INSTRUMENTALIZACIÓN DE PROBLEMAS ESCOLARES DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN SERVICIO

María Paz Gazzola y María Rita Otero

La investigación se realiza en un contexto universitario de formación continua de profesores de matemática. Se describen, a partir de los invariantes operatorios, los esquemas de uso de 39 profesores del nivel secundario cuando, en distintas situaciones, emplean como recursos "problemas escolares", en el marco de la teoría de los campos conceptuales y la aproximación instrumental. Los resultados muestran carencias de invariantes que faciliten gestos didácticos propios del cuestionamiento. Se infiere un posible elemento pivote del sistema de instrumentos de los profesores, que puede generar nuevas investigaciones para reorientar sus esquemas de enseñanza hacia el cuestionamiento del saber.

Términos clave: Invariantes operatorios; Génesis instrumental; Formación continua de profesores de matemática

Instrumentalization of school problems of mathematics teachers in service

The research is carried out in a university context of continuous training of mathematics teachers. The use schemes of 39 teachers when employing, in different situations, "school problems" as resources are described. To this aim, the operational invariants of such schemes are identified in the framework of the theory of conceptual fields and the instrumental approach. The results show a lack of operational invariants that facilitate didactic gestures typical of questioning. A possible pivotal element of the teachers' instrument system is emerging, which may generate new research to bring teachers' teaching patterns towards of questioning the knowledge.

Keywords: Operational invariants; Instrumental genesis; Continuous training of mathematics teachers

Gazzola, M. P. y Otero, M. R. (2022). Instrumentalización de problemas escolares de los profesores de matemáticas en servicio. *PNA*, *16*(4), 281-307. http://doi.org/10.30827/pna.v16i4.22040

El uso de los recursos didácticos es fundamental en el trabajo de profesor, ya sea durante la formación inicial o continua. Cuando los profesores están en la situación de concebir la enseñanza intentando mejorarla, desarrollan un proceso que transforma su conocimiento y los recursos que emplean (Gueudet et al., 2012; Gueudet y Trouche, 2008; Parra y Gueudet, 2019).

En el paradigma de enseñanza tradicional definido por Chevallard (2013) y que aún es dominante, el conocimiento matemático es tratado como autoevidente e incuestionable. Diversas investigaciones analizan cómo modificar la formación de los profesores de matemáticas. En el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico se busca orientarla hacia un nuevo paradigma emergente fundado en el cuestionamiento de los conocimientos a enseñar (ibíd.), ya que esto es fundamental para potenciar y ampliar la actividad matemática subyacente.

Cuando los profesores en formación o en servicio interactúan con materiales didácticos, primero, necesitan apropiarse de dichos recursos, estudiando y analizando su potencial didáctico-matemático y luego, tienen que considerar cómo utilizarlos en la enseñanza de manera eficaz, en arreglo a las metas que quieren alcanzar. En el caso de que se proponga un uso de los dispositivos que se aleje del paradigma tradicional de enseñanza, la distancia entre las prácticas habituales de los profesores y el tipo de enseñanza pretendida es muy grande, y en un aula real genera dificultades e incertidumbres relacionados con este factor de eficacia (Otero, 2021).

Desde hace varios años, hemos intentado incorporar en la formación inicial y continua de los profesores de matemática, ciertos gestos didácticos propios del paradigma del cuestionamiento y un uso de los recursos que sea funcional a tales gestos (Otero et al., 2020; Otero y Llanos, 2019; Otero et al., 2014). Se trata, en principio, de una meta compleja y difícil de alcanzar, excepto a pequeña escala y en contextos relativamente controlados durante la investigación. Al menos parcialmente, las dificultades se deberían a que los dispositivos didácticos aludidos, son ajenos a los profesores, quienes no los consideran parte del sistema de instrumentos que emplean.

El problema de la formación profesional de los profesores es abordado desde el campo de la didáctica profesional (Pastré et al., 2006) y la aproximación instrumental (Rabardel, 1995) y desde diversos encuadres de la didáctica de las matemáticas como la aproximación documental de lo didáctico (Gueudet & Trouche, 2009). Tanto en la aproximación instrumental como en la documental se considera al trabajo del profesor como una actividad instrumentada, que emplea instrumentos materiales o simbólicos.

El objetivo de este trabajo es indagar sobre los esquemas de uso de profesores de matemática del nivel secundario, a partir de la identificación, descripción y análisis de los invariantes operatorios que emergen cuando utilizan ciertos recursos durante un curso de formación profesional de didáctica de las matemáticas, en el que se promueve la enseñanza de las matemáticas desde el paradigma del cuestionamiento. Se asume que los invariantes operatorios son la puerta de acceso a los esquemas mencionados:

> *Plus décisifs encore du point de vue cognitif, sont les invariants opératoires, puisque les concepts-en-acte permettent de prélever dans l'environnement les informations pertinentes, et de sélectionner les théorèmes-en-acte nécessaires au calcul à la fois des buts et sous buts susceptibles d'être formés, et des règles d'action, de prise d'information et de contrôle permettant de les atteindre* (Vergnaud, 2013, p. 139).

En consecuencia, en este trabajo se abordan las siguientes preguntas:

- ¿Qué invariantes operatorios de los profesores se pueden identificar en la resolución de las tareas propuestas durante el curso de formación profesional?
- ¿Qué informan los invariantes operatorios identificados, sobre las características que tendrían los instrumentos generados por estos profesores a partir de los recursos propuestos?
- ¿Qué informan los invariantes operatorios sobre los sistemas de instrumentos de estos profesores?

Antecedentes

Diversas investigaciones originadas en el campo de la didáctica profesional y las didácticas específicas indagan sobre los recursos para enseñar y sobre como los profesores interactúan con ellos (Adler, 2000; Trouche et al., 2019). Dentro del vasto campo de la Aproximación Instrumental (Rabardel, 1995), algunos trabajos están orientados hacia la didáctica de la matemática (Guin et al., 2005; Guin y Trouche, 1998; Rabardel, 1999). Principalmente se trata de investigaciones que utilizan este enfoque para analizar el uso de artefactos tecnológicos, materiales (Drijvers y Trouche, 2008; Kieran y Drijvers, 2006; Maschietto, 2008) o simbólicos (Cuevas et al., 2018; Haspekian, 2005; Laborde et al., 2006; Orozco et al., 2018).

En el ámbito de la Aproximación Documental (Gueudet y Trouche, 2009), la cantidad de trabajos realizados es mayor y variada (Trouche et al., 2020; Trouche, 2018). Muchas investigaciones se han ocupado de analizar, en general, la génesis documental de los profesores de matemática del nivel secundario, con diferentes recursos curriculares a los efectos del desarrollo del marco teórico de la ADD (Gueudet y Lebaud, 2016; Gueudet et al., 2012). En otros trabajos se ha concedido mucha importancia al diseño colaborativo de recursos realizado por los profesores (Gueudet, 2013; Gueudet et al., 2013; Parra y Gueudet, 2019; Pepin y Gueudet, 2020). El trabajo de Sánchez (2010) estudió cómo se combina armónicamente un conjunto de recursos —orquestación— y Pepin et al. (2017) estudiaron la emergencia de recursos en línea y su uso. Mayoritariamente, estas investigaciones se han concentrado en los recursos y en las modificaciones que se les realizan.

Pocos trabajos se refieren al uso de los recursos vinculados al paradigma del cuestionamiento y a los esquemas de los profesores del nivel secundario. Las investigaciones de Gueudet et al. (2018) analizan el trabajo documental de una profesora de un liceo francés que utilizó un recorrido de estudio y de investigación (Chevallard, 2013), diseñado por otros investigadores. Continuando con dicha investigación, Parra y Otero (2021) identificaron y clasificaron los invariantes operatorios presentes en los esquemas de la profesora mencionada, mostrando que, aun cuando la profesora por iniciativa propia quería enseñar con un recurso didáctico de este tipo, los invariantes operatorios que caracterizaban su actividad no eran compatibles con los gestos didácticos propios del paradigma del cuestionamiento, en el cual el recurso se inscribe.

A partir de los trabajos mencionados, se reconoce la importancia de profundizar en el conocimiento de los esquemas de uso de los profesores, en general, y particularmente con recursos más familiares para ellos que los recorridos de estudio y de investigación, a partir de los cuales también podrían propiciarse algunos gestos de cuestionamiento incipientes, intentando una transición, más que un cambio radical. El ámbito de un curso de formación continua sobre la teoría antropológica de lo didáctico, al que los profesores asisten voluntariamente para mejorar y cambiar su enseñanza, resultó propicio para responder las preguntas que orientan este trabajo de indagación sobre los esquemas de los profesores de matemáticas que interactúan con recursos vinculados a saberes propios de la escuela secundaria.

ENFOQUE INSTRUMENTAL Y ENFOQUE DOCUMENTAL

El enfoque instrumental (Rabardel, 1995) fue desarrollado principalmente para analizar y entender cómo una persona que usa un artefacto, construye un esquema de uso del mismo, sobre todo en las situaciones laborales. Este tipo de estudios donde las situaciones tienen un componente productivo además de epistémico, son propios del ámbito de la didáctica profesional (Pastré et al., 2006; Otero, 2019).

Desde una concepción pragmática de la psicología del desarrollo como la de Vergnaud (1990, 2013), el análisis del aprendizaje es inseparable del análisis de la actividad de los aprendices. Estudiar el desarrollo significa asumir que existe una continuidad profunda entre el hacer y el aprender de la actividad y dentro de ella (Otero, 2019). Para comprender el conocimiento en acción de los sujetos, es decir, los elementos cognitivos que permiten que la acción del sujeto sea operatoria, Vergnaud (1990) precisó la noción de *esquema* y propuso los invariantes operatorios.

El desarrollo cognitivo en un campo conceptual, incluido el de una profesión, requiere de tipos de tareas y actividades particulares y propias de ese campo conceptual. El diseño y la selección de esas tareas es una actividad de enseñanza. De allí que según Vergnaud (2013) la didáctica es “el estudio de los procesos de trasmisión y de apropiación de los conocimientos teniendo en cuenta los contenidos específicos que dichos conocimientos poseen” (p.146).

En el caso de la actividad profesional también existe una parte observable y otra no observable (aunque inteligible), relacionada con los procesos cognitivos que la persona en situación de trabajo pone en marcha. La didáctica profesional, orientada hacia la formación y el desarrollo profesional, ha mostrado la importancia de la conceptualización en la actividad de trabajo (Otero, 2019). Así, la didáctica profesional amalgama dos dimensiones: una de orden operatorio, sobre las formas de organización del hacer en un cierto campo profesional y otra teórica, ligada a cómo se da razón de lo que se hace (ibíd., 2019).

El enfoque instrumental de Rabardel (1995), estudia cómo un sujeto en una situación de trabajo, transforma un *artefacto* material o simbólico en un instrumento, construido a partir de ese artefacto. Los procesos involucrados en esa transformación progresiva determinan la *Génesis Instrumental* (ibíd., 1995). Un instrumento se define como una unidad mixta relacionada con el sujeto y el artefacto, es decir, tiene una componente material —que es el artefacto o una parte de él— y una componente cognitiva: los esquemas de uso de dicho artefacto.

El concepto de esquema no puede existir sin el concepto de invariante operatorio (Pastré et al., 2006). Dichos invariantes son construidos por el sujeto en su confrontación con lo real y resultan instrumentos del pensamiento que permiten a los seres humanos adaptarse al mundo y volverlo comprensible para ellos. Su función principal es orientar la acción y realizar un diagnóstico preciso de la situación que orienta la selección de la información pertinente que permite ese diagnóstico. La función de recoger la información se realiza a través de los conceptos en acto, que pueden ser implícitos o explícitos, pero que son fundamentalmente conceptos organizadores de la acción. Ellos retienen de la situación a la cual debe adaptarse el sujeto, los objetos, las propiedades, las relaciones que van a permitir esta adaptación. Los teoremas en acto expresan estas características en forma de proposiciones, consideradas verdaderas por el sujeto. Esta dimensión de conceptualización presente en el corazón mismo de los esquemas es los que los distingue de simples hábitos (Pastré et al., 2006; Vergnaud, 2013).

En nuestro caso, los invariantes operatorios son las creencias profesionales de los sujetos, puestas en acto. Por lo tanto, y siguiendo a Vergnaud (2013), el acceso, necesariamente indirecto, a los esquemas de un sujeto, se realiza identificando los invariantes operatorios que ellos contienen.

La Figura 1 muestra los dos procesos diferenciados que ocurren en la génesis de un instrumento. La instrumentalización se refiere a cómo el sujeto asimila y personaliza el uso del artefacto en una situación de formación o de trabajo determinada, a partir de los esquemas que ya posee. La instrumentación, en cambio, ocurre cuando el sujeto reestructura su acción a partir del artefacto para realizar la tarea en cuestión, modificando sus esquemas.

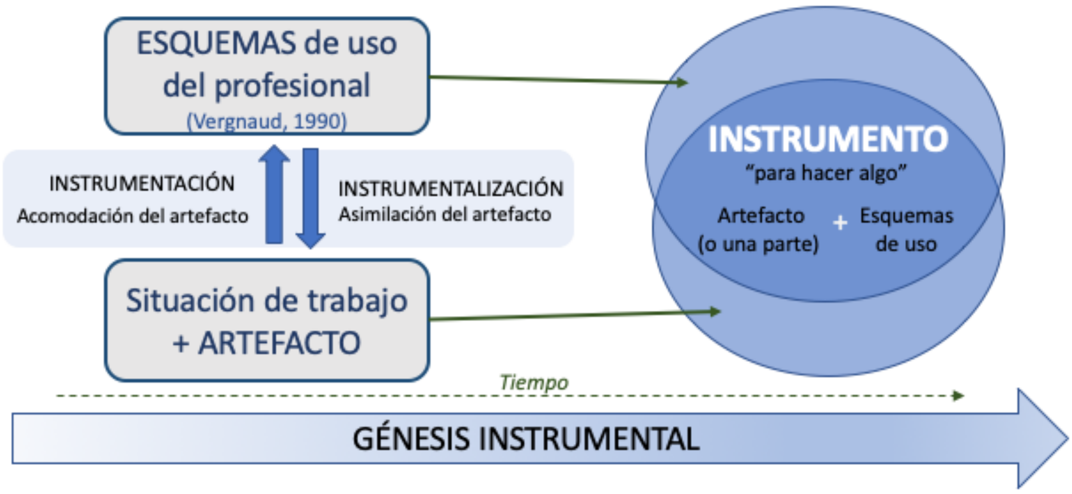


Figura 1. Esquema de la Génesis Instrumental (elaboración propia)

El enfoque documental de lo didáctico (EDD) (Gueudet et al., 2012; Gueudet y Trouche, 2008, 2009) se basa en el enfoque instrumental de Rabardel (1995), donde el profesor es el sujeto y los recursos que utiliza en su práctica profesional son los artefactos. El EDD considera que el trabajo central de los profesores es diseñar la enseñanza de un conocimiento, apoyándose en una variedad de recursos. Así, estudia las interacciones entre los docentes y los recursos y sus consecuencias, en un contexto donde hay una gran cantidad de recursos didácticos disponibles (Trouche, 2018). El proceso por el cual un recurso se transforma en un documento (documento = recurso + esquema de uso) para enseñar algo, se denomina *Génesis documental* (Trouche et al., 2020).

La noción de recurso proviene de las ideas de Adler (2000, 2012), para quien todo aquello (sea material o simbólico) que da sentido, apoya y proyecta el trabajo del profesor puede considerarse un recurso. Esto comprende a todo lo que los profesores usan para trabajar y desarrollar su práctica profesional como un libro de texto, un software, páginas web, orientaciones curriculares, y también los intercambios con colegas y las producciones de los estudiantes. Cuando tienen que enseñar, los profesores buscan recursos los seleccionan, los modifican; los llevan al aula y los comparten con colegas (Gueudet et al., 2018).

Finalmente remarcamos que la didáctica profesional aporta la dimensión cognitiva al análisis del aprendizaje en un contexto de trabajo o profesional, esta dimensión está presente en toda actividad laboral, incluido el trabajo manual. Para comprender cómo se articulan la actividad y el aprendizaje en un ámbito profesional empleamos la teoría de la conceptualización en la acción propuesta por Vergnaud (1990, 2013). Los invariantes operatorios asociados a los esquemas de uso de un recurso, designan a todos los conocimientos en la acción que pueden intervenir en el trabajo de los docentes. En cualquier profesión, y también en la de profesor, las situaciones de trabajo se resuelven con la asistencia de herramientas materiales o no, cuyo uso las torna eficaces y funcionales a la situación, generándose un conocimiento que permite decidir y actuar de manera rápida, afrontar los cambios en una tarea y garantizar al profesor resultados productivos y viables. Estas nociones explican entonces, la génesis de las formas de acción y su dinamismo, pero también su estabilidad y posible resistencia al cambio.

Sistemas de instrumentos

Los nuevos instrumentos o recursos no permanecen aislados, sino que se asimilan a un sistema de instrumentos ya constituido y estructurado según la experiencia del profesional (Rabardel y Bourmaud, 2005). El sistema de instrumentos (Bourmaud, 2006) se define como:

1. Heterogéneo: organiza amplios conjuntos de instrumentos y recursos de distinta naturaleza.
2. Finalizado: vinculado a los objetivos de acción del sujeto y debe permitir un mejor equilibrio entre los objetivos de economía y eficiencia.
3. Vicariante: tiene características de complementariedad y redundancia de funciones.
4. Subjetivo: es diferente de un operador a otro y está estructurado de acuerdo con su experiencia y habilidades.
5. Organizado en torno a un instrumento pivote: un instrumento juega un papel particular de organizador, de pivote para los demás instrumentos.

Esta noción permite enfatizar el hecho de que los recursos que se les propone a los profesores durante un curso de formación, no caen en el vacío. Los problemas se asimilan con un sistema de instrumentos propio, al cual no se tiene un acceso directo, pero cuya incidencia en la génesis documental no puede ignorarse. Además, si bien el sistema de instrumentos de un profesional es subjetivo, existen características comunes, por el hecho de que la actividad profesional se realiza en una institución social que permea todas las acciones profesionales.

Metodología

La investigación es de corte etnográfico y exploratorio. Se busca indagar sobre los esquemas de uso de un grupo de profesores cuando interactúan con ciertos recursos para enseñar en el ámbito del paradigma del cuestionamiento, siendo esto un estudio muy poco desarrollado. Los 39 sujetos considerados se encuentran realizando un proceso formativo, particularmente están cursando la asignatura Didáctica de la Matemática, cuyo programa de estudio está centrado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2013). La disciplina pertenece al último año de la carrera Licenciatura en Educación Matemática de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Se trata de una carrera de grado, completamente en línea, cuyos alumnos son profesores de matemática formados en diferentes instituciones provinciales no universitarias, que la realizan para obtener el grado universitario e incrementar su formación matemática y didáctica. El plan de estudios asume la formación previa y añade 8 cursos cuatrimestrales distribuidos en dos años: tres son específicamente de matemática y los restantes son epistemología, psicología cognitiva, metodología, didáctica de la matemática y Tecnologías de la Información y de la Comunicación para la Enseñanza (TICE). Finalmente, los profesores deben realizar un trabajo final de investigación de un año de duración o tesina.

Los estudiantes que participaron del curso de formación considerado para esta investigación son profesores que residen y trabajan en diversas provincias del país. Su experiencia profesional en la escuela secundaria oscila entre 2 a 15 años. A lo largo de este trabajo nos referimos a ellos como ‘los profesores’.

El curso se realizó utilizando la plataforma virtual Moodle, con un docente por cada diez estudiantes.

En este trabajo, siguiendo el objetivo detallado anteriormente relativo a los esquemas de uso de los profesores de matemática del nivel secundario de ciertos recursos para enseñar, se describen y analizan los invariantes operatorios que emergen cuando ellos realizan tres tareas (sección “Tareas propuestas a los profesores”) que se les proponen durante el curso de formación, en las cuales están involucrados recursos que son llamados ‘problemas escolares’ de matemática (sección “Los problemas escolares utilizados”), porque aparecen en los manuales escolares de la escuela secundaria y el currículum argentino. Las dos primeras tareas son situaciones para estudiar y analizar las matemáticas involucradas, con la diferencia de que en la primera se indicó no pensar aún en la enseñanza. En cambio, en segunda tarea, se solicitó ampliar las soluciones contemplando las que podrían proponer los alumnos. En la tercera, se indicó que la situación requería considerar una posible enseñanza en la escuela con los problemas analizados, especificando los conocimientos involucrados.

Los problemas escolares utilizados

Los problemas escolares, los cuales de aquí en adelante se llamarán simplemente problemas (Figura 2), fueron seleccionados intencionalmente y pertenecen al bloque curricular denominado álgebra, porque es el que los profesores enseñan mayoritariamente y a veces de manera excluyente. El “Problema de José”, es a nuestro juicio una tarea típica de manual escolar, es decir que, con diferente contexto (por ejemplo, libros y estantes de una biblioteca), puede encontrarse en la mayoría de los textos didácticos de uso corriente de Argentina. Es los que suele considerarse un problema de contexto.

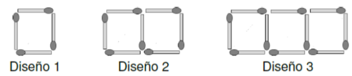
El Problema de José	El Problema de la Herencia	El Problema de los Fósforos
En una granja hay conejos y cisnes, en total son 550 animales. Un observador cuidadoso contó 1580 patas. ¿Cuántos conejos y cuántos cisnes hay entonces?	*Un hombre distribuyó una suma de dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al mayor le dio 1000 pesos más 1/10 de lo que le restaba, luego le dio 2000 al segundo más 1/10 del restante, al tercero le dio 3000 más 1/10 de y así siguiendo hasta llegar al último hijo. Hecho esto cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió?*	*Se construyen con fósforos los siguientes diseños:*  *- ¿Cuántos fósforos son necesarios para construir el Diseño 6? ¿Y para construir el Diseño 100?* *- ¿Es posible construir una figura como la del modelo que tuviera 1500 fósforos? ¿y con 1822? Expliquen por qué.*

Figura 2. Problemas escolares presentados a los profesores

El llamado "Problema de la Herencia" aparece en el libro "*3500* ejercicios de álgebra, Primer Curso", editado en 1960 para el ciclo básico común del Bachillerato, Magisterio y Escuelas de Comercio y fue reformulado para una investigación acerca de cómo los estudiantes de la escuela secundaria resolvían problemas supuestamente algebraicos (Otero et al., 2006). La manera de enunciarlo se asocia a una tarea habitual para los profesores, que el currículum expresa como: "traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico", y suele —erróneamente— ser vinculada a la enseñanza del álgebra (Bosch et al., 2004).

El "Problema de los Fósforos" esta tomado y adaptado del diseño curricular de matemática de la provincia de Buenos Aires para 2do. año de la Escuela Secundaria Obligatoria. El currículum propone utilizar este tipo de problemas, para la iniciación al álgebra escolar, como una generalización de la aritmética.

En el currículum de Argentina, estos tres recursos aparecen vinculados a las ecuaciones lineales de una o dos incógnitas y a los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los problemas se distribuyeron aleatoriamente entre los profesores, de tal manera que cada uno de los profesores utiliza sólo un problema de los enunciados en la Figura 2 para responder a las tres tareas descritas en el siguiente apartado. Los profesores entregaron para cada tarea, un documento escrito con su respuesta.

Tareas propuestas a los profesores

Los profesores tuvieron que resolver las siguientes tareas, tendientes a propiciar el cuestionamiento:

Tarea 1 (T1). Resolver el problema de varias maneras posibles.

En esta tarea, los profesores tienen que estudiar y analizar el problema. Se busca obtener información sobre cómo lo resuelven individualmente, sin interactuar con los formadores del curso ni con sus pares. Se les solicita resolver el problema de maneras diferentes con la intención de que exploren la matemática involucrada, más allá de las soluciones institucionalizadas por la escuela secundaria, ya que esto permitiría analizar el potencial del problema.

Los docentes a cargo del curso realizaron observaciones escritas a las resoluciones de los profesores. Dichas observaciones se referían a la matemática involucrada, con el objetivo de propiciar la profundización del estudio. Luego, se les solicitó levar a cabo la Tarea 2.

Tarea 2 (T2). Reformular la respuesta a la Tarea 1

Para realizar esta tarea se debían contemplar los comentarios escritos de los profesores del curso y cumplir las siguientes condiciones: (a) Aumentar las formas de resolución asumiendo el lugar del alumno, y (b) presentar una formulación matemática general del problema.

Aquí se pretende que los profesores reformulen su primera respuesta y continúen analizando el problema, además de proponer posibles formas de solución adaptadas a los alumnos, es decir, anticipaciones de lo que podría surgir en el aula. Asumiendo que la descontextualización de los problemas permite analizar los conocimientos matemáticos subyacentes, se solicitó a los profesores realizar una formalización, entendida como la abstracción de significado del problema.

Del mismo modo que en la tarea precedente, los formadores del curso revisaron y comentaron por escrito las propuestas de los profesores, antes del encuentro on-line.

Encuentro on-line con los colegas que resolvieron el mismo problema y los formadores del curso

Para cada problema se realizó un encuentro on-line de una hora de duración, propiciando la interacción entre los compañeros del curso y los formadores del mismo. El objetivo fue compartir las distintas soluciones propuestas y los conocimientos matemáticos involucrados en ellas con fin de ampliar el desarrollo los esquemas de los profesores.

Tarea 3 (T3). Reformular la respuesta a la Tarea 2

Para realizar esta tarea se debía partir del intercambio con los formadores del curso y colegas, contemplando las siguientes condiciones: (a)

Presentar/completar las soluciones posibles que pudieran faltarles, (b) presentar una formulación matemática general del problema, e (c) identificar qué podría enseñarse con el problema.

En esta última tarea, se pretende que los profesores reformulen las respuestas anteriores, tomando en cuenta tanto las observaciones realizadas por los formadores del curso como las surgidas del encuentro on-line, con el objetivo de alcanzar la formulación general del problema y profundizar el estudio. Además, se espera que los profesores mencionen el conocimiento matemático que enseñarían usando como recurso el problema analizado por ellos, lo cual habilita un análisis didáctico.

Recolección de datos y análisis

Los esquemas de uso de los profesores de matemática se describen a partir de los invariantes operatorios que emergen cuando ellos interactúan con ciertos recursos seleccionados intencionalmente, que se encuentran en los libros de texto y pertenecen al mismo bloque del currículum: álgebra y funciones. En el análisis presentado en este trabajo no hace una distinción entre los problemas, porque se toman en cuenta las tres situaciones que los profesores enfrentan en cada tarea.

Se dispone de las soluciones que salieron de la mano de cada profesor. Ellos subieron a la plataforma Moodle todas las respuestas escritas en formato digital. Estos registros fueron recolectados y agrupados por tarea.

PS	Problema	Tarea 1	Tarea 2		Tarea 3		
		Soluciones	Soluciones	Generalización	Soluciones	Generalización	Enseñanza

Figura 3. Tabla de análisis de las respuestas de los profesores a cada tarea

Para cada tarea se analizaron las respuestas de los 39 profesores, según la Figura 3. Las dos primeras columnas identifican al profesor (con una codificación desde PS01 a PS39) y el problema asignado. El objetivo de las restantes columnas es sintetizar las respuestas a las tareas: para T1, se consideraron el tipo de soluciones a los problemas. Para T2 se distinguió entre las soluciones (considerada por los profesores como diferentes a T1) y la generalización propuesta para el problema. En T3, nuevamente se distingue entre soluciones y generalización y considera otra columna para sintetizar los posibles usos didácticos mencionados.

Con los datos de la tabla, y por medio de técnicas de análisis y meta análisis (Gürtler y Huber, 2007), se realiza una categorización inductiva y se infieren los invariantes operatorios subyacentes a las respuestas de los profesores, es decir, que las categorías responden a aquello que los profesores escribieron, que es interpretado y descripto en función del marco teórico. Las acciones de los profesores que evidencian la actividad matemática contenida en sus soluciones, sirven como indicadores para inferir los invariantes operatorios. Cada respuesta escrita fue segmentada marcando las afirmaciones que resultaban indicadores de los invariantes operatorios inferidos (IO).

Una vez identificado y enunciado un invariante, se revisa su presencia en las restantes respuestas. Como en este trabajo estamos interesados en las regularidades, admitimos que, si un invariante se presenta en más del 75% de las 39 respuestas, se considera que es característico de la tarea en cuestión para los profesores considerados. Estos invariantes se describen y analizan en la sección siguiente.

RESULTADOS: INVARIANTES OPERATORIOS IDENTIFICADOS

En esta sección se proponen los invariantes operatorios identificados para cada tarea.

Tarea 1

En T1 se les solicitó a los profesores resolver el problema de diferentes maneras. La Tabla 1 resume los invariantes operatorios identificados en esta tarea. En la primera columna se enuncia el invariante operatorio identificado en T1 y en la segunda se describe brevemente el indicador que justifica su presencia.

Tabla 1
Invariantes operatorios identificados en T1

Invariante Operatorio	Indicador
"Un problema se asocia con un tema (único) del programa"	Relacionar el problema con un único contenido de su programa.
"Hay una forma escolar oficial de resolver un problema"	Asumir la existencia de una forma preestablecida y casi única para resolver un problema escolar en la escuela.
"Los problemas escolares de matemática se resuelven encontrando una fórmula a partir del enunciado"	Utilizar una fórmula, que se obtiene casi directamente de su enunciado.

En todas las respuestas a T1, se relacionó unívocamente el problema de José con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, el problema de la herencia con ecuaciones lineales con una incógnita y el problema de los fósforos con 'expresiones algebraicas' como una extensión de la aritmética. Los profesores "ubicaron" el problema en un lugar del programa, en un tema específico, para un año escolar determinado y lo resolvieron evidenciando el saber matemático que, en el lugar de profesores, relacionaban con ese problema. Se distingue aquí el invariante operatorio: "un problema se asocia a un tema (único) del programa".

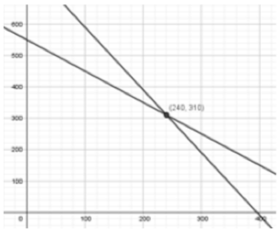
En cuanto a las soluciones, si bien la tarea solicitaba resolver el problema de varias maneras posibles, los profesores sólo consideraron una. Una vez relacionado el problema con un contenido del programa, ellos parecen asumir que existe una forma preestablecida para resolverlo y se ciñen a ella. Así, en las respuestas al problema de José, se sujetaron al sistema de ecuaciones, que resulta de "traducir" secuencialmente el enunciado. El sistema fue resuelto utilizando mayoritariamente las técnicas tradicionales de sustitución e igualación, y en menor medida sumas y restas, determinantes o gráficamente (Figura 4).

Se plantea un sistema de ecuaciones lineales con las variables x e y.

$$\begin{cases} x + y = 550 & (1) \\ 4x + 2y = 1580 & (2) \end{cases}$$

Método de Sustitución
Despejo en (1), la variable y
$y = 550 - x$ (3)
Reemplazando (3) en (1)
$4x + 2(550 - x) = 1580$
$4x - 2x = 1580 - 1100$
$x = 240$ (4)
Reemplazando (4) en (3), se tiene: 310

Método gráfico
En el sistema de ecuaciones lineales, se grafican cada una de las rectas en el sistema de ejes cartesianos. $y = 550 - x$ e $y = 790 - 2x$
Las rectas intersecan en el punto $(x, y) = (240{,}310)$



Método de Igualación
Se despeja en (1) y (2) la variable y, se tiene:
$y = 550 - x$
$y = 790 - 2x$
Igualando, se tiene:
$550 - x = 790 - 2x$
$x = 240$
Por lo tanto, $y = 310$
Análogamente, despejando la variable x en cada ecuación.

Método de adición y sustracción
Restando (2) y (1):
$3x + y = 1030$ (3)
Restando (3) y (1), se anula la variable y:
$2x = 480$
$x = 240$ (4)
Reemplazando (4) en (3):
$y = 310$

Figura 4. Extracto de la respuesta de PS03, problema de José, T1

Como el hijo$_1$ recibió: $H_1 = 1.000 + \frac{1}{10}(x - 1000)$

y el hijo$_2$ $H_2 = 2.000 + \frac{1}{10}[x - 2000 - (1000 + \frac{1}{10}x - 100)]$

y el problema dice que cada hijo recibió la misma cantidad de dinero, entonces planteo la ecuación: $H_1 = H_2$

$$1000 + \frac{1}{10}(x - 1000) = 2000 + \frac{1}{10}[x - 2000 - (1000 + \frac{1}{10}x - 100)]$$

$$1000 + \frac{1}{10}x - 100 = 2000 + \frac{1}{10}[x - 2000 - 1000 - x\frac{1}{10} + 100]$$

$$1000 + \frac{1}{\sqrt{10}}x - 100 = 2000 + \frac{1}{\sqrt{10}}x - 200 - 100 - \frac{1}{10}x + 10$$

$$\frac{1}{100}x = 2000 - 200 - 100 + 10 - 1000 + 100$$

$$\frac{1}{100}x = 810$$

$$x = 810 . 100$$

$$x = 81000$$

Figura 5. Extracto de la respuesta de PS27, problema de la herencia, T1

Las soluciones al problema de la herencia, en todos los casos, consisten en obtener las ecuaciones como una traducción secuencial, literal del enunciado para el primer y segundo hijo. Estas ecuaciones se igualan y resuelven para obtener el monto total de la herencia (Figura 5).

El problema de los fósforos fue resuelto a partir de una fórmula obtenida como generalización de los primeros tres o cuatro diseños, que relaciona la cantidad de fósforos con el número de orden del diseño. Esta fórmula se utilizó para calcular la cantidad de fósforos de un diseño determinado o el número de orden del diseño para una cantidad de fósforos establecida (Figura 6).

Antes de responder las preguntas, observé detenidamente los diseños planteados nuevamente y establecí que:

Diseño 1: 4 fósforos

Diseño 2: 4 + 3 fósforos

Diseño 3: 4 + 2.3 fósforos

Diseño 4: 4 + 4.3 fósforos

Entonces la expresión algebraica que nos permite calcular de manera sencilla cualquier Diseño n-ésima es 4 + (n-1).3. Esta expresión permite determinar fácilmente la cantidad de fósforos necesarios para construir cualquier Diseño (n), donde n es un número Natural.

Figura 6. extracto de la respuesta de PS16, problema de los fósforos, T1

En las soluciones de los tres problemas se identifica el IO: “Hay una forma escolar oficial de resolver un problema”, ya que en todas las respuestas analizadas los profesores optan por la misma forma de resolución, y esto permite inferir que esta podría ser la manera habitual de resolver estos problemas en la escuela. Esta solución se basa en buscar una fórmula que surge de traducir secuencialmente el enunciado, en lugar de relaciones expresadas matemáticamente, de allí el IO: “Los problemas escolares de matemática se resuelven encontrando una fórmula a partir del enunciado”.

Tarea 2

Esta tarea está vinculada con la solicitud de agregar nuevas soluciones posibles al problema y con su generalización matemática. La Tabla 2 sintetiza los invariantes operatorios identificados en T2.

Tabla 2
Invariantes operatorios identificados en T2

Invariante Operatorio	Indicador
“Cada forma de solución es independiente de las demás”	Tratar aisladamente cada solución que se propone.
“No es necesario relacionar las distintas soluciones entre sí”	No vincular matemáticamente las posibles soluciones y no analizar su pertinencia.
“En una formulación general, los	Proponer como formulación general del

Tabla 2
Invariantes operatorios identificados en T2

parámetros del problema son fijos"	problema ecuaciones con los parámetros fijos, según el enunciado.
"Cualquier enunciado contextualizado es un problema extra-matemático"	Considerar que un enunciado propuesto en términos de objetos del mundo de la vida y operaciones matemáticas entre ellos, tiene carácter 'extra-matemático'

En la segunda tarea, T2, los profesores tenían que proponer soluciones diferentes, considerando aquellas que podrían surgir en el aula. Para eso, los docentes mayoritariamente agregaron soluciones numéricas. Además, otorgaron al uso de técnicas distintas -cuyo alcance o similitud con las restantes no fue considerada- el status de nueva solución. Por ejemplo, en el problema de José, una vez formulado el sistema de ecuaciones, la novedad residía en emplear una técnica de solución de un sistema de ecuaciones, diferente de la utilizada en T1. En el problema de la herencia, propusieron la misma ecuación, pero para hijos consecutivos diferentes de los que habían propuesto antes. En el tercer problema, realizaron transformaciones en la fórmula a partir de operaciones algebraicas y consideraron, por ejemplo, f=3n+1, en lugar de f=4+3(n-1), siendo f la cantidad de fósforos y n el número de diseño. En todos los casos, los profesores trataron a estas soluciones supuestamente "distintas" como fueran independientes, o sin relacionarlas matemáticamente. Esto soporta el invariante operatorio: "Cada forma de solución es independiente de las demás". Los profesores no analizan el saber matemático subyacente ni la actividad matemática que los problemas pueden o no generar, a excepción de proponer una fórmula que surge de traducir secuencialmente el enunciado.

Estos invariantes son el producto de la relación esquema-situación. En este caso, los profesores no se colocaron en la situación de analizar el problema, sino en la de usarlo como un recurso para enseñar. En esta situación, ellos no consideraron pertinente analizar posibles vinculaciones matemáticas entre las soluciones propuestas, actuaron según el invariante operatorio: "No es necesario relacionar las distintas soluciones entre sí".

Cuando los profesores tuvieron que realizar una formulación matemática general para el problema y sus soluciones, plantearon ecuaciones o fórmulas con los parámetros fijos del enunciado. Por ejemplo, en el problema de José (Figura 7) fijaron el número total de animales, de patas y la cantidad de patas de cada tipo de animal, igual que en el problema escolar original. Lo mismo hicieron con el problema de la herencia: el monto inicial que recibe el primer hijo y la proporción del *resto* (aquí 1/10) que le corresponde a cada uno (Figura 8). En el problema de los fósforos (Figura 9) se fijaron el número de lados de la figura original.

Si bien podría decirse que, el problema de la herencia admite una traducción directa y los otros dos no, aquí se observa, al igual que en las soluciones propuestas para T1, que los profesores realizan ciertas transformaciones que les permiten escribir los enunciados de los tres problemas propuestos como ecuaciones que contienen el valor de los parámetros iniciales y que ellos están dispuestos a considerar como generales. Esto soporta el IO: “en una formulación general los parámetros del problema son fijos”.

Solución General

Para la resolución de este problema se deben plantear dos ecuaciones con dos incógnitas (Modelo Matemático de la situación planteada en el enunciado del problema), una correspondiente a la cantidad de patas (1), y la otra al total (2), de los animales:

$$\begin{cases} x + y = 550 \quad (2) \\ 4.x + 2.y = 1580 \quad (1) \end{cases}$$

Siendo ‘x’ la cantidad de conejos e ‘y’ la de cisnes.

Este sistema de ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver con varios métodos: 3 algebraicos (sumas y restas, igualación y sustitución) y 1 gráfico. Así también por el método de Matrices y Determinantes.

Figura 7. Extracto de la respuesta de PS12, problema de José, T2

Solución general:

H_1 = H

H_2 = Hijo 2

T = Total de la herencia

$$H_1 = 1000 + \frac{1}{10}(T - 1000)$$

$$H_2 = 2000 + \frac{1}{10}\left(T - 2000 - \left[1000 + \frac{1}{10}(T - 1000)\right]\right.$$

Igualamos H_1 y H_2:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow$$

$$1000 + \frac{1}{10}(T - 1000) = 2000 + \frac{1}{10}\left(T - 2000 - \left[1000 + \frac{1}{10}(T - 1000)\right]\right.$$

Figura 8. Extracto de la respuesta de PS23, problema de la herencia, T2

FORMA GENERAL:

Una forma general para poder resolver la situación planteada es mediante el uso de una fórmula matemática, como la siguiente:

$$\boldsymbol{Cant. de\ fosforos = 3.n + 1 \quad siendo\ n\ el\ número\ del\ diseño\ solicitado}$$

Figura 9. Extracto de la respuesta d PS29, problema de los fósforos, T2

En las respuestas a esta tarea se identifica también que los profesores no se cuestionan los problemas que se les presentaron en relación con sus enunciados, ya que en sus escritos no se explicita ninguna valoración sobre su pertinencia. Ellos parecen asumir que cualquier enunciado propuesto en términos de objetos del mundo de la vida y operaciones matemáticas entre ellos, tiene carácter ‘extra-matemático’, aunque carezca de sentido o sea obsoleto. Esto es compatible con el IO: “Cualquier enunciado contextualizado es un problema extra-matemático”.

Debido a los resultados obtenidos en T2, el eje central del encuentro on-line fue la formulación matemática general de los problemas. En esa sesión se trataron las nociones de variable, parámetro y descontextualización, con el objetivo de que los profesores alcanzaran un planteamiento matemático general que les permita profundizar el análisis de los conocimientos vinculados al problema.

Tarea 3

La Tarea 3 está vinculada a los posibles usos didácticos de los problemas. Aquí, se solicitaba completar las soluciones posibles, reformular el planteamiento matemático general del problema y a su vez identificar qué saberes matemáticos se podrían enseñar con ellos en la escuela. En la Tabla 3 se presentan los invariantes operatorios identificados en T3.

Tabla 3
Invariantes operatorios identificados en T3

Invariante Operatorio	Indicador
"Cada sistema de representación es una nueva solución"	Considerar "soluciones nuevas" a los distintos sistemas de representación.
"Los problemas escolares deben tener un contexto"	Conservar el contexto original del problema en la formulación general.
"Los problemas escolares deben tener una solución numérica"	A pesar de tener una formulación general del problema, fijar los parámetros, para encontrar una solución numérica.
"Los problemas de enunciado verbal son apropiados para enseñar álgebra en la escuela"	Destacar la importancia de los enunciados verbales de los problemas para construir expresiones algebraicas por traducción.

En T3, para completar las soluciones posibles, los profesores incorporaron diferentes sistemas de representación como gráficos, soluciones numéricas y en algunos casos el uso de tecnologías de la información y comunicación, sin cuestionar el saber matemático subyacente. Una vez más, en todas las producciones escritas se observa un tratamiento aislado e independiente de cada solución propuesta, en acuerdo con el IO identificado en la Tarea 2.

En relación con la utilización de distintos sistemas de representación, los profesores consideran a este proceder valioso "per se", ya que, en la mayoría de las producciones escritas sobre esta última tarea ellos destacan las bondades de resolver un mismo problema en diversos sistemas de representación, pero sin justificar ni cuestionarse matemáticamente acerca de tal afirmación. Los profesores no explotan los nuevos conocimientos que esta actividad matemática trae consigo. Por ejemplo, como puede observarse en el siguiente fragmento de la respuesta de PS02, similar a la mayoría de las respuestas de los profesores participantes:

PS02: La idea es no centrarse en un solo marco, sino que el alumno explore a través de los mismos y valide que puede obtener los mismos resultados partiendo desde distintos puntos de vista y distintos marcos.

Podemos relacionar, entonces, este proceder de los profesores con el invariante operatorio: "Cada sistema de representación es una nueva solución", ya que para ellos, estas formas de solución no tienen relación matemática aparente.

Considerando la formulación matemática general, en T3, la mayoría de los profesores formalizó el problema, pero, aunque aquí los parámetros no se fijaron de antemano, ellos mantuvieron el contexto original: animales, cantidad de patas, hijos, herencia, polígono regular. Esto nos permite identificar un invariante operatorio relativo a los tipos de problemas que podrían ser, estos profesores, tratados en la escuela: “Los problemas escolares deben tener un contexto”.

Por otro lado, y a pesar de la formalización alcanzada, las soluciones propuestas permanecieron específicas e interpretadas. De allí el invariante: “Los problemas escolares deben tener una solución numérica”, ya que al momento de resolver el problema, los profesores volvieron a considerar los parámetros iniciales y hallaron a una solución aritmética única.

En esta tarea, los profesores estaban en la situación de profesores e indicaron qué enseñarían con el recurso. Aquí, ellos volvieron a relacionar el problema con el tema del programa con el cual lo habían vinculado inicialmente (en T1): sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones lineales y expresiones algebraicas. Sin embargo, en sus producciones escritas, ellos no consideraron el conocimiento matemático en sí, sino en los aspectos traductivos con los que asocian los problemas. Se identifica regularmente la utilización de expresiones como “modelización de situaciones extra matemáticas” o “traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico”. Esto indica el invariante: “Los problemas de enunciado textual son apropiados para enseñar álgebra en la escuela”. A continuación, se presentan algunos extractos de las respuestas de los profesores, que dan cuenta de esto. Podemos observar aquí que la utilización de estas expresiones aparece indistintamente del problema utilizado.

PS22: La importancia que tienen la resolución de estos problemas deriva al uso de técnicas de resolución basadas en la traducción del lenguaje verbal al algebraico (problema de la herencia).

PS06: El problema puede servir para representar algebraicamente la situación extra-matemática planteada mediante ecuaciones y buscar la solución… (problema de José).

PS38: Resolver la situación problemática a través de ecuaciones y fórmulas que respondan a un sistema más general que permita hallar la solución al problema (problema de la herencia).

PS17: Considero que la siguiente situación problemática se la podría proponer a alumnos de 1° año ES o 2° año como iniciación al trabajo algebraico, buscando las regularidades en esta situación extra matemática… (problema de los fósforos).

Los extractos anteriores muestran el hábito de los profesores, que consiste en traducir los enunciados escritos en lenguaje natural, a símbolos algebraicos (a los que suelen llamar, erróneamente, lenguaje simbólico o algebraico). Esto es propio de considerar que la enseñanza del álgebra escolar (Bolea et al., 2001) tiene como razón de ser el reemplazo de enunciados verbales por fórmulas.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN

En la Tarea 1, la situación requería que, para explorar la potencialidad matemática del problema, los profesores lo resolvieran y profundizaran su estudio. A pesar de que se indicó lo contrario, desde el inicio, ellos adoptaron el rol de profesores de la escuela secundaria y no lograron tomar distancia del programa que enseñan. Si bien se había solicitado resolver el problema de varias maneras posibles, ellos emplearon una sola. Esto se debería a que vinculan el recurso directamente con un tema del programa. Los invariantes operatorios muestran que esta forma única de resolver sería la que oficialmente se emplea en la escuela y tiene por objetivo encontrar “la” fórmula. Pero esto no es lo que hacen los alumnos. Por ejemplo, en el problema de la herencia, Otero et al. (2006) muestran que cuando los estudiantes resolvieron algebraicamente, consideraron los restos y operaron con ellos, de manera muy diferente a la propuesta por los profesores. Alternativamente, en esta situación, los profesores se apegan a las fórmulas que según ellos pretenden supuestamente surgirían de “traducir” el lenguaje natural al “lenguaje algebraico”. En síntesis, los invariantes operatorios que se identifican se refieren a asociar el recurso con un tema del programa y a asumir que la forma escolar de resolverlo se reduce a escribir una fórmula.

La Tarea 2 fue motivada por la resistencia de los profesores a trascender la forma tradicional de tratar el problema y su uso en la enseñanza. Debido a esto, se les preguntó por soluciones alternativas y por una generalización matemática. Para cumplir con lo solicitado, ellos presentaron como alternativas, a formas de resolver los problemas que, desde un punto de vista matemático, no lo eran. En la escuela se suele otorgar valor al hecho de resolver un ejercicio de diversas maneras, sin embargo, esto no es universal a menos que las distintas soluciones sean cuestionadas, analizadas y comparadas en función de la actividad matemática que se intenta realizar. En este caso, los profesores trataron aisladamente cada solución propuesta y no analizaron matemáticamente sus vinculaciones. Estas acciones son coherentes con los invariantes operatorios identificados en la tarea anterior, a los que se agrega el invariante vinculado a los parámetros de las fórmulas, a los cuales se consideran fijos. Entonces, frente a la tarea de generalizar el problema y así encontrar diversas soluciones posibles, emergen los invariantes operatorios vinculados con la supuesta necesidad de generar un contexto para los problemas de matemática, incluso cuando este sea muy trivial. Por lo tanto, en esta tarea, los profesores no utilizan letras para representar los parámetros y dejan fijos todos los valores numéricos del enunciado.

En la Tarea 3, los profesores incorporaron distintos sistemas de representación: numérico, algebraico o gráfico, pero sin analizar los saberes matemáticos que su utilización conlleva y, además, los trataron aisladamente. Por ejemplo, ellos usan el denominado método gráfico sólo para mostrar y verificar la existencia del punto de intersección entre las rectas, que no son tratadas como nuevos objetos de saber, propios del marco geométrico-analítico. Esto obstaculiza la relevancia que tiene en la escuela secundaria la presencia de diferentes sistemas de representación en la explicitación y formalización de los conceptos matemáticos (Sureda y Otero, 2013).

La generalización solicitada en esta última tarea, resultó obstaculizada porque los profesores permanecieron atados al contexto original: animales, patas, herencia, fósforos, polígonos regulares, en correspondencia con los invariantes operatorios identificados. Sin embargo, aunque finalmente en la mayoría de los casos lograron formalizar el problema, no generalizaron la solución. En esta instancia, ellos fijaron nuevamente los parámetros para encontrar un único resultado, como se hace en la escuela. Para responder la pregunta sobre qué podría enseñarse con los problemas propuestos, los profesores destacaron principalmente el "paso del lenguaje coloquial al simbólico" en lugar de referirse al saber matemático o a una actividad matemática más amplia, como se requiere en el paradigma del cuestionamiento. Esto podría estar vinculado a la preponderancia de esta actividad en la enseñanza del algebra, tal como señalan Bosch et al. (2004).

Es destacable que en las tres tareas los sujetos siempre asumieron el papel de profesor y usaron el problema como lo hacen habitualmente, aunque por decisión propia, estaban realizando un curso de capacitación que enfatizaba la importancia del análisis y el cuestionamiento de la matemática escolar. El hecho de que, como primera acción, cada recurso sea vinculado con un tema del programa —considerado autoevidente y transparente— parece inhibir cualquier actividad de estudio y cuestionamiento. Es decir que, los profesores asimilan el recurso con los esquemas que tienen disponibles, propios de la enseñanza habitual. Este resultado es consistente con lo expresado por Pastré et al. (2006) sobre la profesión de profesor. Entre otros aspectos, ellos remarcan que los esquemas explican tanto la actividad contingente como la resistencia al cambio. En este caso, los esquemas de uso de los profesores para este tipo de recursos, se originan en una experiencia profesional relativamente extensa en la dimensión individual y muy consolidada en la comunidad de profesores, los esquemas persisten porque resultan eficientes para el trabajo, tal como lo evidencian por ejemplo los invariantes operatorios referidos a la forma oficial de resolver el problema o a las soluciones únicas y aritméticas.

Los invariantes operatorios identificados, muestran que los recursos empleados se asimilan con un esquema de uso que genera, orienta y condiciona la actividad, a partir de vincularlo con un tema del programa enseñado. Esta vinculación permite hipotetizar que el programa enseñado sería el pivote del sistema de instrumentos de los profesores.

La falta de correspondencia entre estos invariantes con una actividad matemática caracterizada por el estudio, la investigación y el cuestionamiento, también fue observada por Parra y Otero (2021), cuando analizaron el caso de una profesora del liceo francés que decidió desarrollar en sus clases habituales un recorrido de estudio e investigación.

Finalmente, a la luz de los resultados de este estudio, se considera que el uso que los profesores realizan de los recursos, no debería interpretarse como una carencia de habilidades matemáticas que les impediría estudiar el problema, generalizarlo y generar nuevo conocimiento a partir de él. Más bien, se diría que ellos se posicionan en una situación laboral, en la cual los alumnos deben poder resolver el problema y subordinan a esta meta de orden inferior, otras más relevantes como la actividad matemática y el saber que potencialmente podrían desarrollar con el recurso que tienen en la mano. Por este motivo, sus invariantes operatorios se refieren a generar un contexto, fijar los parámetros, reducir las variables, buscar una solución única e identificable, aislar y tratar secuencialmente los sistemas de representación como si fueran formas diferentes de resolver, etc.

Conclusión

En este trabajo se analizaron los esquemas de uso de un grupo de profesores de matemática que emplearon como recurso "problemas escolares". Los esquemas se describieron a partir de los invariantes operatorios que generan, orientan, dirigen la acción y la toma de información (Vergnaud, 2013). Los resultados muestran que, en las situaciones consideradas, los sujetos asumen desde el inicio el papel de profesor habitual en la escuela secundaria y que son reticentes al cuestionamiento del saber. El invariante operatorio que los lleva a asociar el recurso con un tema del programa enseñado determina fuertemente su actividad. Los profesores adoptan una manera escolar "oficial" de resolver los problemas, que consiste en encontrar una fórmula, desestimando posibles soluciones alternativas, a la vez que, si se les exige considerarlas, las tratan aisladamente y no las analizan como relacionadas al mismo saber matemático. Cuando se solicitó generalizar los problemas surgieron dificultades debido a que esta acción es ajena a la situación de enseñanza habitual, en consecuencia, los profesores proponen parámetros fijos, buscan soluciones numéricas y únicas, y sobrevaloran los problemas contextualizados. En síntesis, los esquemas de los profesores no se corresponden con acciones propias del cuestionamiento, al igual que observaron Parra y Otero (2021) con la profesora del liceo francés.

Los resultados muestran la necesidad de extender la investigación y realizar estudios de caso, por ejemplo, con algunos de estos sujetos en clase en la escuela secundaria, para incrementar el conocimiento de sus invariantes operatorios y también considerar la génesis instrumental de los alumnos.

Por otro lado, los resultados señalan al programa enseñado como el elemento pivote del sistema de instrumentos de los profesores. Esto requiere ser profundizado y ampliado, si este fuera el caso, se podría intentar utilizar recursos que están en el programa y no se enseñan. Dichos recursos serían potencialmente apropiados para realizar una transición entre el paradigma actual de enseñanza y el del cuestionamiento, ya que, si los profesores los consideraran relativamente próximos a su trabajo y a la vez suficientemente alejados, quizás se producirían génesis instrumentales orientadas al cuestionamiento, que contribuyan a las modificaciones en la enseñanza buscadas.

Por todo lo expuesto, se destaca la importancia de realizar más trabajos en esta línea, y particularmente en contextos de formación continua que resultan propicios como motor de cambios.

REFERENCIAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205-224. https://doi.org/10.1023/A:1009903206236

Adler, J. (2012). Knowledge resources in and for school mathematics teaching. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (eds.), *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 3-22). Springer.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad, *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304. https://revue-rdm.com/2001/la-transposicion-didactica-de/

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 24*(2–3), 205–250

Bourmaud, G. (2006). Les systèmes d'instruments: méthodes d'analyse et perspectives de conception [Tesis Doctoral inédita]. Université Paris 8.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Cuevas Vallejo, C.A., Martínez Reyes, M. y Trouche, L. (2018). Considerando la complejidad del aprendizaje y enseñanza del cálculo a partir de un experimento de diseño de software. En C. A. Cuevas Vallejo, M. Martínez Reyes y R. G. Cruz Flores (Eds.), *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes* (pp. 447-489). Pearson.

Drijvers, P. & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. En K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Cases and perspectives* (pp. 363-392). Information Age Publishing.

Gueudet, G. (2013). Digital resources and mathematics teacher development at university. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the eighth congress of the European Society for Research in mathematics education* (pp. 2336–2345). Middle East Technical University (Ankara) and ERME.

Gueudet, G., & Lebaud, M.-P. (2016). Comment les enseignants de mathématiques choisissent les manuels? Étude sur le cas des manuels de seconde édition, 2014. *Repères IREM, 102*, 85–97.

Gueudet, G., Lebaud, M-P., Otero, M. R., & Parra, V. (2018). Travail documentaire des professeurs et parcours d'étude et de recherche: une étude de cas en première S. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 38*(3), 275-314.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.) (2012). *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*. Springer.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2013). Collective work with resources: An essential dimension for teacher documentation, *ZDM, 45*(7), 1003-1016. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0527-1

Gueudet G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et Didactique, 2*(3), 7-33. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199-218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.) (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument.* Springer.

Guin, D. & Trouche, L. (1998). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Gürtler, L. y Huber, G. L. (2007). Modos de pensar y estrategias de la investigación cualitativa. *Liberabit, 3*, 37-52.

Haspekian, M. (2005). An "Instrumental Approach" to Study the Integration of a Computer Tool into Mathematics Teaching: the Case of Spreadsheets. *The International Journal of Computers for Mathematics Learning, 10*(2), 109-141.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *The International Journal of Computers for Mathematics Learning, 11*(2), 205-263.

Laborde, C., Assude, T., Grugeon, B., & Soury-Lavergne, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? En C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L.-H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference "Technology Revisited"* (pp. 317-325). Hanoi Institute of Technology.

Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *The International Journal of Computers for Mathematics Learning, 13*(3), 207-230.

Orozco, J., Cuevas Vallejo, C., Madrid De La Vega, H., & Trouche, L. (2018). A proposal of instrumental orchestration to introduce eigenvalues and eigenvectors in a first course of linear algebra for engineering students. En V. Gitirana, T. Miyakawa, M. Rafalska, S. Soury-Lavergne, & L. Trouche (Eds.), *Proceedings of the Re(s)sources 2018 International Conference* (pp. 320-323). ENS de Lyon.

Otero, M. R. (2019). *Competencias ¿para qué?* UNICEN.

Otero, M. R. (2021). *La Formación de Profesores. Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Otero, M. R. y Banks Leite, L. (2006). Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 151-178.

Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P. y Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Dunken. https://doi.org/10.13140/2.1.2103.0722

Otero, M. R. y Llanos, V. C. (2019). Formación de profesores de matemática en servicio: La organización de una enseñanza basada en preguntas. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 8*(2), 193-225. https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3618

Otero, M. R., Llanos, V. C., & Parra, V. (2020). Training of teachers in service: study of questions and organization of teaching. *Revista Educação Matemática Pesquisa, 22*(4), 742-755.

Otero, M. R., Llanos, V. C., Parra, V., & Sureda, P. (2014). Pedagogy of research and questioning the world: teaching through Research and Study Paths (RSP) in secondary school. *Review of Science, Mathematics and ICT Education, 8*(1), 7-32.

Parra, V. y Gueudet, G. (2019). Un estudio de caso sobre el trabajo documental colectivo de profesores: los intervalos de fluctuación. *PNA, 13*(3), 172-196.

Parra, V. y Otero, M. R. (2021). Invariantes Operatorios e Instrumentalización del Artefacto Recorrido de Estudio e Investigación para la Escuela

Secundaria: un Estudio de Caso. *Acta Scientiae, 23*(6), 334-362. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6167

Pastré P., Mayen P. y Vergnaud G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie, 154*, 145-198. https://doi.org/10.4000/rfp.157

Pepin, B., & Gueudet, G. (2020). Studying Teacher Collaboration with the Documentational Approach: From Shared Resource to Common Schemes? En H. Borko & D. Potari (Eds.). *ICMI study 25 Proceedings. Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups*. Lisbon, Portugal.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources, *ZDM Mathematics Education, 49*(5), 799- 812. http://rdcu.be/tmXb

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En Bailleul Marc, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques, Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instrument s informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques* (pp. 203-213). Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Rabardel, P. & Bourmaud, G. (2005). Instruments et systèmes d'instruments. In P. Rabardel, & P. Pastré (Dirs.), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Octarès.

Sánchez, M. (2010). Orquestación documentacional: herramienta para la estructuración y el análisis del trabajo documentacional colectivo en línea. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 30*(3), 367–397.

Sureda Figueroa, D. P. y Otero, M. R. (2013) Un estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Revista de Educación Matemática, 25*(2), 89-118.

Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza - una historia de trayectorias. *Educación Matemática, 30*(3), 9-40.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (Eds.) (2019). *The resource approach to mathematics education*. Springer.

Trouche, L., Gueudet, G., Pepin, B, & Aldon, G. (2020). *L'approche documentaire de la didactique*. DAD-Multilingual.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 133-170.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *Infancia y Aprendizaje, 36*(2), 131-161. https://doi.org/10.1174/021037013806196283

María Paz Gazzola
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina
mpgazzola@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina
rotero@exa.unicen.edu.ar

Recibido: Agosto 2021. Aceptado: Junio 2022.
doi: 10.30827/pna.v16i4.22040
ISSN: 1887-3987