UN PROBLEMA DE AUTOVALORES DE STEKLOV CON RESTRICCIÓN DE VOLUMEN

Ariel Salort†, Betsabe Schvager‡ y Analia Silva‡

†*Departamento de Matemática FCEyN - Universidad de Buenos Aires and IMAS - CONICET. Ciudad Universitaria, Pabellón I (C1428EGA) Av. Cantilo 2160. Buenos Aires, Argentina.,* asalort@dm.uba.ar, http://mate.dm.uba.ar/ asalort/

‡*Departamento de Matemática, Universidad Nacional de San Luis and IMASL - CONICET. Ejército de los Andes 950 (D5700HHW), San Luis, Argentina.,* bbschvager@unsl.edu.ar, acsilva@unsl.edu.ar, https://analiasilva.weebly.com

Palabras clave: *espacios de Orlicz, problemas de optimización, autovalores*
2000 AMS Subject Classification: 35J60,35J66,35Q23,46E30
Resumen: En este trabajo estudiamos un problema de optimización de autovalores de Steklov con respecto al dominio en espacios de Orlicz- Sobolev.

1. INTRODUCCIÓN

Dado $\alpha > 0$ nuestro objetivo es optimizar $\lambda(\alpha, E)$ con respecto a conjuntos $E \subset \Omega$ de medida fija, es decir

$$\text{ínf}\,\{\lambda(\alpha, E)\colon E \subset \Omega, |E| = A\}\,, \tag{1}$$

para un volumen fijo $A \in [0, |\Omega|]$, donde $\lambda(\alpha, E)$ es autovalor del siguiente problema de Steklov

$$\begin{cases} -\Delta_g u + g(|u|)\frac{u}{|u|} + \alpha\chi_E g(|u|)\frac{u}{|u|} = 0 & \text{en } \Omega \\ g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot \eta = \mu g(|u|)\frac{u}{|u|} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

El operador degenerado no lineal y posiblemente no homogéneo *g-Laplaciano* esta definido como:

$$\Delta_g u := \operatorname{div}\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), \tag{3}$$

donde $G(t) = \int_0^t g(s)\,ds$ es una función Young que cumple la siguiente condición de crecimiento

$$1 < p^- \leq \frac{tg(t)}{G(t)} \leq p^+ < \infty \qquad \text{para todo } t \geq 0, \tag{L}$$

para constantes fijas p^+ y p^-.

Los resultados aquí expuestos generalizan los obtenidos en [1]. Para otros problemas de optimización en espacios de Orlicz-Sobolev ver [2].

2. GENERALIDADES

2.1. FUNCIONES YOUNG

Una función $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ se dice de Young si admite la siguiente representación

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds, \qquad t \geq 0,$$

donde $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es tal que $g(0) = 0$, g es positiva, continua por derecha y no decreciente en $(0, \infty)$.

Una función Young G satisface la condición Δ_2, si $G(2t) \leq CG(t)$ para todo $t \geq 0$, donde C es una constante positiva fija.

2.2. ESPACIOS DE ORLICZ SOBOLEV

Dada una función de Young G y un conjunto acotado Ω consideramos los espacios:

$$L^G(\Omega) := \{u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ medibles tal que } \Phi_{G,\Omega}(u) < \infty\},$$
$$W^{1,G}(\Omega) := \{u \in L^G(\Omega) \text{ tal que } \Phi_{G,\Omega}(|\nabla u|) < \infty\},$$

donde $\Phi_{G,\Omega}(u) = \int_\Omega G(|u|)\,dx$.
Estos espacios tienen asociada la llamada *norma de Luxemburgo* definida como
$\|u\|_{L^G(\Omega)} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \Phi_{G,\Omega}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1\right\}$ y $\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} = \|u\|_{L^G(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^G(\Omega)}$.
Estos espacios son Espacios de Banach, separables y reflexivos, si y sólo si G y $\tilde{G}$ satisfacen la condición Δ_2, donde

$$\tilde{G}(t) := \sup_{s\ge 0}\{st - G(s)\}.$$

Ademas, la siguiente condición será asumida para garantizar las inmersiones compactas.

$$\int_0^1 \frac{G^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{n}}}ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_1^\infty \frac{G^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{n}}}ds = \infty. \tag{4}$$

Sea G una función Young satisfaciendo (L) y (4). Dado un subconjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de clase $C^{0,1}$, las siguientes inmersiones son compactas $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow L^G(\Omega)$, $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow L^G(\partial\Omega)$.

Dados $u \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^G(\partial\Omega)$ y $\phi \in L^\infty(\Omega)$ denotamos

$$\Phi_{G,\partial\Omega}(u) := \int_{\partial\Omega} G(|u|)\,d\mathcal{H}^{n-1}, \quad \Phi_{G,\phi,\Omega}(u) := \int_\Omega \phi G(|u|)\,dx, \quad \Phi_{1,G,\Omega}(u) := \int_\Omega G(|u|) + G(|\nabla u|)\,dx.$$

Para el lector interesado consultar [3].

2.3. ALGUNOS HECHOS SOBRE MINIMIZANTES

Dado $\alpha > 0$ y $\phi \in L^\infty(\Omega)$, definimos

$$\lambda(\alpha,\phi) := \inf_{v\in\mathcal{A}} \frac{\mathcal{I}(v)}{\mathcal{J}(v)}, \tag{5}$$

donde la clase de funciones admisibles $\mathcal{A}$ esta dada por

$$\mathcal{A} := \left\{v \in W^{1,G}(\Omega) \colon \text{ tal que } \Phi_{G,\partial\Omega}(v) = 1\right\}.$$

con $\mathcal{I},\mathcal{J} \colon W^{1,G}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos como

$$\mathcal{I}(v) := \Phi_{1,G,\Omega}(v) + \alpha\Phi_{G,\phi,\Omega}(v), \quad \mathcal{J}(v) := \Phi_{G,\partial\Omega}(u).$$

Dado que G y su conjugada $\tilde{G}$ satisfacen la condición Δ_2 , es sencillo ver que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son de clase C^1 y sus derivadas de Frechét $\mathcal{I}',\mathcal{J}' \colon W^{1,G}(\Omega) \to (W^{1,G}(\Omega))'$ estan dadas por

$$\langle \mathcal{I}'(u), v\rangle = \int_\Omega g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\cdot\nabla v\,dx + \int_\Omega (1+\alpha\phi)g(|u|)\frac{u}{|u|}v\,dx,$$
$$\langle \mathcal{J}'(u), v\rangle = \int_{\partial\Omega} g(|u|)\frac{u}{|u|}v\,d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Proposición 1 *Dado $\alpha > 0$ y $\phi \in L^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \phi \le 1$, existe $u \in \mathcal{A}$ solución de* (5).

Proposición 2 *El número $\lambda(\alpha,\phi)$ definido en* (5) *es un autovalor de la versión relajada del problema* (2) *con autofunción $u \in \mathcal{A}$, donde u es solución de* (5).

3. PROBLEMA

Para probar la existencia de una configuración optimal de (1), la estrategia que adoptamos es considerar el siguiente problema relajado: consideramos $\phi \in \mathcal{B}$ en lugar de χ_E donde la clase $\mathcal{B}$ se define como:

$$\mathcal{B} := \left\{ \phi \in L^\infty(\Omega) : \text{ tal que } 0 \leq \phi \leq 1 \text{ y } \int_\Omega \phi\, dx = A \right\},$$

lo cual lleva a

$$\lambda(\alpha, \phi) := \inf_{v \in \mathcal{A}} \left\{ \Phi_{1,G,\Omega}(v) + \alpha \Phi_{G,\phi,\Omega}(v) \right\}, \tag{6}$$

que es autovalor del siguiente problema relajado de Steklov

$$\begin{cases} -\Delta_g u + g(|u|)\frac{u}{|u|} + \alpha\phi g(|u|)\frac{u}{|u|} = 0 & \text{en } \Omega \\ g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \cdot \eta = \mu g(|u|)\frac{u}{|u|} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Mediante una aplicación del método directo en el cálculo de variaciones junto con la desigualdad de Harnack, podemos asegurar la existencia de una solución $u = u(\alpha, \phi) \in \mathcal{A}$ la cual es estrictamente positiva en $\overline{\Omega}$. Por lo tanto, consideramos el siguiente problema relajado

$$\Lambda(\alpha, A) := \inf_{\phi \in \mathcal{B}} \lambda(\alpha, \phi). \tag{8}$$

Cualquier minimizante de (8) será llamado una *configuracion optimal*. Si ϕ es una configuración optimal y u satisface (6), entonces (u, ϕ) es llamado un *par optimal* (o solución).

Teorema 1 *Para todo $\alpha > 0$ y $A \in [0, |\Omega|]$ existe un par optimal. Además, todo par optimal (u, ϕ) tiene las siguientes propiedades:*

(i) $u \in C^{1,\gamma}_{loc}(\Omega)$ *para algun* $\gamma \in (0, 1)$.

(ii) Existe una configuración optimal $\phi = \chi_D$, donde D es un subconjunto de nivel de u, esto es, existe un número $t \geq 0$ tal que $D = \{u \leq t\}$.

(iii) Todo conjunto de nivel $\{u = s\}$, tiene medida de Lebesgue cero.

Podemos calcular la derivada por derecha de $\lambda(\alpha, \phi)$ con respecto a ϕ una dirección admisible. Denotemos por F el conjunto de direcciones admisibles, donde:

$$F = \left\{ f : f \leq 0 \text{ en } \{\phi = 1\}, f \geq 0 \text{ en } \{\phi = 0\}, \int_\Omega f = 0 \right\}.$$

Proposición 3 *Sea $f \in F$, entonces la derivada por derecha de $\lambda(\alpha, \phi)$ en la dirección de $f \in F$ está dada por*

$$\lambda'(\alpha, \phi)(f) = \lim_{t \to 0} \frac{\lambda(\alpha, \phi + tf) - \lambda(\alpha, \phi)}{t} = \alpha \int_\Omega f G(|u|) dx$$

donde u es solución de $\lambda(\alpha, \phi)$.

Corolario 1 *El conjunto optimal D satisface $D = \{u \leq t\}$.*

Probaremos que cuando $\alpha \to \infty$ la cantidad $\lambda(\alpha, E)$ converge al minimizante del problema con E como un agujero (esto es, la función minimizante se anula en E), es decir,

$$\lim_{\alpha \to \infty} \lambda(\alpha, E) = \lambda(\infty, E) := \inf_{v \in \mathcal{A}, v|_E \equiv 0} \Phi_{1,G,\Omega}(v).$$

El problema natural del límite de este ínfimo es

$$\lambda(\infty, A) := \text{ínf}\{\lambda(\infty, E) \colon E \subset \Omega, |E| = A\}. \tag{9}$$

En el siguiente resultado analizaremos el límite de la configuración optimal (1) para la cantidad definida en (9).

Un punto clave de la prueba es el hecho de que el número $\Lambda(\alpha, A)$ definido en (8) es estrictamente monótono con respecto a $A > 0$.

Teorema 2 *Para toda sucesión $\alpha_j \to \infty$ y par optimal (D_j, u_j) de* (1) *existe una subsucesión, la cual seguiremos denotando α_j, y un par optimal (D, u) de* (9) *tal que*

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \chi_{D_j} = \chi_D \quad & \textit{débil* en } L^\infty(\Omega), \\ \lim_{j\to\infty} u_j = u \quad & \textit{fuerte en } W^{1,G}(\Omega). \end{aligned}$$

Además, $u > 0$ en $\Omega \setminus D$.

AGRADECIMIENTOS

AS y AS son miembros de CONICET, Argentina. B.S. es becaria de CONICET. Los autores son parcialmente subsidiados por ANPCyT PICT 2017-0704 y por UNSL mediante los proyectos PROIPRO 03-2420 y PROICO 0307020.

REFERENCIAS

[1] L. DEL PEZZO, J. FERNÁNDEZ BONDER, J. ROSSI , *An optimization problem for the first Steklov eigenvalue of a nonlinear problem.*, Differential and Integral Equations, 19(9), 1035-1046, 2006.

[2] J. DA SILVA, A. SALORT, A. SILVA, AND J. SPEDALETTI , *A constrained shape optimization problem in Orlicz-Sobolev spaces.* , Journal of Differential Equations, 267(9), 5493-5520, 2019.

[3] M. KRASNOSEL'SKII, AND Y. RUTICKII , *Convex functions and Orlicz spaces*, (Vol. 9). Groningen: Noordhoff, 1961.