros trabajos desarrollamos, analizamos y evaluamos en dos cohortes de docentes en formación, un REI codisciplinar en física y matemáticas (Otero et al., 2017) cuya pregunta generatriz alude al movimiento, pérdida de equilibrio y caída de una enorme roca oscilante. Una de las principales dificultades encontradas se relaciona con la escasa experiencia en modelización matemática y física de los estudiantes de la facultad de ciencias exactas, donde predomina una concepción de modelado ligada a la aplicación del saber más que a la generación de nuevo conocimiento.

Existen pocos trabajos que estudian cómo los docentes utilizan y transforman un REI mientras enseñan (Wozniak, 2015; Matheron, 2008). En un estudio de caso Gueudet et.al. (2018) analizaron el trabajo documental de una profesora del liceo francés que se propuso enseñar con un REI relacionado con el funcionamiento de las antenas parabólicas. Continuando con esta investigación, Parra y Otero (2021) identificaron y clasificaron los invariantes operatorios de esa profesora, mostrando que, si bien ella quería enseñar con un REI por iniciativa propia, los invariantes operatorios que engendraban su actividad no eran compatibles con gestos didácticos propios del paradigma del cuestionamiento del mundo, tales como formular nuevas preguntas y responderlas, entrar y salir del tema, explorar disciplinas y delimitar áreas de estudio.

Por otro lado, durante un curso universitario on-line sobre Didáctica de las Matemáticas analizamos cómo 31 docentes en servicio investigaban la pregunta generatriz del REI sobre las antenas parabólicas y cómo organizaban una posible enseñanza con esa pregunta (Otero & Llanos, 2019). Sus dificultades se debían a que intentaban controlar completamente el medio didáctico y responsabilizarse casi exclusivamente por su construcción, además de su inexperiencia con el modelado matemático y físico y con la enseñanza por indagación propia de los REI. Los docentes debían enfrentar dos tipos de situaciones: estudiar la pregunta que origina el REI (esto incluye desarrollarla y explorarla) y posteriormente, elaborar una propuesta de enseñanza empleando la pregunta. En este último caso, ellos priorizaron los saberes propios del programa que imparten regularmente en la escuela secundaria. Nuestra conclusión es que buena parte de las dificultades, se deben a que los REI son dispositivos demasiado diferentes de los recursos que los docentes usan en la enseñanza habitual.

En otros trabajos, estudiamos cómo los profesores intentaban realizar enseñanza por indagación empleando problemas escolares y analizamos sus esquemas en las mismas condiciones mencionadas anteriormente. Los resultados mostraron que, para los docentes, la actividad de estudio y cuestionamiento matemático del problema, no resulta necesaria, ni integra su práctica habitual. Esto se atribuye a que cada recurso se vincula con un tema del programa, al que se considera evidente y transparente. Los profesores asimilan los recursos que no han empleado antes con los esquemas que tienen disponibles, adquiridos durante su desempeño profesional (Gazzola & Otero, 2022).

Por todo lo expuesto, en la investigación actual elegimos un problema que permite enseñar saberes matemáticos diversos del currículo del bachillerato argentino, tal como el llamado problema de la caja del pastelero (Chappaz & Michon, 2003) que permite generar un REI y realizar actividades de modelado relativamente sencillas, además de habilitar posibles salidas del tema que conducen al estudio de diversas organizaciones matemáticas como funciones polinómicas y racionales de hasta dos variables, nociones geométricas vinculadas a rectángulos estáticos y dinámicos, proporcionalidad, homotecias, el teorema de Tales y Pitágoras y las progresiones y series geométricas. El marco teórico de este trabajo integra la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990, 2013) y el Enfoque Instrumental (Rabardel, 1995) con el fin de analizar la génesis instrumental de 62 docentes en servicio a los que se les pide enseñar con el REI mencionado. Principalmente, nos interesa describir los esquemas generados por los docentes cuando conciben una enseñanza por indagación a partir de un REI durante un curso de formación continua.

Situación, acción, actividad y esquemas

La TCC es una teoría pragmática de la conceptualización de lo real que, mediante la noción de esquema, permite analizar la actividad del sujeto en situación, la forma de la actividad, lo que en ella se conserva y lo que cambia, los esquemas que el sujeto pone en juego, y las condiciones pragmáticas y epistémicas que producen el aprendizaje, así como la conceptualización en la acción y el desarrollo en un cierto dominio (Vergnaud, 1985, 1990; 1998, 1999, 2013, Pastré, Mayen &Vergnaud, 2006). Pragmático significa que el sujeto actúa en función de las consecuencias de sus acciones. La TCC estudia el desarrollo de la conceptualización en la acción a todo nivel, es decir en la escuela, en la vida y en el desarrollo profesional. Los sujetos se adaptan a las situaciones que enfrentan, pero en realidad, son los esquemas que ellos utilizan en un tipo de situación, lo que resulta modificado durante la adaptación (Vergnaud, 1996, 2007, 2012, 2013). Según Vergnaud (1990, 2013) un esquema es la organización invariante de la actividad para una clase de situaciones. La relación entre el esquema y una clase de situaciones es dialéctica, uno no existe sin el otro, aunque dicha clase es variada, el esquema es universal, porque permite tratar numerosas situaciones del mismo tipo. En consecuencia, mientras la actividad y la conducta observable que el esquema engendra son variables, la organización de la actividad es invariante. Un esquema está compuesto necesariamente por cuatro clases de componentes: una meta o varias, submetas y anticipaciones, las reglas de acción, de toma de información y de control, los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y las posibles inferencias (Vergnaud, 1996, 2007, 2012, 2013).

El enfoque instrumental

El enfoque instrumental fue propuesto por Rabardel (1995, 2005) a partir de la Teoría de la Actividad (Vygotsky, 1978; Vergnaud, 2000) y de la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990, 2013). Esta teoría se introduce y se desarrolla en el campo de la ergonomía cognitiva y la didáctica profesional. En las situaciones en las cuales las personas utilizan un artefacto, ya sea material o no, tiene lugar un proceso de apropiación, que requiere distinguir entre el artefacto en sí y el instrumento que la apropiación genera. Es mediante este proceso, denominado por Rabardel (1995) génesis instrumental, que el artefacto se vuelve un instrumento para el usuario. La actividad del usuario y la situación que la promueve son determinantes. Los instrumentos se generan por las interacciones que ocurren entre un artefacto y los esquemas (Vergnaud, 1990, 2013) del sujeto en una cierta situación. Un instrumento es entonces una entidad mixta, compuesta al menos por una parte del artefacto más un esquema de uso de dicho artefacto.

La génesis instrumental, comprende dos procesos interrelacionados (Rabardel, 1995, 2005): instrumentación e instrumentalización. La instrumentalización está relacionada con la personalización del artefacto y la instrumentación con la aparición de esquemas en el sujeto. En la instrumentación las limitaciones y potencialidades de un artefacto condicionan la acción del sujeto que se sirve de él para resolver cierto problema. Un mismo artefacto, puede generar diferentes formas de organización de la actividad en diferentes individuos, que tendrán esquemas de asimilación diferentes y construirán invariantes operatorios distintos (Rabardel, 2005, Trouche, 2008; Trouche et.al. 2019). La instrumentación, es un proceso dirigido hacia el sujeto. La instrumentalización en cambio, es un proceso dirigido hacia el artefacto, que puede resultar parcialmente incluido en el instrumento, readaptado, modificado. La génesis instrumental es motorizada tanto por los cambios realizados al artefacto como por las modificaciones que experimentan los esquemas del sujeto (Rabardel, 2005, Trouche et.al. 2019). Esto permite considerar a un REI como un artefacto inmaterial utilizado por un docente. En este trabajo, analizamos la interacción de los profesores con un REI determinado y los esquemas que subyacen a sus acciones.

Recorridos de estudio e investigación (REI)

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) define los REI (Chevallard, 1999, 2009, 2017) como dispositivos didácticos cuya principal función es proponer el estudio escolar en términos de preguntas. Tal como su nombre indica, estudiar e investigar son dos acciones claves en un REI, que se deben desarrollar en un proceso extendido en el tiempo. El cuestionamiento comienza por una pregunta en sentido fuerte, llamada generatriz, de la cual se derivan una multitud de nuevos interrogantes, que no están establecidos de antemano. Se trata de estudiar los saberes, en este caso matemáticos, que conducen tanto a la elaboración de una o varias respuestas posibles -no inmediatas, ni arbitrarias, ni únicas- como a nuevos cuestionamientos y nuevos estudios. Estudiar e investigar dialécticamente requieren acciones o gestos tales como: formular preguntas y construir respuestas, explorar disciplinas y delimitar áreas, entrar y salir de los temas, estudiar lo pertinente y necesario, fabricar el medio de estudio justificando la incorporación de un cierto saber, repartir las tareas del estudio, cooperar y colaborar en la construcción de respuestas, deconstruir y reescribir respuestas existentes, difundir y recibir respuestas. Para enseñar con un REI, antes de llevarlo al aula, el profesor tiene que estudiar la pregunta generatriz y su arborescencia, así como su potencialidad didáctico-matemática (Chevallard, 2009, 2017).

Metodología

En esta investigación intervinieron 62 docentes de matemáticas en servicio que, durante cuatro meses, realizaron un curso universitario de didáctica de las matemáticas on-line. Los participantes tenían diferentes trayectorias de formación y trabajaban en diversas regiones de argentina. La mayor parte de ellos se desempeña en la enseñanza secundaria y su experiencia docente es disímil (entre 2 y 36 años). En el curso se tratan los fundamentos de la TAD y de los REI (Chevallard, 2009). En el último mes se propuso a los profesores estudiar y organizar una posible enseñanza con el REI "La boîte du pâtissier" (Chappaz & Michon, 2003). Los profesores enfrentan dos tipos de situaciones: a) estudiar el problema en profundidad b) proponer una posible organización de la enseñanza. Tanto el estudio como la organización de la enseñanza transcurren en varias situaciones donde se producen instancias individuales y grupales. Además, ocurren interacciones entre los miembros de cada grupo y con todo el curso, incluidos los docentes responsables. Las condiciones impiden que la puesta en el aula de cada profesor sea parte del curso.

Los profesores respondieron todas las tareas propuestas de manera escrita y las cargaron a la plataforma Moodle. Se emplean técnicas de análisis y meta-análisis (Gürtler, Huber, 2007) para identificar en cada protocolo los componentes de los esquemas asociados a cada instrumento: la meta, las submetas y los invariantes operatorios, así como las acciones "observables" en ellos, que sirven como indicadores para inferir las categorías mencionadas. En nuestro análisis diferenciamos a los esquemas por la meta y también por algunas submetas, que generan anticipaciones y acciones diferentes engendradas por diferentes invariantes operatorios. El problema se presentó de la siguiente manera:

Hay que construir cajas, siguiendo las instrucciones del video: https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY

¿Cuáles son el alto, el ancho y el largo de las cajas que se obtienen si se considera cualquier hoja y cómo se calcularían sus dimensiones: ¿V, la Sb, el perímetro total, etc.?

¿Cómo podemos fabricar cajas anidadas con las hojas A0, A1, A2, A3, A4, etc.?

Figura 1.

El sistema a estudiar, es una caja rectangular, construida con una hoja de dimensiones L y H, siendo L la dimensión donde se realizan los dobleces (Figura 1). A partir de la caja desplegada y realizando ciertas consideraciones geométricas, se obtienen sus dimensiones. La dependencia de las magnitudes de la caja con las dimensiones de la hoja, permite estudiar funciones polinómicas en dos variables.

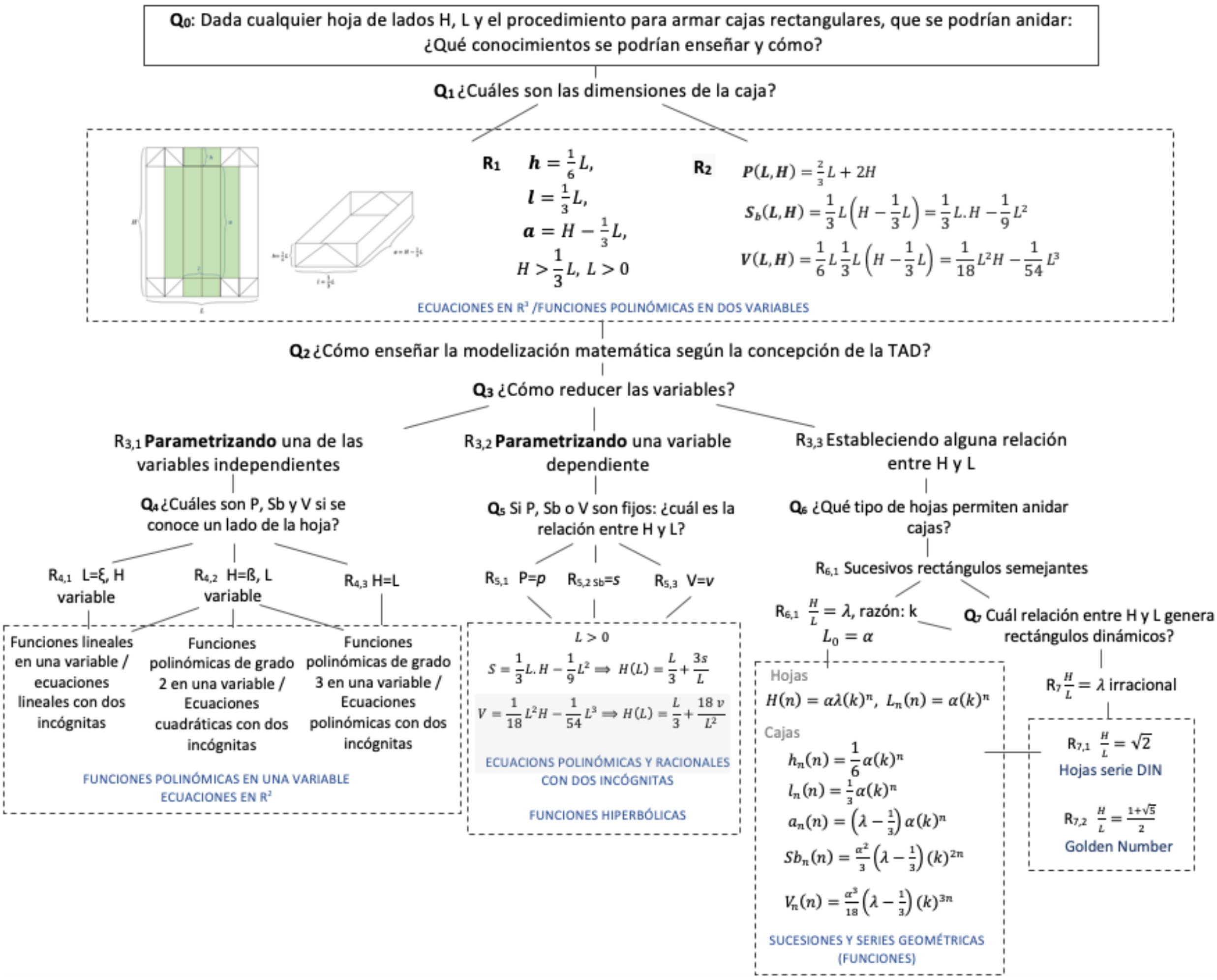


Figura 2. *Esquema simplificado de posibles recorridos de enseñanza*

Las variables se reducen si se parametriza uno o ambos lados de la hoja, o bien la superficie, el volumen o el perímetro de la caja (Figura 2). Es importante notar que, sí L fuera un parámetro, todas las funciones serán lineales, y esto resulta demasiado restringido, razón por la cual, el parámetro debería ser H. Adoptando como parámetro el volumen o la superficie, se obtienen ecuaciones racionales en dos variables y es posible expresar H en función de L, obteniendo familias de funciones hiperbólicas que representan curvas de isosuperficie y de isovolumen.

El problema de "anidar" las cajas, requiere considerar posibles series de hojas rectangulares, cuyas dimensiones conforman progresiones geométricas Si los lados mayor y menor de cada una de las hojas conservan la proporción $H/L = \lambda$, siendo λ un número irracional, los rectángulos son dinámicos. Un caso particular es el de las hojas de la serie DIN donde $H/L = \sqrt{(2)}$ y la superficie de la primera hoja es un metro cuadrado. Así, surge la pregunta por la utilidad de esta proporción, que resuelve el problema de la división en dos o de la duplicación de rectángulos semejantes, puesto que, al doblar la hoja por la mediatriz del lado mayor, se obtienen sendas hojas iguales del formato siguiente, que conservan la proporción de los lados de su antecesora. Es posible considerar otras proporciones notables entre los lados de las hojas, tales como la del número áureo, cuyo descubrimiento se relaciona con el estudio de la difundida sucesión de Fibonacci. Si la constante de proporcionalidad entre los lados de los rectángulos es un número racional, estos son estáticos, los cuales, bajo ciertas condiciones, permiten construir cajas anidadas. Para que las cajas se aniden, la proporción entre los lados de cada hoja, debe ser igual a la existente entre los lados homólogos de dos hojas sucesivas. Este estudio involucra también interesantes técnicas y propiedades geométricas sintéticas de la división de segmentos y de los rectángulos. En el modelo propuesto en la Figura 1, se utilizan dos constantes de proporcionalidad, λ se refiere al módulo de los rectángulos, y k es la razón de semejanza entre ellos.

Resultados

En la situación de estudio, todos los profesores tienen al menos dos metas sucesivas, que se corresponderían con las preguntas que el enunciado propone y una meta más general, relativa a que se deben responder todas las preguntas explícitas del problema. La primera meta es escribir las relaciones entre las dimensiones de la caja y de las hojas y la otra es ¿cómo anidar las cajas? Con respecto a la primera, se identifican al menos dos tipos de esquemas que se distinguen por la manera de obtener las fórmulas.

En el primero (E_{11}), los profesores buscan obtener las fórmulas generalizando las relaciones numéricas mediante algunas medidas que ellos proponen a priori y, por lo tanto, la caja desarmada tiene un papel secundario. Para esto, realizan un conjunto de acciones para establecer las medidas de las hojas y armar las cajas. La Figura 3 muestra un protocolo donde se calculan las dimensiones de la caja tomando en cuenta ciertas informaciones que ofrece el video, para luego, escribir con números las operaciones realizadas. Luego con las medidas de los lados, se calcula el perímetro, la superficie de la base y el volumen y finalmente, se escriben todas las dimensiones de la caja en dos variables.

Primero tomé una hoja de 18cm x 22,5cm realizo los pasos indicados en el video se obtiene las siguientes medidas:

Largo caja 16cm, ancho de la caja 6cm y alto caja 3cm

Realice con otra hoja de 15cm x 30cm

Obteniendo largo de la caja 25cm cm ancho de la caja 5cm y alto caja 2,5cm

Otra hoja de 12 cm x25 cm

Obteniendo largo de 21cm, ancho de caja de 4 cm y alto 2cm

Existe una relación ya que si hago 25-(12:4)=21 que es el largo de la caja, si hago 12:3=4 que es la medida del ancho de la caja y 12:6=2 que es la medida del alto.

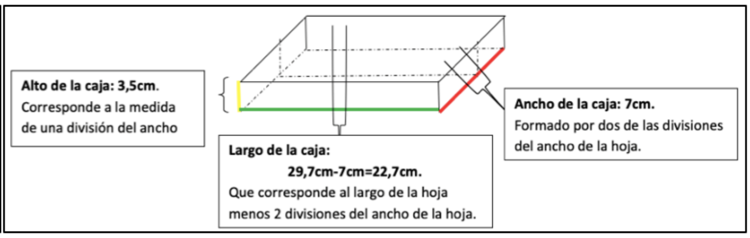


Figura 3. *Cálculo numérico de las dimensiones de la caja (E12)*

El esquema E_{11} posee los siguientes invariantes operatorios que destacan su carácter numérico:

– *Hay que establecer las medidas de las hojas.*
– *Hay que armar las cajas.*
– *Las dimensiones de las cajas se calculan con números.*
– *Los estudiantes obtienen las fórmulas a partir de los números.*

El segundo esquema (E_{12}), busca establecer y formular matemáticamente las relaciones geométricas que emergen del proceso de construcción de la caja. Aquí, los profesores utilizaron una hoja cualquiera de lados desconocidos para armar la caja. De este modo, el armado de la caja, la realización precisa de los pliegues y su registro es más relevante, razón por la cual, es tan importante armarla como desarmarla. Esto les permitió primero, escribir matemáticamente las relaciones entre la hoja y los lados de caja en dos variables (Figura 4) y luego escribieron matemáticamente las dimensiones de la caja, el perímetro, la superficie y el volumen, también en dos variables.

Se identificaron las siguientes invariantes operatorios:

– *Hay que usar cualquier hoja.*
– *Hay que armar la caja.*
– *Hay que desarmar la caja*
– *Las fórmulas surgen del análisis de la caja desplegada.*

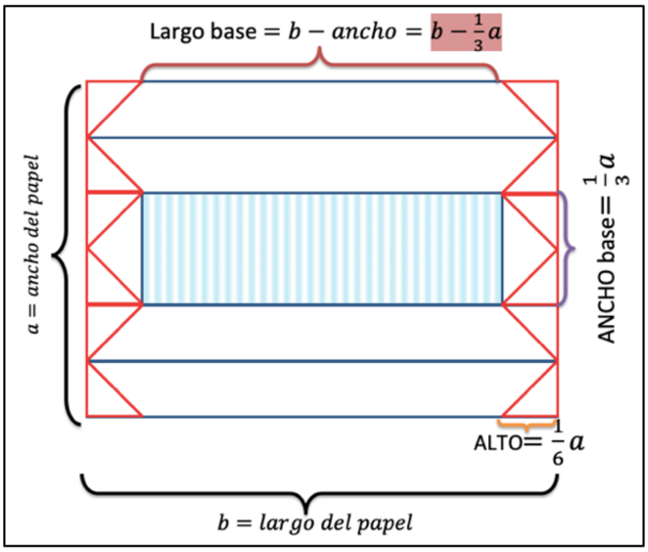


Figura 4. *Modelo de la caja propuesto por un profesor (E12)*

La segunda meta se refiere a la anidación de las cajas, y es compartida por cuatro tipos de esquemas que se diferencian por cómo tratan la información sobre las características de las hojas. Una primera diferenciación de los esquemas se debe a si las hojas DIN A son tomadas en cuenta o no. Cuando las hojas DIN A no son consideradas, se identificaron dos esquemas: intentar anidar las cajas usando hojas arbitrariamente menores (E_{21}), o bien, reducir las dimensiones de las hojas generando algún criterio ad hoc (E_{22}). En E_{21} (13/57) los profesores asumen que la condición de anidación es construir las cajas con hojas cuya área decrece arbitrariamente, así eligieron hojas cuyos valores de los lados son conocidos de antemano. Utilizando las fórmulas previamente establecidas, calcularon numéricamente el alto, ancho y largo de la caja y/o alguna dimensión (superficie de la base o volumen) y analizaron si esos valores eran cada vez menores. Para corroborar la anidación los profesores armaron cajas con algunas de las hojas elegidas y a partir de estos casos particulares, concluyeron empíricamente que las cajas se pueden anidar (Figura 5).

Para distintas hojas A0, A1; A2… se deben tomar largos y anchos de hojas distintos más chicos para que queden una dentro de la otra así sucesivamente, respetando los pasos de construcción indicados en el video.

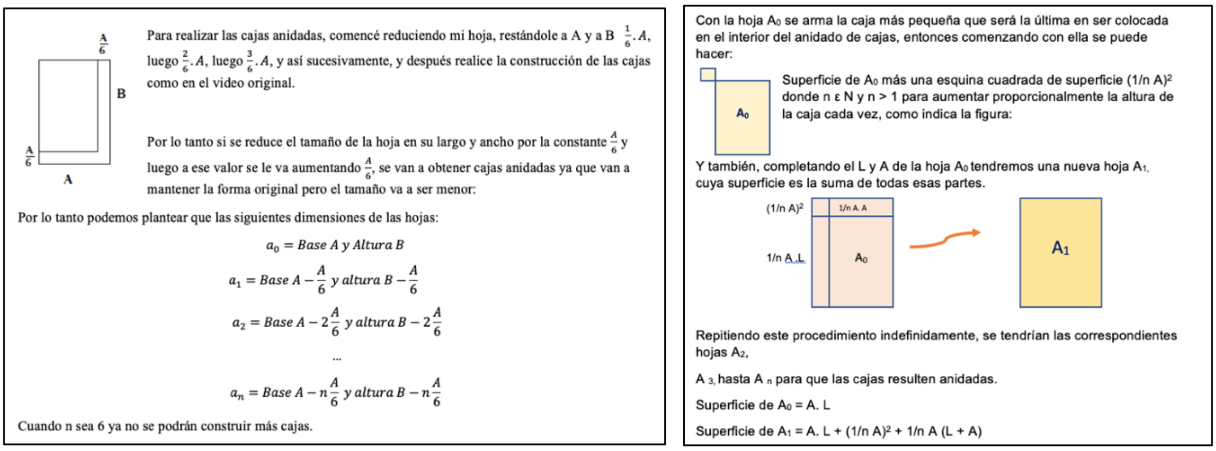
Hoja grande de 15cm x 30cm mediana 12cm x 25cm chica 6cmx22,5 cm

Figura 5. *Comprobación empírica de que las cajas se anidan (E21)*

Los invariantes operatorios son:

– *Hay que usar hojas cada vez menores.*
– *Las dimensiones de las cajas anidadas son cada vez menores.*
– *Armando las cajas se comprueba que se anidan.*

En E_{22} (13/57) los profesores también asumen que las cajas se anidan si se construyen con hojas cada vez menores, pero a diferencia del anterior, aquí se agrega la creación de un criterio para variar el tamaño de las hojas (Figura 6). Luego, calculan las dimensiones de la caja incluidas la superficie, o el volumen y analizan si esos valores son cada vez menores. Finalmente, a partir de esos casos particulares concluyen que, si las hojas son menores, las cajas también y entonces se anidan.


Para realizar las cajas anidadas, comencé reduciendo mi hoja, restándole a A y a B $\frac{1}{6}.A$, luego $\frac{2}{6}.A$, luego $\frac{3}{6}.A$, y así sucesivamente, y después realice la construcción de las cajas como en el video original.

Por lo tanto si se reduce el tamaño de la hoja en su largo y ancho por la constante $\frac{A}{6}$ y luego a ese valor se le va aumentando $\frac{A}{6}$, se van a obtener cajas anidadas ya que van a mantener la forma original pero el tamaño va a ser menor:

Por lo tanto podemos plantear que las siguientes dimensiones de las hojas:

$$a_0 = Base\ A\ y\ Altura\ B$$

$$a_1 = Base\ A - \frac{A}{6}\ y\ altura\ B - \frac{A}{6}$$

$$a_2 = Base\ A - 2\frac{A}{6}\ y\ altura\ B - 2\frac{A}{6}$$

...

$$a_n = Base\ A - n\frac{A}{6}\ y\ altura\ B - n\frac{A}{6}$$

Cuando n sea 6 ya no se podrán construir más cajas.

Con la hoja A_0 se arma la caja más pequeña que será la última en ser colocada en el interior del anidado de cajas, entonces comenzando con ella se puede hacer:

Superficie de A_0 más una esquina cuadrada de superficie $(1/n\ A)^2$ donde $n \varepsilon N$ y $n > 1$ para aumentar proporcionalmente la altura de la caja cada vez, como indica la figura:

Y también, completando el L y A de la hoja A_0 tendremos una nueva hoja A_1, cuya superficie es la suma de todas esas partes.

Repitiendo este procedimiento indefinidamente, se tendrían las correspondientes hojas A_2,

A_3, hasta A_n para que las cajas resulten anidadas.

Superficie de A_0 = A. L

Superficie de A_1 = A. L + $(1/n\ A)^2$ + 1/n A (L + A)

Figura 6. *Criterios fabricados para reducir las hojas (E22)*

Identificamos aquí los invariantes:

– *Hay que establecer un criterio para variar las hojas.*
– *Las dimensiones de las cajas anidadas son cada vez menores.*
– *Armando las cajas se comprueba que se anidan.*

Los resultados anteriores muestran que casi la mitad de los profesores no toman en cuenta las hojas DIN A y asumen erróneamente que para que las cajas se aniden es necesario y suficiente usar hojas cada vez menores. Sin embargo, los que buscan un criterio para variar las hojas tienen un esquema más aproximado al hecho de que en efecto, solo con hojas que satisfacen ciertas condiciones las cajas se anidan sucesivamente en todas sus dimensiones a la vez.

Cuando se toman en cuenta las hojas DIN A, los esquemas difieren por considerar estrictamente las medidas de las hojas, y enfocarse en los números (E_{23}) o en la proporcionalidad entre sus lados (E_{24}). En el primer caso, E_{23} (15/57) los profesores obtuvieron en internet las medidas de las hojas de la serie y las usaron para calcular numéricamente una o varias dimensiones de la caja, con las cuales construyeron tablas como la que se muestra en la Figura 7. Luego, los profesores analizaron si las magnitudes elegidas decrecían y concluyeron que las cajas podían anidarse.

Los invariantes identificados son:

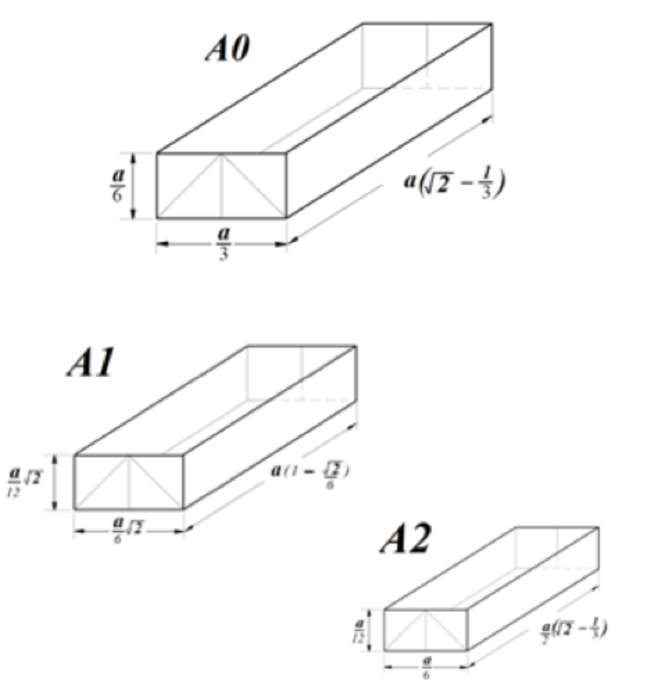
– *Hay que usar las hojas DIN A.*
– *Las dimensiones de las cajas anidadas son cada vez menores.*
– *Calculando las dimensiones de las cajas se comprueba que se anidan.*

Tipo de Hoja	*Dimensiones*	*Dimensiones Caja (Largo x Ancho x Alto)*
A_0	$841\ mm \times 1189\ mm$	$908{,}66\ mm \times 280{,}33\ mm \times 140{,}16\ mm$
A_1	$594\ mm \times 841\ mm$	$643\ mm \times 198\ mm \times 99\ mm$
A_2	$420\ mm \times 594\ mm$	$454\ mm \times 140\ mm \times 70\ mm$
A_3	$297\ mm \times 420\ mm$	$321\ mm \times 99\ mm \times 49{,}5\ mm$
A_4	$210\ mm\ x\ 297\ mm$	$227\ mm \times 70\ mm \times 35\ mm$
A_5	$148\ mm \times 210\ mm$	$160{,}66\ mm \times 49{,}33\ mm \times 24{,}66\ mm$
A_6	$105\ mm \times 148\ mm$	$113\ mm \times 32\ mm \times 17{,}5\ mm$
A_7	$74\ mm \times 105\ mm$	$80{,}33\ mm \times 24{,}66\ mm \times 12{,}33\ mm$
A_8	$52\ mm \times 74\ mm$	$56{,}66\ mm \times 17{,}33\ mm \times 8{,}66\ mm$

Si para cada tipo de hoja A_i, construimos la caja correspondiente utilizando el mismo método que en el video (a partir de plegar 6 veces el lado de la hoja de menor longitud), entonces las cajas que obtendremos podrán ser anidadas; ya que las dimensiones de cada caja A_n será menor que la de la caja A_m, para cada $n < m$.

Figura 7. *Cálculo numérico de las dimensiones de la caja a partir de los valores de las hojas*

En E_{24} (16/57) también se utilizan las hojas de la serie DIN A, pero la particularidad de este esquema reside en que los profesores tomaron en cuenta la razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas y la emplearon para escribir las sucesiones (de las hojas, de lados de la caja, del perímetro, de la superficie de la base y del volumen) (Figura 8). Finalmente concluyeron que las cajas se anidan.



Por la condición I de la norma ISO 216, sabemos que el cociente entre el lado largo de cada hoja y el lado corto es $\sqrt{2}$. Como el lado largo de cualquier hoja An se corresponde con el lado corto de An+1, podemos afirmar que el cociente entre los lados largos de An y An+1 respectivamente es $\sqrt{2}$.

De igual forma el cociente entre los perímetros de una caja hecha con An y otra con An+1 es $\sqrt{2}$.

¿Qué parte del área de la caja A0 representa el área de A1?

**Del mismo modo se puede analizar que parte del área de A1 representa el área A2, qué parte del área de A3 representa el de A4, etc.*

$$Sb_0 = \frac{a^2}{3}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \quad Sb_1 = \frac{a^2}{6}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{Sb_0}{Sb_1} = \frac{\frac{a^2}{3}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)}{\frac{a^2}{6}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)} \Longrightarrow \frac{Sb_0}{Sb_1} = 2$$

Es decir, el área de A0 es el doble que el área de A1

¿Qué parte del volumen de la caja de A0 representa el área de la caja A1?

$$V_0 = \frac{a^3}{18}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \quad V_1 = \frac{a^3}{36}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{\frac{a^3}{18}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)}{\frac{a^3}{36}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)} \Longrightarrow \frac{V_0}{V_1} = 2\sqrt{2}$$

Figura 8. *Razones entre las superficies y volúmenes sucesivos para justificar la anidación*

Los invariantes operatorios son:

- *Hay que utilizar la proporción entre los lados de las hojas DIN A*
- *La proporcionalidad entre los lados de las hojas determina sucesiones geométricas relacionadas con la serie DIN A y con las dimensiones de las cajas*

En la situación de enseñanza, se requiere que los profesores propongan una posible organización de la enseñanza. Se reconocen dos metas disyuntas: enseñar funciones polinómicas de grado uno a tres o enseñar sucesiones geométricas, es decir que se producen modificaciones en el recurso y esto genera instrumentos diferentes. En cuanto a la meta enseñar funciones polinómicas de grado uno a tres, se identifican varias submetas, según cómo los docentes proponen que los estudiantes obtengan las fórmulas.

En el esquema E_{31} (8/25) la submeta es que los estudiantes obtengan las fórmulas a partir del armado de algunas cajas con hojas específicas. Entonces, como primera tarea, los profesores indican mirar el video y fabricar cajas con hojas cuyas medidas son conocidas y fueron fijadas de antemano por él. Posteriormente, los estudiantes tienen que completar tablas con los valores de las hojas y lados de las cajas que serían obtenidos mediante cálculos numéricos. Luego los profesores solicitan que, a partir de los números escriban las relaciones entre las dimensiones de las hojas y de las cajas y generalicen las fórmulas en dos variables y que luego escriban las fórmulas del perímetro, la superficie de la base, el volumen de la caja o alguna de ellas (Figura 9). Puesto que la meta común es enseñar funciones de una variable, ellos deciden parametrizar un lado de la hoja o el perímetro, la superficie de la base, o el volumen, según la función que quieran enseñar. La parametrización se realiza sin analizar las consecuencias y posibilidades de esta acción (véase la Figura 2). Una vez obtenida la fórmula deseada, el profesor define la función correspondiente.

Actividades:

1) Con hojas rectangulares construir cajas siguiendo las instrucciones del video:
https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY

2) ¿Cuáles son el largo, el ancho y el alto de las cajas construidas? Completar la tabla:

HOJA		CAJA		
LARGO	ANCHO	ALTO	ANCHO	LARGO

3) ¿Qué relación hay entre las dimensiones de las cajas y las dimensiones de las hojas con las que se construyeron?

4) Calcula el perímetro total de las cajas. ¿Qué se tiene en cuenta para calcularlo? ¿Cuál es su fórmula?

5) ¿Cuáles serían el alto, ancho y largo de una caja construida con una hoja de dimensiones desconocidas axl?

El objetivo de estas actividades es que los alumnos descubran la relación de dependencia de las dimensiones de la caja con respecto a las de la hoja con la que se construye la misma a partir de datos concretos y que, además, calculen el perímetro en función de las dimensiones de la caja para, de esta manera, introducirlos en el concepto de función y la dependencia de variables.

Para el desarrollo de la actividad se formarán grupos de 3 o 4 alumnos y se les entregarán, o se pedirá que cada uno lleve, hojas rectangulares con las siguientes medidas 18cmx20cm, 12cmx15, 21cmx 24cm.

Figura 9. *Protocolo de un profesor que indica la tabla a completar*

Los IO de este esquema son:

- *Los estudiantes tienen que armar las cajas con sus manos*
- *Para enseñar una función es necesaria su fórmula*
- *Las fórmulas se obtienen a partir de los números*
- *Hay que reducir las fórmulas a una variable*
- *Las variables se reducen fijando una dimensión cualquiera (ad hoc)*
- *La función que se va a enseñar la define el profesor*

Alternativamente, en los esquemas E_{32} y E_{33} las fórmulas se obtienen de las relaciones geométricas que se evidencian al construir la caja y luego desarmarla. La diferencia proviene de cuál de los lados de la hoja se parametriza.

Algunos profesores (4/25) fijan el lado de la hoja que tiene los seis dobleces (E_{32}) y entonces sólo podrán enseñar la función afín. La primera tarea que se propone a los estudiantes es mirar el video y armar la caja con hojas cuyo lado conocido, es aquel al que se le realizan los seis dobleces iniciales. Luego, solicitan a los estudiantes desarmar la caja y analizar los pliegues, para formular el alto, el ancho, el largo, el perímetro, la superficie de la base, y el volumen de la caja, que en este caso son todas expresiones lineales (Figura 10). A partir de esas fórmulas, el profesor define 'Función Afín'. Finalmente, el profesor propone actividades con el GeoGebra para representar las fórmulas y estudiar la función a partir de la representación gráfica (puntos notables, crecimiento, decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad).

El Problema de las cajas

1. Hay que construir cajas, siguiendo las instrucciones del video: https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY
2. ¿Cuáles son el alto, el ancho y el largo de las cajas que se obtienen si se considera cualquier hoja ancho igual a 60cm? ¿Por ejemplo: cómo se calcularía el V, la Sb, el perímetro total, etc.?

Preguntas realizadas por la docente en la clase:

- *¿A partir de qué figura geométrica se realiza la construcción de la caja?*
- *¿Es posible relacionar las medidas de los lados de la hoja?*

Posibles resoluciones esperadas de los alumnos:

Se considera una hoja rectangular de base a (ancho de la hoja) y altura l (largo de la hoja), donde $a < l$ y estos pertenecen a los números reales positivos, distintos de cero. En este caso, siendo el rollo de 60cm de ancho, se tiene que $a=60$.

En los primeros pliegues, quedan determinados seis rectángulos de base $\frac{1}{6}a = 10$ y altura l, es decir que la hoja tiene una superficie de $S = 60l$, y el perímetro de la hoja es $P = 2(60 + l) = 120 + 2l$

Algunas de las medidas que podemos considerar de la construcción: perímetro de la base, superficie de la base, perímetros de las caras, superficies de las caras, volúmen de la caja.

Superficie de la base:
$S_b = 20.(l - 20)$
$S_b = 20l - 400$

Perímetro de la base:
$P_b = 2(20 + l - 20)$
$P_b = 2l$

Volumen de la caja para $a < l$:
Superficie de la base: $S_b = 20l - 400$
Altura: $a_1 = 10$

Volúmen: $V_c = (20l - 400)10$
$V_c = 200l - 4000$

Figure 10. *Protocolo de un profesor que sólo enseñará funciones lineales*

Los IO distintivos de este esquema son:

- *Es necesario fijar el lado de la hoja que tiene seis dobleces*
- *Para escribir las fórmulas, hay que analizar las relaciones geométricas que surgen del plegado de la hoja*
- *La función que se va a enseñar la define el profesor*
- *Para estudiar funciones hay que usar el GeoGebra*
- *El GeoGebra permite motivar a los estudiantes*

En este caso, no se consideraron explícitamente las consecuencias didáctico-matemáticas de fijar este lado o el otro.

En el esquema E_{33} (13/25) los profesores fijan el lado de la hoja al que no se le realizan los seis dobleces y entonces podrán enseñar funciones polinómicas de grado uno a tres. Lo primero que se solicita a los estudiantes es mirar el video y armar la caja, seguido de desarmar la caja y analizar los pliegues para formular el alto, ancho y largo de la caja y, además: el perímetro (Función afín) y/o la superficie de la base (Función cuadrática) (Figura 10) y/o el volumen (Función cúbica). Una vez escritas las fórmulas el profesor define la función a enseñar. El estudio continúa empleando el GeoGebra para representar las fórmulas y estudiar la/s función/es a partir de la gráfica (puntos notables, crecimiento, decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad).

Para esta propuesta se les pedirá a los estudiantes que se dividan en cuatro grupos de cinco integrantes cada uno. Se proyectará en el pizarrón el video extraído de https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY. La docente llevará hojas rectangulares de diferentes tamaños que presentan las siguientes medidas: Hoja$_1$: largo de 9 cm y ancho desconocido, Hoja$_2$: largo de 6 cm y ancho desconocido, Hoja$_3$: largo de 12 cm y ancho desconocido y Hoja$_4$: largo de 15 cm y ancho desconocido.

Tarea 1: Construir una caja siguiendo las instrucciones del video propuesto.
https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY

Tarea 2: Determinar largo, alto y ancho de la caja construida.

Tarea 3: Calcular y analizar la superficie de la base de la caja construida
¿Cómo se puede calcular la superficie de la base de la caja con los datos obtenidos?
¿Qué expresión se obtuvo para la superficie de la base? ¿Cómo está formada esa expresión?

Tarea 4: Estudiar las características de la función cuadrática (dada por la superficie de la base).
¿Cuáles son los ceros o raíces de $S(a)_b$y que significan en el armado de la caja?
¿Es cierto que a valores de a equidistantes a igual distancia de los ceros la superficie es la misma? ¿Qué sucede al sumar esos valores y dividirlos en dos?
Cuál es la caja de mayor superficie que se puede construir?
¿Qué valores puede tomar a? ¿Y $S(a)_b$?
¿Qué forma gráfica tiene la superficie de la base de la caja?
¿Para qué valores de la superficie de la base, el ancho es cero?¿Qué significa esto en el armado de la caja?

Figure 11. *Tareas propuestas por un profesor para encontrar las fórmulas y analizarlas*

El esquema E_{33} es similar al anterior excepto por la parametrización, ya que se fija el lado de la hoja sin los dobleces, entonces ahora, se pueden enseñar las funciones polinómicas lineales, cuadráticas y cúbicas. Si bien esta es la propuesta con mayor alcance matemático, no se puede afirmar que resulte de un cuestionamiento explícito sobre las consecuencias didáctico matemáticas de fijar uno u otro lado.

El IO distintivo de este esquema es:

– *"Es necesario fijar el lado de la hoja que no tiene seis dobleces".*

Los dos últimos esquemas (E32, E33) comparten los IO: *"Para escribir las fórmulas, hay que analizar las relaciones geométricas que surgen del plegado de la hoja"*, *"Para estudiar funciones hay que usar el GeoGebra"* y *"El GeoGebra permite motivar a los estudiantes"*. Los IO vinculados al GeoGebra también fueron identificados en el trabajo de Parra y Otero (2021).

Los tres esquemas tienen en común los IO: "*Los estudiantes tienen que armar las cajas con sus manos", "Para enseñar una función es necesaria su fórmula", "Hay que reducir las fórmulas a una variable"* y *"El profesor define la función".* En los tres casos y conforme a la meta, una vez que se arriba a la fórmula, los profesores definen la función a partir de ella y se enfocan en analizar los parámetros y los puntos notables, como es habitual en la enseñanza tradicional.

Cuando la meta de los profesores es enseñar sucesiones geométricas, ellos solo utilizan las hojas DIN A y siempre proponen obtener las fórmulas desde la caja desplegada. Se identifican tres submetas que comparten la intención de que los estudiantes obtengan las fórmulas del término enésimo de las sucesiones. La diferencia reside en cómo se obtendrá la razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas.

En el esquema E_{41} (10/30) la razón de proporcionalidad se obtiene a partir de las medidas específicas de las hojas. Al inicio, las tareas son similares a las propuestas por los profesores que deciden enseñar funciones polinómicas: mirar el video, armar la caja, desarmarla, analizar los pliegues y formular alto, ancho y largo de la caja, y también en algunos casos el perímetro, la superficie de la base y el volumen o alguno de ellos. Luego, los profesores ofrecen a los estudiantes las medidas de las hojas DINA (o de algunas sucesivas) y les solicitan encontrar numéricamente la relación entre los lados, realizando la división entre el lado mayor y el lado menor de cada hoja de la serie. Además, piden a los estudiantes calcular numéricamente las magnitudes de las cajas que se construyen con las hojas DINA y escribir la sucesión de números, completando una tabla (Figura 12). A partir de ella, los estudiantes tienen que analizar si los valores encontrados son sucesivamente menores (se pueden anidar). Una vez analizada la anidación, los profesores solicitan que, a partir de los valores de la tabla y la proporción encontrada antes, los estudiantes formulen las sucesiones de la caja: alto, ancho, largo, superficie de la base, volumen. Finalmente, el profesor define la sucesión geométrica por el término enésimo.

La tercer actividad consistirá en calcular las dimensiones de varias cajas anidadas construidas con papeles de la serie A, conforme a la norma ISO 216, a partir de la hoja más grande de la serie A0, con la intención que descubran la existencia de sucesiones geométricas entre las medidas de los distintos formatos de la serie.

Se realizarán las siguientes preguntas como Actividad 3:

a) ¿Qué relación encuentran entre las hojas asignadas para poder calcular las medidas de las hojas no asignadas?
b) ¿Cómo calculaste el área de las hojas que no fueron asignada a tu grupo? ¿y el volumen de las cajas construida con esas hojas?
c) ¿Podrías calcular el área de una hoja A8? ¿Y de una A9? ¿cómo sería la fórmula para calcular el área de una hoja AN?
d) ¿Podrías calcular el volumen de una caja construida con una hoja A8? ¿Y con una A9? ¿Cómo sería la fórmula para calcular el volumen de una hoja AN?

Con estas preguntas se pretende inducir al alumno a que logre construir el término general de una sucesión geométrica, reconociendo la proporción que se establece entre las medidas de dos hojas consecutivas como la razón de dicha sucesión.

$$\frac{b_0}{b_1} = \frac{841}{594} = 1{,}415824916\,, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{594}{420} = 1{,}41428571, \quad \frac{b_2}{b_3} = \frac{420}{297} = 1{,}414141414141 \;\ldots\ldots\; \frac{b_n}{b_{n+1}} \cong \sqrt{2}$$

….
Luego,

Papel			Caja				
	Largo	Ancho	Largo	Ancho	Altura	Superficie	Volumen
A0	1189	841	908,66	280,3	140,2	254.730	35.704
A1	891	594	643	198	99	127.314	12.623
A2	594	420	454	140	70	63.560	4.463
A3	420	297	321	99	49,5	31.779	1.578
A4	297	241	216,66	80,3	40,2	17.406	558
A5	241	148	191,66	49,3	24,7	9456	197
A6	148	105	113	35	17,5	3955	70

Figure 12. *Protocolo donde se calcula numéricamente la razón entre las hojas y las dimensiones de la caja*

Los IO característicos son:

- *Los estudiantes tienen que armar las cajas con sus manos*
- *Para escribir las fórmulas, hay que analizar las relaciones geométricas que surgen del plegado de la hoja*
- *Para los estudiantes la manera más sencilla de obtener las relaciones entre los lados de las hojas es numéricamente*
- *Hay que formular el término enésimo para cada sucesión*
- *Las fórmulas de las sucesiones se obtienen a partir de los números*
- *El profesor es quien define la sucesión*
- *Las cajas se pueden anidar si las magnitudes calculadas son sucesivamente menores.*

En E_{42} (12/30) el profesor informa la razón de proporcionalidad entre los lados, o indica a los estudiantes buscarla en internet. El inicio de la propuesta se repite: mirar el video, armar la caja, desarmarla, analizar los pliegues y formular las dimensiones de la caja. Posteriormente, los estudiantes obtienen el valor de la proporción entre los lados de las hojas DIN A (√2), ya sea porque el profesor se los informa o porque la obtienen de internet (Figura 13). Con esa información el profesor solicita a los estudiantes formular el término enésimo para las sucesiones de los lados de las cajas u otras dimensiones utilizando esa razón y luego él define sucesión geométrica por el término enésimo. Posteriormente, el profesor pide a los estudiantes calcular algunos valores de las sucesiones y/o graficar las fórmulas anteriores y analizar si los valores son sucesivamente menores (y de ese modo se pueden anidar).

Tarea 3.

Tiempo estimado 40'

Considerando las cajas construidas con hojas DIN-A_0, A_1, …, A_4, …, A_n (con n natural) y, sabiendo que el largo de la hoja(h) es igual al ancho (b) multiplicado por $\sqrt{2}$. Determina:

a) ¿Cuál es la relación entre la superficie de las cajas construidas, con el ancho de la hoja A_n?

b) ¿Cuál es la relación entre el volumen de la caja construida y el ancho de la hoja A_n?

c) ¿Cómo podemos realizar cajas anidadas con las hojas A0, A1, A2……?

Figure 13. *Protocolo donde se informa la razón entre las hojas*

Los IO distintivos son:

– *Hay que informar a los estudiantes el valor de la constante de proporcionalidad entre los lados de las hojas*
– *Las sucesiones se formulan algebraicamente*

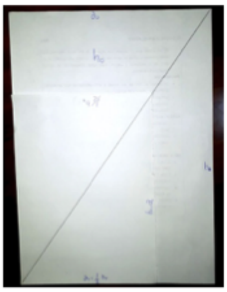
El esquema E_{43} (8/30) es el de menor frecuencia y corresponde al instrumento más evolucionado matemáticamente. Además de mirar el video, armar la caja, desarmarla y analizar los pliegues y formular el alto, ancho y largo de la caja y la superficie de la base y el volumen o alguna de ellos, el profesor propone a los estudiantes obtener y justificar geométricamente la proporción entre los lados de las hojas DINA, mediante el teorema de Thales (Figura 14). Luego, se pide a los estudiantes formular el término enésimo de algunas o todas las sucesiones posibles relacionadas con las hojas DIN A y la caja. El profesor es quien define las sucesiones geométricas por el término enésimo y solicita a los estudiantes encontrar la proporción entre todos los lados y dimensiones de las cajas sucesivas.

Actividad 2 Parte I:
Considere que se dobla la hoja por la mitad (por el lado más largo) para construir una caja nueva y se vuelve a repetir el procedimiento varias veces.

$\boldsymbol{Q_1}$: ¿Cuál es la relación existente entre los lados de la hoja inicial y los de la hoja obtenida al doblar por la mitad?

$\boldsymbol{Q_2}$: ¿Cuál es la relación existente entre los lados de la hoja inicial h_0 y los de la hoja h_n obtenida luego de repetir n veces el procedimiento de doblar por la mitad?

Los triángulos determinados por las diagonales son semejantes, de manera que sus lados correspondientes son proporcionales, es decir:



$$\frac{a_0}{b_0/2} = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow {a_0}^2 = \frac{{b_0}^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{b_0}{a_0} = \sqrt{2}$$

De donde se puede determinar que $b_0 = a\sqrt{2}$

Actividad 2 Parte I:
$\boldsymbol{Q_3}$: ¿Por qué quedan anidadas las cajas?
$\boldsymbol{Q_{3,1}}$: ¿Qué relación hay entre las dimensiones (ancho, largo y alto) de una caja n-ésima construida con una hoja h_n y el ancho de la hoja inicial?

- **Ancho de la caja**

Para una caja C_n construida con una hoja n

$x_{C_n} = \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0$ (Ancho de la caja enésima)

Por ser $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0$

- **Largo de la caja**

Para C_n: $y_{C_n} = b_n - \frac{1}{3}a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sqrt{2}a_0 - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0 \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)$

$y_{C_n} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0$ (Largo de una caja n-ésima)

- **Alto de la caja**

$z_{C_n} = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n a_0$ (alto de una caja n-ésima)

Figure 14. *Protocolo donde se informa la razón entre las hojas*

Los IO característicos son:

- *La razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas DIN A se obtiene geométricamente.*
- *Las cajas se anidan si todos sus lados y dimensiones son proporcionales.*

Este último invariante se refiere apropiadamente a la condición de anidación y permite aumentar el alcance de los contenidos a enseñar.

Los dos últimos esquemas comparten el IO: *“Las sucesiones se formulan algebraicamente”* y todos los esquemas incluyen los IO: *“Hay que formular el término enésimo para cada sucesión”* y “*El profesor es quien define la sucesión”*. Una vez definida la sucesión por la fórmula del término enésimo se continúa de manera relativamente tradicional, sin explotar las potencialidades didáctico-matemáticas del problema.

Discusión

Es importante tomar en cuenta que la situación de estudio es el primer contacto individual de los profesores con este recurso, mientras que en la de enseñanza, existieron situaciones intermedias, que podrían haber afectado el conocimiento sobre el problema y la matemática vinculada con él.

En la situación uno, todos los participantes responden a las cuestiones, analizando escasamente el saber y tratan al recurso como una totalidad. De hecho, solo unos pocos profesores relacionaron explícitamente el problema con nociones matemáticas. En cambio, al tener que pensar en enseñar, los profesores se dividen. Unos enseñarán funciones polinómicas y se generan tres instrumentos con sus respectivos esquemas y los restantes enseñarán sucesiones geométricas, produciendo también tres instrumentos diferentes. Esta separación se debería a la vinculación que los profesores realizan con el

programa de estudios y con un invariante operatorio ya identificado en otros trabajos, que asocia un problema con un cierto tema del programa enseñado (Gazzola & Otero, 2022). Esta es una primera modificación que los profesores realizan en el recurso, para segmentar el conocimiento matemático que van a enseñar. Esta segmentación es contraria a la enseñanza basada en el cuestionamiento.
En la situación de estudio 53/62 profesores, una amplia mayoría, usan la caja desarmada como sistema a modelar, es decir, parecen asumir acertadamente, que el modelo matemático se derivaría del análisis geométrico de los pliegues. Sin embargo, en la situación de enseñanza, entre los 25/55 profesores que enseñarán funciones polinómicas, un tercio de ellos propone que el modelo matemático surja de una suerte de generalización de los números. Atribuimos este cambio a que los profesores anticipan dificultades para usar este recurso en el aula y a que las actividades de modelado matemático son escasas en enseñanza habitual. Tanto en la situación de estudio como en la de enseñanza, los profesores obtienen primero, o propondrán que los estudiantes lo hagan, las expresiones en dos variables, pero rápidamente las dejan de lado, porque no las consideran enseñables en la escuela secundaria. Por lo tanto, cuando deben pensar en enseñar, todos deciden que es necesario reducir las expresiones algebraicas enteras a una variable. Para lograrlo, unos pocos fijarán el lado de la hoja que tiene los seis dobleces, sin advertir la dificultad didáctica que genera esta decisión, pues obtienen expresiones de primer grado para el perímetro, la superficie y el volumen. Los restantes profesores, fijarán el otro lado, habilitando el tratamiento de las funciones polinómicas hasta el grado tres. Estas decisiones se toman en acto y no surgirían de un análisis y cuestionamiento previos.

En todos los instrumentos generados en la situación de enseñanza, el problema se usa solo al comienzo, y luego se continúa de manera tradicional. La noción de función es omnipresente en el saber enseñado en la escuela secundaria, dónde clásicamente se estudian las funciones polinómicas de primer y segundo grado en una variable. Primero se produce un encuentro con la “definición” en forma polinómica y con los parámetros asociados. Se realizan representaciones gráficas y no se consideran a las familias de funciones, los parámetros se interpretan en términos de características de la gráfica cartesiana. Desde un punto de vista algebraico en la escuela se reducen las ecuaciones en R^2 a ecuaciones de una variable, igualando a cero la variable dependiente de la función asociada. Dejar de lado las ecuaciones de primer y segundo grado en dos variables, oculta la potencialidad del cálculo algebraico a estudiar y a las relaciones de equivalencia que justifican las técnicas educacionales. Las técnicas para resolver ecuaciones se presentan como un conjunto de reglas “per se” inmotivadas e injustificadas (por ejemplo, se hablará de “reglas del pasaje de términos”, aún en los primeros cursos universitarios).

En el caso del problema se constata la ausencia de cuestionamiento de los profesores sobre la reducción de las variables, o sobre qué conocimiento podría enseñarse si se fija alguna de ellas. Ninguno de los 62 profesores analizó que, parametrizando el perímetro, o el volumen o la superficie de la base, se hubieran podido tratar hasta las funciones hiperbólicas de grado tres. Es decir que, con relación al análisis didáctico sintetizado en la Figura 1, los profesores siguen el camino tradicional y no cuestionan el saber a enseñar. Es importante remarcar aquí, que no atribuimos este accionar a una limitación de los conocimientos matemáticos de los profesores, sino a que, en la situación de enseñanza prevalecen los aspectos productivos de la actividad por sobre los constructivos (Pastré, Mayen & Vergnaud, 2006) y los invariantes operatorios que aseguran un relativo éxito en la gestión de la enseñanza. Sus esquemas los llevan a vincular directamente el problema con un tema del programa escolar, ya que en la práctica profesional habitual, no es necesario cuestionar el saber a enseñar, siendo esto contrario al tipo de actividad requerida para desarrollar un REI o al menos ciertos gestos propios del cuestionamiento, que permitirían ampliar el saber.

Con relación a las cajas anidadas, en la situación de estudio y como primera respuesta, los profesores no relacionaron la pregunta con las series geométricas. Si bien la meta y submetas se orientan hacia cómo justificar la anidación, solo en (16/57) protocolos, se recurre a nociones geométricas para establecer la proporcionalidad entre los lados de las hojas DIN A. Las series geométricas se relacionan con la pregunta solo en la situación dos, ya que (30/55) profesores proponen enseñarlas, luego de interactuar con compañeros y con los docentes del curso. Es decir que inicialmente, las sucesiones no estaban en el "radar" de estos profesores, tampoco es posible ignorar que, solo 8 de los treinta profesores que trataron la anidación, lo hizo mediante gestos propicios al cuestionamiento en la enseñanza.

Conclusión

En este trabajo se analizan las respuestas de 62 profesores de matemática en servicio, en situación de estudio y de enseñanza cuando utilizan un recorrido de estudio e investigación, para describir sus esquemas y la génesis instrumental. Los profesores generan diversos instrumentos que contribuyen a comprender sus dificultades para utilizar el REI y para realizar enseñanza por indagación. De este modo segmentan el problema original y proponen tareas guiadas por preguntas que ellos formulan y que reducen el papel de los estudiantes, contrariamente a lo que se espera en un REI. El análisis matemático y didáctico que realizan resulta débil e insuficiente y reduce el alcance matemático del recurso. Todo lo expuesto continúa interpelándonos sobre las características de la formación para producir un cambio de paradigma de enseñanza.

Noticias biográficas

María Rita Otero es Investigadora Principal del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el área de Psicología y Ciencias de la Educación. Es profesora Titular ordinaria e investigadora del NIECyT de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Realizó formación postdoctoral en la Universidad René Descartes. Paris V- Sorbonne. Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias por la Universidad de Burgos, España, Master en Educación con orientación en Psicología de la educación y Profesora de Matemática y Física por la UNICEN. Investiga en Didáctica de la matemática y de la física, la formación profesional continua e inicial de los profesores, la conceptualización en matemática, en relatividad y mecánica cuántica en física y en la utilización de recursos digitales en la enseñanza de la matemática y las ciencias.
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,
Facultad de Ciencias Exactas, NIECyT, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.
Email: rotero@exa.unicen.edu.ar
https://orcid.org/0000-0002-1682-9142

María Paz Gazzola is es Becaria Posdoctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el área de Psicología y Ciencias de la educación. Es Profesora Adjunta e investigadora del NIECyT de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Es Doctora en Enseñanza de las Ciencias mención matemática, Licenciada en Educación matemática y Profesora de Matemática por la UNICEN. Investiga en Didáctica de la matemática, la formación profesional continua e inicial de los profesores y la utilización de recursos digitales en la enseñanza.
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,

Facultad de Ciencias Exactas, NIECyT, Tandil, Buenos Aires, Argentina, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina.
Email: mpgazzola@exa,unicen.edu.ar
https://orcid.org/0000-0002-6115-0817

Referencias

Anderson, R. (2002). Reforming Science Teaching: What Research Says About Inquiry. *Journal of Science Teacher Education, 13(1)*, 1-12. https://doi.org/10.1023/A:1015171124982

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 45*(6), 797- 810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Dewey, J. (1916). *Democracy and education: An introduction to the philosophy of education.* MacMillan.

Chappaz, J. & Michon, F. (2003) Il était une fois…. La boite du pâtissier. *Grand N, 72*, 19-32.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER : problèmes et avancées.* http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20*(1), 159-169.

Gazzola, M. P. & Otero, M. R. (2021). Recorrido de estudio e investigación en física y matemáticas en la escuela secundaria. *Praxis & Saber, 12* (31), e11151. https://doi.org/10.19053/22160159.v12.n31.2021.11151

Gazzola, M. P. & Otero, M. R. (2022) Instrumentalización de problemas escolares de los profesores de matemática en servicio. *PNA, 16*(4), 281-307. https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.22040

Gueudet, G., Lebaud, M-P., Otero, M. R.., & Parra, V. (2018). Travail documentaire des professeurs et parcours d'étude et de recherche : une étude de cas en première S. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 38*(3), 275-314.

Gürtler, L. & Huber, G.L. (2007). *Modos de pensar y estrategias de la investigación cualitativa.* Liberabit, 13(13), 37-52.

Matheron, Y. (2008). Le projet AMPERES. *Cahiers pédagogiques, 466*, 55-57.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2015). La incidencia de las funciones didácticas Topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un recorrido de estudio y de investigación: El caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(2), 245-275. https://doi.org/10.12802/relime.13.1824

Otero, M. R. (2021). *La Formación de Profesores. Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Otero, M. R.; Fanaro, M. A.; Corica, A.; Llanos, V. C.; Sureda, P & Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática.* Dunken.

Otero, M. R. & Llanos, V. C. (2019). Formación de profesores de matemática en servicio: La organización de una enseñanza basada en preguntas. *REDIMAT –Journal of Research in Mathematics Education, 8*(2), 193-225. https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3618

Otero, M. R.; Llanos, V. C. & Arlego, M. (2017). Development of research and study paths in the pre-service teacher education. *European Journal of Educations Studies. 3*(8), 214-240. https://doi.org/10.5281/zenodo.865887

Otero M. R., Llanos, V. C. & Gazzola, M. P. (2012). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización, 2*(1), 31-42.

Parra, V. & Otero, M. R. (2021). Invariantes Operatorios e Instrumentalización del Artefacto Recorrido de Estudio e Investigación para la Escuela Secundaria: un Estudio de Caso. Acta Scientiae, 23(6), 334-362. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6167

Pastré P., Mayen P. & Vergnaud G. (2006). La didactique professionnelle. Revue française de pédagogie, 154, 145-198. https://doi.org/10.4000/rfp.157

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). *Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En Bailleul Marc, Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, Évolution des enseignants de mathématiques ; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Rabardel, P. (2005). *Instrument subjectif et développement du pouvoir d'agir.* En P. Rabardel et P. Pastré (dir.), Modèles du sujet pour la conception: dialectiques activités développement (p. 11-29). Octarès.

Salgado, D. P. & Otero, M. R. (2020). Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales. *Educação Matemática Pesquis 22*, 532-557.

Schwab, J. (1962). *The teaching of science as enquiry.* En J. J. Schwab, & P. F. Brandwein, (Eds.), The teaching of science (pp. 1-103). Simon and Schuster.

Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza – una historia de trayectorias. *Educación Matemática, 30*(3), 9-40.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (Eds.) (2019). *The resource approach to mathematics education*. Springer.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française, 30*(3/4): 245-252.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). *Au fond de l'action, la conceptualisation.* En J. M. Barbier (dir.), Savoirs théoriques et savoirs d'action (p. 275-292). PUF.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 167-181. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3

Vergnaud, G. (2000). *Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps.* Hachette Éducation.

Vergnaud G. (2007). ¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar el aprendizaje significativo? *Investigações em Ensino de Ciências, 12* (2) 285–302.

Vergnaud, G. (2012). Forme Operatoire et forme predicative de La Connaissance. *Investigações em Ensino de Ciências, 17*(2), 287-304.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y aprendizaje, 36*(2), 131-161.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wozniak, F. (2015). La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique: les parcours d'étude et de recherche, *Recherches en éducation, 21.* https://doi.org/10.4000/ree.7578